МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Н.В. Бондаренко
В.В. Отрашевська

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Рекомендовано вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури як навчальний посібник для студентів галузі знань 19 «Архітектура та будівництво» спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»

Київ 2023

УДК 511.14+512.64
Б 81

Рецензенти: *А.П. Петравчук,* д.-р. фіз.-мат. наук, професор, Київський національний університет імені Тараса Шевченка;
Ю.О. Чорноіван, канд. фіз.-мат. наук, доцент, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України;
З.І. Наголкіна, канд. фіз.-мат. наук, доцент, Київський національний університет будівництва і архітектури

Затверджено на засіданні вченої ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № 4 від 23 грудня 2022 року.

Бондаренко Н.В.
Б81 Лінійна алгебра: навч. посіб. / Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська. – Київ: КНУБА, 2023. – 180 с.

ISBN 978-966-627-247-1

Викладено розділ «Лінійна алгебра» курсу «Вища математика», який включає такі теми: комплексні числа, многочлени та їхні корені, алгебру матриць, визначники, системи лінійних рівнянь, лінійні простори, лінійні оператори у векторних просторах. Містить стислі теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач та вправи для самостійної роботи.

Призначено для студентів галузі знань 19 «Архітектура та будівництво» спеціальності 192 «Будівництво і цивільна інженерія» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр».

УДК 511.14+512.64

ISBN 978-966-627-247-1

Зміст

Вступ

Навчальний посібник укладено на основі курсу лекцій з лінійної алгебри, який є складовою частиною курсу вищої математики.

Висвітлені в посібнику теми пов'язані з іншими розділами курсу вищої математики, а також з багатьма інженерними дисциплінами, що входять до програми підготовки фахівців будівельної галузі.

Розв’язуючи алгебраїчні рівняння довільного степеня від однієї невідомої, вчені зіткнулися з тим, що множини дійсних чисел недостатньо. У появі комплексних чисел важливу роль відіграла формула Кардано (названа в честь італійського математика Д. Кардано (1501-1576)) для знаходження коренів кубічного рівняння. Якщо кубічне рівняння з дійсними коефіцієнтами має три дійсні корені, то для їх знаходження в проміжних обчисленнях використовувалися числа нового невідомого доти типу. Введення таких «уявних» чисел, які пізніше були названі в працях німецького математика Фрідріха Гаусса (1777-1855) комплексними числами, дало змогу розв’язати багато проблем алгебри. Зокрема, була сформульована та доведена основна теорема алгебри про існування коренів алгебраїчного рівняння з довільними числовими коефіцієнтами. Комплексні числа мають велике значення і поза межами алгебри. Теорія функцій комплексної змінної широко застосовується майже у всіх розділах теоретичної фізики. Комплексні числа відіграють важливу роль в електротехніці, квантовій механіці, аеродинаміці тощо.

Історично першою задачею лінійної алгебри було розв'язання найпростіших лінійних рівнянь, якими займалися ще вавилонські та давньогрецькі математики. Застосування таблиць чисел, пізніше названих матрицями, для розв’язання систем лінійних рівнянь вперше згадується в стародавньому Китаї. Розвиток теорії систем лінійних рівнянь потребував розвитку теорії матриць і визначників, зумовив появу теорії лінійних просторів. Матриці природно з'являються і при вивченні лінійних перетворень лінійних просторів. У XVIII столітті розпочалась побудова теорії визначників в працях французького математика А. Вандермонда (1735-1796), швейцарського математика Г. Крамера (1704-1752) та ін. Зокрема, Габріель Крамер сформулював правило Крамера для систем лінійних рівнянь, яке опублікував у 1751 р. Приблизно в той же час з'явився метод Гаусса для розв'язання систем лінійних рівнянь. Лінійна алгебра набула значного розвитку в XIX столітті завдяки роботам англійських математиків Д. Сільвестра (1814-1897) і А. Келі (1821-1897), німецьких математиків К. Вейєрштрасса (1815-1897) і Ф. Фробеніуса (1849-1917), французького математика М. Жордана (1838-1922) та ін. Лінійна алгебра відіграє важливу роль в математичній освіті, адже потреба в застосуванні її понять виникає, як у багатьох розділах математики, так і в механіці, фізиці та технічних науках.

Навчальний посібник складається з трьох розділів: комплексні числа, многочлени та їхні корені та елементи лінійної алгебри. Кожен розділ містить теоретичний матеріал, який включає основні поняття теми, означення, твердження і теореми. Для кожної теми наведено приклади розв'язання типових задач. Наприкінці основних тем наведено вправи, виконання яких має сприяти засвоєнню матеріалу і розвитку вмінь і навичок його застосування в розв'язанні практичних задач.

У результаті вивчення розділу «Лінійна алгебра» дисципліни «Вища математика» студенти повинні

знати:

– поняття комплексного числа;

– розклад многочленів на множники над числовими полями;

– поняття матриці і визначника;

– основні методи розв'язання систем лінійних рівнянь і структуру множини їхніх розв'язків;

– поняття лінійного простору;

– поняття лінійного оператора у векторному просторі, власних чисел і власних векторів лінійних операторів.

уміти:

– виконувати дії з комплексними числами у алгебраїчній і тригонометричній формах;

– розкладати многочлени на множники над полем дійсних чисел і над полем комплексних чисел;

– обчислювати визначники довільного порядку;

– розв'язувати системи лінійних рівнянь;

– знаходити ранг матриці;

– визначити, чи є система векторів базисом лінійного простору;

– знаходити координати вектора в базисі;

– знаходити фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь;

– знаходити власні числа і власні вектори лінійного оператора.

Розділ 1. Комплексні числа

1.1. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії з комплексними числами в алгебраїчній формі

Числа, що використовуються при лічбі або для позначення кількості предметів, утворюють множину натуральних чисел $\mathbf{N} = \{1; 2; 3; 4...\}$. Розглянемо рівняння $a + x = b$, де a, b – натуральні числа. Це рівняння має розв’язки в множині натуральних чисел лише за умови $a < b$. Існування розв’язків таких рівнянь для довільних значень a, b забезпечується введенням від'ємних чисел та нуля, які разом з натуральними числами утворюють множину цілих чисел $\mathbf{Z} = \{..., -2; -1; 0; 1; 2; ....\}$. В множині цілих чисел рівняння $a + x = b$ має розв’язок при довільних цілих значеннях a та b.

Рівняння $a \cdot x = b$, $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$, не має розв’язків в цілих числах, якщо число b не ділиться на a. Існування розв’язків таких рівнянь забезпечується введенням множини раціональних чисел

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{b}{a} : a, b \in \mathbf{Z}, a \neq 0 \right\}.$$

Рівняння $x^2 - 2 = 0$, як відомо, не має раціональних коренів. Воно має розв’язки в множині дійсних чисел **R**, яка є розширенням множини раціональних чисел **Q** і складається з раціональних та ірраціональних чисел.

З курсу елементарної математики відомо, що системи дійсних і раціональних чисел мають певні спільні властивості – в кожній з них можна додавати, віднімати, множити, ділити числа, виконувати за певними правилами алгебраїчні перетворення числових виразів. Для загальності формулювання таких спільних властивостей числових систем загальноприйнятою алгебраїчною мовою, розглянемо поняття *поля*.

Означення. *Полем* називається множина **K**, на якій задано дві операції – додавання і множення, що задовольняють такі умови (аксіоми поля):

1) $a+(b+c)=(a+b)+c$ для всіх $a,b,c \in \mathbf{K}$ (асоціативність додавання);

2) $a+b=b+a$ для всіх $a,b \in \mathbf{K}$ (комутативність додавання);

3) існує нульовий елемент $0 \in \mathbf{K}$ такий, що $0+a=a$ для всіх $a \in \mathbf{K}$ (існування нуля);

4) для всіх $a \in \mathbf{K}$ існує протилежний елемент $-a \in \mathbf{K}$ такий, що $a+(-a)=0$ (існування протилежного елемента);

5) $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$ для всіх $a,b,c \in \mathbf{K}$ (асоціативність множення);

6) $a \cdot b = b \cdot a$ для всіх $a,b \in \mathbf{K}$ (комутативність множення);

7) існує одиничний елемент $1 \in \mathbf{K}$, такий, що $a \cdot 1 = a$ для всіх $a \in \mathbf{K}$ (існування одиниці, вимагається $1 \neq 0$);

8) для всіх $a \in \mathbf{K}$ і $a \neq 0$ існує обернений елемент $a^{-1} \in \mathbf{K}$ такий, що $a \cdot a^{-1} = 1$ (існування оберненого елемента);

9) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ для всіх $a,b,c \in \mathbf{K}$ (дистрибутивність).

Зазначимо, що множина раціональних чисел **Q** і множина дійсних чисел **R** є полями, а множина натуральних чисел **N** і множина цілих чисел **Z** полями не є.

Розглянемо рівняння $x^2+1=0$. Воно не має розв’язків в множині дійсних чисел, оскільки квадрат дійсного числа не може бути від’ємним. Для розв’язання таких рівнянь необхідно ввести нову числову множину, яка буде розширенням множини дійсних чисел **R**, і в якій вказане рівняння матиме розв'язок.

Вимоги до нової числової множини:

1) в новій числовій множині мають бути визначені дії додавання і множення, які задовольняють звичайні властивості дій

над числами. Тобто така множина чисел повинна утворювати поле (позначимо його **C**);

2) поле **C** має бути розширенням поля дійсних чисел **R**: $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$;

3) повинен існувати елемент $i \in \mathbf{C}$, який буде коренем рівняння $x^2 = -1$, тобто $i^2 = -1$;

4) поле **C** не повинно мати власних підполів, які містять елемент «i» та дійсні числа.

Введемо поняття комплексного числа.

Означення. *Комплексним числом* називають вираз виду $a + bi$, де a і b − дійсні числа, а i − деякий символ (так звана *уявна одиниця*).

Множина комплексних чисел позначається **C**. Символ i ототожнюється з виразом $0 + 1i$. Тобто маємо $i \in \mathbf{C}$.

Два комплексні числа $a + bi$ та $c + di$ вважаються рівними $a + bi = c + di$ тоді і лише тоді, коли $a = c$ і $b = d$. Поняття «більше» та «менше» для комплексних чисел не існує, тобто множина комплексних чисел **C** на відміну, наприклад, від множини дійсних чисел **R** не впорядкована.

Дії додавання і множення комплексних чисел $a + bi$ та $c + di$ визначаються таким чином:

1) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;

2) $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Для так визначених дій додавання і множення перевіримо зазначені вимоги до нової числової множини − множини комплексних чисел.

1. Покажемо, що множина комплексних чисел є полем. Для цього треба перевірити дев’ять аксіом поля.

Аксіоми 1, 2, 5, 6, 9 безпосередньо випливають із визначення дій додавання і множення комплексних чисел.

Аксіома 3: нульовий елемент $0 + 0i$.

Аксіома 4: протилежним елементом до комплексного числа $a+bi$ є комплексне число

$$-(a+bi):=(-a)+(-b)i.$$

Аксіома 7: одиничний елемент $1+0i$.

Аксіома 8: оберненим елементом до комплексного числа $a+bi$, де хоча б одне з чисел a або b не дорівнює нулю, є комплексне число

$$(a+bi)^{-1}:=\frac{a}{a^2+b^2}+\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i.$$

Отже, множина комплексних чисел **C** є полем, яке називається *полем комплексних чисел.*

2. Множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел. Будь-яке дійсне число a ототожнюється з комплексним числом $a+0i$. Для таких комплексних чисел правила додавання і множення мають вигляд:

$$(a+0i)+(c+0i)=(a+c)+0i,$$

$$(a+0i)\cdot(c+0i)=ac+0i.$$

Тобто комплексні числа виду $a+0i$ додають і множать, як відповідні їм дійсні числа $a\in\mathbf{R}$. Отже, поле комплексних чисел **C** є розширенням поля дійсних чисел **R**, тобто $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

3. З визначення арифметичних дій випливає, що

$$\begin{aligned}i^2&=(0+1i)^2=(0+1i)\cdot(0+1i)=\\&=(0\cdot0-1\cdot1)+(0\cdot1+0\cdot1)i=-1+0i=-1.\end{aligned}$$

Отже, $i^2=-1$. Комплексне число $0+1i$ або що те саме i є розв'язком квадратного рівняння $x^2+1=0$ в полі комплексних чисел **C**.

4. Поле **C** не містить власних підполів, які містять елемент «i» та дійсні числа і задовольняють умови 1-3. Всі розширення поля дійсних чисел **R**, отримані приєднанням до поля **R** кореня рівняння $x^2+1=0$, ізоморфні між собою (див. [7]).

Таким чином, всі вказані вимоги до нової числової множини комплексних чисел задовольняються.

Запис $a+bi$ називають *алгебраїчною формою* комплексного числа. Комплексні числа часто позначають однією літерою $z=a+ib$. Число a називають *дійсною частиною*, а число b – *уявною частиною* комплексного числа $z=a+ib$ і позначають як $a=\operatorname{Re} z \in \mathbf{R}$, $b=\operatorname{Im} z \in \mathbf{R}$. В таких позначеннях комплексне число z має вигляд $z=\operatorname{Re} z+i\operatorname{Im} z$.

Комплексне число виду bi ($b \neq 0$), у якого $\operatorname{Re} z=0$ називають *суто уявним*. З означення дії множення комплексних чисел випливає, що комплексне число bi можна розглядати, як добуток комплексних чисел b та i:

$$b \cdot i=(b+0i)\cdot(0+1i)=(b\cdot 0-0\cdot 1)+(b\cdot 1+0\cdot 0)i=0+bi=bi.$$

Зауважимо, що додавання і множення комплексних чисел виконують за звичайними правилами додавання і множення многочленів із приведенням подібних членів і зважаючи на те, що $i^2=-1$.

Наприклад,

$$(5+3i)+(2-i)=5+3i+2-i=(5+2)+(3-1)i=7+2i,$$

$$(3-2i)\cdot(2-i)=3\cdot 2-2i\cdot 2-3\cdot i+2i^2=6-4i-3i-2=4-7i.$$

Комплексне число $\overline{z}=a-bi$ називається *спряженим* до комплексного числа $z=a+bi$. Наприклад, спряженим до комплексного числа $z=-2-3i$ є комплексне число $\overline{z}=-2+3i$, а спряженим до комплексного числа $z=5+4i$ є комплексне число $\overline{z}=5-4i$.

Числом, спряженим до $\overline{z}$ є z, тому говорять про пару комплексно спряжених чисел.

Властивості спряження:

1) дійсні числа і тільки вони комплексно спряжені самі до себе, тобто $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z=\overline{z}$;

2) $\overline{\overline{z}}=z$;

3) $z+\overline{z}=2a\in\mathbf{R}$;

4) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$;

5) $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2\in\mathbf{R}$;

6) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

7) $\overline{z^{-1}}=(\overline{z})^{-1}$.

Властивості 1 – 4 безпосередньо випливають з означення спряженого комплексного числа.

Властивість 5:

$$z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a\cdot a+bi\cdot a-a\cdot bi-b^2i^2=a^2+b^2\in\mathbf{R}.$$

Властивість 6:

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)}=\overline{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i}=$$

$$(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+b_1a_2)i=(a_1a_2-b_1b_2)+(-a_1b_2-b_1a_2)i=$$

$$=(a_1-b_1i)\cdot(a_2-b_2i)=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2.$$

Властивість 7:

з рівності $z\cdot z^{-1}=1$ та властивостей 1 та 6 маємо

$$\overline{z\cdot z^{-1}}=1,\quad \overline{z\cdot z^{-1}}=\overline{z}\cdot\overline{z^{-1}},\quad \overline{z}\cdot\overline{z^{-1}}=1,\quad \overline{z^{-1}}=(\overline{z})^{-1}.$$

Для визначення частки $\dfrac{z_1}{z_2}$ двох комплексних чисел $z_1=a_1+b_1i$ та $z_2=a_2+b_2i$ чисельник і знаменник дробу $\dfrac{z_1}{z_2}$ треба помножити на число, спряжене до знаменника. В результаті в знаменнику отримаємо дійсне число:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{z_2\cdot\overline{z}_2}=\frac{(a_1+b_1i)\cdot(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)\cdot(a_2-b_2i)}=$$

$$=\frac{a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2+b_1i\cdot a_2-a_1\cdot b_2i}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$= \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2) \cdot i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i .$$

Наприклад,

$$\frac{(-5+3i)}{(2-7i)} = \frac{(-5+3i)\cdot(2+7i)}{(2-7i)\cdot(2+7i)} = \frac{-10+6i-35i-21}{2^2+(-7)^2} =$$

$$= \frac{-31-29i}{53} = -\frac{31}{53} - \frac{29}{53} \cdot i$$

Поля комплексних чисел **C**, дійсних чисел **R** та раціональних чисел **Q** називаються *числовими полями*.

1.2. Геометричне зображення комплексних чисел. Тригонометрична форма комплексного числа

Нехай на площині задана прямокутна декартова система координат Oxy. Оскільки комплексне число $z = a + bi$ можна розглядати як впорядковану пару дійсних чисел $(a;b)$, то його можна зобразити на площині Oxy точкою $M(a;b)$ або радіус-вектором $\overrightarrow{OM} = (a;b)$ (Рис. 1). Тобто поле комплексних чисел **C** природно ототожнюється з множиною точок площини Oxy.

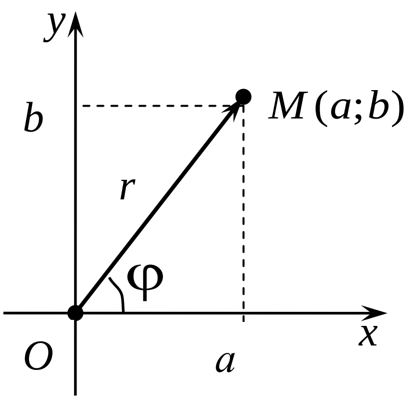


Рис. 1

Площину, точки якої ототожнюють з комплексними числами, називають *комплексною площиною*. Вісь абсцис називається *дійсною віссю*, вісь ординат *уявною віссю*.

Довжину радіус-вектора $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ називають *модулем комплексного числа* z і позначають $|z|$, а кут φ між додатнім напрямком осі абсцис та радіус-вектором називають *аргументом* комплексного числа z. При цьому

$$\begin{aligned} a &= r\cos\varphi, \\ b &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ визначається з точністю до доданку $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$

$$Arg\ z = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z},$$

де $\arg z$ – *головне значення аргумента*, що належить проміжку завдовжки 2π ($(-\pi;\pi]$, $[0;2\pi)$ або $[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2})$). Зазвичай за аргумент φ комплексного числа беруть головне значення аргумента $\arg z$. Аргумент комплексного числа $z = 0$ невизначений, а модуль дорівнює нулю.

Аргумент комплексного числа та його головне значення можна знайти за значеннями двох тригонометричних функцій:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \\ \sin\varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Також, якщо $\arg z \in (-\pi;\pi]$, то

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\frac{b}{a}, & \text{якщо } a > 0, \\ arctg\,\frac{b}{a} + \pi, & \text{якщо } a < 0, b \geq 0, \\ arctg\,\frac{b}{a} - \pi, & \text{якщо } a < 0, b < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0, b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0, b < 0, \\ 0, & \text{якщо } a > 0, b = 0, \\ \pi, & \text{якщо } a < 0, b = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Комплексне число $z = a + bi$, зважаючи на вирази (1), можна записати у вигляді

$$z = r\cos\varphi + r\sin\varphi\, i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (4)$$

Такий запис називається *тригонометричною формою* комплексного числа z.

Для комплексних чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ маємо

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Комплексно спряжені числа геометрично є точками, симетричними відносно дійсної осі Ox. Звідси випливає, що спряжені комплексні числа мають однакові модулі, а їхні аргументи відрізняються знаком (у випадку, коли $\arg z \in (-\pi;\pi]$), тобто:

$$|\,\overline{z}\,| = |\,z\,|,\ \arg(\overline{z}) = -\arg(z).$$

Якщо

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$\text{то}\ \ \overline{z} = a - bi = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Дії з комплексними числами у тригонометричній формі

Нехай $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right).$$

Отже,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right). \qquad (5)$$

Тобто у разі *множення комплексних чисел їхні модулі перемножують, а аргументи додають*.

Виконаємо ділення комплексних чисел у тригонометричній формі ($z_2 \neq 0$):

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

або

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \qquad (6)$$

Тобто *в разі ділення комплексних чисел їхні модулі ділять, а аргументи віднімають*.

За формулою (5) можна помножити довільну кількість множників, зокрема, для $n \in \mathbf{N}$ однакових множників отримаємо формулу, яка називається *формулою Муавра*:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (7)$$

Можна переконатися, що формула Муавра залишається справедливою і для $n = 0$, і для цілих від'ємних n, тобто для всіх значень $n \in \mathbf{Z}$.

Якщо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\cos 0 + i\sin 0}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)). \qquad (8)$$

Для визначення $z^{-n} = (z^{-1})^n$ достатньо застосувати формулу Муавра до числа z^{-1}, заданого в тригонометричній формі (8).

Означення показникової функції комплексного числа з основою e дав Ейлер:

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b). \qquad (9)$$

Для показникової функції із суто уявним показником справедлива *формула Ейлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (10)$$

Тобто комплексне число на основі формул (4) і (10) можна записати у *показниковій формі*:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Правила множення і ділення комплексних чисел, записаних у показниковій формі, випливають із правил для дій з числами у тригонометричній формі. Тобто

$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Число ξ є коренем n-го степеня з комплексного числа z, якщо $\xi^n = z$.

Теорема 1. Кожне ненульове комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ має рівно n коренів n-го степеня, які визначають за формулою

$$\xi_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \; k = 0,1,\ldots,n-1. \qquad (11)$$

Доведення. Позначимо $\xi = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ корінь n-го степеня з z. Тоді $\xi^n = z$, або

$$\left(\rho(\cos\psi + i\sin\psi)\right)^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Скориставшись формулою Муавра (7), дістанемо

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

звідки $\rho^n = r$ і $n\psi = \varphi + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Число $r > 0$ і має бути $\rho > 0$, тому $\rho = \sqrt[n]{r}$, де під коренем слід розуміти його арифметичне значення. Отже,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right).$$

Для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ дістанемо різні n значень кореня ξ_k. Для інших цілих значень k аргументи коренів ξ_k відрізнятимуться від знайдених для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ на число, кратне 2π, тому корені збігатимуться із вже знайденими. ■

Відмітимо, що точки на комплексній площині, відповідні ξ_k, знаходяться на колі радіуса $\sqrt[n]{|z|}$ з центром в початку координат і ділять це коло на n рівних частин.

Приклад 1. Записати в алгебраїчній формі комплексне число

$$\frac{(3-4i)(2+i)}{3-2i} - i^3(4-3i).$$

Розв'язання.

$$\frac{(3-4i)(2+i)}{3-i} - i^3(4-3i) = \frac{6+3i-8i+4}{3-i} - (i^2 \cdot i)(4-3i) =$$

$$= \frac{10-5i}{3-i} - (-1)i(4-3i) = \frac{(10-5i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} + 4i - 3i^2 =$$

$$= \frac{30+10i-15i+5}{10} + 4i + 3 = \frac{35-5i}{10} + 3 + 4i = 3{,}5 - 0{,}5i + 3 + 4i =$$

$$= 6{,}5 + 3{,}5i.$$

Приклад 2. Виконати дії з комплексними числами у тригонометричній формі

$$\frac{\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 \cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\left(3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^2}.$$

Розв'язання.

$$\frac{\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 \cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\left(3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^2} =$$

$$=\frac{2^4\left(\cos 4\cdot\frac{\pi}{3}+i\sin 4\cdot\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{3^2\left(\cos 2\cdot\frac{\pi}{6}+i\sin 2\cdot\frac{\pi}{6}\right)}=$$

$$=\frac{2^4\cdot 5}{3^2}\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}-2\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}-2\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=\frac{80}{9}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Приклад 3. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа

$$(\sqrt{6}i-\sqrt{2})^{18}.$$

Розв'язання.

Для обчислення цього виразу скористаємося формулою Муавра (7) піднесення комплексних чисел до степеня. Спочатку запишемо тригонометричну форму комплексного числа – $z=\sqrt{6}i-\sqrt{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{6}i$. Дійсна частина комплексного числа $a=-\sqrt{2}$, уявна частина – $b=\sqrt{6}$. Модуль комплексного числа $|z|=r=\sqrt{2+6}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Зобразимо число $z=-\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ на комплексній площині (рис. 2).

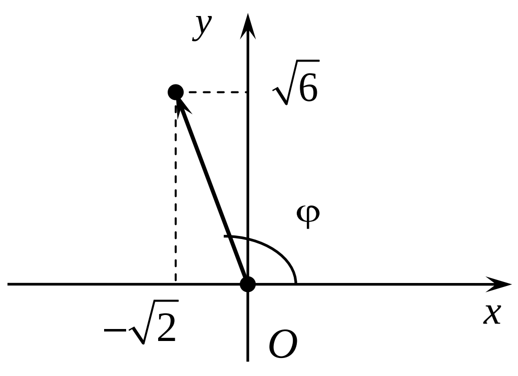


Рис. 2

Комплексне число z знаходиться в II четверті координатної площини, тому

$$\varphi = arctg\frac{b}{a} + \pi = arctg(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Отже, комплексне число z у тригонометричній формі має вигляд:

$$z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}).$$

За формулою Муавра отримаємо:

$$z^{18} = (2\sqrt{2})^{18}(\cos\frac{2\pi}{3}\cdot 18 + i\sin\frac{2\pi}{3}\cdot 18) =$$
$$= 2^{27}(\cos 12\pi + i\sin 12\pi) = 2^{27}.$$

Приклад 4. Знайти всі корені рівняння $z^4 - 1 = 0$.

Розв'язання.

Запишемо число $z_1 = 1$ у тригонометричній формі.

$$z_1 = 1 + 0\cdot i, \quad r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad \cos\varphi = \frac{1}{1} = 1, \quad \sin\varphi = \frac{0}{1} = 0,$$

$$1 = \cos 0 + i\sin 0.$$

Чотири корені рівняння $z^4 = 1$ знайдемо за формулою (11) для $n = 4$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Якщо $k = 0$, то

$$\xi_0 = \cos\frac{0 + 2\pi\cdot 0}{4} + i\sin\frac{0 + 2\pi\cdot 0}{4} = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

якщо $k = 1$,

$$\xi_1 = \cos\frac{0 + 2\pi\cdot 1}{4} + i\sin\frac{0 + 2\pi\cdot 1}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

якщо $k = 2$,

$$\xi_2 = \cos\frac{0 + 2\pi\cdot 2}{4} + i\sin\frac{0 + 2\pi\cdot 2}{4} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

якщо $k = 3$,

$$\xi_3 = \cos\frac{0+2\pi\cdot 3}{4} + i\sin\frac{0+2\pi\cdot 3}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i\,.$$

Приклад 5. Знайти всі корені рівняння $z^3 - 3 + 3i = 0$.

Розв'язання

Запишемо число $z_1 = 3 - 3i$ у тригонометричній формі.

Маємо $a = 3,\quad b = -3$. Тоді $r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$.

Зобразимо комплексне число z_1 на комплексній площині (рис. 3).

$$\cos\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

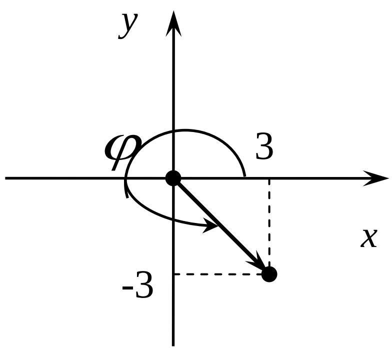


Рис. 3

Тобто комплексне число z_1 у тригонометричній формі має вигляд

$$3 - 3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Три корені рівняння $z^3 = 3 - 3i$ знаходяться за формулою (11) для $n = 3,\ \ k = 0, 1, 2$.

