УДК 621.873.01

*В.С. Ловейкін, д-р техн. наук, проф. КНУБА,*
*Ю.В. Човнюк, канд. техн. наук, доцент КНУБА,*
*М.Г. Діктерук, канд. техн. наук, доцент КНУБА*

# АНАЛІЗ НЕЛІНІЙНИХ МАЯТНИКОВИХ КОЛИВАНЬ ВАНТАЖУ КРАНІВ ПРИ ЇХ ПУСКУ

Відомо [1–3], що при роботі кранів спостерігаються інтенсивні маятникові коливання вантажу, котрі викликають нерівномірний рух кранів чи вантажних візків, додаткові навантаження на силові елементи кранів, створюють незручності при їх експлуатації, що слід враховувати при уточнених розрахунках кранів та оптимізації режимів руху їх вантажопідйомних механізмів при пуску/гальмуванні (кранів).

Задачу маятникових коливань вантажу крану при його розгоні (пуску) можна звести до аналізу коливань плоского маятника з масою $m_2$, точка підвісу котрого (із масою вантажного візка $m_1$ у ній) здійснює рух вздовж горизонтальної прямої (вздовж рейкового шляху крану/вантажного візка).

Функція Лагранжа $L$ для вказаної вище системи набуває наступного вигляду [4]

$$L = \left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(H^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 2 \cdot H \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{x}_1 \cos\varphi\right) + m_2 g H \cdot \cos\varphi\,, \qquad (1)$$

де $g$ – прискорення вільного падіння; $H$ – довжина виска канату; $\varphi$ – кут між канатом маятнику та вертикаллю; $x_1(t)$ – закон руху у часі $t$ точки підвісу канату, а крапка над змінною, що залежить від часу $t$, означає, як завжди, похідну по останній незалежній змінній.

Знаючи $L$ (1), можна скласти рівняння руху розглядуваної системи. Рівняння руху маятнику може бути зведене до наступного

$$(m_1 + m_2) \cdot g \cdot \sin\varphi + m_1 \cdot H \cdot \ddot{\varphi} + m_2 \cdot H \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin^2\varphi + m_2 \cdot H \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin\varphi\cos\varphi = 0\,. \qquad (2)$$

Не вводячи ніяких обмежень на амплітуду кута $\varphi(t)$, можна (2) записати у вигляді

$$\omega^2 \sin\varphi\left[1 + \frac{m_2}{m_1\omega^2} \cdot \frac{d}{dt}\left[\dot{\varphi}\sin\varphi\right]\right] + \ddot{\varphi} = 0\,, \qquad (3)$$

де
$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 H}} \quad - \qquad (4)$$

частота власних маятникових коливань вантажу відносно крану у період його розгону/пуску. Якщо прийняти тривалість процесу пуску крану за $t_P$ то похідну по часу від виразу $[\dot{\varphi}\sin\varphi]$ можна усереднити (за час пуску) й отримати наступне нелінійне рівняння для $\varphi$

$$\omega^2\left[1 + \frac{m_2}{m_1\omega^2} \cdot \frac{\dot{\varphi}(t_P) \cdot \sin\varphi(t_P)}{t_P}\right] \cdot \sin\varphi + \ddot{\varphi} = 0\,, \qquad (5)$$

де початкові умови для $\dot{\varphi}\big|_{t=0}$ й $\varphi\big|_{t=0}$ приймаємо нульовими.

Використовуючи метод, розглянутий в [5], далі дослідимо розв'язки (5). Введемо позначення:

$$\Omega^2 = \omega^2\left[1 + \frac{m_2}{m_1\omega^2} \cdot \frac{\dot{\varphi}(t_P) \cdot \sin\varphi(t_P)}{t_P}\right]. \qquad (6)$$

Гамільтоніан $\widetilde{H}$ розглядуваної системи має вид

$$\widetilde{H} = \left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(H^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 2H \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{x}_1 \cos\varphi\right) + m_2 g H \cdot \cos\varphi . \tag{7}$$

Для зручності використаємо змінні кут-дія, визначені формулами (2.7) [5]. Введемо параметр $\chi$:

$$\chi^2 = \frac{\Omega^2 + \widetilde{H}}{2\Omega^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\widetilde{H}}{\Omega^2}\right), \tag{8}$$

