

УДК 666.94

В.Й.Сівко, д-р техн. наук, професор КНУБА

Ю.О.Долобан, інженер

ТЕОРІЯ ДЕФОРМУВАННЯ БУДІВЕЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ І СУМІШЕЙ

Машини що застосовуються в промисловості будівельних матеріалів, здійснюють цілий ряд технологічних операцій (перемішування, ущільнення, укладання і ущільнення суміші та інше). Для оцінки ефективності роботи машин необхідно вміти описати процес руху матеріалу, а для визначення навантажень на робочі органи машин і потужності привода необхідно знати опір, що створює матеріал на робочі органи машин. Область науки, що займається цими питаннями, називається механікою будівельних матеріалів і сумішей. Вона базується на реології, теорії пружності і пластичності.

Основоположниками загальної реології є: М.Рейнер (професор Єрусалимського університету, відомий по цілому ряду книжок, переведених на російську мову - "Десять лекцій по теоретичній реології", "Деформація і течіння", "Феноменологічна макрореологія"), Ф.Ерліх ("Реологія. Теорія і застосування"), Р.Хілл ("Математична теорія пластичності"), Л.Тейлор ("Фізика пружності каучуку").

В області будівельних матеріалів відомими вченими в даній області є: Ребіндер П.А., Ур'єв, Воларович, Круглицький М.М., Третинник В.Ю., Овчинніков П.Ф., Куннос Г.Я., Файтельсон і інші.

Слово реологія походить від грецького "Rew", що означає "текти". Проте воно вживається в більш широкому понятті. Під ним розуміють розділ фізики, що вивчає деформації матеріалів (напруження).

В залежності від властивостей матеріалу для описання процесу може бути застосована теорія деформацій і теорія течії. Так в загальному вигляді напружений стан може бути описаний:

рівнянням рівноваги:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \quad \text{або} \quad \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \quad \text{або} \quad \left(\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \quad \text{або} \quad \left(\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right);\end{aligned}\tag{1}$$

рівнянням сумісності деформацій (геометричні рівняння):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z};\end{aligned}\tag{2}$$

рівняння стану середовища. Ці рівняння характеризують реакцію середовища на завантаження. Вони зв'язують між собою напруження і деформації. В загальному вигляді ці рівняння мають вигляд: $\sigma_x = F_1(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$;

$$\sigma_x = F_2(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx});\tag{3}$$

$$\tau_{zx} = F_6(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}).$$

В цих рівняннях маємо невідомі:

напруження $\sigma_x(x, y, z), \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$;

деформації $\varepsilon_x(x, y, z), \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$;

переміщення $u(x, y, z), V, W$.

Таким чином, при вирішенні системи рівнянь (1), (2), (3) може бути описаний технологічний процес. Рівняння стану середовища (фізична модель середовища) здійснює прив'язку основних положень теорії пружності і пластичності до механіки будівельних матеріалів і сумішей. Роботами В.Й.Сівко отримано рівняння стану для більшості матеріалів (бетонних і розчинних сумішей, ґрунтів, керамзито-бетонних сумішей, мінеральних добрив і інших). Розроблена методика експериментальних досліджень для отримання рівняння стану в випадках відсутності даних досліджень. На рис. 1 приведено загальний вигляд рівняння стану для бетонної суміші з В/Ц = 0,4 (Ж = 40...60 с) при швидкостях навантаження 4, 12 м/с. Як видно така залежність має характер петлі гістерезису. Вона вміщує в собі пружні, пластичні і в'язкісні характеристики.

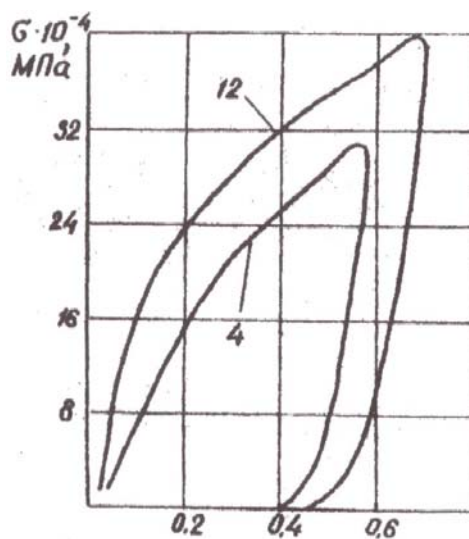


Рис.1. Рівняння стану бетонної суміші

Більшість технологічних задач промисловості будівельних матеріалів може бути приведена до основних класичних задач механіки:

- стиснення будівельної суміші в замкнутому просторі;
- вісесиметрична задача;
- дія штамп на пружно-пластичний простір;
- циліндричний каток на поверхні;
- рух кулі в середовищі, що пульсує;
- рух середовища в трубі;
- втиснення клина в середовище і інше.