Якщо $k = 0$,

$$\xi_0 = \sqrt[6]{18}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi\cdot 0}{3}\right) = \sqrt[6]{18}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

якщо $k = 1$,

$$\xi_1 = \sqrt[6]{18}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi\cdot 1}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi\cdot 1}{3}\right)=\sqrt[6]{18}\left(\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{15\pi}{12}\right),$$

якщо $k = 2$,

$$\xi_2 = \sqrt[6]{18}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{3}\right)=\sqrt[6]{18}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right).$$

Приклад 6. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(5+2i)x-(3-i)y=3+4i.$$

Розв'язання.

Виконаємо дії:

$$(5+2i)x-(3-i)y=3+4i,$$

$$5x+2xi-3y+3yi=3+4i,$$

$$(5x-3y)+(2x+3y)i=3+4i.$$

З означення рівності комплексних чисел маємо

$$\begin{cases}5x-3y=3,\\2x+3y=4,\end{cases}\quad\begin{cases}5x-3y=3,\\7x=7,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\3y=2,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\y=2/3.\end{cases}$$

Отже, дійсні розв'язки рівняння $x=1$, $y=2/3$.

Контрольні запитання

1. Як визначають алгебраїчну форму комплексного числа та дії з комплексними числами у алгебраїчній формі?

2. Як визначають тригонометричну та показникову форми комплексного числа та дії з комплексними числами у тригонометричній та показниковій формах?

3. Запишіть формулу Муавра піднесення комплексного числа до n-го степеня.

4. Запишіть формулу добування кореня n-го степеня з комплексного числа.

Вправи

1. Обчисліть значення виразу:

а) $(5+2i)\cdot(i-7)+6-3i$; б) $2-6i+(3-2i)\cdot(4-3i)$;

с) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; д) $\dfrac{4-5i}{2+i}-6i\,(8+2i)$;

е) $\dfrac{2-3i}{5+i}+i^3(1-i)$; є) $(2+i)^3+(2-i)^3$;

ж) $\dfrac{4+3i}{3-2i}+(3+i)^3-i^{12}$; з) $\dfrac{5+6i}{2+i}+(2-i)^2+i^7$;

и) $\dfrac{4+10i}{i-1}+i^5(5+2i)-3i^{10}$; к) $\dfrac{4+i}{1+3i}+(5+2i)^2-3i^{18}$.

2. Знайдіть дійсні числа x та y, що задовольняють рівняння:

а) $(6+i)x+(2-3i)y=4-i$;

б) $(9-6i)x-(3-4i)y=6-2i$;

в) $(8-9i)x-(1-2i)y=x+3i-2$;

г) $(5+7i)x-(3-i)y=9i-1$.

3. Розв’яжіть рівняння:

а) $|z|+z=9-4i$; б) $|z|-z=8+12i$.

4. Запишіть в тригонометричній формі комплексні числа:

а) 1; б) -1; в) i; г) $-i$; д) $1+i$; е) $1-i$;

ж) $-1+i$; з) $-1-i$; и) $1+\sqrt{3}i$; к) $1-\sqrt{3}i$; л) $-1+\sqrt{3}i$;

м) $-4-4\sqrt{3}i$;   н) $-\sqrt{3}+i$;   п) $-\sqrt{3}-i$;   р) $3\sqrt{3}-3i$.

5. Нехай $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Знайдіть тригонометричну форму комплексних чисел:

а) $1+z$;   б) $z+z^2$.

6. На комплексній площині зобразіть область, що задовольняє умови:

а) $2\le|z|<3$;

б) $|z|<1,\ \dfrac{\pi}{6}<z<\dfrac{2\pi}{3}$;

в) $|z-2+3i|\ge 2$;

г) $|z+1-2i|<2$;

д) $|z-1-i|<1,\ \dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}$;

е) $|z+2-3i|>2,\ 1<\operatorname{Im} z<6$:

є) $|z-4+i|>2,\ -1\le\operatorname{Re} z,\ -4\le\operatorname{Im} z$;

ж) $|z+2-i|\ge 3,\ -4\le\operatorname{Re} z\le -1$;

з) $|z-3-2i|\ge 1,\ \operatorname{Re} z\ge 2,\ -1\le\operatorname{Im} z$;

и) $|z-2-2i|\ge 3,\ 1\le|z+3+2i|$;

і) $\operatorname{Im} z\le 2,\ \dfrac{\pi}{6}\le\arg z\le\dfrac{2\pi}{3}$;

й) $\operatorname{Re} z<3,\ -\dfrac{\pi}{4}\le\arg z\le\dfrac{\pi}{3}$.

7. Обчисліть:

а) $(3-3i)^{24}$;   б) $(-2\sqrt{3}-2i)^{72}$;

в) $(-5+5\sqrt{3}i)^{108}$;   г) $(4+4i)^{84}$;

д) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^{12}$; е) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$.

8. Знайдіть всі комплексні корені рівняння:

а) $z^4 - i = 0$; б) $z^3 - \sqrt{3} + i = 0$;

в) $z^4 + 8 - 8\sqrt{3}i = 0$; г) $z^3 + 2 - 2i = 0$;

д) $z^3 + 5\sqrt{3} - 5i = 0$; е) $z^3 - 2 + 2\sqrt{3}i = 0$;

є) $z^4 - 16 + 16i = 0$; ж) $z^4 + 8 - 8i = 0$.

Розділ 2. Многочлени та їхні корені

2.1. Многочлени над числовими полями

Многочленом або *поліномом* n-го (де $n \in \mathbf{N}$) степеня над числовим полем **К** називається вираз виду

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0,$$

де $a_0, a_1, ..., a_n$ − довільні числа з **К**, $a_n \neq 0$, x − деяка змінна. Під полем **К** розумітимемо одне з числових полів: **Q** − поле раціональних чисел, **R** − поле дійсних чисел, **C** − поле комплексних чисел. Множину всіх многочленів з коефіцієнтами з поля **К** від змінної x позначають $\mathbf{K}[x]$.

Натуральне число n називають *степенем* многочлена $f(x)$, (позначають $\deg f(x) = n$), $a_0, a_1, ..., a_n$ − *коефіцієнти* многочлена, причому a_0 − *вільний* коефіцієнт, a_n − *старший* коефіцієнт $f(x)$. Довільне ненульове число є многочленом нульового степеня. Многочлени нульового степеня називають *константними*. Число нуль також є многочленом, степінь якого вважають невизначеним.

Многочлени першого степеня $a_1 x + a_0$ називають *лінійними*. Многочлени другого степеня $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ називають *квадратними*.

На множині многочленів $\mathbf{K}[x]$ визначені операції додавання та множення.

Нехай є два многочлени

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Сумою двох многочленів $f(x)$ і $g(x)$, якщо, наприклад, $n \geq m$ називається многочлен

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0),$$

коефіцієнти якого дорівнюють сумі коефіцієнтів многочленів $f(x)$ і $g(x)$, що стоять при однакових степенях невідомої x. Причому за умови $n>m$ коефіцієнти $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n$ вважаються рівними нулю. Зазначимо, що $\deg(f+g)\le \max(\deg f, \deg g)$.

Добутком двох ненульових многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називається многочлен, що складається з усіх можливих добутків усіх доданків $f(x)$ на всі доданки $g(x)$. При множенні зводять подібні члени:

$$f(x)\cdot g(x)=a_n b_m x^{n+m}+(a_n b_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\ldots+a_0 b_0.$$

Степінь добутку двох ненульових многочленів f та g дорівнює сумі степенів цих многочленів:

$$\deg(f\cdot g)=\deg f+\deg g.$$

2.2. Подільність многочленів

Кажуть, що многочлен $g(x)\in \mathbf{K}[x]$ є дільником многочлена $f(x)\in \mathbf{K}[x]$, якщо існує такий многочлен $h(x)\in \mathbf{K}[x]$, що справедливою є рівність $f(x)=g(x)\cdot h(x)$. В такому разі ще говорять, що многочлен $f(x)$ *ділиться* на многочлен $g(x)$.

Теорема 2 (про ділення многочлена із залишком). Нехай $f(x)$ і $g(x)$ − довільні многочлени і $g(x)\ne 0$. Тоді існують, причому єдині многочлени $q(x), r(x)$ такі, що:

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x) \text{ і } \deg r(x)<\deg g(x) \text{ або } r(x)\equiv 0.$$

Многочлен $r(x)$ називається *залишком* від ділення $f(x)$ на $g(x)$.

Наслідок 1 (Теорема Безу). Залишок від ділення многочлена $f(x)$ на лінійний многочлен $(x-c)$ дорівнює значенню $f(c)$ многочлена $f(x)$ при $x=c$.

Число $c \in \mathbf{K}$ називається *коренем* многочлена $f(x) \in \mathbf{K}[x]$, якщо $f(c) = 0$.

Наслідок 2. Число $c \in \mathbf{K}$ є коренем многочлена $f(x) \in \mathbf{K}[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ ділиться на $(x-c)$:

$$f(x) = g(x) \cdot (x-c)$$

У такому разі $\deg g = \deg f - 1$.

Зазначимо, якщо многочлен $f(x)$ ділиться на деякий лінійний многочлен $ax+b$, то він ділиться і на многочлен $x-(-\frac{b}{a})$, тобто на многочлен вигляду $x-c$. Таким чином, знаходження коренів многочлена $f(x)$ рівносильне знаходженню його лінійних дільників.

Одним з методів знаходження цілої частини $q(x)$ та залишку $r(x)$ в результаті ділення многочлена $f(x)$ на $g(x)$ є ділення многочленів в «стовпчик» (або «куточком»).

Приклад 7. Поділити многочлен $f(x)$ на $g(x)$ в стовпчик:

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 2, \quad g(x) = x^2 - x - 1.$$

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 2 & \underline{x^2 - x - 1} \\
\underline{2x^4 - 2x^3 - 2x^2} & 2x^2 + x + 6 \\
\qquad\quad x^3 + 5x^2 - 5x + 2 & \\
\qquad\quad \underline{x^3 - x^2 - x} & \\
\qquad\qquad\quad 6x^2 - 4x + 2 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{6x^2 - 6x - 6} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2x + 8 &
\end{array}$$

Відповідь: $q(x) = 2x^2 + x + 6$, $\quad r(x) = 2x + 8$,

$$2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 2 = (x^2 - x - 1)(2x^2 + x + 6) + 2x + 8.$$

Для ділення многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$$

на лінійний двочлен $x - c$ можна використовувати «*схему Горнера*».

a_i	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\ldots$	a_1	a_0
c	$b_n = a_n$	$b_{n-1} = b_n \cdot c + a_{n-1}$	$b_{n-2} = b_{n-1} \cdot c + a_{n-2}$	b_{n-3}	$\ldots$	b_1	r

Отримаємо, що

$$q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + ... + b_1 \quad \text{а} \quad f(x) = (x - c) \cdot q(x) + r.$$

Приклад 8. Поділити многочлен

$$f(x) = 3x^4 - 7x^3 - 25x^2 + 63x - 10$$

на многочлен $g(x) = x - 2$ за схемою Горнера.

a_i	3	-7	-25	63	-10
2	3	$2 \cdot 3 - 7 = -1$	$2 \cdot (-1) - 25 = -27$	$2 \cdot (-27) + 63 = 9$	8

Відповідь: $q(x) = 3x^3 - x^2 - 27x + 9,\ r = 8$,

$$3x^4 - 7x^3 - 25x^2 + 63x - 10 = (x - 2)(3x^3 - x^2 - 27x + 9) + 8.$$

2.3. Незвідні многочлени

Многочлен $f(x) \in \mathbf{K}[x]$ степеня $n \geq 1$ називається *незвідним* (нерозкладним) над полем **К**, якщо він не розкладається в добуток $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ многочленів менших степенів $f_1(x) \in \mathbf{K}[x]$ і $f_2(x) \in \mathbf{K}[x]$, які не є константними. Якщо многочлен не є незвідним, то він називається *звідним*.

Справедлива теорема про розклад многочлена в добуток незвідних многочленів, яка аналогічна основній теоремі арифметики про розклад натурального числа в добуток простих (нерозкладних) чисел.

Теорема 3. Будь-який многочлен $f(x) \in \mathbf{K}[x]$ степеня $n \geq 1$, можна розкласти в добуток незвідних многочленів над полем **К**

$$f(x) = c \cdot p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \ldots \cdot p_k(x), \qquad (12)$$

де $c \in \mathbf{K}$, $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)$ – незвідні многочлени з коефіцієнтами при старших степенях рівними одиниці. Причому цей розклад єдиний з точністю до порядку множників.

З виразу (12), зібравши разом однакові множники, дістанемо

$$f(x) = c \cdot p_1^{n_1}(x) \cdot p_2^{n_2}(x) \cdot \ldots \cdot p_l^{n_l}(x),$$

де всі многочлени $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_l(x)$ незвідні і різні. Цей розклад називається *канонічним розкладом ненульового многочлена* $f(x)$ в добуток незвідних множників.

Нехай $f(x) \in \mathbf{K}[x]$ деякий многочлен. Якщо $c \in \mathbf{K}$ є коренем цього многочлена, то за теоремою Безу $f(x)$ ділиться на $(x - c)$.

Корінь c ненульового многочлена $f(x)$ називається *коренем кратності* k, якщо $f(x)$ ділиться на $(x-c)^k$ і не ділиться на $(x-c)^{k+1}$. В цьому випадку

$$f(x) = (x-c)^k \varphi(x),$$

де многочлен $\varphi(x)$ не ділиться на $x - c$, тобто число c не є його коренем.

Корінь кратності один називається *простим коренем*. Корінь, кратність якого більша за один, називається *кратним коренем.*

Число коренів многочлена $f(x) \in \mathbf{K}[x]$ з урахуванням їхньої кратності не перевищує степеня даного многочлена.

2.4. Многочлени над полем комплексних чисел

При вивченні многочленів постає питання, чи кожен многочлен має корені. Відомо, що існують многочлени з дійсними коефіцієнтами, які не мають дійсних коренів. Відповідь на питання щодо існування коренів многочлена ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами дає основна теорема алгебри.

Теорема 4 (Основна теорема алгебри). Кожен многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами має хоча б один корінь в полі комплексних чисел.

Наслідок 1. Незвідними многочленами над полем **C** є многочлени першого степеня $a_1 x + a_0$, $a_1, a_0 \in \mathbf{C}$, $a_1 \neq 0$ і лише вони.

Наслідок 2. Довільний многочлен $f(x) \in \mathbf{C}[x]$ степеня $n \geq 1$ можна розкласти над полем **C** в добуток n лінійних множників

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\ &= a_n (x - c_1)(x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_n), \end{aligned} \tag{13}$$

де $c_1, ..., c_n$ − корені многочлена дійсні чи комплексні, a_n − старший коефіцієнт. При цьому розклад (13) є для многочлена $f(x)$ єдиним з точністю до порядку співмножників.

Наслідок можна довести, послідовно застосовуючи твердження основної теореми алгебри n разів.

Зауважимо, що крім коренів $c_1, c_2, \ldots, c_n$ інших коренів многочлен $f(x)$ не має, оскільки для іншого значення x жодна дужка у розкладі (13) не перетворюється у нуль.

Наслідок 3. Будь-який многочлен $f(x) \in \mathbf{C}[x]$ степеня $n \geq 1$ має n коренів, якщо кожний із коренів рахувати стільки разів, яка його кратність.

Якщо кратність деякого кореня c_i многочлена $f(x)$ дорівнює k_i, то k_i множників $(x - c_i)$ в розкладі (13) можна об'єднати в один множник $(x - c_i)^{k_i}$. Таким чином, з урахуванням кратності всіх коренів многочлена $f(x)$ розклад (13) можна подати у вигляді

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} \cdot (x - c_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - c_m)^{k_m}, \tag{14}$$

де $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

В цьому розкладі $c_1, c_2, ..., c_m$ – різні корені відповідної кратності.

2.5. Многочлени над полем дійних чисел

Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \ -$$

многочлен з дійсними коефіцієнтами, тобто $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$.

Сформулюємо деякі наслідки основної теореми алгебри для многочленів з дійсними коефіцієнтами.

Твердження 1. Якщо комплексне число $\alpha = a + ib$ $(b \neq 0)$ є коренем многочлена $f(x)$ степеня $n \geq 2$ з дійсними коефіцієнтами, то спряжене число $\bar{\alpha} = a - ib$ також є коренем цього многочлена тієї самої кратності.

Доведення. Нехай многочлен з дійсними коефіцієнтами

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$$

має комплексний корінь α, тобто

$$f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + ... + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

Тоді

$$\overline{f(\alpha)} = a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1} + a_{n-2}\bar{\alpha}^{n-2} + ... + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = f(\bar{\alpha}).$$

Якщо $f(\alpha) = 0$, то $\overline{f(\alpha)} = 0$. Звідси $f(\bar{\alpha}) = 0$. Отже, спряжене число $\bar{\alpha}$ є коренем многочлена $f(x)$.

Таким чином, многочлен $f(x)$ ділиться на квадратний тричлен

$$\varphi(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha},$$

коефіцієнти якого є дійсними числами.

Доведемо, що корені α та $\bar{\alpha}$ мають однакову кратність. Припустимо від супротивного, що корені α та $\bar{\alpha}$ мають кратності k та l відповідно і нехай $k > l$. Тоді многочлен $f(x)$ ділиться на l-ту степінь многочлена $\varphi(x)$, тобто

$$f(x)=\varphi^l(x)q(x).$$

Многочлен $q(x)$, як частка двох многочленів з дійсними коефіцієнтами, також має дійсні коефіцієнти і має число α своїм $(k-l)$-кратним коренем. Але $\overline{\alpha}$ не є коренем $q(x)$, що суперечить доведеному вище твердженню. Звідси випливає, що $k=l$. ■

Отже, в розклад многочлена (13) комплексні корені входять попарно спряженими. Вже зазначалося, що при множенні лінійних множників в розкладі (13), що відповідають парі комплексних спряжених коренів, дістанемо квадратний тричлен з *дійсними* коефіцієнтами:

$$\begin{aligned}&(x-(a+bi))(x-(a-bi))=\\&=x^2-(a+bi+a-bi)x+(a+bi)(a-bi)=\\&=x^2-2ax+a^2+b^2=x^2+px+q.\end{aligned}$$

Дискримінант цього многочлена від'ємний. Справді,

$$D=p^2-4q=(-2a)^2-4(a^2+b^2)=-4b^2<0.$$

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема 5. Кожен многочлен $f(x)$ степеня $n\geq 1$ з *дійсними коефіцієнтами* розкладається єдиним чином (з точністю до порядку множників) на множники з *дійсними* коефіцієнтами першого та другого степеня відповідної кратності:

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}...(x-c_t)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}...(x^2+p_tx+q_t)^{s_t},$$

причому $k_1+k_2+...+k_l+2(s_1+...+s_t)=n$.

В цьому розкладі кожен квадратний тричлен має від'ємний дискримінант і йому відповідає пара спряжених комплексних коренів.

Наслідок 1. Многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами незвідний над полем **R** тоді і тільки тоді, коли він є лінійним многочленом або многочленом другого степеня з від’ємним дискримінантом.

Наслідок 2. Довільний многочлен з дійсними коефіцієнтами непарного степеня має принаймні один дійсний корінь.

Приклад 9. Знайти всі корені многочлена $f(x)=x^4-3x^3+5x^2-x-10$ і написати його розклад на множники над полем **R**, якщо відомий один його корінь $x_1=1+2i$.

Розв'язання. Якщо многочлен з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь, то спряжене число також є його коренем. Тобто $x_2=1-2i$ є коренем і розклад многочлена на множники містить добуток

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)=(x-(1+2i))(x-(1-2i))=\\&=x^2-x(1+2i+1-2i)+5=x^2-2x+5.\end{aligned}$$

Цей добуток є многочленом з дійсними коефіцієнтами, на який заданий многочлен $f(x)$ має ділитися без залишку:

$$\begin{array}{l|l}
x^4-3x^3+5x^2-x-10 & \underline{x^2-2x+5} \\
\underline{x^4-2x^3+5x^2} & x^2-x-2 \\
\quad -x^3-x-10 & \\
\quad \underline{-x^3+2x^2-5x} & \\
\qquad -2x^2+4x-10 & \\
\qquad \underline{-2x^2+4x-10} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Дістали

$x^4-3x^3+5x^2-x-10=(x^2-2x+5)(x^2-x-2)$.

Многочлен x^2-x-2 має два дійсних корені $x_3=2$ і $x_4=-1$. Отже, шукані корені многочлена $f(x)$:

$$x_1=1+2i,\ x_2=1-2i,\ x_3=2,\ x_4=-1.$$

Розклад многочлена $f(x)$ над полем **R** має вигляд:

$$x^4-3x^3+5x^2-x-10=(x^2-2x+5)(x-2)(x+1).$$

2.6. Многочлени над полем раціональних чисел

Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

є многочленом з раціональними коефіцієнтами, тобто $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Q}$, $a_n \neq 0$. Розглянемо задачу знаходження раціональних коренів такого многочлена. Позначимо через q найменше спільне кратне знаменників чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Q}$. Помноживши многочлен $f(x)$ на число q, дістанемо многочлен з цілими коефіцієнтами, який матиме ті самі корені. Отже, задача знаходження раціональних коренів многочлена з раціональними коефіцієнтами зводиться до знаходження раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами.

Теорема 6. Нехай нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена ненульового степеня з цілими коефіцієнтами

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}.$$

Тоді число p є дільником вільного коефіцієнта a_0, а число q – дільником старшого коефіцієнта a_n.

Наслідок. Якщо

$$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

– зведений многочлен з цілими коефіцієнтами, тобто $a_n = 1$, то всі раціональні корені многочлена є цілими числами і дільниками вільного коефіцієнта a_0.

Теорема 7 (Ознака Ейзенштейна). Нехай

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

є многочленом з цілими коефіцієнтами. Якщо існує таке просте число p, що коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ діляться на p, а старший коефіцієнт a_n не ділиться на p, та вільний коефіцієнт a_0 не ділиться на p^2, тоді многочлен $f(x)$ є незвідним над полем раціональних чисел $\mathbf{Q}$.

Приклад 10. Розкласти многочлен на незвідні множники над полем дійсних чисел та над полем комплексних чисел:

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8.$$

Розв'язання. Многочлен $f(x)$ − зведений, тому його раціональні корені містяться серед дільників вільного коефіцієнта: $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$. Простим перебором дільників знаходимо, що $f(1) = 0$. Поділимо многочлен $f(x)$ на двочлен $x-1$ за схемою Горнера.

a_i	1	1	2	4	−8
1	1	2	4	8	0

Звідси $f(x) = (x-1)g_1(x)$, де $g_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$. Простим перебором дільників вільного коефіцієнта многочлена $g_1(x)$ знаходимо, що $g_1(-2) = 0$.

Поділимо многочлен $g_1(x)$ на двочлен $x+2$ за схемою Горнера.

a_i	1	2	4	8
–2	1	0	4	0

Звідси $g_1(x) = (x+2)(x^2+4)$. Многочлен x^2+4 дійсних коренів не має. Його комплексні корені: $x_1 = 2i,\ x_2 = -2i$.

Над полем дійсних чисел розклад многочлена має вигляд

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x^2+4).$$

Над полем комплексних чисел розклад многочлена має вигляд

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x-2i)(x+2i).$$

Приклад 11. Довести незвідність многочлена над полем раціональних чисел **Q**:

$$f(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 10x + 2.$$

Розв'язання. Всі коефіцієнти многочлена $a_0 = 2$, $a_1 = -10$, $a_2 = -8$, $a_3 = 6$, $a_4 = -4$ діляться на просте число $p = 2$. Старший коефіцієнт $a_5 = 1$ не ділиться на 2. Вільний коефіцієнт $a_0 = 2$ не ділиться на $p^2 = 4$. Отже, за ознакою Ейзенштейна многочлен $f(x)$ незвідний над **Q**.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте теорему про ділення многочлена з остачею та її наслідок – теорему Безу.

2. Що називають коренем многочлена? Який многочлен називають незвідним?

3. Сформулюйте основну теорему алгебри.

4. Як розкладаються на лінійні множники многочлени ненульового степеня над полем комплексних чисел?

5. Як розкладаються на множники многочлени ненульового степеня над полем дійсних чисел?

Вправи

1. Розділіть многочлен $f(x)$ із залишком на многочлен $g(x)$:

а) $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$, $g(x) = x^2 + 3x - 1$;

б) $f(x) = 4x^5 - 2x^4 + 6x^3 + 3x^2 - x - 3$, $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$;

в) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

2. Розділіть із залишком многочлен $f(x)$ на $x - x_0$ і обчисліть значення $f(x_0)$:

а) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $x_0 = -1$;

б) $f(x)=x^4-2x^3+4x^2-6x+8, \quad x_0=1;$

в) $f(x)=2x^5-5x^3-6x, \quad x_0=-3;$

г) $f(x)=3x^5+x^4-19x^2-13x-10, \quad x_0=2;$

д) $f(x)=x^5, \quad x_0=1.$

3. Визначте кратність кореня x_0 многочлена $f(x)$:

а) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8, \quad x_0=2;$

б) $f(x)=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16, \quad x_0=-2;$

в) $f(x)=3x^5+2x^4+x^3-10x-8, \quad x_0=-1.$

4. Розкладіть многочлени на множники над полем дійсних чисел та над полем комплексних чисел:

а) $f(x)=x^4-x^3+4x-16;$

б) $f(x)=x^4+x^3-2x^2-4x-8;$

в) $f(x)=x^4-5x^3+x^2+21x-18;$

г) $f(x)=x^4+3x^3+6x^2+2x-12;$

д) $f(x)=6x^4-5x^3-4x^2+2x-1;$

е) $f(x)=10x^4-11x^3+14x^2+23x+6.$

5. Доведіть незвідність многочленів над полем раціональних чисел:

а) $f(x)=x^4+8x^3-16x^2+4x-2;$

б) $f(x)=x^6-9x^4+36x^2+6x-12;$

в) $f(x)=x^5+5x+9;$

г) $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1.$

Розділ 3. Елементи лінійної алгебри

3.1. Алгебра матриць

Основні поняття

Поняття матриці є одним з найголовніших понять лінійної алгебри і основним інструментом при вивченні систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Широке застосування поняття матриці в багатьох розділах математики та в різних областях науки (фізиці, техніці, програмуванні, економіці, статистиці та ін.) зробило його предметом самостійної теорії.

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел (m рядків, n стовпчиків)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

де $a_{ij} \in \mathbf{K},\ i = 1,\dots,m$ і $j = 1,\dots,n$.

Тут **K** – будь-яке числове поле. Далі розглядатимемо матриці над полем дійсних чисел **R**.

Матриці позначають великими латинськими літерами $A, B, C, \dots$. Елементи матриці позначають a_{ij}, де перший індекс i вказує на номер рядка, а другий індекс j – на номер стовпчика, в яких розміщений цей елемент. Наприклад, елемент a_{23} знаходиться у другому рядку та в третьому стовпчику.

Короткий запис матриці: $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Множину всіх матриць розміру $m \times n$ з коефіцієнтами з поля дійсних чисел **R** позначають $Mat_{m \times n}(\mathbf{R})$.

Якщо $m = n$, то матриця (15) називається *квадратною матрицею порядку* n.

У квадратній матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

головною діагоналлю називається діагональ $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ від лівого верхнього кута матриці до правого нижнього її кута. *Побічною діагоналлю* квадратної матриці називається діагональ $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$ від правого верхнього кута до лівого нижнього її кута.

Якщо $m = 1$, матрицю (15) називають *вектор-рядком*

$$A = (a_{11}, a_{12,} ..., a_{1n}),$$

а якщо $n = 1$ – *вектор-стовпчиком*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Введемо деякі матриці спеціального вигляду.

