МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Змістовий модуль 2
Границі та неперервність функцій
Диференціальне числення

Методичні вказівки та завдання
до виконання розрахунково-графічної роботи
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 192 «Будівництво і цивільна інженерія»

Київ 2024

УДК 517 (076)
В55

Укладачі: $\boxed{\text{К. В. Божонок}}$, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Н. В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент: О. В. Забарило, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск: Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 10 від 01 березня 2024 року.

В авторській редакції.

Вища математика. Змістовий модуль 2. Границі та неперервність
В55 функцій. Диференціальне числення : методичні вказівки та завдання до виконання розрахунково-графічної роботи / уклад. : $\boxed{\text{К. В. Божонок}}$, Н. В. Бондаренко. – Київ : КНУБА, 2024. – 64 с.

Містить 32 варіанти індивідуальних завдань і приклад розв'язання типового варіанту з детальними поясненнями за темами «Границі та неперервність функцій», «Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних».

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 192 «Будівництво і цивільна інженерія».

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методична розробка продовжує цикл збірників індивідуальних розрахунково-графічних робіт з вищої математики.

Індивідуальна розрахункова робота охоплює такі розділи з курсу вищої математики: вступ до математичного аналізу (границі послідовностей, границі функцій, неперервність функцій), диференціальне числення функцій однієї змінної, диференціальне числення функцій багатьох змінних.

Мета навчального видання – надати студентам базові знання про границі функцій, поняття неперервності, основ диференціального числення функцій однієї та багатьох змінних, які є фундаментальним для вивчення інших розділів математичного аналізу; розвинути вміння застосовувати диференціальне числення для розв'язання прикладних задач з технічних та спеціальних дисциплін, передбачених навчальними програмами будівельних спеціальностей.

Завдання навчального видання – розвинути навички обчислення границь різних типів функцій, дослідження функцій на неперервність, знаходження похідних функцій, застосування похідної до дослідження функцій (знаходження інтервалів монотонності, екстремумів, інтервалів випуклості вгору та вниз, точок перегину); ознайомити з основними поняттями диференціального числення функцій багатьох змінних.

Для виконання завдань варіанта розрахункової роботи укладачі пропонують студентам ознайомитись з теоретичним матеріалом за відповідними темами зі списку рекомендованої літератури, а також розібратися у наведених прикладах розв'язування деяких типових задач.

ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

1. Завдання до розділу «Границі та неперервність функцій»

Завдання 1. Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя.

1.1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x-4}{x^2-x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{5\,\mathrm{arctg}\left(x/3\right)}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{-\frac{5x}{6}+2}$;

1.2. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^3-5x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$;

1.3. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\mathrm{tg}\,2x}$,

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$;

1.4. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,6x}{2x^2-3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$;

1.5. а) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\mathrm{arctg}\,2x}$,

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$;

1.6. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\mathrm{tg}\,3x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(5x^2+1\right)}{1-\sqrt{3x^2+1}}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$;

1.7. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{2x\cdot\sin 3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{\sqrt{x+1}-1}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-5}\right)^{2x^3}$;

1.8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-5x^2+2x+2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{4x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{3+x}-1}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-5}\right)^{-x}$;

1.9. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3-4x^2+9}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{\sin^2\left(\sqrt{5x^3}\right)}$,

б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-3x^2}{2-3x^2}\right)^{5x^2}$;

1.10. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3-1}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{\sin 5x}\right)}{3\sqrt{7x}}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3x+6}-3}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+9}\right)^{3x}$;

1.11. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+3x^2-4}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{\sin 4x\cdot \operatorname{tg} 5x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-7x}{3-\sqrt{x^2+9}}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+4}{2x^2-4}\right)^{x^3}$;

1.12. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-9x-9}{x^2-9}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} 5x^3}{\arcsin 3x}\right)^{\frac{1}{x-6}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{2x^3+2x^2}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-15}{3x^2+x+5}\right)^{5x}$;

1.13. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^4-2x^3+x-2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x+1}-e}{\ln\left(1+x\sqrt{1+x}\right)}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{7+x}}{1-\sqrt{3-x}}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-1}{7x+3}\right)^{3x+2}$;

1.14. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+11x^2+26x-8}{x^3+4x^2+4x+16}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 7x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{\sqrt{4-x}-1}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2+3}\right)^{3x}$;

1.15. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-4x^2+3x-1}{x^3-1}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\operatorname{arctg} 3x^2\right)}{1-\cos 7x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x}-x}{\sqrt{x+6}-3}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+1}\right)^{3x-1}$;