а також змінну $\xi$:

$$\begin{cases} \chi \sin\xi = \sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right), & (\chi \le 1) \\ \sin\xi = \sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right), & (\chi \ge 1) . \end{cases} \tag{9}$$

З формули (7) для $\widetilde{H}$ та (9) знаходимо кутову швидкість $\dot{\varphi}(t)$

$$\dot{\varphi} = 2\chi \cdot \Omega \cdot \begin{Bmatrix} \cos\xi \\ \sqrt{1 - \dfrac{1}{\chi^2} \cdot \sin^2\xi} \end{Bmatrix} = 2\chi \cdot \Omega \cdot \begin{cases} cn(t;\chi), & (\chi \le 1), \\ dn\left(t; \dfrac{1}{\chi}\right), & (\chi \ge 1) \end{cases} , \tag{10}$$

де $cn$, $dn$ – еліптичні функції Якобі. При $\chi = 1$ вирази (10) переходять у

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{2\Omega}{ch(\Omega t)} . \tag{11}$$

Розкладаючи (10) у ряд Фур'є, маємо

$$\dot{\varphi} = 8\widetilde{\Omega} \cdot \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-\frac{1}{2}}}{1 + a^{2n-1}} \cdot \cos\left[(2n-1)\widetilde{\Omega} t\right], & \chi \le 1, \\ \displaystyle\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + a^{2n}} \cdot \cos\left(n\widetilde{\Omega} t\right), & \chi \ge 1, \end{cases} \tag{12}$$

де

$$\begin{gathered} a = \exp\left(-\pi \cdot \frac{F'}{F}\right),\ F \equiv F\left(\frac{\pi}{2}; \overline{\chi}\right), \\ n \in N,\ F' \equiv F\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{1 - \overline{\chi}^2}\right),\ \widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}\left(\widetilde{H}\right), \\ \overline{\chi} = \begin{cases} \chi, & \chi \le 1, \\ \dfrac{1}{\chi}, & \chi \ge 1. \end{cases} \end{gathered} \tag{13}$$

У (13) $F\left(\dfrac{\pi}{2}; z\right)$ – повний еліптичний інтеграл по $z$ першого роду.

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}\left(\widetilde{H}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \Omega \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{F\left(\frac{\pi}{2}; \chi\right)}, & \chi \le 1, \\ \dfrac{\chi}{F\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{\chi}\right)}, & \chi \ge 1. \end{cases} \tag{14}$$

Проінтегруємо по часу $t$ вираз (12), тоді матимемо

$$\varphi(t) = 8\tilde{\Omega} \cdot \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-\frac{1}{2}}}{1+a^{2n-1}} \cdot \frac{(-1)\sin\left[(2n-1)\tilde{\Omega}t\right]}{(2n-1)\tilde{\Omega}}, \ \chi \le 1, \\ \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} \cdot \frac{(-1)\sin\left(n\tilde{\Omega}t\right)}{n\tilde{\Omega}}, \quad \chi \ge 1. \end{cases} \tag{15}$$

Розглянемо тепер різноманітні асимптотики виразів (12), (13). Використаємо наступні асимптотики повного еліптичного інтегралу $F\left(\frac{\pi}{2}; \chi\right)$ першого роду

$$F\left(\frac{\pi}{2}; \chi\right) \sim \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \chi << 1, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{32\tilde{H}_S}{\tilde{H}_S - \tilde{H}}, 1-\chi^2 << 1, \end{cases} \tag{16}$$

де $\tilde{H}_S = \Omega^2$.

Тоді

$$a \sim \begin{cases} \frac{\chi^2}{32}, \chi << 1, \\ \exp\left(\frac{-\pi}{\overline{N}}\right), 1-\chi^2 << 1, \end{cases} \tag{17}$$

де
$$\overline{N} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{32\tilde{H}_S}{\tilde{H}_S - \tilde{H}}. \tag{18}$$

При $\chi << 1$ маємо

$$\varphi \approx -\sqrt{2\chi^2} \sin(\Omega t). \tag{19}$$

При $\chi^2 \to 1$, тобто $\tilde{H} \to \tilde{H}_S$, поблизу сепаратриси розв'язку рівняння (5) частота коливань $\tilde{\Omega}(\tilde{H}) \to 0$, а період коливань логарифмічно розбігається (18). Швидкість (кутова) $\dot{\varphi}$ системи наближається до періодичної послідовності солітоноподібних імпульсів (рис.1).