1. *Нульовою* матрицею називається матриця, всі елементи якої є нульовими:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *Діагональною* матрицею називається квадратна матриця $D = (d_{ij})_{n \times n}$, ненульові елементи якої можуть бути лише на головній діагоналі, а решта елементів матриці нульові:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Якщо в діагональній матриці порядку n всі елементи головної діагоналі $d_{ii} = 1,\ i = 1,...,n$, то вона називається *одиничною* матрицею порядку n і позначається

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \ddots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. *Верхньою (нижньою) трикутною* матрицею називається квадратна матриця, у якої всі елементи під головною діагоналлю (над головною діагоналлю) нульові:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \ddots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – верхня трикутна матриця,}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \ddots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – нижня трикутна матриця.}$$

5. *Симетричною* матрицею називається квадратна матриця $S = (a_{ij})_{n \times n}$, у якої $a_{ij} = a_{ji}$ для довільних i, j, тобто матриця симетрична відносно головної діагоналі:

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \ddots & \dots\dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

6. Квадратна матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$ називається *кососиметричною, якщо* для довільних i, j виконується рівність $a_{ij} = -a_{ji}$. Зокрема, у кососиметричної матриці $a_{ii} = -a_{ii} = 0$, тобто всі елементи на головній діагоналі дорівнюють нулю:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \ddots & \dots\dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ – симетрична матриця,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & -3 \\ 2 & -5 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$ – кососиметрична матриця.

Операції над матрицями

На множині матриць за певних умов, що накладаються на розміри матриць, визначаються дві алгебраїчні операції – додавання і множення. Також визначена операція множення матриці на число $\lambda \in \mathbf{R}$.

1. *Сумою матриць* $A=(a_{ij})_{m\times n}$ і $B=(b_{ij})_{m\times n}$ однакового розміру називається матриця $C=(c_{ij})_{m\times n}$ така, що

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=1,...,m \ \text{ і } \ j=1,...,n.$$

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операція суми матриць різного розміру є невизначеною.

Властивості додавання матриць

Нехай $A,B,C\in Mat_{m\times n}(\mathbf{R})$, O – нульова матриця розміру $m\times n$. Тоді:

1) $A+B=B+A$;

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

3) $A+O=A$;

4) існує $(-A)$ така, що $A+(-A)=O$.

2. *Добутком матриці* $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на число $\lambda\in\mathbf{R}$ називається матриця $\lambda\cdot A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$.

Наприклад,

$$(-3)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & -3 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

Властивості множення матриць на скаляр

Нехай $A,B\in Mat_{m\times n}(\mathbf{R})$, O – нульова матриця розміру $m\times n$. Тоді:

1) $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B,\quad \lambda\in\mathbf{R}$;

2) $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A,\quad \lambda,\mu\in\mathbf{R}$;

3) $0\cdot A=O$;

4) $1 \cdot A = A$;

5) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

3. *Добутком матриць* $A = (a_{ij})_{m \times s}$ та $B = (b_{ij})_{s \times n}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m \times n}$ така, що

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1,\dots,m \text{ і } j = 1,\dots,n.$$

Множення матриць виконують за правилом *«рядок на стовпчик»*. Для того щоб отримати елемент c_{ij} матриці $A \cdot B$ потрібно i-й рядок матриці A «накласти» на j-й стовпчик матриці B, відповідні елементи перемножити і додати отримані добутки.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добуток матриць визначений, якщо кількість стовпчиків s першої матриці дорівнює кількості рядків s другої матриці, інакше добуток матриць є невизначеним.

Множення матриць не є комутативною операцією, тобто, взагалі кажучи, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Дійсно, щоб обидва добутки матриць $A = (a_{ij})_{m \times n}$, і $B = (b_{ij})_{s \times t}$ були визначеними, має бути $n = s$ і $t = m$. Але навіть у такому разі, взагалі кажучи, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}, \text{ а } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Добуток квадратних матриць однакового порядку визначений завжди. Проте і для квадратних матриць, взагалі кажучи, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ а } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що існують матриці, для яких рівність $A \cdot B = B \cdot A$ є справедливою. В цьому разі матриці A і B називають *комутативними* або *переставними*. Наприклад, одинична матриця E є переставною з будь-якою квадратною матрицею відповідного порядку.

Властивості множення матриць

1. $O \cdot A = A \cdot O = O$, де O – нульова матриця;
2. $E \cdot A = A \cdot E = A$, де E – одинична матриця;
3. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
4. $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A)B = A \cdot (\lambda \cdot B), \quad \lambda \in \boldsymbol{R}$;
5. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \;\; A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Вважається, що для матриць A, B, C, O, E всі наведені операції є визначеними.

Приклад 12.

1) $$5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -10 & 5 & 15 \\ 25 & 20 & -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 12 \\ -9 & -15 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 0 \\ -7 & -1 & 27 \\ 16 & 5 & -14 \end{pmatrix};$$

2) $$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Приклад 13. Обчислити значення многочлена $f(x)=x^3-2x^2+3$ від матриці

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо многочлен від матриці $f(A)=A^3-2A^2+3E$, де E – одинична матриця такого самого порядку, як і матриця A.

Знайдемо матриці $A^2=A\cdot A$ та $A^3=A^2\cdot A$.

$$A^2=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 9 & 3 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 9 & 3 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -10 & 29 & 15 \\ 10 & -28 & -14 \end{pmatrix}.$$

$$f(A)=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -10 & 29 & 15 \\ 10 & -28 & -14 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 9 & 3 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -4 & 6 & 9 \\ -6 & 14 & 9 \\ 6 & -12 & -7 \end{pmatrix}.$$

Транспонованою матрицею до матриці $A=(a_{ij})_{m\times n}$ називається матриця $A^T=(a_{ji})_{n\times m}$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Властивості транспонування матриць

1. $(A^T)^T = A$,
2. $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$ (якщо добуток $A\cdot B$ визначений),
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
4. $(\lambda\cdot A)^T = \lambda A^T$, $\lambda\in\mathbf{R}$.

Елементарні перетворення рядків і стовпчиків матриць

Означення. *Елементарними перетвореннями першого, другого, третього типу* рядків (стовпчиків) матриці називаються:

1) перестановка двох рядків (стовпчиків);
2) множення деякого рядка (стовпчика) матриці на довільне ненульове число;
3) додавання до деякого рядка (стовпчика) матриці іншого рядка (стовпчика) помноженого на довільне число.

Дві матриці *A* і *B* розміру $m\times n$ називаються *еквівалентними,* якщо одна матриця отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень рядків і стовпчиків. Еквівалентність матриць *A* і *B* позначають $A\sim B$.

Зазначимо, якщо $A\sim B$, то справедливо і $B\sim A$.

Теорема 8 (Алгоритм Гаусса). Довільну ненульову матрицю $A=(a_{ij})_{m\times n}$ елементарними перетвореннями рядків і стовпчиків можна звести до «*трапецієподібного*» вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & f_{1,r+1} & \cdots & f_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & f_{1,r+1} & \iddots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & f_{r,r+1} & \cdots & f_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

де $0 < r \le \min(m,n)$.

Доведення. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

є ненульовою матрицею.

Оскільки матриця A ненульова, то перестановкою стовпчиків і рядків матриці A можна отримати еквівалентну матрицю $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$, у якої $\tilde{a}_{11} \ne 0$. Поділимо перший рядок матриці $\tilde{A}$ на $\tilde{a}_{11}$. Далі для кожного $l = 2,3,\dots,m$ до l-го рядка додамо отриманий перший рядок помножений на $-\tilde{a}_{l1}$. Дістанемо матрицю

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{2m} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Якщо матриця B містить ненульові елементи лише в першому рядку, то вона вже є трапецієподібною. В іншому разі серед елементів b_{ij}, $i, j \ge 2$, є ненульовий. Перестановкою стовпчиків (крім першого) і рядків (крім першого) із матриці B можна отримати еквівалентну матрицю

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1n} \\ 0 & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \tilde{b}_{2m} & \dots & \tilde{b}_{mn} \end{pmatrix},$$

в якій $\tilde{b}_{22} \neq 0$. Поділимо тепер уже другий рядок матриці $\tilde{B}$ на $\tilde{b}_{22}$, а потім для кожного $l = 3, 4, \dots, m$ до l-го рядка додамо отриманий другий рядок, помножений на $-\tilde{b}_{l2}$. Дістанемо матрицю

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c_{3m} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \qquad (18)$$

Якщо серед елементів c_{ij}, де $i, j \geq 3$, є ненульові, то виконуємо аналогічні перетворення далі для рядків і стовпчиків з номерами ≥ 3, поки не отримаємо матрицю виду

$$D = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \dots & d_{1,r-1} & d_{1r} & d_{1,r+1} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & d_{2,r-1} & d_{2r} & d_{2,r+1} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_{r-1,r} & d_{r-1,r+1} & \dots & d_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_{r,r+1} & \dots & d_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (19)$$

Після цього зробимо нулі над одиницями на діагоналі. Спочатку робимо нулі в r-му стовпчику. Для цього для кожного $l = 1, 2, \dots, r-1$ до l-го рядка матриці D додамо її r-ий рядок, помножений на число $-d_{lr}$. Отримаємо матрицю

$$D' = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & \dots & d_{1,r-1} & 0 & d'_{1,r+1} & \dots & d'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & d_{2,r-1} & 0 & d'_{2,r+1} & \dots & d'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & d'_{r-1,r+1} & \dots & d'_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_{r,r+1} & \dots & d_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі робимо нулі над діагоналлю в $(r-1)$-му стовпчику. Для кожного $l = 1, 2, \dots, r-2$ до l-го рядка матриці D' додаємо її $(r-1)$-й рядок, помножений на $-d_{l,r-1}$. І так далі. Зрештою, отримаємо матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & f_{1,r+1} & \dots & f_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & f_{2,r+1} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & f_{r-1,r+1} & \dots & f_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & f_{r,r+1} & \dots & f_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

яка має трапецієподібний вигляд. ■

Процес зведення матриці A до трапецієподібного вигляду називається *алгоритмом Гаусса*. Описана в доведенні теореми послідовність дій при переході від початкової матриці A до матриці (19) називається *прямим ходом алгоритму Гаусса*, а послідовність дій при переході від матриці (19) до матриці (20) – *оберненим ходом алгоритму Гаусса*.

Наслідок 1. Якщо застосовувати елементарні перетворення лише рядків матриці, то довільну матрицю $A=(a_{ij})_{m\times n}$ після прямого та оберненого ходу алгоритму Гаусса можна звести до «*трапецієподібно-східцевої*» матриці.

$$\begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n_1} & 0 & a_{1n_1+2} & \dots & a_{1n_2} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \underline{a_{2,n_1+1}} & a_{2,n_1+2} & \dots & a_{2n_2} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \underline{a_{r,n_r+1}} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

де підкреслені елементи $\underline{a_{11}}, \underline{a_{2,n_1+1}}, \dots, \underline{a_{r,n_r+1}}$ відмінні від нуля.

При цьому числа $n_1, n_2-n_1, ..., n-n_r$ – довжини сходинок, що можуть мати значення від 1 до n. Якщо довжини всіх сходинок дорівнюють 1, то в разі $m=n$ отримуємо діагональну матрицю, а у разі $m>n$ така матриця матиме ще й нульові рядки. Та якщо довжини всіх сходинок, крім останньої, дорівнюють 1, то отримуємо матрицю виду (16), у якої $r<n$.

Наслідок 2. Довільну ненульову квадратну матрицю $A=(a_{ij})_{n\times n}$ елементарними перетвореннями рядків (стовпчиків) можна звести до верхньої трикутної матриці:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \ddots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}, t_{ij} \in \mathbf{R}. \quad (22)$$

Контрольні запитання

1. Що таке матриця? Які є види матриць?

2. Як визначають операції додавання матриць, множення матриці на число та множення матриць?

3. Що називають елементарними перетвореннями рядків (стовпчиків) матриці?

4. В чому полягає алгоритм Гаусса зведення матриці до «трапецієподібного» вигляду?

Вправи

1. Обчисліть вираз:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Обчисліть вираз:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$, в) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$,

г) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbf{N}$.

4. Знайдіть всі матриці, перестановочні з матрицею:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Знайдіть значення многочлена $f(x)$ від матриці A:

а) $f(x) = x^2 - 3x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 6, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2. Системи лінійних рівнянь

Основні поняття

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими (СЛР) називається система m рівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{23}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *невідомі або змінні*, $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ – *коефіцієнти* системи лінійних рівнянь. $b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1,\ldots,m$ – *вільні члени*.

Якщо $m = n$, то система лінійних рівнянь називається *квадратною*. Якщо всі $b_i = 0$, то система лінійних рівнянь називається *однорідною,* в іншому разі – *неоднорідною*.

Розв'язком СЛР (23) у полі $\mathbf{R}$ називається такий набір $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ з n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$, що після підстановки в систему цих чисел замість відповідно невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отримаємо правильні рівності.

Система лінійних рівнянь називається:

– *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв’язок;

– *несумісною*, якщо вона не має жодного розв’язку;

– *визначеною*, якщо вона має точно один розв’язок;

– *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв’язку.

Дві системи лінійних рівнянь називаються *еквівалентними* або *рівносильними*, якщо вони обидві сумісні або обидві несумісні й у разі сумісності мають однакові множини розв'язків.

Основною матрицею системи лінійних рівнянь (23) називається матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, що стоять в правих частинах системи (23), утворюють *вектор-стовпчик* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ вільних членів.

Матриця системи, доповнена справа стовпчиком вільних членів, називається *розширеною матрицею системи*:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Якщо $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-стовпчик невідомих, то СЛР (23) можна подати в *матричному* вигляді:

$$A \cdot x = b. \tag{24}$$

Елементарними перетвореннями СЛР називаються такі її перетворення:

1) перестановка двох рівнянь системи;
2) множення деякого рівняння системи на число $\lambda \neq 0$;
3) додавання до одного з рівнянь системи іншого її рівняння, помноженого на деяке число λ.

Якщо від однієї системи лінійних рівнянь до іншої можна перейти за допомогою скінченної послідовності елементарних перетворень, то такі системи лінійних рівнянь є рівносильними.

Зауважимо, що елементарним перетворенням рівнянь СЛР відповідають такі самі елементарні перетворення відповідних рядків розширеної матриці цієї СЛР, і навпаки. Тому справедливим є таке твердження.

Твердження 1. Якщо розширені матриці двох СЛР еквівалентні, то відповідні СЛР рівносильні.

Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь

Метод послідовного виключення невідомих з системи лінійних рівнянь (23) за допомогою таких елементарних перетворень рівнянь, щоб для отриманої еквівалентної системи можна було безпосередньо виписати її розв’язки (якщо вони є), називається *методом Гаусса*. Метод Гаусса є методом розв'язування систем лінійних рівнянь загального вигляду, тобто кількість рівнянь системи може не дорівнювати кількості невідомих.

Елементарним перетворенням рівнянь системи (при яких система переходить у рівносильну) відповідають елементарні перетворення рядків її розширеної матриці. Тому, щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса, потрібно записати розширену матрицю системи та за допомогою елементарних перетворень рядків матриці перетворити розширену матрицю так, щоб основна матриця системи мала трапецієподібно-східцевий вигляд (21), тобто застосувати алгоритм Гаусса для зведення основної матриці системи до трапецієподібно-східцевого вигляду. Додавши перестановки стовпчиків, основну матрицю системи можна звести до трапецієподібного вигляду (16). Зазначимо, що переставляючи стовпчики в основній матриці системи, потрібно перейменовувати змінні.

На практиці, розв'язуючи СЛР, стовпчики в основній матриці системи зазвичай не переставляють. Проте, для наочності розв'язання СЛР в загальному вигляді вважають, що перестановки стовпчиків в основній матриці системи здійснюються й основна матриця системи зводиться до вигляду (16).

Згідно з методом Гаусса розв'язання СЛР після *прямого ходу алгоритму Гаусса* розширеної матриці системи (після переставляння стовпчиків та перейменування змінних) СЛР (23) зводиться до еквівалентної *трапецієподібно-східцевої* СЛР

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1r}x_r + d_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + d_{1n}x_n = b_1', \\ \qquad x_2 + \ldots + d_{2r}x_r + d_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + d_{2n}x_n = b_2', \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_r + d_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + d_{rn}x_n = b_r', \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}', \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_m', \end{cases} \tag{25}$$

розширена матриця якої є трапецієподібно-східцевою матрицею. Основна матриця системи має вигляд (19).

Твердження 2. Якщо в трапецієподібно-східцевій системі (25) хоча б один з $b_i' \neq 0, \quad r+1 \leq i \leq m$, то система лінійних рівнянь (23) не має розв’язку, тобто *несумісна*.

Дійсно, нехай деякий $b_k \neq 0, \quad r+1 \leq k \leq m$. Тоді матимемо рівняння

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_k \neq 0. \qquad (26)$$

Звідси $0 = b_k$, що суперечить припущенню $b_k \neq 0$.

Теорема 9. Система лінійних рівнянь (23) *сумісна* тоді і тільки тоді в трапецієподібно-східцевій системі (25) всі $b_i' = 0, \quad r+1 \leq i \leq m$.

Дійсно, якщо СЛР (23) сумісна, то з твердження 2 випливає, що система (25) не повинна містити рівнянь вигляду $0 = b_k' \ (b_k' \neq 0)$, $r+1 \leq k \leq m$.

Нехай в трапецієподібно-східцевій системі (25) всі $b_i' = 0, \quad r+1 \leq i \leq m$. Здійснюючи обернений хід алгоритму Гаусса для розширеної матриці системи (25), отримаємо еквівалентну СЛР

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + f_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + f_{1n}x_n = h_1 , \\ \quad x_2 \qquad\quad + f_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + f_{2n}x_n = h_2 , \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad x_r + f_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + f_{rn}x_n = h_r , \end{cases} \qquad (27)$$

основна матриця якої має трапецієподібний вигляд (20).

Для СЛР (27) можливі два випадки.

1. У випадку, коли $r = n$, СЛР (27) має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = h_1, \\ x_2 = h_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = h_{n.} \end{cases}$$

Тобто СЛР *визначена* і має єдиний розв'язок $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

2. У випадку, коли $r < n$, СЛР (27) має r ненульових рівнянь, і її можна переписати так

$$\begin{cases} x_1 = h_1 - f_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - f_{1n}x_n, \\ x_2 = h_2 - f_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - f_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ x_r = h_r - f_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - f_{rn}x_n. \end{cases} \tag{28}$$

Ми отримали значення r невідомих $x_1,\ldots,x_r$, які визначаються співвідношеннями через невідомі, що залишились $x_{r+1},\ldots,x_n$. В цьому разі невідомі $x_1,\ldots,x_r$ називаються *пов'язаними*, а невідомі $x_{r+1},\ldots,x_n$ – *вільними*. Вільним невідомим можна надавати довільні дійсні значення: $x_{r+1} = c_{r+1},\ldots,x_n = c_n$. Для кожного заданого набору значень вільних невідомих *пов'язані* невідомі визначаються однозначно:

$$\begin{cases} x_1 = h_1 - f_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - f_{1n}c_n, \\ x_2 = h_2 - f_{2,r+1}c_{r+1} - \ldots - f_{2n}c_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ x_r = h_r - f_{r,r+1}c_{r+1} - \ldots - f_{rn}c_n, \\ x_{r+1} = c_{r+1}, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_n. \end{cases} \tag{29}$$

Таким чином, СЛР *невизначена*, має нескінченну кількість розв'язків (29).

Розв'язок невизначеної СЛР, записаний у вигляді рівностей (29) або набору

$$(h_1 - f_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - f_{1n}c_n;\ \ldots; h_r - f_{r,r+1}c_{r+1} - \ldots - f_{rn}c_n, c_{r+1}, \ldots, c_n)$$

із довільними параметрами $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$, називають *загальним розв'язком* невизначеної СЛР.

Множина розв'язків невизначеної СЛР має вигляд

$$\{(h_1 - f_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - f_{1n}c_n;\ \ldots; h_r - f_{r,r+1}c_{r+1} - \ldots - f_{rn}c_n, c_{r+1}, \ldots, c_n) \mid c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n \in \mathbf{R}\}.$$

Частинним розв'язком невизначеної СЛР називається кожний розв'язок з нескінченної множини розв'язків.

Зауважимо, оскільки СЛР до вигляду (25) можна зводити по різному, то вибір пов'язаних невідомих невизначеної СЛР, взагалі кажучи, є неоднозначним. Але кількість пов'язаних невідомих від способу зведення матриці до трапецієподібного вигляду не залежить, і дорівнює кількості ненульових рядків основної матриці системи після прямого ходу алгоритму Гаусса.

Приклад 14. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Зведемо матрицю до східцево-трапецієподібного вигляду за допомогою елементарних перетворень рядків. Переставимо рядки матриці і отримаємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

До другого рядка додамо перший рядок, помножений на (-2), а до третього рядка додамо перший рядок, помножений на (-3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \end{array}\right).$$

Далі до третього рядка додамо другий рядок, помножений на (−1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Помножимо третій рядок на ($-\frac{1}{2}$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ми зробили прямий хід алгоритму Гаусса. Система лінійних рівнянь сумісна, оскільки у розширеній матриці немає рядків, у яких зліва від риски стоять нульові елементи, а справа від риски ненульове число, тобто СЛР не містить рівнянь виду (26).

Далі виконуємо обернений хід алгоритму Гаусса, тобто робимо нулі над діагоналлю основної матриці. Для цього третій рядок матриці помножимо на 3 і додамо до другого рядка та помножимо третій рядок матриці на (−1) і додамо до першого рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Таким чином, система набирає вигляду

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Отже, система лінійних рівнянь є визначеною, а її єдиним розв’язком є $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$

Виконані в прикладі елементарні перетворення розширеної матриці системи зручно записувати таким чином:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).
$$

Приклад 15. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса

$$
\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ -4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1, \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}
$$

Розв’язання. Запишемо розширену матрицю системи

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 5 & 7 \end{array}\right).
$$

До другого рядка додамо перший рядок, помножений на 2, а до третього рядка додамо перший рядок:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right).
$$

До третього рядка додамо другий рядок, помножений на (-1):

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).
$$

Таким чином, третє рівняння системи набирає вигляду

$$
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 3.
$$

Оскільки це рівняння не має розв’язків, СЛР є несумісною.

Приклад 16. Розв’язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

До другого рядка додамо перший рядок помножений на (-2), а до третього рядка додамо перший рядок помножений на (-3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -10 \\ 0 & -1 & 4 & -10 \end{array}\right).$$

До третього рядка додамо другий рядок помножений на (-1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ми виконали прямий хід алгоритму Гаусса. СЛР невизначена, оскільки розширена матриця системи має два ненульові рядки і три невідомі. Якщо після прямого ходу алгоритму Гаусса трапецієподібно-східцева матриця (21) має r ненульових рядків, або що те саме має r сходинок, то кількість пов'язаних невідомих дорівнює r $(r \geq 1)$. Пов’язані невідомі потрібно обирати з різних сходинок трапецієподібно-східцевої матриці (21). За пов’язані невідомі виберемо x_1, x_2. Вибір пов'язаних невідомих неоднозначний. Для отриманої матриці замість x_2 можна було б обрати x_3. Далі виконаємо обернений хід алгоритму Гаусса. Тобто в матриці над пов’язаними невідомими зробимо нулі.

Другий рядок помножимо на (-1) та додамо до першого:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 14 \\ 0 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином система набирає вигляду

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 = 14, \\ x_2 - 4x_3 = 10 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x_1 = 5x_3 + 14, \\ x_2 = 4x_3 + 10. \end{cases}$$

Невідомі x_1, x_2 є пов'язаними невідомими, а x_3 – вільне невідоме. Вільному невідомому x_3 надамо довільне значення $x_3 = c_3 \in \mathbf{R}$. СЛР має нескінченну кількість розв'язків, тобто є невизначеною. Її загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = 5c_3 + 14, \\ x_2 = 4c_3 + 10, \\ x_3 = c_3. \end{cases}$$

Множина розв'язків СЛР: $\{(5c_3 + 14;\ 4c_3 + 10;\ c_3) \mid c_3 \in \mathbf{R}\}$.

Приклад 17. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 5; \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3; \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Система лінійних рівнянь має чотири невідомі та три рівняння. Запишемо розширену матрицю системи та зведемо матрицю до трапецієподібно-східцевого виду за алгоритмом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -5 & -3 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & -5 & -3 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки після прямого ходу алгоритму Гаусса залишилось два ненульових рядки (або, що те ж саме, два рівняння в системі), то система лінійних рівнянь є невизначеною і має два пов'язаних невідомих. Оберемо x_1 та x_3 за пов'язані невідомі. Тоді невідомі, що залишились x_2, x_4, є вільними невідомими.

Зазначимо, що вибір пов'язаних невідомих в цьому прикладі, як і в прикладі 16 є неоднозначним: за пов'язані невідомі можна вибрати також x_1 та x_2 або x_1 та x_4.

Далі виконаємо обернений хід алгоритму Гаусса, тобто над обраними пов'язаними невідомими (де це потрібно) зробимо нулі в матриці:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Запишемо загальний розв'язок невизначеної СЛР, враховуючи вигляд отриманої розширеної матриці системи:

$$\begin{cases} x_1 = -5x_2 - 4x_4 + 1, \\ x_2 = c_2, \\ x_3 = -2x_2 - 3x_4 - 1, \\ x_4 = c_4 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = -5c_2 - 4c_4 + 1, \\ x_2 = c_2, \\ x_3 = -2c_2 - 3c_4 - 1, \\ x_4 = c_4. \end{cases} \quad c_2, c_4 \in \mathbf{R}.$$

Множина розв'язків СЛР має вигляд

$$\{(-5c_2 - 4c_4 + 1;\ c_2;\, -2c_2 - 3c_4 - 1;\ c_4) \mid c_2,\ c_4 \in \mathbf{R}\}.$$

Приклад 18. Розв’язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 9, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 6. \end{cases}$$

Розв’язання. Система лінійних рівнянь має п'ять невідомих і три рівняння. Запишемо розширену матрицю системи та зведемо матрицю за алгоритмом Гаусса до трапецієподібно-східцевого вигляду. Для цього зробимо нулі під головною діагоналлю:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Після прямого ходу алгоритму Гаусса залишилось три ненульових рядки (три рівняння в системі), тобто система є невизначеною і має три пов’язаних невідомих.

Пов’язані невідомі потрібно вибирати по одному з кожної сходинки отриманої трапецієподібно-східцевої матриці і їхній вибір є неоднозначним. Оберемо за пов'язані невідомі x_1, x_2 та x_5 (замість x_2 із другої сходинки можна було б обрати x_3 або x_4). Тоді невідомі, що залишились, x_3, x_4 є вільними.

Далі проведемо обернений хід алгоритму Гаусса, тобто в матриці зробимо нулі над вибраними пов’язаними невідомими (де це потрібно):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -8 & 0 & 99 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Запишемо загальний розв’язок невизначеної системи лінійних рівнянь, враховуючи вигляд отриманої розширеної матриці системи:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + 8x_4 + 99, \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 - 22, \\ x_3 = c_3, \\ x_4 = c_4, \\ x_5 = 3, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = 2c_3 + 8c_4 + 99, \\ x_2 = -c_3 - 2c_4 - 22, \\ x_3 = c_3, \\ x_4 = c_4, \\ x_5 = 3, \end{cases} \quad c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

Множина розв’язків СЛР має вигляд

$$\{(2c_3 + 8c_4 + 99; -c_3 - 2c_4 - 22;\ c_3;\ c_4;\ 3)\ |\ c_3, c_4 \in \mathbf{R}\}.$$

Для невеликих СЛР інколи оберненого ходу алгоритму Гаусса розширеної матриці системи не виконують. Після прямого ходу алгоритму Гаусса виписують СЛР і визначають невідомі послідовною підстановкою. Проілюструємо такий підхід на прикладі.

Приклад 19. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ 6x_1 + 8x_2 - 14x_3 = 20, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21. \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо розширену матрицю системи і послідовно зробимо нулі під головною діагоналлю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 6 & 8 & -14 & 20 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & 11 & -16 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & -6 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Після спрощення система має вигляд

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ \qquad -x_2 + x_3 = -1, \\ \qquad\qquad -x_3 = -1. \end{cases}$$

З останнього рівняння $x_3 = 1$. Підставляючи це значення послідовно у друге і перше рівняння, дістанемо $x_2 = 2$, $x_1 = 3$.