Нижче наведені деякі з цих задач:

1. Стиснення будівельної суміші в замкнутому просторі. Схема задачі показана на рис.2.

Рішення цієї задачі можна отримати в вигляді функції напруження Ері $\phi(x, y)$. Згідно з теорією пружності [1] функцію напруження вибирають таким чином, щоб диференціальне рівняння рівноваги звелось до тотожності. Цим умовам можна задовольнити, якщо напруження виразити через функцію Ері $\phi(x, y)$ наступними співвідношеннями (плоска задача):

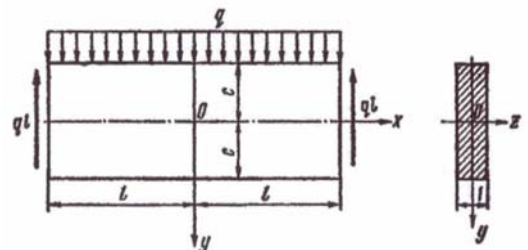


Рис.2.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y} - Xy - Yx. \quad (4)$$

Нами отримано значення функції напруження у вигляді полінома:

$$\varphi = \frac{b_3}{4 \cdot 3} \left(x^4 y - \frac{1}{5} y^5 \right) + \frac{d_5}{2 \cdot 3} \left(x^2 y^2 - \frac{1}{2} y^5 \right) + \frac{b_3}{2 \cdot 1} x^2 y + \frac{d_3}{2 \cdot 3} y^3 + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{c_2}{2} y^2;$$

$$\text{де } a_2 = -\frac{q}{2}; \quad b_3 = \frac{3q}{4c}; \quad d_5 = \frac{3q}{4c^3}; \quad d_3 = \frac{3a}{4c^3} \left(l^2 - \frac{2}{5} c^2 \right); \quad c_2 = 0.$$

Підставляючи знайдені постійні в формулу (4), отримаємо наступну систему напружень:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3q}{4c^2} (l^2 - x^2) y + \frac{3q}{4c} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{y^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right) y \\ \sigma_y &= -\frac{q}{4} \left(\frac{y^3}{c^3} - 3 \frac{y}{c} + 2 \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{2q}{4c^3} (c^2 - y^2) x \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Залежності (5) дають розподіл напружень в середовищі в залежності від зміни x і y . Для визначення деформацій необхідно скористатись рівнянням стану.

2. Вдавлювання випуклого штампа.

До цієї задачі може бути зведено задачу роликового прокату будівельних виробів, взаємодію клина з середовищем, задачу про застосування кулі в клапанах поршневих розчинонасосів.

Диференційні рівняння рівноваги мають вигляд (об'ємні сили відсутні):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{і умова пластичності [2] (Сен-Венана): } \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2, \quad (7)$$

де k – зв'язність середовища.

Це система трьох рівнянь, що вміщують три компоненти напруження $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ (система пластичної рівноваги).

Вона може бути розглянута незалежно від компонента переміщення (і рівняння сумісності деформацій). Схема рішення наведена на рис. 3.

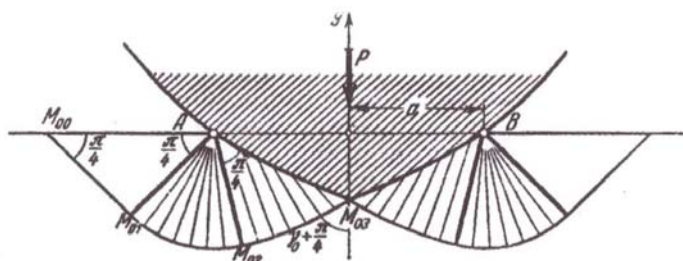


Рис.3.