1.16. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3+x^2+3x-5}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\left(e^{2x}-1\right)}{5x^2+2x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x+16}-5}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+5}{6x-1}\right)^{2-3x}$;

1.17. а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{2x^2+7x-15}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\arcsin 2x^3\right)}{\operatorname{arctg}^3 7x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{x+4}-2}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x+6}\right)^{3x-1}$;

1.18. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+4x^2+2x-4}$, в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^3+8}$,

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{24+5x}+x}{(x+3)^2}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{-5x^2}$;

1.19. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-7x-6}{x^2-4}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\cdot\sin 3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{12-4x}-2}{\sqrt{12+2x}-4}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{5x^2-3}\right)^{1-4x}$;

1.20. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2+2x-42}{x^2-9}$, в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-7}\right)^{5x+1}$;

1.21. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+6x-27}{2x^2-x-15}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg}4x}{x+\operatorname{arctg}3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{3x}-x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-4}\right)^{7x}$;

1.22. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2\left(5\sqrt{x}\right)}{e^{-2x}-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+13}-3}{\sqrt{1-2x}-3}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-4}\right)^{5-x}$;

1.23. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{3x^2-5x+2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{3x+4}-5}{\sqrt{x+9}-4}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+5}\right)^{\sqrt{x}}$;

1.24. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4x-12}{3x^2-2x-16}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2\left(\sqrt{3x}\right)}{\ln(1+5x)}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x}-3}{x^3-27}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+6}{3x}\right)^{5x}$;

1.25. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{3x^2+8x+4}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{\sin 4x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}\right)^{2x}$;

1.26. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-5x^2+2x+2}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{2x\cdot\sin 3x}$,

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{3+x}-1}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-5}\right)^{-x}$;

1.27. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2\sqrt{5x}}{3^{-4x}-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{\sqrt{2+x}-x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+4x-1}{3x^2+5x-1}\right)^{2-5x^2}$;

1.28. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-6}\right)^{\frac{x}{6}+1}$;

1.29. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\arcsin 8x^2\right)}{\operatorname{arctg}^2 2x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$;

1.30. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-6x-27}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\cdot\arcsin x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$;

1.31. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-6x-27}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x-\sin 3x}{2x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{6+x}}{x^2-x-6}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x+1}$;

1.32. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-6x-27}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{1+x}}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$.

Завдання 2. Дослідити на неперервність функції. У точках розриву знайти лівосторонню і правосторонню границі функцій. Визначити характер точок розриву.

2.1. а) $y=\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$, б) $y=1-5^{\frac{1}{7-x}}$;

2.2. а) $y=\dfrac{2x-1}{x^2-4}$, б) $y=\dfrac{2}{3+4^{\frac{1}{x-3}}}$;

2.3. а) $y=\dfrac{x^2}{x^3-27}$, б) $y=\dfrac{2}{1+e^{\frac{1}{x-2}}}$;

2.4. а) $y=\dfrac{x-5}{x^2+2x-3}$, б) $y=1-5^{\frac{3}{x+3}}$;

2.5. а) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}$, б) $y=\dfrac{1+5^{\frac{1}{x}}}{1-5^{\frac{1}{x}}}$;

2.6. а) $y=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$, б) $y=3^{\frac{x}{1+2x}}$;

2.7. а) $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$, б) $y=3+6^{\frac{4}{x+5}}$;

2.8. а) $y=\dfrac{x+3}{x^4-9x^2}$, б) $y=\dfrac{3}{4+2^{\frac{1}{x+1}}}$;

2.9. а) $y=\dfrac{1}{3x^2}+\dfrac{2}{x^2-4}$, б) $y=4^{\frac{2}{x-1}}-3$;

2.10. а) $y=\dfrac{x}{(4x-5)^2}$, б) $y=5+6^{\frac{1}{x-3}}$;

2.11. а) $y=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{x-2}$, б) $y=4+5^{-\frac{1}{x+7}}$;

2.12. а) $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$, б) $y=\dfrac{3}{2+5^{\frac{1}{x-2}}}$;

2.13. а) $y=\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2+x-3}$, б) $y=\dfrac{5^{\frac{1}{x-1}}-1}{1+5^{\frac{1}{x-1}}}$;

2.14. а) $y=\dfrac{3x}{\left(x^2-1\right)^2}$, б) $y=\dfrac{9}{5+4^{\frac{1}{3+x}}}$;

2.15. а) $y=\dfrac{3x-1}{4x^2-3x}$, б) $y=\dfrac{2}{4+5^{-\frac{1}{x+7}}}$;