Відповідь: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Метод Гаусса є простим та ефективним методом розв'язання систем лінійних рівнянь загального вигляду. Проте цей метод не дозволяє сформулювати умови сумісності та визначеності системи лінійних рівнянь за коефіцієнтами системи та вільними членами, не дає, наприклад, явних формул для розв'язків визначеної квадратної системи. В різних практичних задачах аналіз систем лінійних рівнянь та їхніх розв'язків вимагає додаткових тверджень і формулювань з використанням теорії визначників та лінійних просторів.

Контрольні запитання

1. Що називають системою лінійних рівнянь?

2. Яку систему лінійних рівнянь називають сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною?

3. Опишіть метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь.

Вправи

Розв'яжіть системи лінійних рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -7, \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 12. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -7, \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 12. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1, \\ -3x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 1, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ е) $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -4, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

є) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

з) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 6x_4 = -8. \end{cases}$ и) $\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$

к) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 1, \\ 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$ л) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$

м) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 - x_5 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$ н) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 6. \end{cases}$

п) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$ р) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

3.3. Визначники

Підстановки

Підстановкою σ на множині $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ із n елементів називається взаємно однозначне відображення множини Ω на себе: $\sigma : \Omega \to \Omega$.

Підстановку $\sigma : i \to \sigma(i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в розгорнутій формі зображують у вигляді таблиці:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}, \tag{30}$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_n$ – символи $1, 2, 3, \ldots, n$, переставлені за допомогою підстановки σ. Тобто $i_k = \sigma(k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Множину всіх підстановок із n елементів позначають S_n.

Приклади підстановок на множині з п'яти елементів:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Зазначимо, що в другому рядку підстановки (30) можуть бути всі можливі перестановки з n елементів множини $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, яких є $n!$. Тому множина S_n всіх підстановок має $n!$ елементів.

Множина S_n утворює групу, яку називають симетричною групою степеня n [1]. Операція множення елементів множини S_n –

композиція підстановок: $(\sigma\cdot\tau)(i)=\sigma(\tau(i))$. Наприклад, для підстановок (32) маємо

$$\sigma\cdot\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}=\begin{matrix}1&2&3&4&5\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&1&4&5&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&3&5&4&2\end{matrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&5&4&2\end{pmatrix}.$$

Запишемо також

$$\tau\cdot\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&1&3&5\end{pmatrix}.$$

Маємо, $\sigma\cdot\tau\neq\tau\cdot\sigma$.

Множення підстановок не є комутативною операцією. Тобто, взагалі кажучи, $\sigma\cdot\tau\neq\tau\cdot\sigma$, де $\sigma,\tau\in S_n$, $n>2$.

Операція множення підстановок є асоціативною: $(\tau\cdot\sigma)\cdot\pi=\tau\cdot(\sigma\cdot\pi)$ для всіх $\tau,\sigma,\pi\in S_n$.

Тотожна підстановка

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\1&2&\dots&n\end{pmatrix}$$

є нейтральним елементом відносно множення, тобто $\sigma\cdot\varepsilon=\varepsilon\cdot\sigma=\sigma$ для кожної підстановки $\sigma\in S_n$.

Оберненою до підстановки $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}$ є підстановка

$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}i_1&i_2&\dots&i_n\\1&2&\dots&n\end{pmatrix}$, тобто $\sigma\cdot\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\cdot\sigma=\varepsilon$.

Означення

1. Пара чисел (i, j), $i, j \in \{1,2,3,...,n\}$ називається *інверсією* підстановки $\sigma \in S_n$, якщо $i < j$, а $\sigma(i) > \sigma(j)$. Кількість інверсій в підстановці $\sigma \in S_n$ позначають $inv(\sigma)$.

2. Підстановка $\sigma \in S_n$ називається *парною* (відповідно *непарною*), якщо кількість інверсій $inv(\sigma)$ є парним числом (відповідно непарним числом).

Для визначення кількості інверсій в підстановці (31) достатньо розглянути кількість пар чисел $(\sigma(i), \sigma(j))$ в другому рядку підстановки таких, що $\sigma(i) > \sigma(j)$ за $i < j$. Для цього підраховують, скільки чисел більших за 1 стоїть перед числом 1, потім одиницю викреслюють. Далі підраховують кількість чисел перед числом 2, більших за 2, і так до числа n. Потім, сумуючи знайдені інверсії, визначають їхню загальну кількість. Наприклад, підстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

містить три інверсії (1,2), (3,5), (4,5) і є непарною. Тут відповідні пари $(\sigma(i), \sigma(j))$: (2,1), (4,3), (5,3).

Транспозицією називається підстановка, утворена з тотожної підстановки ε перестановкою i-го та j-го елементів в другому рядку:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n \end{pmatrix}, \; i < j \; .$$

Помноживши транспозицію τ_{ij} зліва на довільну підстановку $\sigma \in S_n$, в підстановці σ переставиться в другому рядку i-й та j-й елементи, а решта елементів залишаться на своїх місцях.

Кожна підстановка $\sigma \in S_n$ розкладається в добуток транспозицій. Підстановка $\sigma \in S_n$ є парною (непарною), тоді і тільки тоді вона розкладається в добуток парної (непарної) кількості транспозицій.

Транспозиція τ_{ij} завжди є непарною підстановкою, оскільки $inv(\tau_{ij}) = 2(j-i)-1$. Добуток транспозиції τ_{ij} на довільну підстановку $\sigma \in S_n$ змінює парність підстановки на протилежну.

Означення та основні властивості визначників

Означення. *Визначником (детермінантом)* n*-го порядку квадратної матриці* $A = (a_{ij})_{n\times n}$ називається алгебраїчна сума $n!$ доданків, кожен з яких є добутком n елементів a_{ij} матриці A, взятих по одному з кожного рядка та з кожного стовпчика, причому цей добуток береться зі знаком «плюс», якщо індекси його множників складають парну підстановку $\sigma \in S_n$, і зі знаком «мінус», якщо ця підстановка є непарною:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{inv(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}, \qquad (33)$$

де сума береться за всіма підстановками σ із S_n.

У цій формулі співмножники в кожному доданку суми записані в порядку зростання номерів рядків. Номери стовпчиків (другі індекси елементів) утворюють всі можливі перестановки. Парних та непарних підстановок є однакова кількість – $n!/2$.

Зауважимо, що визначник записують у вигляді таблиці, а значенням визначника є число, яке знаходять за правилом (33).

Запишемо правила для обчислення визначників першого, другого та третього порядків.

1. *Визначником першого порядку* матриці $A = (a_{11})$ є число

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

2. *Визначником другого порядку* матриці $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ є число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad (34)$$

Дійсно, запишемо формулу (33) для обчислення визначника матриці другого порядку $A = (a_{ij})_{2\times 2}$.

Підстановок на множині з двох елементів є дві:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перша підстановка містить 0 інверсій, тобто є парною, друга підстановка містить одну інверсію і є непарною. Цим підстановкам відповідними є добутки $a_{11}a_{22}$ та $(-a_{12}a_{21})$. Звідси отримаємо формулу (34).

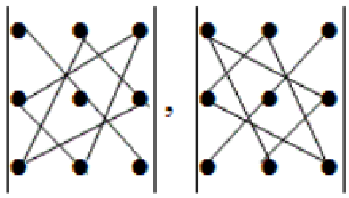
Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

3. *Визначником третього порядку* матриці $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ є число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \qquad (35)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}).$$



«+» «–»

Формулу (35) обчислення визначників третього порядку легко запам'ятати, якщо схематично подати її так званим "*правилом трикутників*", відображеним на рисунках. Із формули (35) і рисунків видно, що добутки елементів, з'єднаних лініями на першому рисунку, входять у суму зі знаком «плюс», а добутки елементів, з'єднаних на другому рисунку, – зі знаком «мінус».

Для отримання формули (35) із загальної формули (33) випишемо підстановки на множині з трьох елементів, яких є $3! = 6$. Парні підстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Непарні підстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Парним підстановкам відповідними є добутки $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, а непарним підстановкам – добутки $(-a_{13}a_{22}a_{31})$, $(-a_{12}a_{21}a_{33})$, $(-a_{11}a_{23}a_{32})$. Таким чином, отримуємо формулу (35).

Приклад 20. Обчислити визначник третього порядку.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 4\cdot 2 + 3\cdot(-1)\cdot 5 + 1\cdot 0\cdot 0 -$$

$$-(0\cdot 4\cdot 5 + 2\cdot 1\cdot 3 - (-2)\cdot 0\cdot(-1)) = -37.$$

Зауваження. Визначники другого і третього порядків мають геометричну інтерпретацію. Модуль визначника $|\det A|$ для $n = 2$ рівний площі паралелограма, побудованого на векторах, координатами яких є стовпчики чи рядки матриці. У випадку $n = 3$ модуль визначника $|\det A|$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах, координатами яких є стовпчики чи рядки матриці.

Для визначника четвертого порядку кількість доданків у сумі для його обчислення 4!=24, п'ятого порядку – 5!=120. У міру збільшення порядку визначника кількість доданків швидко зростає. Тому для визначників вищих порядків метод безпосереднього обчислення з використанням означення є досить громіздким і не придатний для практичних обчислень. Для обчислення визначників вищих порядків застосовують інші методи. Перед їхнім викладенням наведемо основні властивості визначників.

Твердження 3. У разі транспонування квадратної матриці її визначник не змінюється, тобто

$$\det A^T = \det A.$$

Доведення. Нехай $A = (a_{ij})_{n\times n}$, тоді $A^T = (a_{ij}^{'})_{n\times n}$, де $a_{ij}^{'} = a_{ji}$, для всіх $i,\ j \in \{1,\dots,n\}$.

$$\det A^T = \sum_{\sigma'\in S_n} (-1)^{inv(\sigma')} a'_{1\sigma'(1)}\, a'_{2\sigma'(2)} \dots a'_{n\sigma'(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma'\in S_n} (-1)^{inv(\sigma')} a_{\sigma'(1)1} a_{\sigma'(2)2} \dots a_{\sigma'(n)n}. \qquad (36)$$

Підстановки індексів для A^T мають вигляд

$$\begin{pmatrix} \sigma'(1) & \sigma'(2) & \dots & \sigma'(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} = \sigma.$$

Тобто $\sigma = (\sigma')^{-1}$, де $(\sigma')^{-1}$ – обернена підстановка до σ'. Відомо [1], що підстановка і обернена до неї підстановка одночасно парні або непарні, тобто

$$(-1)^{inv(\sigma)} = (-1)^{inv((\sigma')^{-1})} = (-1)^{inv(\sigma')}.$$

Тому з (36) маємо

$$\det A^T = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{inv(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = \det A. \qquad \blacksquare$$

Наслідок. При обчисленні визначника квадратної матриці її рядки та стовпчики є рівноправними.

Твердження 4. Якщо всі елементи деякого рядка або деякого стовпчика визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

Доведення. Безпосередньо випливає з означення визначника.

Твердження 5. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпчика) матриці A помножити на число λ, то $\det A$ також помножиться на λ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ..... & a_{1n} \\ ..... & ..... & ..... \\ \lambda a_{k1} & ..... & \lambda a_{kn} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & ..... & a_{1n} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{k1} & ..... & a_{kn} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Твердження випливає безпосередньо з означення визначника. Дійсно, нехай $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Позначимо $A' = (a_{ij}')_{n\times n}$ – матрицю, елементи якої, крім елементів k-того рядка, є елементами матриці A, а елементи k-го рядка є елементами матриці A, помноженими на число λ, тобто

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i \neq k, \\ \lambda a_{ij}, i = k. \end{cases}$$

Отримаємо

$$\det A' = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{inv(\sigma)} a'_{1\sigma(1)} a'_{2\sigma(2)} ... a'_{k\sigma(k)} ... a'_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{inv(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... \lambda a_{k\sigma(k)} ... a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{inv(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} = \lambda \det A. \qquad \blacksquare$$

Твердження 6. Якщо у визначнику матриці A переставити місцями два рядки (стовпчики), то $\det A$ змінить знак на протилежний.

Доведення. Нехай $A = (a_{ij})_{n\times n}$, а $A' = (a_{ij}')_{n\times n}$ – матриця, отримана з матриці A перестановкою i-го та j-го рядків ($j > i$). Елементи матриці A' мають вигляд

$$a'_{kl}=\begin{cases} a_{kl}, & k\neq i, k\neq j,\\ a_{jl}, & k=i,\\ a_{il}, & k=j.\end{cases}$$

Отримаємо

$$\det A'=\sum_{\sigma'\in S_n}(-1)^{inv(\sigma')}a'_{1\sigma'(1)}a'_{2\sigma'(2)}\dots a'_{n\sigma'(n)}=$$

$$=\sum_{\sigma'\in S_n}(-1)^{inv(\sigma')}a_{1\sigma'(1)}a_{2\sigma'(2)}\dots a_{j\sigma'(i)}\dots a_{i\sigma'(j)}\dots a_{n\sigma'(n)}. \qquad (37)$$

Позначимо

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n\\ \sigma'(1) & \sigma'(2) & \dots & \sigma'(j) & \dots & \sigma'(i) & \dots & \sigma'(n)\end{pmatrix}=\tau_{ij}\cdot\sigma',$$

де τ_{ij} – транспозиція.

Множення підстановки на транспозицію змінює парність підстановки на протилежну:

$$(-1)^{inv(\sigma)}=(-1)^{inv(\tau_{ij}\cdot\sigma')}=-(-1)^{inv(\sigma')},\ (-1)^{inv(\sigma')}=-(-1)^{inv(\sigma)}.$$

Таким чином, рівність (37) набере вигляду

$$\det A'=-\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{inv(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{j\sigma(j)}\dots a_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)}=$$

$$=-\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{inv(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{i\sigma(i)}\dots a_{j\sigma(j)}\dots a_{n\sigma(n)}=-\det A. \quad \blacksquare$$

Твердження 7. Якщо елементи деякого рядка визначника представлені у вигляді суми двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких елементи цього рядка є першими доданками, а у другому – другими доданками:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i1}+c_{i1} & \ldots & b_{in}+c_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i1} & \ldots & b_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i1} & \ldots & c_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Безпосередньо випливає з означення визначника (33). Дійсно, нехай елементи i-го рядка матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$ є сумою двох чисел

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij},\ j=1,2,...,n.$$

Тоді

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{inv(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{i\sigma(i)}...a_{n\sigma(n)}=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{inv(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...(b_{i\sigma(i)}+c_{i\sigma(i)})...a_{n\sigma(n)}=$$

$$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{inv(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...b_{i\sigma(i)}...a_{n\sigma(n)}+$$

$$+\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{inv(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...c_{i\sigma(i)}...a_{n\sigma(n)}.$$ ■

Твердження 8. Якщо визначник має два однакові рядки (стовпчики), то він дорівнює нулю.

Доведення. Нехай матриця A має однакові рядки – i-й та j-й і нехай A' – матриця, одержана з A перестановкою i-го та j-го рядків. Оскільки i-й та j-й рядки однакові, то $A'=A$. За твердженням 6 $\det A'=-\det A$. Звідси $\det A=-\det A$, $2\cdot\det A=0$, $\det A=0$.

Для стовпчиків твердження доводиться аналогічно. ■

З тверджень 5 та 8 випливає таке твердження.

Твердження 9. Якщо визначник має два пропорційні рядки (стовпчики), то він дорівнює нулю.

Твердження 10. Визначник матриці A не зміниться, якщо до елементів одного з її рядків (стовпчиків) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпчика), помножені на деяке число. Тобто визначник не змінюється внаслідок елементарних перетворень третього типу рядків (стовпчиків) матриці *A*.

Доведення. Нехай задана матриця $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Додамо до i-го рядка матриці j-й рядок, помножений на число $\alpha\in\mathbf{R}$ та обчислимо визначник отриманої матриці A':

$$\det A'=\begin{vmatrix} a_{11} & ..... & a_{1n} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{i1}+\alpha a_{j1} & ..... & a_{in}+\alpha a_{jn} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{j1} & ..... & a_{jn} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & ..... & a_{1n} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{i1} & ..... & a_{in} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{j1} & ..... & a_{jn} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & ..... & a_{1n} \\ ..... & ..... & ..... \\ \alpha a_{j1} & ..... & \alpha a_{jn} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{j1} & ..... & a_{jn} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & ..... & a_{1n} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{i1} & ..... & a_{in} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{j1} & ..... & a_{jn} \\ ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}+0=\det A.$$

Для обчислення визначника використані твердження 7 та 9. Твердження для стовпчиків матриці доводять аналогічно. ■

Твердження 11. Нехай *A* – верхня (нижня) трикутна матриця. Тоді її визначник дорівнює добутку діагональних елементів:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} .$$

Доведення. Нехай A – верхня трикутна матриця. За означенням (33) визначник $\det A$ містить у кожному доданку суми $\sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{inv(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$ по одному елементу з кожного стовпчика і кожного рядка матриці A.

У визначнику має бути один елемент з першого стовпчика. Ненульовий елемент в першому стовпчику лише один – a_{11}. Визначимо, на які елементи з другого стовпчика він може бути помножений. На a_{12} не може бути помножений, бо a_{12} стоїть в першому рядку, як і a_{11} (з першого рядка вже елемент вибраний). Тому елемент a_{11} може бути помножений лише на a_{22} з елементів другого стовпчика. Добуток $a_{11} \cdot a_{22}$ можна множити лише на a_{33} з третього стовпчика, бо a_{13} з першого рядка, a_{23} з другого рядка, а елементи з першого і другого рядка вже є в добутку. Продовжуючи так далі до n-го стовпчика, отримаємо у сумі для знаходження визначника тільки один доданок $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$, оскільки всі інші доданки нульові. Залишилось визначити знак «+» чи «–» перед добутком $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$. Цьому добутку відповідає тотожна підстановка індексів

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

яка є парною. Отже,

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Для нижньої трикутної матриці твердження доводиться аналогічно. ■

Приклад 21.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 \cdot 5 \cdot (-1) = 30.$$

Твердження 12. Якщо матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$ має блоково-діагональний вигляд

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix},$$

де B і C – квадратні матриці, то

$$\det A = \det B \cdot \det C.$$

Доведення. Нехай $B = (b_{ij})_{k \times k}$, $C = (c_{ij})_{l \times l}$. За наслідком 2 теореми Гаусса (теорема 8) матриці B і C за допомогою елементарних перетворень рядків можна звести до верхнього трикутного вигляду

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} \overline{b}_{11} & \overline{b}_{12} & \dots & \overline{b}_{1k} \\ 0 & \overline{b}_{22} & \dots & \overline{b}_{21} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{b}_{kk} \end{pmatrix}, \quad \overline{C} = \begin{pmatrix} \overline{c}_{11} & \overline{c}_{12} & \dots & \overline{c}_{1l} \\ 0 & \overline{c}_{22} & \dots & \overline{c}_{21} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{c}_{ll} \end{pmatrix}.$$

За твердженням 11

$$\det \overline{B} = \overline{b}_{11} \cdot \overline{b}_{22} \cdot \ldots \cdot \overline{b}_{kk}, \text{ а } \det \overline{C} = \overline{c}_{11} \cdot \overline{c}_{22} \cdot \ldots \cdot \overline{c}_{ll}.$$

Із тверджень 5, 6, 10 про зміну визначника у разі виконання елементарних перетворень матриці дістанемо

$$\det B = \beta \cdot \det \overline{B}, \ \det C = \gamma \cdot \det \overline{C}, \text{ де } \beta, \gamma \in \mathbf{R}.$$

За допомогою тієї самої послідовності елементарних перетворень рядків матрицю A можна звести до матриці виду

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{b}_{11} & \overline{b}_{12} & \ldots & \overline{b}_{1k} & \overline{d}_{11} & \overline{d}_{12} & \ldots & \overline{d}_{11} \\ 0 & \overline{b}_{22} & \ldots & \overline{b}_{2k} & \overline{d}_{21} & \overline{d}_{22} & \ldots & \overline{d}_{2l} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \overline{b}_{kk} & \overline{d}_{k1} & \overline{d}_{k2} & \ldots & \overline{d}_{kl} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \overline{c}_{11} & \overline{c}_{12} & \ldots & \overline{c}_{1l} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \overline{c}_{22} & \ldots & \overline{c}_{2l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \overline{c}_{ll} \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця $\overline{A}$ є верхньою трикутною матрицею, то

$$\det \overline{A} = \overline{b}_{11} \cdot \overline{b}_{22} \cdot \ldots \cdot \overline{b}_{kk} \cdot \overline{c}_{11} \cdot \overline{c}_{22} \cdot \ldots \cdot \overline{c}_{ll} = \det \overline{B} \cdot \det \overline{C}.$$

Звідси

$$\det A = \beta \cdot \gamma \det \overline{A} = \beta \cdot \gamma \det \overline{B} \cdot \det \overline{C} = \beta \det \overline{B} \cdot \gamma \det \overline{C} =.$$

$$= \det B \cdot \det C.$$ ■

Приклад 22.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3+2) \cdot (4+0+12-0+4-0) = 100.$$

Теорема 10. Визначник добутку двох квадратних матриць однакового порядку дорівнює добутку визначників співмножників:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Доведення. Нехай $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$. Побудуємо допоміжний визначник Δ порядку $2n$ вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} & -1 & 0 & ... & 0 \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} & 0 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} & 0 & 0 & ... & -1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

За твердженням 12 про визначник блоково-діагональної матриці маємо

$$\Delta = \det B \cdot \det A = \det A \cdot \det B.$$

Далі застосуємо до матриці визначника Δ елементарні перетворення третього типу, що не змінюють визначника, так, щоб всі a_{ij}, $i, j = 1, 2, ..., n$ стали нулями. Для цього до $(n+1)$-го рядка додамо перший рядок, помножений на a_{11}, додамо другий рядок, помножений на a_{12} і т.д. В результаті отримаємо в $(n+1)$-му рядку нулі. Аналогічно виконуючи такі елементарні перетворення для $(n+2)$-го рядка і далі до $2n$-го рядка, отримаємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

При цьому елемент

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = (A \cdot B)_{ij}, \ i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Тобто $C = (c_{ij})_{n \times n} = A \cdot B$.

У визначнику Δ зробимо перестановку стовпчиків так, що отримаємо визначник

$$\Delta = (-1)^n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{12} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ми зробили n перестановок стовпчиків. Перший стовпчик поміняли місцями з $(n+1)$-м стовпчиком, другий стовпчик поміняли з $(n+2)$-м стовпчиком і т.д., n стовпчик з $2n$-м стовпчиком.

Таким чином, ми отримали визначник блоково-діагональної матриці. За твердженням 12 маємо

$$\Delta = (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot \det C = (-1)^{2n} \cdot \det(A \cdot B) = \det(A \cdot B).$$

Отже, $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. ∎

Зауваження. Вже зазначено, що в загальному випадку $A \cdot B \neq B \cdot A$. Але, оскільки значення визначника матриці – це число, а операція множення чисел комутативна, то для квадратних матриць A і B однакового порядку справедлива рівність

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(B \cdot A),$$

тобто

$$\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A).$$

Справедливою є також рівність $\det(A^n) = (\det A)^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Означення. Матриця A, у якої $\det A \neq 0$, називається *невиродженою*, а у разі $\det A = 0$ − *виродженою*.

Розклад визначника за рядком (стовпчиком)

Нехай $A = (a_{ij})_{n \times n}$ квадратна матриця порядку n. Визначник $(n-1)$-го порядку

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \dots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{n\,n} \end{vmatrix},$$

отриманий з матриці A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпчика, називається *доповнювальним мінором елемента* a_{ij} *матриці* A, позначають його як M_{ij}.

Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ називається *алгебраїчним доповненням* елемента a_{ij} матриці A.

Наприклад, у визначнику

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

алгебраїчне доповнення елемента a_{23}

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -((-2)\cdot 0 - 3\cdot 5) = 15.$$

Теорема 11 (про розклад визначника). Для довільної квадратної матриці $A = (a_{ij})_{n\times n}$ має місце розклад визначника $\det A$ за будь-яким i-м ($i = 1,...,n$) рядком:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}. \tag{38}$$

Аналогічно справедливий розклад визначника $\det A$ за будь-яким j-м ($j = 1,...,n$) стовпчиком:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}. \tag{39}$$

Доведення. Використовуючи твердження 7, розкладемо визначник матриці $A = (a_{ij})_{n\times n}$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & 0 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & ... & 0 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} a_{11} & ... & 0 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & 0 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

Переставимо у кожному визначнику елемент a_{ij} на місце a_{11}. Для цього треба зробити $(i-1)$ перестановок рядків та $(j-1)$ перестановок стовпчиків:

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=$$

Використаємо твердження 12 про визначник блоково-діагональної матриці:

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.$$

Таким чином, отримали розклад визначника матриці A по j-му стовпчику.

Оскільки $\det A=\det A^{T}$, то розкладаючи $\det A^{T}$ по i-му стовпчику, отримаємо формулу (38) розкладу визначника $\det A$ по i-му рядку:

$$\det A=\det A^{T}=\sum_{k=1}^{n}a'_{ki}(-1)^{k+i}M'_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-1)^{k+i}M_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}.$$

■

Твердження 13. Сума добутків елементів довільного рядка (або довільного стовпчика) матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$ на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (іншого стовпчика) дорівнює нулю:

$$a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = a_{1i}A_{1j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad \text{за } j \neq i. \qquad (40)$$

Доведення. Доведемо, що $a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$ за умови $j \neq i$ (розклад визначника $\det A$ за «чужим» j-м рядком). Розглянемо матрицю $\overline{A}$, отриману з матриці A заміною j-го рядка на i-й:

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i - \textit{й рядок} \\ \\ j - \textit{й рядок} \\ \\ \\ \end{array}$$

Тобто матриця $\overline{A}$ має два однакові рядки i-й та j-й, що містять елементи i-го рядка матриці A. За твердженням 8 $\det \overline{A} = 0$.

З іншого боку, знайдемо значення визначника $\det \overline{A}$ за теоремою 10, як розклад за j-м рядком:

$$\det \overline{A} = \overline{a}_{j1}\overline{A}_{j1} + \cdots + \overline{a}_{jn}\overline{A}_{jn} = a_{i1}A_{j1} + \ldots + a_{in}A_{jn} \text{ за умови } j \neq i.$$

Отже, $a_{i1}A_{j1} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0$ за умови $j \neq i$.

Рівність $a_{1i}A_{1j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0$ за умови $j \neq i$ доводиться аналогічно. ■

За формулами (38), (39) і (40) можна записати:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} \det A, & \textit{якщо} \quad j = i, \\ 0, & \textit{якщо} \quad j \neq i. \end{cases}$$

Розглянемо способи обчислення визначників з використанням наведених тверджень і теорем.

Метод зниження порядку

Згідно з теоремою про розклад визначника обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення n визначників $(n-1)$-го порядку. Такий метод зниження порядку визначника не завжди ефективний, оскільки для високих порядків пов'язаний з громіздкими обчисленнями.

Приклад 23. Обчислимо визначник, скориставшись теоремою про розклад визначника і розклавши його за другим рядком:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{24} =$$

$$= 5 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-5(1 \cdot 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 5 + (-1) \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 6 \cdot 5 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \cdot 1) +$$
$$+(2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 5) = 18.$$

З наведеного прикладу видно, що доцільно розкладати визначник за тим рядком або стовпчиком, який містить якнайбільшу кількість нулів, оскільки це приводить до меншої кількості обчислень. Якщо нулів у визначнику мало, то їх можна «зробити», використовуючи властивості визначника. Тобто, використовуючи властивості визначників, в розкладі визначника (38), (39), можна зменшити кількість доданків. Для цього аналогічно алгоритму методу Гаусса виконують елементарні перетворення рядків або стовпчиків матриці визначника, беручи до уваги властивості визначника (твердження 5, 6, 10). А саме: внаслідок перестановки в матриці місцями двох рядків (стовпчиків) визначник змінює знак на протилежний; якщо деякий рядок (стовпчик) матриці множиться на число $\lambda \neq 0$, то визначник помножиться на λ; якщо до деякого рядка (стовпчика) додати інший рядок (стовпчик), помножений на деяке число, то визначник матриці не змінюється.