В площині $x - y$ розрізняють три області: трикутник $AM_{00}M_{01}$, круговий сектор $AM_{01}M_{02}$ і криволінійний трикутник $AM_{02}M_{03}$. В трикутнику $AM_{00}M_{01}$ і в круговому секторі $AM_{01}M_{02}$ напружений стан визначається залежностями:

$$\chi = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{і}$$

$$\chi + \varphi = \xi_0, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \arctg \frac{y}{x+a},$$

де χ – безрозмірна перемінна, яка внесена наступним чином:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = k, \quad \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = 2k\chi - \sigma_0, \text{ причому } \sigma_0 - \text{постійна величина } a.$$

Сітка характеристик в першій області складається з двох сімейств паралельних прямих, нахилених до осі x під кутами $\pi/4$, а в другій області утворена сімействами концентричних кіл з центрами в точці A і пучком прямих, що проходять через ту ж точку.

В криволінійному трикутнику $AM_{02}M_{03}$ може бути застосований інтеграл [2]

$$\chi = -\varphi + \xi_0, \quad y = x \cdot \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \psi(\varphi), \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad (8)$$

де $\psi(\varphi)$ - довільна функція.

Остаточно мають місце рівності:

$$\chi + \varphi = \xi_0, \quad y - x \cdot \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = y(\varphi) - x(\varphi) \cdot \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \alpha,$$

а сітка характеристик утворена кривими, які знаходяться шляхом інтегрування рівнянь (8) і непаралельними прямими $\varphi = \text{const}$, що пересікають лінію контакту під кутами $\pi/4$.

Напруження в точках перетину ліній сітки:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{matrix} \right\} = \sigma_0 + k(2\chi \pm \cos \varphi), \quad \tau_{xy} = k \cdot \sin 2\varphi.$$

Дослідження напруженого стану під штампом дозволяє визначити опір вдавлюванню і рух штампа відносно середовища.

3. Протягування матеріалу через отвір (щілину). Задача може бути застосована при дослідженні руху розчину в трубах. Рішення задачі наведено на рис.4.

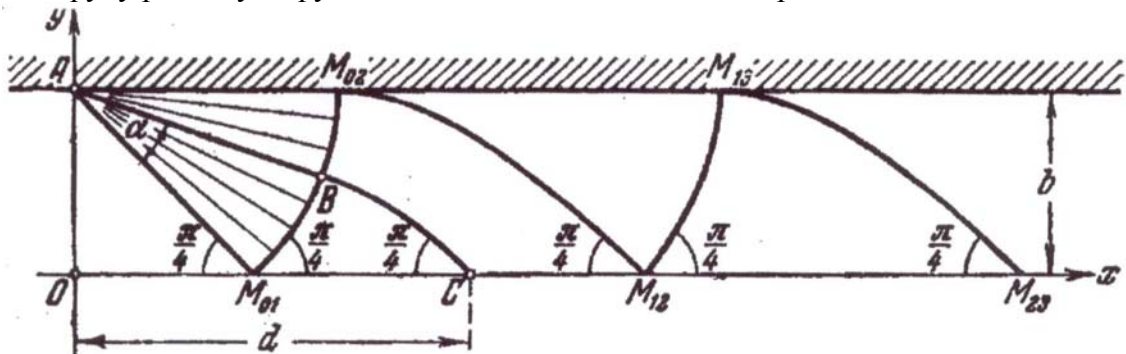


Рис.4.

В прямокутному трикутнику AOM_{01} має місце рівномірний напружений стан, який визначається так: $\chi = -\frac{1}{2}$, $\varphi = 0$ або $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$, $\sigma_y = -2k$, а сітка характеристик утворена двома ортогональними сімействами паралельних прямих, нахилених до осі X під кутами $\pi/4$.

В кутовому секторі $AM_{01}M_{02}$, з центральним кутом $\pi/4$ мають місце рівняння

$$\chi + \varphi = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{b-y}{x},$$

а сітка характеристик складається з сімейства концентричних кіл з центрами в т. A і пучка прямих, що проходять через ту ж точку цієї області.

Література

1. Самуль В.Й. Основы теории упругости и пластичности. - М.: Высшая школа, 1970.
2. Соколовский В.В. Теория пластичности. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950.