2.16. а) $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2+5x-6}$, б) $y=\dfrac{6}{3+2^{\frac{1}{x+4}}}$;

2.17. а) $y=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-3x+2}$, б) $y=\dfrac{1}{3^{\frac{1}{x+2}}+3^{\frac{1}{x-2}}}$;

2.18. а) $y=\dfrac{2x^2-9x+7}{x^2-7x+6}$, б) $y=2^{\frac{x}{x^2-9}}$;

2.19. а) $y=\dfrac{1-x}{\sqrt[3]{x+8}}$, б) $y=\dfrac{3}{5+7^{\frac{1}{x}}}$;

2.20. а) $y=\dfrac{1}{4x^4-x^2}$, б) $y=8-3^{-\frac{2}{x-7}}$;

2.21. а) $y=\dfrac{x-1}{(2x+3)(2x-5)}$, б) $y=\dfrac{1}{2+e^{-\frac{1}{x+4}}}$;

2.22. а) $y=\dfrac{4x^3}{x^2-25}$, б) $y=1+3^{-\frac{1}{x+4}}$;

2.23. а) $y=\dfrac{2x^2-7x-9}{x^2-3x-4}$, б) $y=\dfrac{2}{3+4^{\frac{1}{x-5}}}$;

2.24. а) $y=\dfrac{2x^2-5x-7}{x^2-4x-5}$, б) $y=3^{\frac{x}{x^2-4}}$;

2.25. а) $y=\dfrac{4x^2-x-5}{x^2-4x-5}$, б) $y=5^{\frac{x-2}{x-1}}$;

2.26. а) $y=\dfrac{5x^2-x-6}{x^2-5x-6}$, б) $y=\dfrac{4^{\frac{1}{x+3}}-1}{1+4^{\frac{1}{x+3}}}$;

2.27. а) $y=\dfrac{6x^2-x-7}{x^2-5x-6}$, б) $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x+2}}-1}{1+3^{\frac{1}{x+2}}}$;

2.28. а) $y=\dfrac{4x^2-3x-7}{x^2-6x-7}$, б) $y=\dfrac{7^{\frac{1}{x}}}{4+2^{\frac{x}{x-2}}}$;

2.29. а) $y=\dfrac{6x^2-x-7}{x^2-x-2}$, б) $y=\dfrac{3}{2+4^{\frac{1}{2-x}}}$;

2.30. а) $y=\dfrac{4x^2-7x-11}{x^2-3x-4}$, б) $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}}{4+2^{\frac{x}{x-5}}}$;

2.31. а) $y=\dfrac{3x^2+x-2}{x^2+3x+2}$, б) $y=6^{\frac{3}{x^2-1}}$;

2.32. а) $y=\dfrac{3-x}{\sqrt{9-x^2}}$, б) $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}}{1+3^{\frac{x}{x+1}}}$.

2. Завдання до розділу «Диференціальне числення функцій однієї змінної»

Завдання 3. Знайти вказані похідні.

3.1. а) $y=\dfrac{1-e^{4x+1}}{\sqrt{\sin 2x}}+\sin^5(x-\operatorname{tg}2x),\quad y'_x,$ в) $\begin{cases}x(t)=5^{\ln t}\\ y(t)=\ln^5 t\end{cases},\quad y'_x,\, y''_{xx},$

б) $x\cdot y+\ln y-2\ln x=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}},\quad y'_x,$ г) $y=\left(\ln 2x\right)^{\operatorname{arctg}4x},\quad y'_x;$

3.2. а) $y=\sqrt[5]{\arccos x^2}-3^{\frac{\cos x}{\ln x}},\quad y'_x,$ в) $\begin{cases}x(t)=\dfrac{2-t}{2+t^2}\\ y(t)=\dfrac{t^2}{2+t^2}\end{cases},\quad y'_x,\, y''_{xx},$

б) $4y=\cos\left(x+y\right)+\sqrt{x^2+y^2},\quad y'_x,$ г) $y=\left(\cos 3x\right)^{x^2-1},\quad y'_x;$

3.3. а) $y=2x^2\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{2x-1}{3x+5}+\ln\left(3x^5\right),\ y'_x,$ в) $\begin{cases}x(t)=\ln 3t\\ y(t)=t^2-t^3\end{cases},\ y'_x,\, y''_{xx},$

б) $x\cdot\cos 2y-y\cdot 4^{-x}=\left(x-y\right)^2,\quad y'_x,$ г) $y=\left(\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}},\quad y'_x;$