Приклад 24. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. За допомогою елементарних перетворень рядків матриці визначника зробимо в першому стовпчику всі елементи крім одного нулями. Для цього другий рядок визначника помножимо на 2 і додамо послідовно до першого та третього рядків, а також другий рядок додамо до четвертого рядка. В результаті в першому стовпчику буде один ненульовий елемент. Отриманий визначник розкладемо за першим стовпчиком:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 224 + 120 + 108 - 112 - 144 - 180 = 16.$$

Зведення визначників до трикутного виду

Уже зазначалося, що визначник верхньої (нижньої) трикутної матриці дорівнює добутку елементів його головної діагоналі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =.$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Довільний визначник n-го порядку, користуючись властивостями визначника (твердження 5, 6, 10), за допомогою елементарних перетворень рядків або стовпчиків матриці завжди можна звести до верхнього чи нижнього трикутного виду. Це випливає з наслідку з теореми Гаусса (теорема 8) про зведення квадратної матриці до верхнього (нижнього) трикутного вигляду.

Приклад 25. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Зведемо матрицю визначника до верхнього трикутного вигляду, виконуючи елементарні перетворення рядків. Перший рядок переставимо місцями з другим. Після цього додамо до другого та третього рядків перший рядок, помножений на 2. Далі перший рядок додамо до четвертого рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Третій рядок помножимо на (-1) і додамо до другого рядка:

$$-\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

До третього рядка додамо другий рядок, помножений на 9, а до четвертого рядка додамо другий рядок, помножений на 4:

$$-\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & -12 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{vmatrix}.$$

До третього рядка додамо четвертий рядок, помножений на (−2):

$$-\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{vmatrix}.$$

До четвертого рядка додамо третій рядок, помножений на (−5):

$$-\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = -((-1)\cdot(-1)(-1)\cdot 16) = 16\,.$$

Приклад 26. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку зробимо нулями всі елементи крім першого у першому стовпчику. Для цього перший рядок додамо до другого, потім помножимо перший рядок на (–2) і додамо до третього, потім помножимо перший рядок на (–1) і додамо до четвертого:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Переставимо місцями другий і третій рядки. При цьому визначник помножиться на (-1):

$$-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Далі додамо до третього рядка другий рядок, помножений на (-2), а до четвертого рядка додамо другий:

$$-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9.$$

Приклад 27. Обчислити визначник n-го порядку

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Додамо до першого рядка всі рядки з другого до n-го рядка:

$$\begin{vmatrix} a+b(n-1) & a+b(n-1) & a+b(n-1) & \dots & a+b(n-1) \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

Винесемо загальний множник $a+b(n-1)$ елементів першого рядка за визначник і дістанемо:

$$(a+b(n-1))\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Помножимо перший рядок визначника на число $(-b)$ та додамо до другого рядка, до третього рядка і т.д. до n-го рядка:

$$(a+b(n-1))\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} =$$

$$=(a+b(n-1))\cdot(a-b)^{n-1}.$$

Обернена матриця

Означення. Матриця B називається о*берненою* до квадратної матриці A, якщо

$$A\cdot B = B\cdot A = E,$$

де E – одинична матриця такого ж порядку, як і матриця A.

Квадратна матриця, для якої існує обернена матриця, називається *оборотною*.

Твердження 14. Оборотна матриця може мати тільки одну обернену матрицю.

Доведення. Нехай матриця A має дві обернені матриці B та C, тобто

$$A\cdot B = B\cdot A = E, \quad A\cdot C = C\cdot A = E.$$

Тоді

$$C = E\cdot C = (B\cdot A)\cdot C = B\cdot(A\cdot C) = B\cdot E = B. \qquad \blacksquare$$

Отже, для оборотної матриці A існує єдина обернена матриця, яку позначають A^{-1}. Для матриці A^{-1} маємо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E .$$

З’ясуємо умови існування оберненої матриці та наведемо два методи знаходження оберненої матриці – метод приєднаної матриці і метод елементарних перетворень (метод Гаусса).

Означення. Матриця

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{nn} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A, $i, j = 1,...,n$, називається *приєднаною матрицею до матриці* A.

Теорема 12 (про явний вигляд оберненої матриці). Якщо квадратна матриця $A = (a_{ij})_{n\times n}$ невироджена, то обернена до A матриця існує і має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Покажемо, що

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \det A \cdot E ,$$

де E – одинична матриця порядку n.

Доведемо рівність $A \cdot \tilde{A} = \det A \cdot E$. За правилом множення матриць, i, j-й елемент матриці $A \cdot \tilde{A}$ рівний «добутку» i-го рядка матриці A на j-й стовпчик приєднаної матриці $\tilde{A}$, тобто дорівнює сумі

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}.$$

Якщо $j=i$, то $a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\det A$ (теорема 11).

Якщо $j\neq i$, то $a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$ (твердження 13).

Отже,

$$A\cdot\tilde{A}=\begin{pmatrix}\det A & 0 & \dots & 0\\ 0 & \det A & \dots & 0\\ \dots & \dots & \ddots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \det A\end{pmatrix}=\det A\cdot E,$$

де E – одинична матриця.

Оскільки матриця невироджена, тобто $\det A\neq 0$, то помножимо праву та ліву частину отриманої рівності на число $\dfrac{1}{\det A}$. Дістанемо

$$\frac{1}{\det A}A\cdot\tilde{A}=E,\qquad A\cdot(\frac{1}{\det A}\tilde{A})=E.$$

Рівність $\tilde{A}\cdot A=\det A\cdot E$ доводиться аналогічно. Тобто оберненою до матриці A є матриця

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$ ■

Наслідок (критерій оборотності матриці). Квадратна матриця A є оборотною тоді і тільки тоді, коли вона невироджена ($\det A\neq 0$).

Приклад 28. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A=\begin{pmatrix}4 & -8 & -5\\ -4 & 7 & -1\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 24 + 100 - 105 - 32 + 20 = -13.$$

Оскільки $\det A \neq 0$, то обернена матриця існує. Обчислимо алгебраїчні доповнення $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -17, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 43, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 24,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -4.$$

Маємо

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 12 & -17 & 43 \\ 7 & -11 & 24 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$A^{-1}=-\frac{1}{13}\begin{pmatrix}12 & -17 & 43\\ 7 & -11 & 24\\ 1 & 4 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{12}{13} & \frac{17}{13} & -\frac{43}{13}\\ -\frac{7}{13} & \frac{11}{13} & -\frac{24}{13}\\ -\frac{1}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{4}{13}\end{pmatrix}.$$

Теорема 13. Квадратна матриця є оборотною тоді і тільки тоді, коли елементарними перетвореннями рядків її можна привести до одиничної матриці.

Доведення. Необхідність. Нехай $A=(a_{ij})_{n\times n}$ – оборотна матриця. Тоді $\det A\neq 0$. Оскільки матриця A квадратна, то її можна звести за допомогою елементарних перетворень рядків до верхньої трикутної матриці $\overline{A}$ виду (22) (наслідок з теореми Гаусса). Оскільки $\det A\neq 0$, то отримана еквівалентна верхня трикутна матриця також матиме ненульовий визначник $\det\overline{A}\neq 0$. Дійсно, в разі елементарних перетворень рядків першого типу визначник змінює знак на протилежний, внаслідок елементарних перетворень другого типу визначник буде помножений на число $\lambda\neq 0$, а в результаті елементарних перетворень третього типу визначник не змінюється (твердження 5, 6, 10).

Визначник верхньої трикутної матриці $\overline{A}$ дорівнює добутку діагональних елементів. Оскільки $\det A\neq 0$, то всі елементи на діагоналі $\overline{A}$ – є ненульовими. Виконавши обернений хід алгоритму Гаусса, отримаємо діагональну матрицю з ненульовими елементами на головній діагоналі:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \ddots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\sim\dots\sim\begin{pmatrix}d_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & d_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \ddots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & d_{nn}\end{pmatrix}$$

$(d_{11}\neq 0, d_{22}\neq 0,\dots,d_{nn}\neq 0)$.

Далі перший рядок матриці помножимо на $\dfrac{1}{d_{11}}$, другий рядок матриці помножимо на $\dfrac{1}{d_{22}}$ і т.д. В результаті отримаємо одиничну матрицю:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Достатність. Нехай матриця $A = (a_{ij})_{n\times n}$ за допомогою елементарних перетворень рядків зводиться до одиничної матриці E. Тобто

$$A \sim \dots \sim E.$$

Якщо $B \sim C$ і $\det B \neq 0$, то, як зазначалося, виконуючи елементарні перетворення невиродженої матриці, отримуємо еквівалентну невироджену матрицю, тобто $\det C \neq 0$. Правильним є також твердження: якщо $\det C \neq 0$, то і $\det B \neq 0$, бо відношення ␣ симетричне, $B \sim C \Rightarrow C \sim B$.

Оскільки $\det E = 1 \neq 0$, то і $\det A \neq 0$. Отже, матриця A – оборотна за критерієм оборотності матриці. ■

Теорема 14 (Метод Гаусса знаходження оберненої матриці).

Якщо послідовність елементарних перетворень рядків, якими оборотна матриця A зводиться до одиничної матриці, в тому ж порядку застосувати до рядків одиничної матриці, то в результаті дістанемо обернену матрицю.

Твердження теореми зручно подати таким чином. Для того, щоби знайти обернену до A матрицю, потрібно поряд з матрицею A записати одиничну матрицю такого самого розміру, як і A, тобто $(A\,|\,E)$. Далі за допомогою елементарних перетворень рядків матриці $(A|E)$ (прямого та оберненого ходу алгоритму Гаусса) звести матрицю A до одиничної. Оскільки з матрицею E виконувалась та сама послідовність елементарних перетворень, що й з матрицею A, то праворуч від риски отримаємо обернену матрицю A^{-1}: $(A|E) \sim ... \sim (E|A^{-1})$.

Доведення. Нехай $A=(a_{ij})_{n\times n}$ – оборотна матриця. $A^{-1}=(x_{ij})_{n\times n}$ – невідома обернена до A матриця. Тоді справедливою є рівність

$$A\cdot A^{-1}=E, \qquad (41)$$

де E – одинична матриця порядку n.

Запишемо рівність (41):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}. \qquad (42)$$

Рівність (42) можна подати як n систем лінійних рівнянь з однією основною матрицею A:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} a_{11}x_{11}+a_{12}x_{21}+...+a_{1n}x_{n1}=1, \\ a_{21}x_{11}+a_{22}x_{21}+...+a_{2n}x_{n1}=0, \\ .... \\ a_{n1}x_{11}+a_{n2}x_{21}+...+a_{nn}x_{n1}=0, \end{cases} \dots, \begin{cases} a_{11}x_{1n}+a_{12}x_{2n}+...+a_{1n}x_{nn}=0, \\ a_{21}x_{1n}+a_{22}x_{2n}+...+a_{2n}x_{nn}=0, \\ .... \\ a_{n1}x_{1n}+a_{n2}x_{2n}+...+a_{nn}x_{nn}=1. \end{cases}$$

Оскільки матриця A – оборотна, то згідно з теоремою 13 елементарними перетвореннями рядків вона зводиться до одиничної матриці. Отже, розв’язуючи ці n СЛР методом Гаусса, отримаємо, що кожна з них має єдиний розв'язок. n наборів розв'язків цих n СЛР є стовпчиками невідомої оберненої до матриці A матриці A^{-1}. Розв'яжемо отримані n СЛР методом Гаусса. Оскільки основні матриці усіх систем лінійних рівнянь однакові, а відрізняються лише стовпчики вільних членів, то метод Гаусса проведемо одночасно для всіх n СЛР за розширеною матрицею

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right),$$

де праворуч від риски записано стовпчики вільних членів n СЛР.

Матриця A елементарними перетвореннями рядків зводиться до одиничної матриці. Після елементарних перетворень отримаємо таку розширену матрицю

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{array}\right),$$

в якій в стовпчиках праворуч від риски стоять розв'язки n СЛР, тобто матриця, отримана праворуч від риски, і є оберненою до A матрицею:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

■

Приклад 29. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використаємо метод елементарних перетворень знаходження оберненої матриці (метод Гаусса), описаний у теоремі 14.

Запишемо поряд з матрицею A одиничну матрицю третього порядку:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

До першого рядка додамо другий рядок:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

До другого рядка додамо перший рядок, помножений на 3, а до третього рядка додамо перший рядок, помножений на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Ми виконали прямий хід алгоритму Гаусса. Далі до другого рядка додамо третій рядок, помножений на (-3), а до першого рядка додамо третій рядок, помножений на (-2):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Таким чином, справа від риски маємо обернену матрицю

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -3 & -2\\ -3 & -2 & -3\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Приклад 30. Знайти обернену матрицю до матриці

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Знайдемо обернену матрицю за допомогою методу Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 4 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 5 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 4 & 7 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & -3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & -3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 & 6 & -2 & 3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 25 & -9 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -17 & 6 & -2 & 3\end{array}\right).$$

Отже, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 25 & -9 & 3 & -4 \\ -17 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Метод Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай $A\cdot x=b$ – квадратна система лінійних рівнянь, де $A=(a_{ij})_{n\times n}$ – основна матриця системи, x – стовпчик невідомих, b – стовпчик вільних членів. Розгорнутий вигляд системи:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Теорема 15 (Правило Крамера). Квадратна система лінійних рівнянь $A\cdot x=b$ визначена тоді і тільки тоді, коли її основна матриця є невиродженою. В такому разі єдиний розв’язок системи знаходять за *правилом Крамера*:

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},\ i=1,2,...,n,$$

де $\Delta=\det A,\ \Delta_i\ (i=1,2,...,n)$ − визначник, отриманий заміною i-го стовпчика матриці A на стовпчик вільних членів. Тобто

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (43)$$

n допоміжних визначників:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1i+1} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2i+1} \dots & a_{2n} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots & \dots. \; \dots. & \dots. \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Доведення. Необхідність. Нехай квадратна СЛР $A \cdot x = b$ визначена, тобто має єдиний розв’язок. Розв'язуючи визначену систему лінійних рівнянь методом Гаусса, основну матрицю системи A елементарними перетвореннями можна звести до одиничної матриці E ($A \sim \dots \sim E$). За теоремою 13 матриця A – оборотна. Звідси, за наслідком з теореми 12, $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай $\det A \neq 0$. Тоді для матриці A існує обернена A^{-1} (за теоремою 12). Помножимо рівність $A \cdot x = b$ зліва на A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b, \quad E \cdot x = A^{-1} \cdot b, \quad x = A^{-1} \cdot b.$$

Отже, система $A \cdot x = b$, у якої $\det A \neq 0$, має єдиний розв’язок

$$x = A^{-1} \cdot b. \tag{44}$$

За теоремою 12 обернена матриця $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \tilde{A}$, де $\tilde{A}$ – приєднана матриця.

Позначимо $A^{-1} = (a'_{ij})_{n \times n}$, де $a'_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{\Delta}$.

Зазначимо, що i-та координата вектор-стовпчика $A^{-1} \cdot b$ у правій частині рівності (44) дорівнює сумі

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} \cdot b_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ji}}{\Delta} \cdot b_j = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \cdot b_j ,$$

де $\sum_{j=1}^{n} A_{ji} \cdot b_j$ – це розклад визначника Δ_i за i-м стовпчиком.

Отже, $x_i = \dfrac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \cdot b_j = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1, 2, ..., n$. ■

Приклад 31. Дослідити сумісність системи лінійних рівнянь й у разі сумісності розв'язати систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо квадратну систему лінійних рівнянь. Спочатку обчислимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \cdot 4 -$$

$$-3 \cdot 1 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 = -27.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то СЛР є визначеною за теоремою Крамера.

Знайдемо визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 31 & 2 & 4 \\ 29 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 31 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 10 + 29 \cdot (-1) \cdot 4 -$$

$$-10 \cdot 1 \cdot 4 - 29 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 31 \cdot 2 = -81.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 31 & 4 \\ 5 & 29 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 29 \cdot 1 + 2 \cdot 31 \cdot 3 + 5 \cdot 10 \cdot 4 -$$

$$-3 \cdot 29 \cdot 4 - 5 \cdot 31 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 2 = -108,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 31 \\ 5 & 1 & 29 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot 29 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \cdot 31 -$$

$$-3 \cdot 1 \cdot 31 - 5 \cdot 2 \cdot 10 - (-1) \cdot 1 \cdot 29 = -135.$$

Отже, за правилом Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-81}{-27}=3,\;\; x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-108}{-27}=4,\;\; x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-135}{-27}=5.$$

Відповідь: $x_1=3,\;\; x_2=4,\;\; x_3=5$.

Матричні рівняння. Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь

Матричним рівнянням називається алгебраїчне рівняння, у якому коефіцієнтами і невідомими є матриці. Вважається, що всі дії з матрицями у рівнянні визначено коректно.

Розглядатимемо три типи матричних рівнянь:

$$A\cdot X=B,\quad X\cdot A=B,\quad A\cdot X\cdot B=C. \tag{45}$$

Потреба розглядати окремо такі рівняння зумовлена тим, що операція множення матриць не є перестановочною.

Припустимо, що в першому рівнянні матриця A є невиродженою, тобто існує A^{-1}. Тоді помножимо обидві частини рівняння на A^{-1} зліва:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B.$$

Звідси $X=A^{-1}\cdot B$ – розв'язок рівняння.

Так само для другого рівняння, якщо A невироджена та існує A^{-1}, то помножимо обидві частини рівняння на A^{-1} справа:

$$X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}.$$

Звідси $X=B\cdot A^{-1}$ – розв'язок рівняння.

Для третього рівняння припустимо, що обидві матриці A і B є невиродженими матрицями. Тоді помножимо обидві частини рівняння на A^{-1} зліва і на B^{-1} справа:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}.$$

Звідси $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$ – розв'язок рівняння.

Приклад 32. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Це є рівняння виду $A \cdot X \cdot B = C$.

Знайдемо матрицю A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right),$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю B^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & -7 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right).$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 33. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо матричне рівняння виду $A \cdot X = B$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

Отже, матриця A невироджена і має обернену матрицю. Обернену матрицю A^{-1} до матриці A шукатимемо методом приєднаної матриці.

Алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-3) = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1+5) = 4,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-4-(-1)) = -(-4+1) = 3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+4) = -2,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -5 & 3\end{vmatrix}=-12+5,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(6-1)=-5,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-10+4=-6.$$

Звідси $A^{-1}=-\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 4\\ 3 & 1 & -2\\ -7 & -5 & -6\end{pmatrix}^T=-\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}.$

Знайдемо невідому матрицю X :

$X=A^{-1}\cdot B=$

$$=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -4 & 6\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}32 & -40\\ 24 & -32\\ 24 & -40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -3 & 4\\ -3 & 5\end{pmatrix}.$$

У разі, коли в матричному рівнянні один або обидва коефіцієнти при X є виродженими, або неквадратними, матрицями, для розв'язання матричного рівняння X записується як матриця з невідомими елементами. Після множення матриць складається система лінійних рівнянь відносно цих невідомих. Отже, розв'язання матричного рівняння зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь.

Приклад 34. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Це матричне рівняння виду $A\cdot X=B$. Оскільки

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{vmatrix}=0,$$

матриця A не має оберненої матриці. В такому разі для знаходження матриці $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ з невідомими коефіцієнтами маємо рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Помноживши матриці, запишемо систему рівнянь відносно невідомих x_1, x_2, x_3, x_4 і розв'яжемо її методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_3 & 2x_2 - 3x_4 \\ 4x_1 - 6x_3 & 4x_2 - 6x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 2, \\ 2x_2 - 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - 6x_3 = 4, \\ 4x_2 - 6x_4 = 6. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -6 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система має нескінченну кількість розв'язків:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{3}{2}x_3; \\ x_2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_4; \\ x_3 = c_3; \\ x_4 = c_4 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{3}{2}c_3; \\ x_2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}c_4; \\ x_3 = c_3; \\ x_4 = c_4. \end{cases} \quad c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

Отже, розв'язками матричного рівняння є матриці виду

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2}c_3 & \frac{3}{2} + \frac{3}{2}c_4 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \; c_3, c_4 \in \mathbf{R}.$$

Як уже зазначено, систему лінійних рівнянь (23) можна подати у матричному вигляді (24):

$$A \cdot x = b,$$

тобто у вигляді матричного рівняння, де A – основна матриця системи, b – вектор-стовпчик вільних членів, x – вектор-стовпчик невідомих. Якщо A – *квадратна невироджена матриця*, вектор-стовпчик невідомих x можна знайти як розв'язок матричного рівняння: $x = A^{-1} \cdot B$. В цьому полягає *матричний метод* розв'язання систем лінійних рівнянь.

Приклад 35. Розв'язати матричним методом систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -5x_1 - x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему у вигляді $A \cdot x = b$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицю A^{-1} знайдемо методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 2{,}5 & -1{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{array}\right).$$

Звідси $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 2{,}5 & -1{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$

Отже, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 2{,}5 & -1{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$

Контрольні запитання

1. Що таке підстановка, парна і непарна підстановки?

2. Сформулюйте означення визначника n-го порядку.

3. Наведіть правила обчислення визначників другого і третього порядків.

4. Наведіть основні властивості визначників.

5. Як розкладається визначник за рядком і за стовпчиком?

6. Яку матрицю називають оберненою до квадратної матриці?

7. Вкажіть умову існування оберненої матриці.

8. Запишіть явну формулу знаходження оберненої матриці за допомогою приєднаної матриці.

9. Наведіть метод Гаусса знаходження оберненої матриці.

10. Сформулюйте правило Крамера знаходження розв'язку визначеної системи лінійних рівнянь.

11. Яке рівняння називають матричним рівнянням?

12. В чому полягає матричний метод розв'язування визначених систем лінійних рівнянь?

Вправи

1. Обчисліть визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ -6 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 10 & 0 \\ 6 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

2. З яким знаком у визначник шостого порядку входять добутки?

а) $a_{23}\cdot a_{31}\cdot a_{56}\cdot a_{14}\cdot a_{65}\cdot a_{41}$; б) $a_{32}\cdot a_{43}\cdot a_{14}\cdot a_{51}\cdot a_{66}\cdot a_{25}$;

в) $a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{35}\cdot a_{44}\cdot a_{56}\cdot a_{62}$; г) $a_{15}\cdot a_{24}\cdot a_{31}\cdot a_{42}\cdot a_{53}\cdot a_{66}$.

3. Як зміниться визначник порядку n, якщо:

а) його перший стовпчик поставити на останнє місце, а решту стовпчиків зсунути ліворуч, не змінюючи їхнього взаємного порядку розміщення;

б) рядки визначника записати у зворотному порядку.

4. Обчисліть визначники порядку n:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 5 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 5 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ .. & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$; к) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

5. Знайдіть обернені матриці до матриць:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$;

з) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; и) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

к) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; л) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

6. Знайдіть обернені матриці до матриць порядку n:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

7. Розв'яжіть системи лінійних рівнянь за правилом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=11, \\ 2x_1-x_2+2x_3=8, \\ 4x_1+x_2+4x_3=22. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-1, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=12, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=9, \\ 3x_1-5x_2+x_3=-4, \\ 4x_1-7x_2+x_3=5. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=12, \\ -4x_1-x_2+3x_3=-9. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=19, \\ 5x_1+x_2+2x_3=14, \\ 3x_1-x_2+x_3=9. \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-9, \\ 3x_1+x_2+x_3=-4, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=-8. \end{cases}$

8. Знайдіть невідому матрицю X з матричних рівнянь:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$; б) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

е) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -7 & 6 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Обчисліть $\varphi(A)$, де $\varphi(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ і $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Розв'яжіть системи лінійних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 12. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$

3.4. Лінійні простори

Основні поняття

Означення. *Лінійним (векторним) простором над полем дійсних чисел* **R** називається множина *V* деяких елементів, на якій визначені дві операції:

– *операція додавання*, що ставить у відповідність кожній парі елементів u, v з множини *V* однозначно визначений елемент $u+v$ із *V*, який називається їхньою *сумою*;

– *операція множення елементів множини V на дійсні числа (скаляри)*, що ставить у відповідність кожному числу $\alpha \in \mathbf{R}$ і кожному елементу $u \in V$ однозначно визначений елемент αu з множини *V*, який називається *добутком числа* α *на елемент* u.

При цьому операції додавання і множення на дійсні числа задовольняють такі умови:

1) $u+v = v+u$ для довільних $u, v \in V$ (комутативність);

2) $(u+v)+w = u+(v+w)$ для довільних $u, v, w \in V$ (асоціативність);

3) існує такий елемент $0 \in V$, що $v+0 = v$ для довільного $v \in V$ (існування нульового елемента);

4) для довільного $v \in V$ існує такий елемент $(-v) \in V$, що $v+(-v) = 0$ (існування протилежного елемента);

5) $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ для довільних $u, v \in V$ і $\lambda \in \mathbf{R}$ (дистрибутивність множення на число відносно додавання);

6) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ для довільного $v \in V$ і $\lambda, \mu \in$ **R** (дистрибутивність множення на елемент множини *V* відносно додавання чисел);

7) $\lambda\cdot(\mu\cdot v)=(\lambda\mu)\cdot v$ для довільних $v\in V$ і $\lambda,\mu\in$ **R** (асоціативність множення на число);

8) $1\cdot v=v$ для довільного $v\in V$ (тотожна дія одиниці).

Елементи лінійного простору називаються *векторами*.

Приклади лінійних просторів

1. Множина векторів на площині $\mathbf{R}^2$ є лінійним простором над полем **R** із звичайними операціями геометричного додавання векторів та множення вектора на число. Так само множина векторів в просторі $\mathbf{R}^3$ є лінійним простором над полем **R** із звичайними операціями геометричного додавання векторів та множення вектора на число.

2. Поле комплексних чисел **C** є лінійним простором над полем дійсних чисел **R** з операціями додавання комплексних чисел та множення комплексного числа на число з **R**:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$\lambda\cdot(a+bi)=\lambda a+\lambda bi,$$

де $\lambda\in\mathbf{R}$, $a+bi, c+di\in\mathbf{C}$.

3. Нехай $V=\{0\}$, а операції додавання і множення на скаляр визначаються, як

$$0+0=0,$$

$$\lambda\cdot 0=0,\ \forall\lambda\in\mathbf{R}.$$

$V=\{0\}$ є лінійним простором над **R**, який називається *нульовим* лінійним простором.

4. Множина всіх числових векторів, що мають n координат

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,...,x_n)\mid\ x_1,x_2,...,x_n\in\mathbf{R}\}$$

є лінійним простором над полем **R**, який називається *арифметичним лінійним простором*.

Додавання векторів і множення на число $\lambda\in\mathbf{R}$ визначають таким чином:

$$(x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n)=(x_1+y_1,...,x_n+y_n);$$

$$\lambda(x_1,...,x_n)=(\lambda x_1,...,\lambda x_n),\ \lambda\in\mathbf{R}.$$

5. Множина всіх матриць однакового розміру $Mat_{m\times n}(\mathbf{R})$ утворює лінійний простір над полем **R** відносно операцій додавання матриць і поелементного множення матриць на число.

6. Множина всіх многочленів

$$\mathbf{R}[x]=\{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n\mid a_i\in\mathbf{R};\ n\in\mathbf{N}\}$$

від однієї змінної з дійсними коефіцієнтами є лінійним простором над полем **R** відносно операцій додавання многочленів та множення многочленів на число.

7. Нехай M – деяка множина. Позначимо через $F(M,\mathbf{R})$ множину функцій $f:M\to\mathbf{R}$ на множині M із значеннями в полі **R**. $F(M,\mathbf{R})$ є лінійним простором відносно таких операцій:

$$(f+g)(m)=f(m)+g(m),$$

$$(\lambda\cdot f)(m)=\lambda f(m),$$

для довільних $f,g\in F(M,\mathbf{R})$, $m\in M$, $\lambda\in\mathbf{R}$.