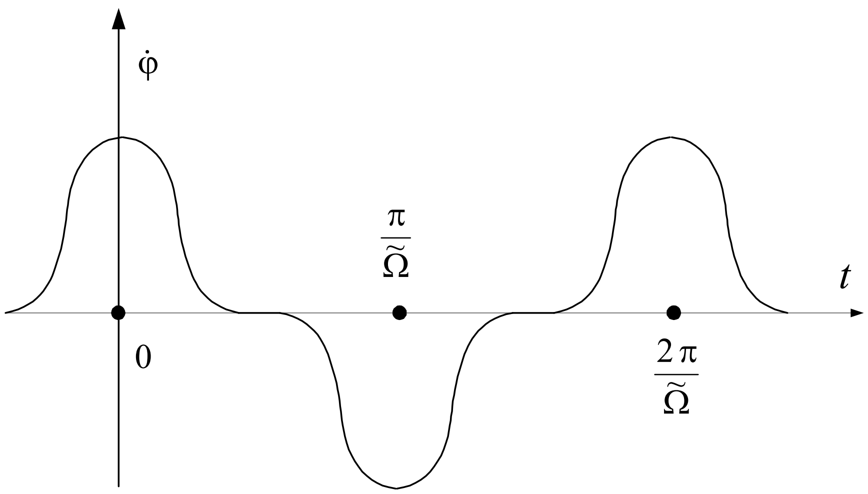


Рис.1. Залежність кутової швидкості $\dot{\varphi}$ від часу поблизу сепаратриси

Відстань між двома пагорбами у одній й тій самій фазі близька до періоду коливань $\frac{2\pi}{\tilde{\Omega}(\tilde{H})}$, а ширина кожного пагорбу близька до $\frac{2\pi}{\Omega}$.

Поява розбіжності при $\tilde{\Omega} \to 0$ є наслідком наближення до траєкторії, що проходить через гіперболічну точку (тобто до сепаратриси). Ця властивість має місце не тільки при $\tilde{H} \to \Omega^2 - 0$, тобто знизу, але й при $\tilde{H} \to \Omega^2 + 0$, тобто й зверху.

У табл. 1 представлені параметри (амплітуда, ширина) солітону швидкості (кутової) $\dot{\varphi}$ для різних значень $t_P$, $m_1 = 415520$ кг і $m_2 = 20000$ кг [2], $H = 10$ м.

Таблиця 1. Параметри солітонів кутової швидкості $\dot{\varphi}$ руху системи "вантажний візок крану-канат-вантаж"

| $t_P$, с | $\Omega$, с$^{-1}$ | Параметри солітона $\dot{\varphi}$ | |
|---|---|---|---|
| | | Амплітуда $A_S$, с$^{-1}$ | Ширина $\Delta_S$, с |
| 0,1 | 1,208 | 2,415 | 5,203 |
| 0,5 | 1,177 | 2,355 | 5,337 |
| 1,0 | 1,100 | 2,200 | 5,711 |
| 2,0 | 0,976 | 1,951 | 6,439 |
| 3,0 | 1,007 | 2,015 | 6,237 |
| 4,0 | 1,037 | 2,074 | 6,058 |

*Література*


1. Лобов Н.А. Динамика грузоподъемных кранов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160с.
2. Ловейкін В.С. Оптимізація режимів руху машин і механізмів //Машинознавство. – 1999. – №7. – С.24 – 31.
3. Ловейкін В.С. Критерії оцінки режимів руху механізмів і машин //Збірник наукових праць НАУ. – К., 1998.– Т. 4. – С.8-12.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика.– М.: Наука, 1965. – Т.1. – 204 с.
5. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука, 1988. – 368 с.