3.4. а) $y=\arcsin^2\sqrt{1-3\cos^2 x},\quad y'_x,$ в) $\begin{cases}x(t)=\operatorname{arctg}t\\ y(t)=t^2/2\end{cases},\quad y'_x,\, y''_{xx},$

б) $3^y+\sqrt{xy}+\ln^2 y=\sin x-\dfrac{y}{x},\ y'_x,$ г) $y=\left(4\cos x+5\right)^{\ln(x+8)},\ y'_x;$

3.5. а) $y=\cos e^{-x^2}+2^{\sqrt{\operatorname{ctg}x}},\quad y'_x,$ в) $\begin{cases}x(t)=\arcsin\left(t^2-1\right)\\ y(t)=\arccos 2t\end{cases},\quad y'_x,\, y''_{xx};$

б) $\sqrt{\ln x+\ln y}-\dfrac{x^2}{y^3}+3\ln 5=0,\ y'_x,$ г) $y=\dfrac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{x^3+1}}{6x^4\cdot\ln^2\left(5x-1\right)},\ y'_x;$

3.6. а) $y=\arcsin\dfrac{2}{x}-\dfrac{\sin\left(x^3+5x\right)}{x^2+4},\quad y'_x,$ в) $\begin{cases}x(t)=2^{-\sin t}\\ y(t)=\sin^2 t\end{cases},\quad y'_x,\, y''_{xx},$

б) $y\cdot\sqrt{x}+\dfrac{1}{y}=(x+7y)^3,\quad y'_x,$ г) $y=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{\arcsin\frac{1}{x}},\quad y'_x;$

3.7. а) $y=\operatorname{tg}2x\cdot\ln^7\left(1+e^{-2x}\right)+2^{\sqrt{\cos x}},\ y'_x,$ в) $\begin{cases}x(t)=t^2+e^t\\ y(t)=3^{2t}\end{cases},\ y'_x,\ y''_{xx};$

б) $\operatorname{arctg}y+\sqrt{1-2y}+e^{2y}=4x^3,\quad y'_x,$ г) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}},\quad y'_x;$

3.8. а) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\ln^3 x}+\dfrac{1+\operatorname{tg}2x}{4-\sin^2 x},\quad y'_x,$ в) $\begin{cases}x(t)=\ln\sqrt{t^2+1}\\ y(t)=\dfrac{1}{t^2+1}\end{cases},\ y'_x,\ y''_{xx},$

б) $x^2\cdot\sin 3y=y^3+2y+5,\quad y'_x,$ г) $y=\left(3x^2+x\right)^{\cos^4 2x},\quad y'_x;$

3.9. а) $y=2^{\ln\left(x^2+x+1\right)}\cdot e^{\sqrt{\operatorname{tg}3x}},\quad y'_x,$ в) $\begin{cases}x(t)=2t-1\\ y(t)=t^3+\sin 2t\end{cases},\ y'_x,\ y''_{xx},$

б) $\ln\left(2y+x^3\right)-\dfrac{x}{\sqrt{y}}=2-5xy,\quad y'_x,$ г) $y=(2x+5)^{\frac{1-x}{1+2x}},\quad y'_x;$

3.10. а) $y=\dfrac{1}{\ln^2\left(x^2-\sqrt{x}\right)}-\dfrac{x^3-1}{x^4+8x},\quad y'_x,$ в) $\begin{cases}x(t)=3\cos t\\ y(t)=4\sin^3 t\end{cases},\ y'_x,\ y''_{xx},$

б) $\arcsin\dfrac{2}{y}-\operatorname{tg}^3\dfrac{x}{2}=e^{-x^2-y^2},\quad y'_x,$ г) $y=\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)^{\arcsin 2\sqrt{x}},\quad y'_x;$

3.11. а) $y=4^{\sin\ln x}-\operatorname{ctg}\sqrt{\dfrac{x}{x+1}},\quad y'_x,$ в) $\begin{cases}x(t)=e^{t-t^3}\\ y(t)=t^2+t\end{cases},\ y'_x,\ y''_{xx},$

б) $5^{-x^2-y^2}=\ln\dfrac{y}{x}+\sqrt{y},\quad y'_x,$ г) $y=\dfrac{x^2\cdot 3^{\operatorname{tg}x}\cdot\sqrt{5x}}{\sqrt[4]{2\arcsin^5 8x}},\quad y'_x;$