Означення. Підмножина W лінійного простору V називається *підпростором*, якщо вона замкнена відносно операцій додавання векторів та множення вектора на число, визначених у V:

1) для довільних векторів $u,v\in W$ маємо $u+v\in W$;

2) для довільного вектора $u\in W$ і скаляра $\lambda\in\mathbf{R}$ маємо $\lambda\cdot u\in W$.

Іншими словами, підмножина W буде підпростором V, якщо W сама є лінійним простором відносно операцій, заданих в просторі V.

Приклад 36. Перевірити, чи є множина W векторів простору $\mathbf{R}^n$, всі координати яких рівні між собою, підпростором лінійного простору $\mathbf{R}^n$.

Розв'язання. Розглянемо два вектори:

$$a=(x;x;...;x)\in W \text{ і } b=(y;y;...;y)\in W..$$

Тоді

$$a + b = (x + y; x + y; ...; x + y) \in W,$$

оскільки вектор $a + b$ має однакові координати.

Нехай $\lambda \in \mathbf{R}$, тоді

$$\lambda \cdot a = (\lambda x; \lambda x; ...; \lambda x) \in W,$$

оскільки вектор $\lambda \cdot a$ має однакові координати.

Отже, W − підпростір $\mathbf{R}^n$.

Означення. *Лінійною комбінацією* системи векторів $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ з коефіцієнтами $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbf{R}$ називається вектор

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \in V.$$

Якщо вектор $v \in V$ є лінійною комбінацією векторів $v_1, v_2, ..., v_k \in V$, то кажуть, що вектор v *лінійно виражається* через систему $v_1, v_2, ..., v_k$.

Означення. *Лінійною оболонкою*, породженою системою векторів $v_1, v_2, ..., v_k \in V$, називається множина всіх можливих лінійних комбінацій цих векторів:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k \in V, \ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbf{R}.$$

Позначається як $lin(v_1, ..., v_k)$ або $< v_1, v_2, ..., v_k >$. Лінійна оболонка $lin(v_1, ..., v_k)$ векторів є підпростором V.

Система векторів $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ називається *системою твірних* простору V, якщо $lin(v_1, ..., v_n) = V$.

Означення. Система векторів $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ називається *лінійно незалежною*, якщо

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0$$

тоді і лише тоді, коли

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$$

В іншому випадку вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$ називаються *лінійно залежними*.

Лінійна залежність векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ означає, що існують такі $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$, не всі рівні нулю, що

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0.$$

Твердження 15. Якщо нульовий вектор 0 належить системі векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, то вона є лінійно залежною.

Доведення. Дійсно, для довільного $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda \neq 0$ має місце рівність

$$0v_1 + 0v_2 + \ldots + \lambda 0 + \ldots + 0v_n = 0,$$

яка і доводить лінійну залежність векторів. ■

Приклади

1. Вектори $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ простору $\mathbf{R}^3$ лінійно незалежні, оскільки з виразу

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

Так само лінійно незалежними є вектори арифметичного простору $\mathbf{R}^n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Вектори $a_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}$ є лінійно залежними, оскільки

$$2a_1+a_2-a_3=2\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Твердження 16 (критерій лінійної залежності векторів). Система векторів $v_1,v_2,...,v_n\in V$ $(n\geq 2)$ лінійно залежна, тоді і тільки тоді, коли хоча б один з векторів системи є лінійною комбінацією інших векторів.

Це твердження інколи приймають за означення лінійної залежності.

Доведення. Необхідність. Нехай система векторів $v_1,v_2,...,v_n\in V$ – є лінійно залежною. За означенням існують такі $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbf{R}$, не всі рівні нулю, що

$$\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+...+\lambda_kv_k+..+\lambda_nv_n=0.$$

Нехай $\lambda_k\neq 0$. Тоді з рівності знаходимо, що v_k є лінійною комбінацією інших векторів системи:

$$v_k=-\frac{1}{\lambda_k}(\lambda_1v_1+...+\lambda_{k-1}v_{k-1}+\lambda_{k+1}v_{k+1}+...+\lambda_nv_n).$$

Достатність. Нехай деякий вектор v_i системи векторів $v_1,v_2,...,v_n\in V$ $(n\geq 2)$ лінійно виражається через інші вектори системи

$$v_i=\lambda_1v_1+...+\lambda_{i-1}v_{i-1}+\lambda_{i+1}v_{i+1}+...+\lambda_nv_n. \qquad (46)$$

Перенесемо всі доданки рівності (46) в один бік:

$$\lambda_1v_1+...+\lambda_{i-1}v_{i-1}-v_i+\lambda_{i+1}v_{i+1}+...+\lambda_nv_n=0.$$

Дістанемо, що лінійна комбінація векторів $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ дорівнює нулю принаймні за одного ненульового коефіцієнта, що стоїть біля вектора v_i і дорівнює мінус одиниці. За означенням система векторів $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ є лінійно залежною. ■

Підсистема $v_1, v_2, ..., v_m$ $(m < n)$ системи векторів $v_1, v_2, ..., v_n$ називається *максимальною лінійно незалежною*, якщо приєднуючи до цієї підсистеми довільний вектор системи, отримаємо лінійно залежну систему векторів.

Твердження 17. Кожна максимальна лінійно незалежна підсистема системи векторів $v_1, v_2, ..., v_n$ буде також максимальною лінійно незалежною підсистемою її лінійної оболонки $lin(v_1, v_2, ..., v_n)$.

Доведення. Нехай $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$ – максимальна лінійно незалежна підсистема системи векторів $v_1, v_2, ..., v_n$. Тоді кожен вектор системи $v_1, v_2, ..., v_n$ лінійно виражається через вектори $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$ за означенням максимальної лінійної незалежної підсистеми. Оскільки кожний вектор лінійного простору $lin(v_1, v_2, ..., v_n)$ лінійно виражається через вектори $v_1, v_2, ..., v_n$, а вектори $v_1, v_2, ..., v_n$ – через вектори $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$, то кожен вектор простору $lin(v_1, v_2, ..., v_n)$ лінійно виражається через вектори $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$. Тоді для кожного вектора $u \in lin(v_1, v_2, ..., v_n)$ система $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}, u$ буде лінійно залежною. Отже, $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$ є максимальною лінійно незалежною підсистемою лінійної оболонки $lin(v_1, v_2, ..., v_n)$. ■

Означення. *Базисом* лінійного простору *V* називається довільна лінійно незалежна система твірних простору *V*.

Лінійний простір *V* називається *скінченновимірним*, якщо в ньому існує базис, що має скінченну кількість векторів. В іншому разі простір називається *нескінченновимірним*. В подальшому розглядатимемо скінченновимірні простори.

Твердження 18. Нехай V – лінійний простір. Система векторів $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ є базисом простору V тоді і тільки тоді, коли довільний вектор $v \in V$ однозначно представляється, як лінійна комбінація векторів $v_1, v_2, ..., v_n$:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n, \ \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{R}. \qquad (47)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $v_1, v_2, ..., v_n$ – базис V. Звідси $v_1, v_2, ..., v_n$ – система твірних V, тобто довільний вектор $v \in V$ представляється у вигляді

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \text{ для деяких } \alpha_i \in \mathbf{R}. \qquad (48)$$

Доведемо однозначність розкладу. Нехай існують $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbf{R}$ такі, що

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n. \qquad (49)$$

Віднімемо рівність (49) від рівності (48):

$$0 = (\beta_1 - \alpha_1)v_1 + (\beta_2 - \alpha_2)v_2 + ... + (\beta_n - \alpha_n)v_n.$$

Оскільки вектори $v_1, v_2, ..., v_n$ – лінійно незалежні, то

$$\beta_1 - \alpha_1 = 0, \ \beta_2 - \alpha_2 = 0, ..., \beta_n - \alpha_n = 0,$$

або

$$\beta_1 = \alpha_1, \ \beta_2 = \alpha_2, ..., \ \beta_n = \alpha_n.$$

Достатність. Нехай довільний вектор $v \in V$ однозначно представляється як лінійна комбінація векторів $v_1, v_2, ..., v_n$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n.$$

Звідси випливає, що $v_1, v_2, ..., v_n$ – система твірних простору V.

Залишилось довести, що $v_1, v_2, \ldots, v_n$ є лінійно незалежними. Припустимо, що $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – лінійно залежні. Тоді існують $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не всі рівні нулю, так що

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0.$$

Але нуль-вектор 0 можна записати як $0 = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$. З однозначності розкладу випливає, що

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \ldots,\ \alpha_n = 0.$$

Отже, вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – лінійно незалежні і $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – базис V. ■

Означення. Однозначно визначений набір коефіцієнтів $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ розкладу вектора $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ за базисом $v_1, v_2, \ldots, v_n$ називається *координатами вектора* v в базисі $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Твердження 19. В скінченновимірному лінійному просторі V кількість векторів у всіх базисах однакова.

Доведення. Нехай $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – деякий базис V. Покажемо, що жодна система векторів $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ з $m > n$ не може бути базисом V.

Припустимо, що $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$, $m > n$ – також базис V. Розкладемо вектори базису $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ за векторами базису $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$:

$$f_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i,\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

Для довільних $x_k \in \mathbf{R}$ маємо

$$\sum_{k=1}^{m} x_k f_k = \sum_{k=1}^{m} x_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k \right) e_i.$$

Оскільки $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ – базис V, то нульовий вектор однозначно розкладається за векторами цього базису: $0 = \sum_{i=1}^{n} 0e_i$.

Тому умова $\sum_{k=1}^{m} x_k f_k = 0$ рівносильна системі однорідних лінійних рівнянь відносно x_k:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k = 0,\ i = 1,...,n.$$

Оскільки кількість невідомих m більша за кількість рівнянь n, ця система невизначена, має ненульовий розв'язок. Тобто $\sum_{k=1}^{m} x_k f_k = 0$, де не всі коефіцієнти x_k дорівнюють нулю. Звідси $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ – лінійно залежна. Отримали суперечність, припустивши, що $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ – базис.

Звідси випливає, що жоден базис не може містити більше елементів, ніж інший базис. ■

Усі базиси скінченновимірного лінійного простору V містять однакову кількість векторів. Кількість векторів в довільному базисі називається *розмірністю лінійного простору* V і позначається як $\dim V$.

Якщо розмірність лінійного простору V дорівнює n, то V називається n*-вимірним лінійним простором*.

Вважають, що базисом нульового лінійного простору $V = \{0\}$ є пуста множина, а його розмірність його дорівнює нулю.

Теорема 16. Нехай $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Рівносильними є такі умови:

1) $v_1, v_2, ..., v_n$ – базис V;

2) $v_1, v_2, ..., v_n$ – максимальна лінійно незалежна система векторів з V;

3) $v_1, v_2, ..., v_n$ – мінімальна система твірних V.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) Оскільки $v_1, v_2, ..., v_n$ – базис *V*, то $v_1, v_2, ..., v_n$ – лінійно незалежні і $lin(v_1, v_2, ..., v_n) = V$. Звідси довільний вектор $v \in V$ є лінійною комбінацією векторів $v_1, v_2, ..., v_n$. Отже, $v_1, v_2, ..., v_n$ – максимальна лінійно незалежна система векторів з *V*.

(2) $\Rightarrow$ (1) $v_1, v_2, ..., v_n$ – максимальна лінійно незалежна система векторів з *V*. Залишилось довести, що $v_1, v_2, ..., v_n$ – система твірних простору *V*. Оскільки $v_1, v_2, ..., v_n$ – максимальна лінійно незалежна система векторів, то для довільного вектора $v \in V$ система векторів $v_1, v_2, ..., v_n, v$ – лінійно залежна. Звідси v є лінійною комбінацією векторів $v_1, v_2, ..., v_n$. Отже, $v_1, v_2, ..., v_n$ – система твірних простору *V*.

(1) $\Rightarrow$ (3) Оскільки $v_1, v_2, ..., v_n$ – базис *V*, то $v_1, v_2, ..., v_n$ – система твірних простору *V*. Доведемо, що ця система твірних є мінімальною. Припустимо, що $v_1, v_2, ..., v_{i-1} v_{i+1}, ..., v_n$ – система твірних. Тоді вектор v_i є лінійною комбінацією інших векторів v_j системи. Звідси отримуємо, що $v_1, v_2, ..., v_n$ – лінійно залежна система векторів. Отримали суперечність.

(3) $\Rightarrow$ (1) З умови (3) маємо, що $v_1, v_2, ..., v_n$ – система твірних *V*. Залишилось довести, що $v_1, v_2, ..., v_n$ – лінійно незалежні. Припустимо, що $v_1, v_2, ..., v_n$ – лінійно залежні. Звідси за твердженням 16 для деякого i вектор v_i є лінійною комбінацією інших векторів системи v_j. Але тоді $v_1, v_2, ..., v_{i-1} v_{i+1}, ..., v_n$ – система твірних, що суперечить мінімальності. Отже, $v_1, v_2, ..., v_n$ – лінійно незалежна система векторів простору *V*. ■

Твердження 20 (про доповнення базису). Нехай V – скінченновимірний лінійний простір розмірності n. Тоді будь-яку лінійно незалежну систему векторів $v_1, v_2, ..., v_k \in V$, $k < n$, можна доповнити до базису цього простору.

Доведення. Нехай $\dim(V) = n$ і $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ – лінійно незалежна система векторів, $k < n$. Серед векторів простору V є принаймні один вектор e_1, який не є лінійною комбінацією векторів $v_1, v_2, ..., v_k$. Якби такого вектора не існувало, то $k = n$ згідно з твердженням 18. Приєднаємо вектор e_1 до системи $v_1, v_2, ..., v_k$. Отримаємо систему векторів $v_1, v_2, ..., v_k, e_1$, яка є лінійно незалежною (випливає з твердження 16). Якщо $k+1 < n$, то у просторі V існує вектор e_2, який не є лінійною комбінацією векторів $v_1, v_2, ..., v_k, e_1$ з таких самих міркувань. Приєднаємо вектор e_2 до цієї системи і отримаємо систему $v_1, v_2, ..., v_k, e_1, e_2$, яка є лінійно незалежною. Цей процес продовжуємо доти, доки не отримаємо в системі n лінійно незалежних векторів, які будуть базисом простору V. ■

Наслідок. Якщо U – підпростір скінченновимірного простору V, то будь-який базис підпростору U може бути доповнений до базису простору V. Зокрема, $\dim(U) \le \dim(V)$.

Твердження 21. Будь-які дві максимальні лінійно незалежні підсистеми системи векторів $v_1, v_2, ..., v_n$ складаються з однакової кількості векторів.

Доведення. Розглянемо лінійний простір $lin(v_1, v_2, ..., v_n)$, породжений векторами $v_1, v_2, ..., v_n$. Нехай $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$ та $v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_m}$ – дві довільні максимальні лінійно незалежні підсистеми системи $v_1, v_2, ..., v_n$, що містять відповідно $k < n$ та $m < n$ векторів. Тоді за твердженням 17 $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$ та $v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_m}$ будуть максимальними лінійно незалежними підсистемами простору $lin(v_1, v_2, ..., v_n)$. За теоремою 16 $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}$ – базис простору $lin(v_1, v_2, ..., v_n)$ і $v_{j_1}, v_{j_2}, ..., v_{j_m}$ – базис простору $lin(v_1, v_2, ..., v_n)$. За твердженням 19 кількість векторів у всіх базисах скінченновимірного лінійного простору однакова. Отже, $k = m$. ■

Означення. *Рангом* системи векторів $v_1, v_2, ..., v_n$ називається кількість векторів в довільній максимальній лінійно незалежній підсистемі даної системи векторів. Позначається $rank(v_1, v_2, ..., v_n)$.

Вектори $v_1, v_2, ..., v_m$ – лінійно незалежні тоді і тільки тоді $rank(v_1, v_2, ..., v_m) = m$.

З тверджень 17 і 21 випливає твердження.

Твердження 22. Ранг системи векторів $v_1, v_2, ..., v_n$ дорівнює розмірності лінійної оболонки $lin(v_1, v_2, ..., v_n)$.

Твердження 23. Якщо кожен з векторів системи $v_1, v_2, ..., v_n$ лінійно виражається через вектори системи $w_1, w_2, ..., w_m$, то $rank(v_1, v_2, ..., v_n) \le rank(w_1, w_2, ..., w_m)$.

Доведення. Розглянемо лінійні простори $lin(v_1, v_2, ..., v_n)$, $lin(w_1, w_2, ..., w_m)$, породжені відповідно системами векторів $v_1, v_2, ..., v_n$ та $w_1, w_2, ..., w_m$. Оскільки вектори системи $v_1, v_2, ..., v_n$ лінійно виражаються через вектори системи $w_1, w_2, ..., w_m$, то $lin(v_1, v_2, ..., v_n)$ буде підпростором $lin(w_1, w_2, ..., w_m)$. Отже, за наслідком з твердження 20 маємо

$$\dim(lin(v_1, v_2, ..., v_n)) \le \dim(lin(w_1, w_2, ..., w_m)).$$

Звідси, за твердженням 22, отримаємо

$$rank(v_1, v_2, ..., v_n) \le rank(w_1, w_2, ..., w_m). \qquad ■$$

Приклад 37. Розглянемо арифметичний лінійний простір числових векторів $\mathbf{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}\}$.

Вектори

$$e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1) \in \mathbf{R}^n$$

є базисом простору $\mathbf{R}^n$.

Дійсно, довільний вектор $(x_1,...,x_n)\in \mathbf{R}^n$ можна подати у вигляді

$$(x_1,...,x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

Звідси $e_1,e_2,...,e_n$ – система твірних простору V.

Якщо $x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = 0$, то

$$x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n =$$

$$= x_1(1,0,...,0) + x_2(0,1,...,0),..., x_n(0,0,...,1) =$$
$$= (x_1, x_2,..., x_n) = (0,0,...,0).$$

Звідси $x_1 = 0, x_2 = 0,..., x_n = 0$ і тому $e_1,e_2,...,e_n$ – лінійно незалежні.

Отже, $e_1,e_2,...,e_n$ – базис V, $\dim \mathbf{R}^n = n$. Цей базис називають також *природним,* або *канонічним,* базисом арифметичного простору $\mathbf{R}^n$.

Приклад 38. Розкласти вектор $a = (-1;0;3)$ за базисом $e_1 = (1;1;1)$, $e_2 = (-1;1;1)$, $e_3 = (-1;-1;1)$.

Розв'язання. Запишемо розклад з невідомими координатами: $a = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, або в покоординатному вигляді

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Отриману систему лінійних рівнянь розв'яжемо методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

Після перетворень маємо систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ \quad 2x_2 \qquad = 1, \\ \qquad\quad 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{2}$. Шуканий розклад вектора: $a = e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{3}{2}e_3$.

Перехід від одного базису лінійного простору до іншого. Матриця переходу

Нехай V – лінійний простір розмірності n. Нехай $e_1, e_2, ..., e_n$ та $f_1, ..., f_n$ – два базиси лінійного простору V. Розкладемо кожен вектор другого базису за векторами першого базису:

$$\begin{cases} f_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + ... + t_{n1}e_n, \\ f_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + ... + t_{n2}e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + ... + t_{nn}e_n. \end{cases}, \ t_{ij} \in \mathbf{R}. \tag{50}$$

Матриця

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \tag{51}$$

називається *матрицею переходу від базису* $\{e_i\}$ *до базису* $\{f_i\}$. Матриця переходу T є невиродженою матрицею, тобто $\det T \neq 0$.

Отже, для того щоб отримати матрицю переходу від базису $\{e_i\}$ до базису $\{f_i\}$ треба кожен з векторів другого базису розкласти за векторами першого базису і координати розкладу записати як *стовпчики* матриці переходу. Розклад (50) можна подати у вигляді

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot T. \tag{52}$$

З'ясуємо, як пов'язані координати деякого вектора $a \in V$ в різних базисах $\{e_i\}$ та $\{f_i\}$.

Нехай

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

і

$$a = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \dots + \beta_n f_n = (f_1, f_2, \dots, f_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Тоді, беручи до уваги рівність (52), дістанемо

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки координати розкладу вектора за базисом визначаються однозначно, остаточно маємо

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \tag{53}$$

де T – матриця переходу від базису $\{e_i\}$ до базису $\{f_i\}$, $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ – координати вектора a у базисі $\{e_i\}$ і $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ – координати вектора a у базисі $\{f_i\}$.

Приклад 39. Нехай $\{e_i\}$ і $\{f_i\}$ – два базиси у просторі V:

$$e_1=(0;0;-1),\ e_2=(-1;0;1),\ e_3=(1;1;1);$$

$$f_1=(2;0;2),\ f_2=(0;3;0),\ f_3=(0;0;1).$$

Відомий розклад вектора a за базисом $\{f_i\}$: $a=f_1-f_2+f_3$. Знайти координати розкладу цього вектора за базисом $\{e_i\}$.

Розв'язання. Знайдемо матрицю переходу від базису $\{e_i\}$ до $\{f_i\}$. Згідно з (50) запишемо вектори базису $\{f_i\}$ за векторами базису $\{e_i\}$

$$\begin{cases} f_1=t_{11}e_1+t_{21}e_2+t_{31}e_3, \\ f_2=t_{12}e_1+t_{22}e_2+t_{32}e_3, \\ f_3=t_{13}e_1+t_{23}e_2+t_{33}e_3. \end{cases} \tag{54}$$

Матриця переходу від базису $\{e_i\}$ до базису $\{f_i\}$ має вигляд

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

Записавши базисні вектори в координатному вигляді в трьох рівняннях системи (54), отримаємо три системи лінійних рівнянь з однією і тією самою основною матрицею, стовпчиками якої є координати векторів e_1, e_2, e_3, а стовпчики вільних коефіцієнтів в системах – координати векторів $f_1,\ f_2,\ f_3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’яжемо отримані три СЛР методом Гаусса. Оскільки основні матриці цих трьох СЛР однакові, то запишемо розширену матрицю одразу для трьох СЛР у вигляді:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Матрицю в лівій частині (до вертикальної риски) елементарними перетвореннями рядків розширеної матриці зведемо до одиничної. Після таких елементарних перетворень праворуч від риски отримаємо матрицю переходу T:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, матриця переходу від базису $\{e_i\}$ до базису $\{f_i\}$:

$$T = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Координати розкладу заданого вектора за базисом $\{e_i\}$ знайдемо за формулою (53):

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор $a = -11e_1 - 5e_2 - 3e_3$.

Ранг матриці

З матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

пов'язують дві системи векторів:

1) систему її вектор-стовпчиків

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad . \quad . \quad . \quad . \ , \ a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix};$$

2) систему її вектор-рядків

$$b_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}),\ b_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}), ..., b_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}).$$

Ранг системи вектор-стовпчиків називається *стовпчиковим рангом* матриці A і позначається як $r_{cm}(A)$, а ранг системи вектор-рядків називається *рядковим рангом* матриці A і позначається як $r_{ряд}(A)$.

Твердження 24. Стовпчиковий ранг матриці $r_{cm}(A)$ та рядковий ранг матриці $r_{ряд}(A)$ не змінюється після елементарних перетворень рядків та стовпчиків матриці A.

Доведення. Покажемо, що стовпчиковий ранг $r_{cm}(A)$ матриці не змінюється внаслідок елементарних перетворень стовпчиків матриці.

Нехай S – система вектор-стовпчиків $a_1,...,a_n$ матриці A, $rank(S) = r_{cm}(A)$. Позначимо як S_1 систему вектор-стовпчиків, отриману після елементарних перетворень стовпчиків матриці A. Оскільки кожен з векторів S_1 лінійно виражається через вектори з S, то за твердженням 23 $rank(S_1) \le rank(S)$. З другого боку, S можна отримати з S_1 оберненою послідовністю елементарних перетворень. Тому $rank(S) \le rank(S_1)$. Отже, $rank(S) = rank(S_1) = r_{cm}(A)$, тобто стовпчиковий ранг матриці A не змінюється після елементарних перетвореннях стовпчиків.

Покажемо, що стовпчиковий ранг не змінюється внаслідок елементарних перетворень рядків матриці A. Нехай $r_{cm}(A) = rank(a_1,...,a_n) = k$ і вектор-стовпчики $a_{i_1}, a_{i_2},..., a_{i_k}$ матриці A утворюють максимальну лінійно незалежну підсистему системи вектор-стовпчиків $a_1,...,a_n$ матриці A. Тоді $a_{i_1}, a_{i_2},..., a_{i_k}$ є базисом підпростору $lin(a_1,..,a_n)$. Тому існують єдині набори коефіцієнтів $(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2},..., \lambda_{i_k})$ такі, що вектори a_{i_j}, $j = k+1,...,n$ є лінійною комбінацією векторів $a_{i_1}, a_{i_2},..., a_{i_k}$

$$\lambda_{i_1} a_{i_1} + ... + \lambda_{i_k} a_{i_k} = a_{i_j}.$$

Це означає, що набір $(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2},..., \lambda_{i_k})$ є розв'язком записаної у векторній формі визначеної СЛР:

$$x_{i_1} a_{i_1} + ... + x_{i_k} a_{i_k} = a_{i_j}. \tag{55}$$

Після елементарних перетворень рядків матриці A стовпчики $a_{i_1}, a_{i_2},..., a_{i_k}$ перейдуть у стовпчики $a'_{i_1}, a'_{i_2},..., a'_{i_k}$, а СЛР (55) перейде в рівносильну СЛР:

$$x_{i_1} a'_{i_1} + ... + x_{i_k} a'_{i_k} = a'_{i_j}. \tag{56}$$

Набір $(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2},..., \lambda_{i_k})$ є єдиним розв'язком СЛР (56). Отже, вектори $a'_{i_{k+1}},..., a'_{i_n}$ можна подати як лінійну комбінацію векторів $a'_{i_1},..., a'_{i_k}$. Тобто $a'_{i_1},..., a'_{i_k}$ – система твірних $lin(a'_{i_1},..., a'_{i_n})$.

Лінійна незалежність $a'_{i_1},..., a'_{i_k}$ випливає з міркувань, аналогічних наведеним. Справді, оскільки система векторів $a_{i_1},..., a_{i_k}$ – лінійно незалежна, то лінійна комбінація

$\lambda_1 a_{i_1} + ... + \lambda_k a_{i_k} = 0$ лише за нульових значень $\lambda_1 = 0, ..., \lambda_n = 0$. Це означає, що набір $\lambda_1 = 0, ..., \lambda_n = 0$ є розв'язком записаної у векторній формі визначеної системи лінійних рівнянь

$$x_1 a_{i_1} + ... + x_k a_{i_k} = 0, \tag{57}$$

основна матриця якої збігається з основною матрицею СЛР (55). Виконаємо ту саму послідовність елементарних перетворень рядків матриці СЛР (57), яка зроблена для рядків СЛР (55). Стовпчики $a_{i_1}, ..., a_{i_k}$ перейдуть у стовпчики $a'_{i_1}, ..., a'_{i_k}$, а СЛР (57) – у рівносильну СЛР:

$$x_1 a'_{i_1} + ... + x_k a'_{i_k} = 0,$$

тому набір $\lambda_1 = 0, ..., \lambda_n = 0$ залишається її єдиним розв'язком, і система векторів $a'_{i_1}, ..., a'_{i_k}$ є лінійно незалежною.

Отже, $a'_{i_1}, ..., a'_{i_k}$ – базис $lin(a'_{i_1}, ..., a'_{i_n})$ і $rank(A') = k$.

Для рядкового рангу матриці $r_{ряд}(A)$ твердження доводимо аналогічно. Для цього достатньо розглянути матрицю A^T. ■

Теорема 17 (про ранг матриці). Рядковий ранг $r_{ряд}(A)$ матриці *A* збігається зі стовпчиковим рангом $r_{ст}(A)$ матриці *A*.