3.12. а) $y=e^{-x^2}+\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{\cos 5x}$, $\quad y'_x$, $\qquad$ в) $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{t+1} \\ y(t)=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$, $\quad y'_x,\, y''_{xx}$,

б) $y^2\cdot\ln 3x=\sin 2x+\operatorname{arctg} 6y$, $\quad y'_x$, $\qquad$ г) $y=\left(\sqrt{x}-1\right)^{\sqrt{x}-x^5}$, $\quad y'_x$;

3.13. а) $y=\operatorname{arctg}\left(e^{\sqrt{x}}\right)+\left(\ln 3\right)^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$, $\quad y'_x$, $\qquad$ в) $\begin{cases} x(t)=t^2-t \\ y(t)=\ln^3 t \end{cases}$, $\quad y'_x,\, y''_{xx}$,

б) $xy-y\cdot 2^{-x^2}=\sqrt{\left(x-y\right)^5}$, $\quad y'_x$, $\qquad$ г) $y=\left(\sin 2x\right)^{\arcsin 3x}$, $\quad y'_x$;

3.14. а) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\cos^5\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)\cdot x^3$, $\; y'_x$, $\qquad$ в) $\begin{cases} x(t)=t^2 \\ y(t)=e^{-3t^2} \end{cases}$, $\; y'_x,\, y''_{xx}$;

б) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-x\sqrt{y}=\arcsin 3x$, $\quad y'_x$, $\qquad$ г) $y=\left(\ln x\right)^{4x-3}$, $\quad y'_x$;

3.15. а) $y=\operatorname{arctg}^5\dfrac{1}{\cos x}\cdot 5^x-\arcsin\dfrac{2}{x-3}$, $\; y'_x$, $\qquad$ в) $\begin{cases} x(t)=\sqrt{t} \\ y(t)=\ln\sqrt{1-t} \end{cases}$, $\; y''_{xx}$,

б) $\left(x^2+y^2\right)^3=e^{y/x}-\dfrac{\ln 3x}{y}$, $\; y'_x$, $\qquad$ г) $y=\left(\arcsin x+\dfrac{3}{x^5}\right)^{\operatorname{arctg} 4x}$, $\; y'_x$;

3.16. а) $y=\dfrac{\ln\left(x^2+x\right)}{\sqrt{x^2+4x}}+\left(\cos 3\right)^{-\sqrt{x}}\cdot\sin^3 x$, $\; y'_x$, $\qquad$ в) $\begin{cases} x(t)=t^2+2t \\ y(t)=t^3-3t \end{cases}$, $\; y''_{xx}$,

б) $\sqrt{1-y^2}\cdot\cos x=\dfrac{1}{\left(x+7y\right)^3}$, $\quad y'_x$, $\qquad$ г) $y=\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^{2x^2+x+1}$, $\quad y'_x$;

3.17. а) $y=\dfrac{\sqrt{x+6}+5}{\operatorname{arctg}\left(7x-2\right)}+\ln^5\operatorname{ctg}\left(2^x\right)$, $\; y'_x$, $\qquad$ в) $\begin{cases} x(t)=\operatorname{tg} t \\ y(t)=\operatorname{ctg} 3t \end{cases}$, $\; y'_x,\, y''_{xx}$,

б) $\dfrac{\ln\left(y-2\right)}{y-2}+\sin 2y-\operatorname{tg} 2x=\dfrac{1}{x^2}$, $\; y'_x$, $\qquad$ г) $y=\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+1}}$, $\; y'_x$;

3.18. а) $y=\mathrm{tg}\left(e^{-x^2}+1\right)\cdot\sqrt{\dfrac{2+x}{3-2x}}$, y'_x, в) $\begin{cases} x(t)=e^{t^2-1} \\ y(t)=t+1/t \end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $\dfrac{y}{x}=\mathrm{arctg}\, e^y-3^{\frac{y}{x}}$, y'_x, г) $y=\left(\dfrac{x-1}{2x^2+5}\right)^{5\ln x+3}$, y'_x;

3.19. а) $y=\mathrm{tg}\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{2^x+3^x}}$, y'_x, в) $\begin{cases} x(t)=t^5+2t \\ y(t)=t^3+8t \end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $e^{\mathrm{arctg}\, y}-\dfrac{1}{2-3y}=3^{x+y^2}$, y'_x, г) $y=\left(\dfrac{\ln x+x}{\sin x}\right)^{2\sqrt{x}}$, y'_x;

3.20. а) $y=\sqrt{\ln\arccos\dfrac{2\sqrt{3}}{x^2}}\cdot\left(x^2\right)^{\ln 3}$, y'_x, в) $\begin{cases} x(t)=3\cos^2 t \\ y(t)=\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{t} \end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $\dfrac{x}{y^3}-\dfrac{y^3}{\sqrt{x}}=\ln\left(x^2+1\right)$, y'_x, г) $y=\dfrac{\sqrt[3]{\left(1-x^4\right)^2}\cdot\sqrt{\sin 3x}}{\left(1-x-x^2\right)^2\cdot e^{3-4x}}$, y'_x;

3.21. а) $y=\ln\dfrac{\arccos x}{1+x^2}-2^{\sin^4 5x}$, y'_x, в) $\begin{cases} x(t)=t\sin t \\ y(t)=\cos t^2 \end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $y^2x=\cos\dfrac{y}{x}-\mathrm{tg}^3 x$, y'_x, г) $y=\left(x+\sqrt{\sin x}\right)^{x^2-1}$, y'_x;

3.22. а) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x}\cdot\mathrm{tg}^3 2x}{(4-x)^9\cdot\sin\ln x}$, y'_x, в) $\begin{cases} x(t)=e^t-1 \\ y(t)=e^{2t} \end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $x\cdot e^{2y}=5-\cos^3\left(x-\dfrac{1}{y}\right)$, y'_x, г) $y=\left(4x^2+3\right)^{\mathrm{ctg}\sqrt{x}}$, y'_x;

3.23. а) $y=\ln\sqrt[5]{\mathrm{arctg}\left(x^2-\dfrac{2}{x^3}\right)}$, y'_x, в) $\begin{cases} x(t)=\mathrm{tg}^2 t \\ y(t)=\mathrm{ctg}^2 t \end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $y\cdot\sqrt[3]{x}=\ln\left(x^2-y^5\right)$, y'_x, г) $y=(3\ln x+2x)^{\arcsin 3x}$, y'_x;

3.24. а) $y=\sin\frac{2x-3}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{tg}^2\left(\frac{5x}{8}\right)+\frac{x^2}{1-\sqrt[4]{x}}$, y'_x, в) $\begin{cases}x(t)=t^3+1\\ y(t)=t^2+t+1\end{cases}$, y''_{xx},

б) $\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}+\frac{y}{\sqrt{x}}=\left(1+y^3\right)^4$, y'_x, г) $y=\left(\operatorname{tg}2x\right)^{\sqrt{x^2+3}}$, y'_x;

3.25. а) $y=\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{e^{-2x}+3}\cdot\sqrt{\cos 2x}\right)$, y'_x, в) $\begin{cases}x(t)=e^{t^2}\\ y(t)=2t^2+t^3\end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $\frac{x}{y-1}+\sqrt[3]{\frac{2}{x}}=4\ln y$, y'_x, г) $y=\left(x+2x^2\right)^{\frac{2}{x+3}}$, y'_x;

3.26. а) $y=\operatorname{tg}^3 6x\cdot\operatorname{ctg}^2\sqrt[7]{x}+\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{x}{2}}$, y'_x, в) $\begin{cases}x(t)=t^3-t\\ y(t)=t^2+\operatorname{tg}t\end{cases}$, y'_x,

б) $(xy)^3+2^{\sin y}=3x+7$, y'_x, г) $y=\left(\operatorname{tg}\frac{2}{x}\right)^{\sin x}$, y'_x;

3.27. а) $y=\frac{2}{\sqrt[6]{x}}\cdot 3^{x-\ln^2 x}+2\operatorname{ctg}\left(1/x^4\right)$, y'_x, в) $\begin{cases}x(t)=\sqrt{t-t^2}\\ y(t)=e^{-t^3}\end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $\frac{1}{\ln^2 y}+2^x-3^y=5x^3$, y'_x, г) $y=\left(\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)^{3x^2}$, y'_x;

3.28. а) $y=\cos\sqrt{\ln\operatorname{arctg}e^{-2x^4}}$, y'_x, в) $\begin{cases}x(t)=\frac{t-8}{t^2-4}\\ y(t)=\frac{3}{t\left(t^2-4\right)}\end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $x\cdot\cos y^2=\sqrt{4x-5y^3}$, y'_x, г) $y=\left(3x-x^2\right)^{\ln^2 x}$, y'_x;

3.29. а) $y=\frac{\cos x^3}{\sqrt{1-x^4}}-5x^3\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, y'_x, в) $\begin{cases}x(t)=3t-5t^4\\ y(t)=t^2+7t^3\end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $\sin^2(xy)-\frac{y}{x}+\ln\left(y^2+1\right)=0$, y'_x, г) $y=\left(\cos^2 5x\right)^{\sqrt{\ln 3x}}$, y'_x;