Доведення. Нехай $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Відомо, що елементарними перетвореннями рядків матриці (і, можливо, перестановкою стовпчиків) матрицю *A* можна звести до вигляду (20), тобто

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & f_{1,r+1} & ... & f_{1n} \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & f_{2,r+1} & ... & f_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & f_{r-1,r+1} & ... & f_{r-1,n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & f_{r,r+1} & ... & f_{rn} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

До кожного стовпчика із номерами від $r+1$ до n додамо перший стовпчик, помножений відповідно на $-f_{1,r+1},\dots,-f_{1,n}$. Отримаємо нулі в першому рядку, починаючи з $r+1$ місця до n-го. Аналогічно зробимо нулі в другому рядку і т.д. Отримаємо матрицю

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

у якої на діагоналі стоїть r одиниць, а решта елементів – нулі. Перші r вектор-рядків лінійно незалежні, і це максимальна лінійно незалежна система вектор-рядків матриці *B*, оскільки решта рядків нульові. Аналогічно перші r вектор-стовпчиків матриці B утворюють максимальну лінійно незалежну систему вектор-стовпчиків матриці *B*. Отже, $r_{ряд}(B)=r_{ст}(B)=r$.

Ми перейшли від матриці A до матриці B за допомогою елементарних перетворень рядків і стовпчиків, які не змінюють жодного з рангів. Тому $r_{ряд}(A)=r_{ст}(A)=r$. ■

Означення. Спільне значення рядкового та стовпчикового рангів матриці A називається *рангом матриці* і позначається як $rank(A)$ (або $r(A)$).

З твердження 24 та теореми 17 маємо наслідок.

Наслідок. Ранг матриці не змінюється внаслідок елементарних перетворень рядків або стовпчиків матриці.

Для того щоби визначити ранг матриці $A=(a_{ij})_{m\times n}$, потрібно визначити максимальну кількість лінійно незалежних вектор-стовпчиків або вектор-рядків матриці. Наприклад, визначимо максимальну кількість лінійно незалежних вектор-стовпчиків. Оскільки ранг матриці не змінюється внаслідок елементарних перетворень рядків або стовпчиків, то матрицю A за допомогою прямого ходу алгоритму Гаусса зведемо до трапецієподібно-східцевого вигляду (21), тобто до матриці

$$B = \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n_2} & a_{1n_2+1} & a_{1n_2+2} & \dots & a_{1n_k} & \dots & a_{1,n_r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \underline{a_{2,n_2+1}} & a_{2,n_2+2} & \dots & a_{2n_k} & \dots & a_{2,n_r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \underline{a_{r,n_r+1}} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

У матриці B підкреслені елементи не дорівнюють нулю, тож матриця B має r ненульових рядків.

Далі визначаємо, якою є максимальна кількість лінійно незалежних вектор-стовпчиків матриці B. У матриці B розглянемо вектор-стовпчики, в яких стоять ненульові підкреслені елементи, тобто вектор-стовпчики $a_1, a_{n_2+1}, \dots, a_{n_r+1}$. Ці вектор-стовчики лінійно незалежні. Справді, їхня лінійна комбінація дорівнює нулю

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_{n_2+1} + \dots + \lambda_r a_{n_r+1} = 0, \quad (59)$$

тільки за умови $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$, оскільки розв'язуючи систему лінійних однорідних рівнянь (59), записану у векторному вигляді, методом Гаусса отримаємо єдиний нульовий розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \underline{a_{11}} & a_{1n_2+1} & \dots & a_{1,n_r+1} & 0 \\ 0 & \underline{a_{2,n_2+1}} & \dots & a_{2,n_r+1} & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \underline{a_{r,n_r+1}} & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \dots \\ \lambda_r = 0. \end{cases}$$

Зазначимо, що система лінійних однорідних рівнянь (59) містить r ненульових рівнянь після прямого ходу алгоритму Гаусса і r невідомих та є визначеною.

Крім того, r векторів $a_1, a_{n_2+1}, ..., a_{n_r+1}$ утворюють максимальну лінійно незалежну систему. Справді, приєднуючи до цієї системи будь-який інший вектор-стовпчик a_k матриці B отримаємо аналогічно до системи (59) систему лінійних однорідних рівнянь, яка містить r рівнянь та $r+1$ невідомих. Така система лінійних рівнянь є невизначеною, оскільки має вільну невідому. Тобто система векторів $a_1, a_{n_2+1}, ..., a_{n_r+1}, a_k$ є лінійно залежною.

Отже, максимальна кількість лінійно незалежних вектор-стовпчиків матриці B дорівнює r, тому $rank(B) = r$, а отже, і $rank(A) = r$.

Зазначимо, що $rank(A)$ дорівнює кількості ненульових рядків трапецієподібно-східцевої матриці (58) після прямого ходу алгоритму Гаусса або, що те саме, кількості сходинок (тобто кількості підкреслених ненульових елементів в матриці (58)).

Приклад 40. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Проведемо для матриці A прямий хід алгоритму Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & \underline{-3} & -4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кількість ненульових рядків трапецієподібно-східцевої матриці після прямого ходу алгоритму Гаусса дорівнює трьом, тому максимальна кількість лінійно незалежних вектор-стовпчиків також дорівнює трьом. Отже, $rank A = 3$. За максимальну лінійну незалежну систему вектор-стовпчиків можна обрати перший, другий і четвертий стовпчики матриці.

Зауважимо, що, визначаючи ранг матриці, можна виконувати елементарні перетворення як рядків, так і стовпчиків матриці.

Використання поняття рангу матриці дає можливість чітко, без громіздких пояснень та описів формулювати твердження та висновки в багатьох задачах лінійної алгебри.

Теорема 18 (Кронекера-Капеллі). Система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{60}$$

сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці A дорівнює рангу розширеної матриці A^*, тобто $rank\ A = rank\ A^*$.

Доведення. Запишемо СЛР (60) у векторному вигляді

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = b, \tag{61}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – вектор-стовпчики матриці A, b – стовпчик невідомих.

Необхідність. Нехай СЛР (61) є сумісною і $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – розв'язок системи, тобто

$$\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \ldots + \alpha_na_n = b.$$

Звідси

$$lin(a_1, a_2, ..., a_n) = lin(a_1, a_2, ..., a_n, b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dim(lin(a_1, a_2, ..., a_n)) = \dim(lin(a_1, a_2, ..., a_n, b)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow rank(a_1, a_2, ..., a_n) = rank(a_1, a_2, ..., a_n, b).$$

Отже, $rank\ A = rank\ A^*$.

Достатність. Нехай $rank(a_1, a_2, ..., a_n) = rank(a_1, a_2, ..., a_n, b)$, тоді $\dim(lin(a_1, a_2, ..., a_n)) = \dim(lin(a_1, a_2, ..., a_n, b))$.

Оскільки $lin(a_1, a_2, ..., a_n) \subset lin(a_1, a_2, ..., a_n, b)$ і вирази мають однакову розмірність, то $lin(a_1, a_2, ..., a_n) = lin(a_1, a_2, ..., a_n, b)$. Звідси випливає, що $b \in lin(a_1, a_2, ..., a_n)$ і існують $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbf{R}$ такі, що $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$. Отже, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – розв'язок СЛР (61), тобто СЛР є сумісною. ■

Наслідки з теореми 18.

1. Система лінійних рівнянь є визначеною тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, тобто $rankA^* = rankA = n$.

2. Система лінійних рівнянь є невизначеною тоді і тільки тоді, коли $rankA^* = rankA < n$.

Зауваження. У невизначених СЛР кількість пов'язаних невідомих дорівнює кількості ненульових рядків після проведення прямого ходу алгоритму Гаусса, тобто рангу основної матриці. Ранг дорівнює максимальній кількості лінійно незалежних, наприклад, вектор-стовпчиків основної матриці, відповідних пов'язаним невідомим. Цю максимальну лінійно незалежну систему вектор-стовпчиків ще називають *базисними стовпчиками* матриці, оскільки вони утворюють базис підпростору, породженого вектор-стовпчиками матриці.

Приклад 41. Розв’язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 3, \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 4, \\ 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -5. \end{cases}$$

Розв’язання. Система лінійних рівнянь має чотири невідомі та три рівняння. Розв’яжемо її методом Гаусса. Запишемо розширену матрицю системи та зробимо прямий хід алгоритму Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 4 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -3 & 6 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & -7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -4 & 1 & 5 & 7 \\ -3 & 1 & -3 & 6 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & -7 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 13 & -6 & -9 & -17 \\ 0 & -26 & 12 & 18 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 13 & -6 & -9 & -17 \\ 0 & 13 & -6 & -9 & -15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 13 & -6 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Ранг основної матриці системи дорівнює двом, а ранг розширеної матриці системи – трьом. Отже, за теоремою Кронекера–Капеллі СЛР є несумісною.

Приклад 42. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 7x_4 + 5x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$$

Розв’язання. Розв’яжемо СЛР методом Гаусса. Запишемо розширену матрицю системи та виконаємо прямий хід алгоритму Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -4 & -7 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 & -7 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 10 & -9 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & -10 & 9 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & 10 & -9 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 10 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 9/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг основної матриці системи дорівнює 2, ранг розширеної матриці системи також дорівнює 2. Отже, за теоремою Кронекера–Капеллі СЛР є сумісною. Оскільки ранг матриці дорівнює двом, то СЛР має два пов’язаних невідомих. За пов’язані невідомі оберемо x_1, x_2. Невідомі x_3, x_4, x_5 будуть вільними.

Виконаємо обернений хід алгоритму Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 9/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

За отриманою матрицею випишемо загальний розв’язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 - \dfrac{2}{5}x_5 + \dfrac{7}{5}, \\ x_2 = x_3 - 2x_4 - \dfrac{9}{5}x_5 + \dfrac{4}{5}, \\ x_3 = c_3, \\ x_4 = c_4, \\ x_5 = c_5. \end{cases}$$

Множина розв'язків СЛР:

$$\{(-c_3 - c_4 - \frac{2}{5}c_5 + \frac{7}{5};\ c_3 - 2c_4 - \frac{9}{5}c_5 + \frac{4}{5};\ c_3; c_4; c_5) \mid c_3, c_4, c_5 \in \mathbf{R}\}.$$

Твердження 25. Матриця $A = (a_{ij})_{n\times n}$ є невиродженою тоді і тільки тоді, коли її вектор-стовпчики (вектор-рядки) є лінійно незалежними ($rankA = n$).

Доведення. Нехай $a_1,...,a_n$ – вектор-стовпчики матриці A. Розглянемо їхню довільну лінійну комбінацію та отримаємо такі рівносильні твердження:

– $a_1,...,a_n$ – лінійно незалежні;

– $x_1a_1 + ... + x_na_n = 0$ лише за умови $x_1 = 0,\ x_2 = 0,..., x_n = 0$;

– СЛР $A \cdot x = 0$, де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, є визначеною;

– за теоремою Крамера 15 матриця A є невиродженою, тобто $\det A \neq 0$.

Твердження для вектор-рядків доводиться аналогічно. Для доведення достатньо транспонувати матрицю A. ■

Фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

Розглянемо однорідну систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbf{R} \qquad (62)$$

Матричний запис цієї системи

$$A \cdot x = 0,$$

де A – основна матриця системи розміру $m \times n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – стовпчик невідомих, $0 = (0, \ldots, 0)^T$ – нульовий вектор-стовпчик.

Для однорідної системи основна матриця відрізняється від розширеної нульовим стовпчиком. Отже, ці матриці мають однакові ранги. За теоремою Кронекера–Капеллі однорідна система зажди має розв'язок. Зокрема, однорідна система завжди має *тривіальний* розв’язок $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

З теореми Кронекера-Капеллі випливають такі наслідки для однорідної СЛР (62).

1. Однорідна СЛР є визначеною, має лише тривіальний розв’язок, тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює кількості невідомих: $rank\ A = n$.

2. Однорідна СЛР є невизначеною, має нескінченно багато розв’язків, тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи менший кількості невідомих: $rank\ A < n$.

Теорема 19. Множина розв’язків однорідної СЛР з коефіцієнтами із поля $\mathbf{R}$ утворює підпростір арифметичного простору $\mathbf{R}^n$, де n – кількість невідомих системи.

Доведення. Нехай $A \cdot x = 0$ – однорідна СЛР. Однорідна система завжди сумісна. Якщо вона визначена, то множина розв’язків складається лише з одного нульового вектора. Множина з одного нульового вектора є підпростором $\mathbf{R}^n$. Якщо система невизначена, розглянемо два довільні розв’язки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ та $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ цієї системи. Тобто

$$A\cdot x=0 \text{ та } A\cdot y=0.$$

Із властивостей дій над матрицями, маємо:

$$A\cdot(x+y)=A\cdot x+A\cdot y=0+0=0;$$

$$A(\lambda x)=\lambda A\cdot x=\lambda 0=0,\ \lambda\in\mathbf{R}.$$

Отже, сума розв'язків однорідної СЛР $x+y$ та розв'язок λx також є розв'язками однорідної СЛР, тобто множина розв’язків однорідної СЛР є підпростором векторного простору $\mathbf{R}^n$. ■

Означення. Базис простору розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь називається *фундаментальною системою розв’язків* (ФСР).

Якщо однорідна СЛР (62) визначена, тобто має лише тривіальний розв’язок, то ФСР є пустою множиною. Невизначена система (62) має багато різних ФСР, оскільки базис лінійного простору визначається неоднозначно. Покажемо, як побудувати ФСР невизначеної однорідної СЛР.

Нехай однорідна СЛР (62) невизначена, а ранг основної матриці системи – $r=rank\ A<n$. Невизначена СЛР методом Гаусса (в загальному випадку з перенумерацією змінних) зводиться до системи виду (27):

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad + f_{1,r+1}x_{r+1}+\ldots+f_{1n}x_n=0,\\ \qquad x_2 \qquad\qquad + f_{2,r+1}x_{r+1}+\ldots+f_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \qquad\qquad x_r + f_{r,r+1}x_{r+1}+\ldots+f_{rn}x_n=0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x_1=-f_{1,r+1}x_{r+1}-\ldots-f_{1n}x_n,\\ x_2=-f_{2,r+1}x_{r+1}-\ldots-f_{2n}x_n,\\ \qquad\ldots\ldots\\ x_r=-f_{r,r+1}x_{r+1}-\ldots-f_{rn}x_n. \end{cases}$$

Вільним невідомим $x_{r+1},...,x_n$ можна надавати довільні дійсні значення $x_{r+1}=c_{r+1},...,x_n=c_n$. Тоді пов'язані невідомі визначаються однозначно і загальний розв'язок однорідної СЛР набирає вигляду

$$\begin{cases} x_1 = -f_{1,r+1}c_{r+1} - ... - f_{1n}c_n, \\ x_2 = -f_{2,r+1}c_{r+1} - ... - f_{2n}c_n, \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots \\ x_r = -f_{r,r+1}c_{r+1} - ... - f_{rn}c_n, \end{cases} \quad c_{r+1},\ldots,c_n \in \mathbf{R}.$$

Отже, множиною розв'язків однорідної СЛР є множина

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} -f_{1,r+1}c_{r+1} - ... - f_{1n}c_n \\ -f_{2,r+1}c_{r+1} - ... - f_{2n}c_n \\ ... \\ -f_{r,r+1}c_{r+1} - ... - f_{rn}c_n \\ c_{r+1} \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}, c_{r+1},\ldots,c_n \in \mathbf{R} \right\} \tag{63}$$

Серед цих розв'язків виберемо $n-r$ розв'язків вигляду

$$v_1 = \begin{pmatrix} -f_{1,r+1} \\ -f_{2,r+1} \\ ... \\ -f_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -f_{1,r+2} \\ -f_{2,r+2} \\ ... \\ -f_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., v_{n-r} = \begin{pmatrix} -f_{1n} \\ -f_{2n} \\ ... \\ -f_{rn} \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Покажемо, що $v_1,...,v_{n-r}$ – лінійно незалежні. Якщо лінійна комбінація цих розв'язків дорівнює нулю, тобто

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-r} v_{n-r} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 f_{1,r+1} - .. - \lambda_{n-r} f_{1,n} \\ -\lambda_1 f_{2,r+1} - .. - \lambda_{n-r} f_{2,n} \\ \ldots \\ -\lambda_1 f_{r,r+1} - .. - \lambda_{n-r} f_{1,n} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0,$$

то $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Отже, розв'язки $v_1, \ldots, v_{n-r}$ є лінійно незалежними.

Довільний розв'язок системи (63) лінійно виражається через $v_1, \ldots, v_{n-r}$. Дійсно,

$$\begin{pmatrix} -f_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - f_{1n}c_n \\ -f_{2,r+1}c_{r+1} - \ldots - f_{2n}c_n \\ \ldots \\ -f_{r,r+1}c_{r+1} - \ldots - f_{rn}c_n \\ c_{r+1} \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} = c_{r+1} \begin{pmatrix} -f_{1,r+1} \\ -f_{2,r+1} \\ \ldots \\ -f_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} -f_{1n} \\ -f_{2n} \\ \ldots \\ -f_{rn} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $n-r$ розв'язків $v_1, \ldots, v_{n-r}$ утворюють лінійно незалежну систему твірних простору розв'язків однорідної СЛР (62). Отже, $v_1, \ldots, v_{n-r}$ – базис простору розв'язків однорідної СЛР, тобто її ФСР.

Отже, доведено таке твердження.

Твердження 26. Підпростір розв'язків невизначеної однорідної СЛР (62) має розмірність $n-r$, де n – кількість невідомих в системі, а r – ранг основної матриці системи. Якщо $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – набір всіх вільних невідомих однорідної СЛР, то ця система має ФСР вигляду (64).

Правило знаходження ФСР. Для знаходження ФСР однорідну СЛР (62) розв'язують методом Гаусса та знаходять її загальний розв'язок. Якщо однорідна система невизначена, то кількість розв'язків в ФСР дорівнює кількості вільних невідомих, тобто $n-r$, де r – ранг основної матриці. Для того щоби знайти $n-r$ лінійно незалежних розв'язків системи (62), які утворюють ФСР, вільним невідомим надаються такі набори значень.

Набір	1-й	2-й	......	*(n–r)*-й
x_{r+1}	1	0	......	0
x_{r+2}	0	1	......	0
......	......	......	......	......
x_n	0	0	......	1

Для кожного з наборів знаходяться відповідні значення пов’язаних невідомих і складаються $n-r$ розв'язків фундаментальної системи розв'язків:

$$v_1=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \vdots\\ \alpha_{r1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \vdots\\ \alpha_{r2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ldots,\ v_{n-r}=\begin{pmatrix}\alpha_{1n-r}\\ \alpha_{2n-r}\\ \vdots\\ \alpha_{rn-r}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

Довільний розв’язок однорідної системи лінійних рівнянь (62) є лінійною комбінацією векторів з ФСР, що містить $n-r$ довільних сталих.

Приклад 43. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3-2x_4+4x_5=0,\\ 4x_1-2x_2+5x_3+x_4+7x_5=0,\\ 2x_1-x_2+x_3+8x_4+2x_5=0.\end{cases}$$

Розв’язання. Спочатку знайдемо загальний розв’язок однорідної СЛР методом Гаусса. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до трапецієподібно-східцевого виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки СЛР має два ненульові рядки після прямого ходу алгоритму Гаусса, то вона матиме два пов’язаних невідомих. В першому рівнянні можна вибрати пов'язане невідоме x_2, а в другому рівнянні – пов'язане невідоме x_3. Отже, пов’язаними невідомими є x_2 та x_3, а вільними невідомими – x_1, x_4, x_5. Далі проведемо обернений хід алгоритму Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & -13 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Запишемо систему лінійних рівнянь за спрощеною матрицею, залишивши пов’язані невідомі в рівняннях в лівій частині, а вільні невідомі – в правій. Отримаємо загальний розв’язок однорідної системи:

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 2x_1 + 13x_4 - x_5, \\ x_3 = 5x_4 - x_5, \qquad c_1, c_4, c_5 \in \mathbf{R}. \\ x_4 = c_4, \\ x_5 = c_5. \end{cases} \tag{65}$$

Вільним невідомим надамо набори значень:

Набір	1-й	2-й	3-й
x_1	1	0	0
x_4	0	1	0
x_5	0	0	1

Для кожного набору значень у таблиці обчислимо значення пов'язаних невідомих з рівності (65):

x_1	1	0	0
x_2	2	13	-1
x_3	0	5	-1
x_4	0	1	0
x_5	0	0	1

Отримаємо ФСР:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв’язок системи:

$x = C_1 \cdot v_1 + C_2 \cdot v_2 + C_3 \cdot v_3$, де $C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}$.

Зв’язок між розв’язками неоднорідної СЛР та відповідної однорідної СЛР

Розглянемо неоднорідну СЛР

$$A \cdot x = b, \tag{66}$$

де A – основна матриця системи розміру $m \times n$, $x = (x_1, ..., x_n)^T$ – вектор-стовпчик невідомих, $b = (b_1, ..., b_m)^T$ – вектор-стовпчик вільних членів.

Відповідною однорідною СЛР називається СЛР, отримана з рівності (66) заміною вільних коефіцієнтів на нульові:

$$A\cdot x=0. \tag{67}$$

Твердження 27. Якщо x, y – два довільні розв'язки неоднорідної СЛР (66), то $z=x-y$ є розв'язком відповідної однорідної СЛР (67).

Доведення. Нехай x, y – довільні два розв’язки неоднорідної системи (66). Маємо:

$$A\cdot z=A\cdot(x-y)=A\cdot x-A\cdot y=b-b=0.$$

Отже, різниця $z=x-y$ двох розв’язків неоднорідної СЛР (66) є розв’язком відповідної однорідної СЛР (67). ■

Теорема 20 (про структуру розв'язку неоднорідної СЛР). Загальний розв’язок неоднорідної системи лінійних рівнянь (66) є сумою частинного розв’язку неоднорідної системи (66) та загального розв’язку відповідної однорідної системи (67).

Доведення. Нехай x^* – деякий частинний розв’язок неоднорідної СЛР (66), а x_0 – довільний розв’язок відповідної однорідної системи (67). Тоді

$$A\cdot(x^*+x_0)=A\cdot x^*+A\cdot x_0=b+0=b.$$

Отже, x^*+x_0 є розв'язком неоднорідної системи (66).

Довільний розв’язок $x_н$ неоднорідної системи (66) можна записати у вигляді $x_н=x^*+(x_н-x^*)$, де другий доданок $(x_н-x^*)$, за твердженням 27, є розв’язком однорідної системи (67). Отже, $x_н=x^*+x_0$. ■

Приклад 44. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь у вигляді суми частинного розв’язку неоднорідної системи та загального розв’язку відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Розв’язання. Загальний розв’язок неоднорідної СЛР шукатимемо у вигляді

$$x_н = x^* + x_0,$$

де x^* – частинний розв'язок неоднорідної СЛР, x_0 – загальний розв’язок відповідної однорідної СЛР.

Розв’яжемо неоднорідну СЛР методом Гаусса. Випишемо розширену матрицю системи та проведемо прямий і обернений хід алгоритму Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (68)$$

За пов’язані невідомі оберемо x_3, x_4, а x_1, x_2 будуть вільними невідомими. За спрощеною матрицею випишемо загальний розв'язок неоднорідної системи

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ x_3 = -x_1 + 2x_2, \\ x_4 = 1. \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}. \qquad (69)$$

Знайдемо частинний розв’язок x^* неоднорідної СЛР. Вільним невідомим надамо значення $x_1 = 0,\ x_2 = 0$. Тоді з рівностей (69) знайдемо $x_3 = 0,\ x_4 = 1$. Отже,

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки відповідна однорідна система має таку саму основну матрицю, як і неоднорідна система, то з матриці (68) випишемо загальний розв’язок однорідної системи, вважаючи, що стовпчик вільних членів складається з нулів.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ x_3 = -x_1 + 2x_2, \\ x_4 = 0. \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}. \tag{70}$$

Оскільки однорідна система має два вільних невідомих, то її фундаментальна система розв’язків має два розв’язки. Надамо вільним невідомим такі значення:

Набір	1-й	2-й
x_1	1	0
x_2	0	1

З рівностей (70) знайдемо відповідні значення пов’язаних невідомих. Отримаємо два розв’язки в ФСР однорідної системи:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв’язок однорідної системи має вигляд

$$x_0 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідної СЛР:

$$x_н = x^* + x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Контрольні запитання

1. Що називають лінійним простором над полем дійсних чисел?

2. Наведіть приклади лінійних просторів.

3. Яку систему векторів називають лінійно незалежною, лінійно залежною?

4. Що таке базис лінійного простору і координати вектора в базисі?

5. Що називають рангом матриці?

6. Сформулюйте теорему Кронекера–Капеллі.

7. Що називають фундаментальною системою розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь?

8. Яка структура загального розв'язку однорідної системи лінійних рівнянь і неоднорідної системи лінійних рівнянь?

Вправи

1. Знайдіть лінійну комбінацію $2v_1 - 5v_2 + v_3$ векторів

$$v_1 = (3;-1;2), v_2 = (2;1;-1), \ v_3 = (-5;-3;4).$$

2. Знайдіть вектор x з рівняння $2v_1 - 3x + v_2 + 4v_3 = 0$, де

$$v_1 = (1;3;2;-1), \ v_2 = (2;-4;1;3), \ v_3 = (-1;3;2;-2).$$

3. З'ясуйте, чи є системи векторів лінійно незалежними:

а) $v_1 = (1;2;3), \quad v_2 = (2;4;5)$;

б) $v_2 = (2;-3;4), \quad v_2 = (6;-9;12)$;

в) $v_1 = (4;-3;1), \quad v_2 = (8;-6;4)$;

г) $v_1 = (1; 2; -1), v_2 = (3; -1; 4),\ \ v_3 = (2; 1; 3)$;

д) $v_1 = (2; -1; 1), v_2 = (-4; 3; -1),\ \ v_3 = (-5; 1; -4)$;

е) $v_1 = (3; 2; -2), v_2 = (0; 1; -1),\ \ v_3 = (-2; 4; 5)$;

ж) $v_1 = (-3; -2; 4; 1), v_2 = (1; 5; 3; 4), v_3 = (-1; 3; 5; 4)$,

$v_4 = (2; 3; -1; 1)$;

з) $v_1 = (2; -1; 3; -2), v_2 = (0; 2; -1; 4), v_3 = (-3; 1; -4; 2)$;
$v_4 = (1; -3; 6; 1)$.

4. Доведіть, що множина многочленів степеня n не є лінійним простором.

5. З'ясуйте, чи буде підпростором лінійного простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ підмножина U многочленів степеня $\le n$.

6. З'ясуйте, чи буде підпростором лінійного простору $\mathbf{R}[x]$ всіх многочленів над полем $\mathbf{R}$ підмножина U многочленів, що не містять парних степенів.

7. З'ясуйте, чи буде підпростором лінійного простору $Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ квадратних матриць порядку n з дійсними коефіцієнтами підмножина U всіх верхніх трикутних матриць, елементи яких є цілими числами.

8. З'ясуйте, чи буде підпростором лінійного простору $Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ квадратних матриць порядку n з дійсними коефіцієнтами підмножина U матриць, діагональні елементи яких дорівнюють нулю.

9. З'ясуйте, чи буде підпростором арифметичного лінійного простору $\mathbf{R}^n$ векторів, що мають n координат, підмножина U векторів, сума координат яких дорівнює нулю.

10. Доведіть, що вектори a_1, a_2, a_3 утворюють базис простору $\mathbf{R}^3$ і знайдіть координати вектора b в цьому базисі:

а) $a_1=(3;1;3), a_2=(-1;2;-5),\ \ a_3=(-3;1;-1), b=(-7;8;-3)$;

б) $a_1=(1;-2;3), a_2=(0;4;1),\ \ a_3=(1;1;-2), b=(4;-7;5)$;

в) $a_1=(-5;-4;4), a_2=(2;-1;3),\ \ a_3=(1;-3;2), b=(-3;1;-1)$.