3.30. а) $y=\sqrt{\ln\sin\dfrac{x}{x+3}}\cdot\operatorname{arctg}e^{-x^2}$, y'_x, в) $\begin{cases} x(t)=2^{3t} \\ y(t)=e^{2t}+1 \end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $\sqrt{1-y^2}=\arcsin y-x\cdot\left(y+3\right)$, y'_x, г) $y=\left(\ln\arcsin x\right)^{\operatorname{arctg}4x}$, y'_x;

3.31. а) $y=5x\cdot\sqrt[5]{\dfrac{4-x}{2}}+3^{\ln^2\operatorname{tg}x}$, y'_x, в) $\begin{cases} x(t)=t-t^4 \\ y(t)=t^2-t^3 \end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $\dfrac{2}{\sin^3\left(x+y^2\right)}+\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{3}{\operatorname{arctg}y}$, y'_x, г) $y=\left(2x^2-5\right)^{\sqrt{\ln x}}$, y'_x;

3.32. а) $y=\ln\sqrt[3]{\operatorname{arctg}e^{-x^2}}+\dfrac{\operatorname{ctg}^5 6x}{\sqrt{1-e^{-x}}}$, y'_x, в) $\begin{cases} x(t)=t\cdot\cos t \\ y(t)=3\cos t \end{cases}$, y'_x, y''_{xx},

б) $\left(x^2+y^3\right)^5=\ln\dfrac{x}{2y-1}$, y'_x, г) $y=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$, y'_x.

Завдання 4. Розв’язати задачі.

4.1. Визначити кутовий коефіцієт дотичної до кривої $x^2-y^2+xy-11=0$ в точці $(3;2)$.

4.2. В якій точці кривої $y^2=4x^3$ дотична перпендикулярна до прямої $x+3y-1=0$.

4.3. Записати рівняння дотичної до лінії $\begin{cases} x(t)=t\left(t+1\right) \\ y(t)=t-1 \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру $t=-1$.

4.4. Записати рівняння нормалі до кривої $y=x^3-5x^2+7x-2$ в точці $(1;1)$.

4.5. Скласти рівняння дотичної до астроїди $\begin{cases} x(t)=\cos^3 t \\ y(t)=2\sin^3 t \end{cases}$ у точці, що відповідає значенню $t=\dfrac{\pi}{4}$.

4.6. Записати рівняння дотичної до кривої $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ в точці $(2;1)$.

4.7. Записати рівняння нормалі до лінії $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру $t = -\dfrac{\pi}{3}$.

4.8. Записати рівняння дотичної до лінії $y = 3\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right)$ в точці з абсцисою $x = 1$.

4.9. Записати рівняння дотичної в точці $(1;1)$ до кривої $x^5 + y^5 - 2xy = 0$.

4.10. Знайти точку на кривій $y = \dfrac{x^4}{4} - 7$, дотична в якій паралельна до прямої $y = 8x - 4$.

4.11. Записати рівняння дотичної до кривої $y = 2x^3 - 3x^2$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 12.

4.12. Записати рівняння нормалі до кривої $y = x^2 - 16x + 7$ в точці з абсцисою $x = 1$.

4.13. Знайти точки на кривій $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{9x^2}{2} + 20x - 7$, в яких дотична паралельна осі Ox.

4.14. Записати рівняння нормалі до кола $x^2 + y^2 = 4$ в точці, ордината якої дорівнює 1.

4.15. Записати рівняння дотичної до лінії $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ в точці з абсцисою $x = -2$.

4.16. Скласти рівняння дотичної до еліпса $\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases}$, якщо дотична паралельна прямій $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$.

4.17. З'ясувати, в якій точці кривої $y=\frac{x^2}{4}-7x+5$ дотична паралельна до прямої $y=2x+5$.

4.18. Скласти рівняння нормалі до кривої $y=x^3+5x+3$ в точці перетину цієї кривої з віссю ординат.

4.19. З'ясувати, в якій точці кривої $y=7x^2-5x+4$ дотична перпендикулярна до прямої $23y+x-1=0$.

4.20. Записати рівняння нормалі до лінії $\begin{cases} x(t)=\cos(t/2) \\ y(t)=t-\sin t \end{cases}$ в точці, що відповідає параметру $t=\frac{\pi}{2}$.