11. Знайдіть яку-небудь максимальну лінійну незалежну підсистему системи векторів і всі вектори системи, що не входять до цієї підсистеми, виразіть через вектори підсистеми:

а) $v_1=(5;2;-3;1), v_2=(4;1;-2;3), v_3=(1;1;-1;-2)$,

$v_4=(3;4;-1;2)$;

б) $v_1=(2;-1;3;5), v_2=(4;-3;1;3), v_3=(3;-2;3;4)$,
$v_4=(4;-1;15;17), v_5=(7;-6;-7;0)$.

12. Знайдіть ранг матриць:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

13. Дослідіть системи лінійних рівнянь і знайдіть загальний розв’язок в залежності від значень параметра λ:

а) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} (\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = 1. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda. \end{cases}$

д) $\begin{cases} \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda - 1)x_3 = \lambda, \\ (\lambda + 1)x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda + 3)x_3 = 1. \end{cases}$

14. Дослідіть системи лінійних рівнянь і знайдіть загальний розв’язок в залежності від значень параметрів λ і μ:

а) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \mu, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = \lambda, \\ \lambda x_1 + \mu x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = \mu, \\ x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = \mu, \\ x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_2 + \lambda x_3 = 0. \end{cases}$ е) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = \mu. \end{cases}$

15. Знайдіть базис підпростору розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь (фундаментальну систему розв’язків).

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 12x_2 - 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+6x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3+6x_4=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3+12x_4=0, \\ 2x_2+3x_4=0. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1+x_2-4x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2-9x_3+3x_4=0, \\ x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 3x_1-3x_2-18x_3+9x_4=0. \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0, \\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0. \end{cases}$

е) $\begin{cases} -6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0, \\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0, \\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0. \end{cases}$

16. Нехай $\{e_i\}$ і $\{f_i\}$ – два базиси у просторі V. Відомий розклад вектора a за базисом $\{f_i\}$. Знайдіть координати розкладу цього вектора за базисом $\{e_i\}$.

а) $\begin{matrix} e_1=(1;2;1), & f_1=(3;1;4), \\ e_2=(2;3;3), & f_2=(5;2;1), \\ e_3=(3;7;1). & f_3=(1;1;-6). \end{matrix}$ $\quad a=2f_1+f_2-3f_3;$

б) $\begin{matrix} e_1=(1;1;2), & f_1=(1;0;1), \\ e_2=(2;-1;0), & f_2=(0;1;1), \\ e_3=(-1;1;1). & f_3=(0;0;1). \end{matrix}$ $\quad a=2f_1+f_2-2f_3;$

в) $\begin{matrix} e_1=(3;0;1), & f_1=(2;0;1), \\ e_2=(1;-1;0), & f_2=(1;0;3), \\ e_3=(2;1;-1). & f_3=(1;2;-1). \end{matrix}$ $\quad a=-3f_1+2f_2+4f_3;$

г) $\begin{matrix} e_1=(1;1;1;1), & f_1=(1;0;3;3), \\ e_2=(1;2;1;1), & f_2=(-2;-3;-5;-4), \\ e_3=(1;1;2;1), & f_3=(2;2;5;4), \\ e_4=(1;3;2;3). & f_4=(-2;-3;-4;-4). \end{matrix}$

$a=f_1-2f_2+3f_3-f_4.$

3.5. Лінійні оператори у лінійних просторах

Основні поняття

Означення. Нехай V – векторний простір над полем дійсних чисел $\mathbf{R}$. *Лінійним оператором (лінійним перетворенням)*, що діє у просторі V, називають таке відображення цього простору в себе $\boldsymbol{A}: V \to V$, яке задовольняє умови:

1) $\boldsymbol{A}(a+b) = \boldsymbol{A}(a) + \boldsymbol{A}(b)$ для всіх $a, b \in V$,

2) $\boldsymbol{A}(\alpha a) = \alpha \cdot \boldsymbol{A}(a)$ для всіх $a, b \in V, \alpha \in \mathbf{R}$.

Ці дві умови можна замінити умовою

$$\boldsymbol{A}(\alpha a + \beta b) = \alpha \cdot \boldsymbol{A}(a) + \beta \cdot \boldsymbol{A}(b). \qquad (71)$$

Приклади лінійних операторів

1. *Нульовий* лінійний оператор $\boldsymbol{A}: V \to V$, $\boldsymbol{A}(v) = 0$ для всіх $v \in V$ є лінійним оператором.

2. *Тотожний* лінійний оператор $\boldsymbol{E}: V \to V$, $\boldsymbol{E}(v) = v$ для всіх $v \in V$ є лінійним оператором.

3. *Множення на скаляр* $\lambda \in \mathbf{R}$, або *гомотетія* $\boldsymbol{A}: V \to V$, $\boldsymbol{A}(v) = \lambda v$ для всіх $v \in V$ є лінійним оператором.

4. Оператор $\boldsymbol{A}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ повороту векторів на площині навколо початку координат проти руху годинникової стрілки на деякий фіксований кут α (рис. 4) є лінійним.

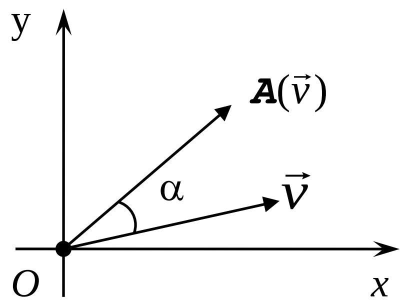


Рис. 4

Дійсно, якщо спочатку додати вектори $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$, а потім їхню суму повернути на кут φ, то отримаємо такий самий вектор, який утвориться, якщо спочатку повернути вектори $\vec{v}$ та $\vec{w}$ на кут α, а потім їх додати.

Так само, якщо спочатку помножити вектор $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ на число $\lambda \in \mathbf{R}$, а потім його повернути на кут α, то отримаємо такий самий вектор, який утвориться, якщо спочатку повернути вектор $\vec{v}$ на кут α, а потім його помножити на число λ.

5. Оператор ортогонального проектування, який кожному вектору площини ставить у відповідність його проекцію на вісь Ox: $\boldsymbol{A}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Якщо $\vec{v} = (x; y)$, то $\boldsymbol{A}(\vec{v}) = np_{Ox}\vec{v} = (x; 0)$ (рис. 5).

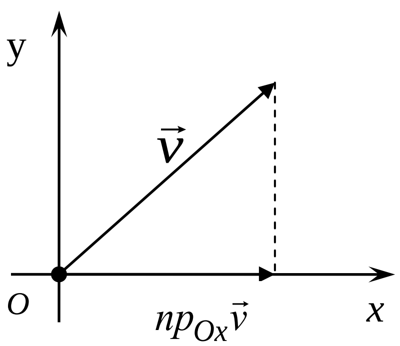


Рис. 5

Перевіримо умови лінійності. Нехай $\vec{v} = (x_1; y_1)$, $\vec{w} = (x_2; y_2)$. Тоді отримаємо:

$$\boldsymbol{A}(\vec{v} + \vec{w}) = np_{Ox}(\vec{v} + \vec{w}) = (x_1 + x_2; 0),$$

$$\boldsymbol{A}(\vec{v}) + \boldsymbol{A}(\vec{w}) = np_{Ox}\vec{v} + np_{Ox}\vec{w} =$$

$$= (x_1; 0) + (x_2; 0) = (x_1 + x_2; 0).$$

Звідси $\boldsymbol{A}(\vec{v} + \vec{w}) = \boldsymbol{A}(\vec{v}) + \boldsymbol{A}(\vec{w})$.

$$\boldsymbol{A}(\lambda\vec{v}) = np_{Ox}\lambda\vec{v} = (\lambda x; 0) = \lambda(x; 0) = \lambda np_{Ox}\vec{v} = \lambda\boldsymbol{A}(\vec{v}),\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

6. Розглянемо $V = P_n[x]$, тобто лінійний простір всіх многочленів степеня, не вищого за n:

$$P_n[x] = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbf{R}\}.$$

Оператор диференціювання

$d(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_1$ є лінійним оператором.

Лінійність відображення d випливає з властивостей похідної:

$$(p(x)+q(x))' = p'(x)+q'(x), \quad (\lambda p(x))' = \lambda p'(x),\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Розглянемо скінченновимірний векторний простір V, $\dim V = n$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис цього простору і $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$ – розклад деякого вектора $x \in V$. Нехай $\boldsymbol{A}$ – лінійний оператор, що діє в просторі V. Із умов лінійності маємо

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{A}(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) = \\ &= x_1 \boldsymbol{A}(e_1) + x_2 \boldsymbol{A}(e_2) + \cdots + x_n \boldsymbol{A}(e_n). \end{aligned} \tag{72}$$

Отже, дія оператора на вектор цілком визначається дією оператора на базисні вектори.

Результатом дії оператора на кожен базисний вектор є також вектор простору V. Розкладемо ці вектори по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ і координати розкладів запишемо як стовпчики деякої матриці A:

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n, \\ \boldsymbol{A}(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{A}(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n. \end{cases} \tag{73}$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. & \ldots.. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{74}$$

називається *матрицею лінійного оператора* $\boldsymbol{A}$ в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Отже, кожному лінійному оператору в деякому базисі відповідає матриця. І навпаки, покажемо, що кожній квадратній матриці порядку n відповідає деякий лінійний оператор.

Нехай A – квадратна матриця порядку n. Розглянемо відображення $\boldsymbol{A}: V \to V$, яке для довільного вектора $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \in V$ визначається так:

$$\boldsymbol{A}(x) = \alpha_1 A \cdot e_1 + \alpha_2 A \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n A \cdot e_n. \tag{75}$$

Дія відображення $\boldsymbol{A}$ на базисні вектори $e_1, \ldots, e_n$ випливає з правила (75):

$$\boldsymbol{A}(e_i) = A \cdot e_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

оскільки всі координати вектора e_i в базисі $e_1, \ldots, e_n$ дорівнюють нулю крім i-ї координати, рівної одиниці.

З властивостей дій над матрицями випливає лінійність відображення $\boldsymbol{A}$. Дійсно, якщо $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$ інший вектор простору V, то

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(x+y) &= A\big((\alpha_1+\beta_1)e_1 + (\alpha_2+\beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)e_n\big) = \\
&= (\alpha_1+\beta_1)A \cdot e_1 + (\alpha_2+\beta_2)A \cdot e_2 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)A \cdot e_n = \\
&= \alpha_1 A \cdot e_1 + \alpha_2 A \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n A \cdot e_n + \\
&+ \beta_1 A \cdot e_1 + \beta_2 A \cdot e_2 + \ldots + \beta_n A \cdot e_n = \boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{A}(y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\lambda x) &= \boldsymbol{A}\big(\lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n)\big) = \\
&= \boldsymbol{A}\big(\lambda\alpha_1 e_1 + \lambda\alpha_2 e_2 + \ldots + \lambda\alpha_n e_n\big) = \\
&= \lambda\alpha_1 A \cdot e_1 + \lambda\alpha_2 A \cdot e_2 + \ldots + \lambda\alpha_n A \cdot e_n = \\
&= \lambda(\alpha_1 A \cdot e_1 + \alpha_2 A \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n A \cdot e_n) = \\
&= \lambda \boldsymbol{A}(x), \quad \lambda \in \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Таким чином, ми встановили взаємно однозначну відповідність між множиною всіх лінійних операторів $\boldsymbol{A}: V \to V$ у n-вимірному просторі і множиною квадратних матриць порядку n. Проте така взаємно однозначна відповідність залежить від вибору базису простору V. Часто використовують матричну інтерпретацію лінійних операторів.

Приклад 45. Знайти матрицю лінійного оператора, який повертає вектори площини, що виходять з початку координат, на кут α проти годинникової стрілки.

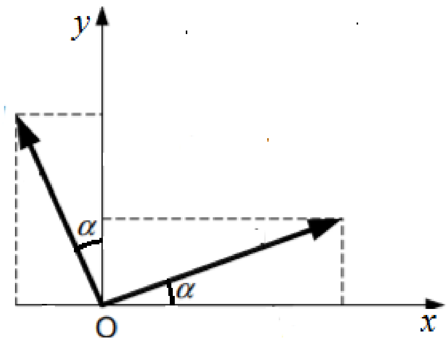


Рис. 6

Позначимо $\boldsymbol{A}$ – оператор, що повертає вектори площини, що виходять з початку координат. За базис площини $\mathbf{R}^2$ виберемо вектори $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ і розкладемо образи базисних векторів у разі дії оператора $\boldsymbol{A}$ за цим базисом. З рисунку (рис. 6) видно, що

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(e_1) &= \cos\alpha \cdot e_1 + \sin\alpha \cdot e_2, \\ \boldsymbol{A}(e_2) &= -\sin\alpha \cdot e_1 + \cos\alpha \cdot e_2. \end{aligned} \tag{76}$$

Отже, оператору $\mathbf{A}$ у базисі $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ відповідає матриця

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Нехай в лінійному просторі V задані два лінійні оператори $\boldsymbol{A}$ і $\mathbf{B}$.

Сумою лінійних операторів $\boldsymbol{A}$ і $\mathbf{B}$ називається перетворення $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, що визначається рівністю

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(v) = \mathbf{A}(v) + \mathbf{B}(v), \; v \in V.$$

Тобто відображення $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ переводить довільний вектор $v \in V$ в суму його образів при перетвореннях $\boldsymbol{A}$ і $\mathbf{B}$.

Добутком лінійних операторів $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ називається перетворення $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$, отримане як результат послідовного застосування перетворень $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})(v) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(v)),\ v \in V.$$

Добутком лінійного оператора $\mathbf{A}$ *на число* $\lambda \in \mathbf{R}$ називається перетворення $\lambda\mathbf{A}$, визначене рівністю

$$(\lambda\mathbf{A})(v) = \lambda\mathbf{A}(v),\ v \in V.$$

Тут образи всіх векторів у разі перетворення $\mathbf{A}$ множимо відповідно на число $\lambda \in \mathbf{R}$.

Легко перевірити, що перетворення $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$, $\lambda\mathbf{A}$ є лінійними операторами.

Якщо оператори $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ задані в одному базисі матрицями A і B, то оператор $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ задається матрицею $A \cdot B$, оператор $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ – матрицею $A + B$, оператор $\lambda\mathbf{A}$ – матрицею λA в тому самому базисі.

Тотожний оператор $\mathbf{E}$ задається одиничною матрицею Е.

Нехай в деякому базисі $\{e_i\}$ оператор $\mathbf{A}$ заданий матрицею A_e, а в іншому базисі $\{f_i\}$ – матрицею A_f. Позначимо x_e, y_e, x_f, y_f вектори відповідно в базисах $\{e_i\}$ і $\{f_i\}$ такі, що

$$y_e = A_e x_e \quad \text{і} \quad y_f = A_f x_f. \tag{77}$$

Нехай T – матриця переходу від базису $\{e_i\}$ до базису $\{f_i\}$. Тоді з виразу (53) випливає

$$x_e = T \cdot x_f \quad \text{і} \quad y_e = T \cdot y_f. \tag{78}$$

Із рівностей (77) і (78) дістанемо

$$A_f x_f = y_f = T^{-1} y_e = T^{-1} A_e x_e = T^{-1} A_e T x_f,$$

тобто

$$A_f = T^{-1} A_e T. \tag{79}$$

Такі матриці називають *подібними*. Отже, матриці лінійного оператора в різних базисах є подібними.

Власні значення і власні вектори лінійного оператора

Нехай $\boldsymbol{A}$ – лінійний оператор в скінченновимірному просторі V над полем $\mathbf{R}$. Вважатимемо, що в просторі V вибраний деякий базис $e_1,...,e_n$.

Означення. Ненульовий вектор $x \in V$ називають *власним вектором* лінійного оператора $\boldsymbol{A}$, якщо

$$\boldsymbol{A}(x) = \lambda x, \tag{80}$$

де λ – деяке дійсне число, яке називається *власним значенням (числом)* лінійного оператора $\boldsymbol{A}$. У разі дотримання (80) кажуть, що власний вектор x є відповідним власному значенню λ.

Оскільки кожному лінійному оператору $\boldsymbol{A}$ в деякому базисі відповідає матриця A, то вектор $x \in V$ також називають *власним вектором матриці* A, що відповідає власному значенню λ.

Подамо рівність (80) у вигляді

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})(x) = 0,$$

де $\boldsymbol{E}$ – тотожний оператор, або у матричному вигляді

$$(A - \lambda E)x = 0,$$

$$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{81}$$

де E – одинична матриця, A – матриця оператора $\boldsymbol{A}$ в деякому фіксованому базисі, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – стовпчик координат вектора x у тому самому базисі.

Матричну рівність (81) можна подати як однорідну систему лінійних рівнянь відносно $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{82}$$

За означенням, власний вектор є ненульовим. Однорідна система з квадратною матрицею може мати ненульовий розв'язок тільки тоді, коли визначник матриці системи дорівнює нулю. Тому

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{83}$$

Визначник $\det(A-\lambda E)$ у лівій частині (83) є многочленом n-го степеня відносно λ, який позначається як $\chi_A(\lambda)$ і називається *характеристичним многочленом* матриці A. Рівняння (83) називається *характеристичним рівнянням* матриці A. Корені цього рівняння є *власними значеннями*, або *характеристичними числами* цієї матриці A.

Власними значеннями матриці A є корені її характеристичного многочлена, і тільки вони.

Зауваження. Вже зазначалося, що лінійний оператор в різних базисах задається подібними матрицями $T^{-1}AT$. Подібні матриці мають однакові характеристичні многочлени і тому однакові характеристичні числа. Дійсно,

$$\begin{aligned} &\det(T^{-1}AT-\lambda E) = \det(T^{-1}AT-\lambda T^{-1}ET) = \\ &= \det(T^{-1}(A-\lambda E)T) = \det(T^{-1})\cdot\det(A-\lambda E)\cdot\det(T) = \\ &= \det(A-\lambda E). \end{aligned}$$

Отже, оскільки матриці лінійного оператора $\boldsymbol{A}$ в різних базисах мають однакові характеристичні многочлени, а тому, і однаковий набір характеристичних чисел, то характеристичний многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ матриці A лінійного оператора $\boldsymbol{A}$ можна називати *характеристичним многочленом лінійного оператора* $\boldsymbol{A}$, а корені цього многочлена – *характеристичними числами оператора* $\boldsymbol{A}$.

Сукупність всіх власних значень лінійного оператора з урахуванням їхньої кратності називається *спектром* оператора.

Теорема 21 (Гамільтона-Келлі). Кожна квадратна матриця A задовольняє своє характеристичне рівняння: $\chi_A(A) = 0$.

Щодо спектра оператора відмітимо таке. Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – власні значення матриці A, то

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A;$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = trA.$$

В останній формулі введено позначення $trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ – *слід матриці* A.

Означення. Множина $V(\lambda, \boldsymbol{A})$ усіх власних векторів оператора $\boldsymbol{A}$ з фіксованим власним значенням λ разом з нульовим вектором утворює підпростір у V, який називається *власним підпростором* оператора $\boldsymbol{A}$, що відповідає власному значенню λ. Тобто

$$V(\lambda, \boldsymbol{A}) = \{v \in V : \boldsymbol{A}v = \lambda v\}.$$

Власний підпростір $V(\lambda, \boldsymbol{A})$ складається з розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $(A - \lambda E)v = 0$. Базисом власного підпростору $V(\lambda, \boldsymbol{A})$ є фундаментальна система розв'язків цієї однорідної системи. Розмірність $V(\lambda, \boldsymbol{A})$ збігається з дефектом матриці $A - \lambda E$ (дефект матриці $A - \lambda E$ дорівнює $n - rank(A - \lambda E)$) і не перевищує кратності λ як кореня характеристичного многочлена.

Зауважимо, що власні вектори, які належать різним власним значенням, лінійно незалежні.

Для того, щоб знайти всі власні значення та власні вектори лінійного оператора $\boldsymbol{A}$, заданого матрицею A, треба:

1. Знайти всі власні значення матриці A, тобто записати характеристичне рівняння $\chi_A(\lambda)=0$ та знайти всі його різні корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Саме вони і будуть шуканими власними значеннями.

2. Для кожного власного значення $\lambda=\lambda_i$ матриці A знайти базис власного підпростору $V(\lambda_i, \boldsymbol{A})$. Для цього потрібно підставити значення $\lambda=\lambda_i$ в однорідну систему лінійних рівнянь (82) з матрицею $A-\lambda_i E$ і знайти її фундаментальну систему розв’язків. Отримана фундаментальна система розв'язків є базисом власного підпростору $V(\lambda_i, \boldsymbol{A})$.

Приклад 46. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого в деякому базисі матрицею

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Запишемо характеристичне рівняння матриці A

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

$(1-\lambda)^3-4(1-\lambda)=0, \quad (1-\lambda)[(1-\lambda)^2-4]=0,$

$(1-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2)=0,\ (1-\lambda)(-\lambda-1)(3-\lambda)=0,$

$(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-3)=0.$

Корені цього рівняння є власними числами: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=3$.

Для кожного з цих власних чисел знайдемо власні вектори.

1) $\lambda_1 = 1$. Маємо однорідну систему лінійних рівнянь $(A - E) \cdot x = 0$ з матрицею коефіцієнтів

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Невідомі x_2, x_3 – пов'язані, невідоме x_1 – вільне. Запишемо загальний розв’язок однорідної системи:

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 0, \ c_1 \in \mathbf{R}. \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Надамо значення $x_1 = 1$, тоді $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Отже, базис власного підпростору матриці A, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 1$, складається з одного вектора, наприклад:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Власному значенню $\lambda_1 = 1$ відповідають власні вектори виду

$$X_{\lambda_1 = 1} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c_1 \in \mathbf{R}, c_1 \neq 0.$$

2) $\lambda_2 = -1$. Маємо однорідну систему лінійних рівнянь $(A + E)x = 0$ з матрицею коефіцієнтів

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Невідомі x_1, x_2 – пов'язані, невідоме x_3 – вільне. Запишемо загальний розв’язок однорідної системи

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}x_3, \\ x_2 = x_3, \qquad c_3 \in \mathbf{R}. \\ x_3 = c_3. \end{cases}$$

Надамо значення $x_3 = 2$, тоді $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Отже, базис власного підпростору матриці A, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = -1$, складається з одного вектора, наприклад:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Власному значенню $\lambda_2 = -1$ відповідають власні вектори

$$X_{\lambda_2=-1} = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 2c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix},\ c_2 \in \mathbf{R}, c_2 \neq 0.$$

3) $\lambda_3 = 3$. Маємо однорідну систему лінійних рівнянь $(A-3E)x = 0$ з матрицею коефіцієнтів

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Невідомі x_1, x_2 – пов'язані, невідоме x_3 – вільне. Запишемо загальний розв’язок однорідної системи

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = -x_3, \qquad c_3 \in \mathbf{R}. \\ x_3 = c_3. \end{cases}$$

Надамо значення $x_3 = 2$, тоді $x_1 = 1, x_2 = -2.$ Отже, базис власного підпростору матриці A, що відповідає власному числу $\lambda_3 = 3$, складається з одного вектора, наприклад:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Власному значенню $\lambda_3 = 3$ відповідають власні вектори

$$X_{\lambda_3=3} = c_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ -2c_3 \\ 2c_3 \end{pmatrix},\ c_3 \in \mathbf{R},\, c_3 \neq 0.$$

Відповідь. Власні значення лінійного оператора: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$; власні вектори лінійного оператора:

$$X_{\lambda_1=1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_{\lambda_2=-1} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 2c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix},\ X_{\lambda_3=3} = \begin{pmatrix} c_3 \\ -2c_3 \\ 2c_3 \end{pmatrix},$$

де $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Контрольні запитання

1. Що називають лінійним оператором у векторному просторі?

2. Що таке матриця лінійного оператора?

3. Що називають власним значенням і власним вектором лінійного оператора?

4. Що таке характеристичний многочлен лінійного оператора?

Вправи

1. Визначте, які з наведених відображень у відповідних лінійних просторах є лінійними операторами:

а) $x \mapsto a$ (a – фіксований вектор), $x, a \in \mathbf{R}^n$;

б) $x \mapsto \alpha x$ (α – фіксований скаляр), $x \in \mathbf{R}^n$;

в) $x \mapsto x + a$ (a – фіксований вектор), $x, a \in \mathbf{R}^n$;

г) $f(x) \mapsto f(ax+b)$ ($f(x) \in \mathbf{R}_n[x]$; a і b – фіксовані числа);

д) $f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$ ($f(x) \in \mathbf{R}_n[x]$);

е) $f(x) \mapsto f'(x)$ ($f(x) \in \mathbf{R}_n[x]$);

є) $(x_1; x_2; x_3) \mapsto (x_1 + 3; x_2 + 4; x_3)$, $(x_1; x_2; x_3) \in \mathbf{R}^3$;

ж) $(x_1; x_2; x_3) \mapsto (x_1; x_2; x_1 + x_2 + x_3)$, $(x_1; x_2; x_3) \in \mathbf{R}^3$.

2. Знайдіть матрицю оператора:

а) $(x_1; x_2; x_3) \mapsto (x_1; x_1 + 2x_2; x_2 + 3x_3)$ в просторі $\mathbf{R}^3$ в базисі з одиничних векторів;

б) $(x_1;x_2;x_3)\mapsto(x_1+x_2;x_2-x_1;3x_2+x_3)$ в просторі $\mathbf{R}^3$ в базисі з одиничних векторів;

в) $X\mapsto\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot X$ в просторі $Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ в базисі з матричних одиниць;

г) $X\mapsto X\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в просторі $Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ в базисі з матричних одиниць;

д) диференціювання в просторі $\mathbf{R}_n[x]$ в базисі $(1, x, x^2, ..., x^n)$;

е) диференціювання в просторі $\mathbf{R}_n[x]$ в базисі $(x^n, x^{n-1}, ..., x, 1)$;

3. Визначте характеристичний многочлен, власні значення та власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ -9 & -8 & 3 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; м) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

н) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Список літератури

1. *Безущак О.О.* Навчальний посібник з лінійної алгебри: для студентів механіко-математичного факультету / О.О. Безущак, О.Г. Ганюшкін, Є.А. Кочубінська – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2019. – 224 с.

2. *Боднарчук Ю.В.* Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Ю.В. Боднарчук, Б.В. Олійник – Київ: Київський університет «Києво-Могилянська академія», 2019. – 150 с.

3. *Бондаренко Н.В.* Лінійна алгебра: методичні вказівки та самостійні завдання з вищої математики / Н.В. Бондаренко, Є.В. Бондаренко, М.С. Пастухова – Київ: КНУБА, 2015. – 80 с.

4. *Дубовик В.П.* Вища математика: навчальний посібник/ В.П. Дубовик, І.І. Юрик – Київ: Вища школа,1993. – 648 с.

5. *Дубовик В.П.* Вища математика: збірник задач/ В.П. Дубовик, І.І. Юрик – Київ: «А.С.К.», 2005. – 480 с.

6. *Завадский А.Г.* Методические указания к решению задач по линейной алгебре / А.Г. Завадский, М.С. Пастухова, В.М. Турчин, А.С. Шкабара – Киев: КИСИ, 1992. – 63 с.

7. *Завало С.Т.* Курс алгебри – Київ, Вища школа, 1985. – 503 с.

8. *Ильин В.А.* Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э. Г. Позняк – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.

9. *Кострыкин А.И.* Введение в алгебру. Основы алгебры: учеб.к для вузов. – М.: Физматлит, 1994. – 320 с.

10. *Кострыкин А.И.* Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Физматлит, 2001. – 464 с.

11. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

Навчальне видання

БОНДАРЕНКО Наталія В’ячеславівна
ОТРАШЕВСЬКА Валентина Володимирівна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчальний посібник

Редагування та коректура *Г.В. Кобриної*
Комп’ютерне верстання *Т.І. Кукаревої*

Підписано до друку 01.09. 2023. Формат $60\times80_{1/16}$
Ум. друк. арк. 10,48. Обл.-вид. акр. 11,25.
Тираж 25 прим. Вид. № 17/1-23. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.