4.21. З'ясувати, в яких точках кривої $y=\sin 2x$ дотична утворює з віссю Ox кут $\frac{\pi}{4}$.

4.22. Записати рівняння дотичної до лінії $y=e^{2x-x^2}$ в точці з абсцисою $x=0$.

4.23. Скласти рівняння нормалі до еліпса $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ в точках еліпса, абсциси яких дорівнюють 1.

4.24. Скласти рівняння дотичної до кривої $y=5x-x^2+2$, якщо дотична нахилена до осі абсцис під кутом 45°.

4.25. Записати рівняння дотичної до кривої $y=2x^2-4x+3$ в точці, в якій кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 8.

4.26. Записати рівняння нормалі до кривої $y=(x+1)^3\cdot\sqrt{3-x}$ в точці з абсцисою $x=2$.

4.27. З'ясувати, в яких точках кривої $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-7x+9$ дотична утворює з віссю Ox кут $-\frac{\pi}{4}$.

4.28. Записати рівняння нормалі до кривої $y = 3\operatorname{tg} 2x + 1$ в точці з абсцисою $x = \dfrac{\pi}{2}$.

4.29. З'ясувати, в якій точці кривої $y = 4x^2 - 10x + 13$ дотична паралельна до прямої $y = 6x - 7$.

4.30. Записати рівняння нормалі до кривої $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точці з ординатою $y = 1$.

4.31. Записати рівняння дотичної до кривої $y = 4\sin 6x$ в точці з абсцисою $x = \dfrac{\pi}{18}$.

4.32. Знайти точку на кривій $y = 5x^2 - 4x + 1$, дотична в якій перпендикулярна до прямої $6y + x + 15 = 0$.

Завдання 5. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя.

5.1. а) $\lim\limits_{x\to\pi/3} \dfrac{8\cos^3 x - 1}{x/2 - \pi/6}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x \cdot e^{x/2}}{x + e^x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

5.2. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$, б) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\operatorname{ctg} x - 1}{\sqrt{\cos 2x}}$, в) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$;

5.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^3 \cdot \sin\dfrac{2}{x} \right)$, б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 + 2x \right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$;

5.4. а) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$, б) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$, в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + e^x \right)^{\frac{1}{x}}$;

5.5. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \ln\left(1 + x^2\right)}{3x}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 \cdot e^{-x} \right)$, в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^{2x} + x \right)^{\frac{1}{x}}$;

5.6. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \ln(1 + 2x)}{x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi x}{2} \cdot \ln(1 - x)}$, в) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2}{1-x}}$;

5.7. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 6x + 6\sin x}{x^5}$, в) $\lim\limits_{x\to 4} \left(3 - \dfrac{x}{2} \right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8}}$;

5.8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$, б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)$, в) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{3}{x^2-1}}$;

5.9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x+1\right)-2e^x-1}{x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$, в) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$;

5.10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}x)\cdot\ln x$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

5.11. а) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{4}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$;

5.12. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{2}}{1-x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}x\cdot\ln\left(x+e^x\right)$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+e))^{\frac{1}{x}}$;

5.13. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$, в) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{6}{(1+2\ln x)}}$;

5.14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x}{3x^2+x^5}$, б) $\lim\limits_{x\to 1/2}\sin(2x-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x$, в) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$;

5.15. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$, в) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$;

5.16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{\sin\frac{x}{3}}\right)$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$;

5.17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2x\cdot\operatorname{tg}x}\right)$, в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$;

5.18. а) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\ln\left(e^x-x\right)}\right)$, в) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$;

5.19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$, в) $\lim\limits_{x\to+0}(\ln\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$;

5.20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^3}{\operatorname{tg}^6(x/2)}$, б) $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\ln x\cdot\ln(x-1)\right)$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

5.21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^x}{\operatorname{tg}2x-2x}$, б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}5x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

5.22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-x^2/2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$, в) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$;

5.23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{\cos 3x-e^{-x}}$, б) $\lim\limits_{x\to \infty}x\cdot\sin(3/x)$, в) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}$;

5.24. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\pi/2-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+1/x^2\right)}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$;

5.25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^x}{\operatorname{arctg}x+x^3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$;

5.26. а) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$, б) $\lim\limits_{x\to 1/3}\left(\dfrac{x}{3x-1}-\dfrac{1}{\ln 3x}\right)$, в) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

5.27. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{5}{x^2-x-20}\right)$, в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{8}\right)^{\frac{1}{x-2}}$;

5.28. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$;

5.29. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)\cdot\operatorname{ctg}4x$, в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\dfrac{2}{x}\right)^{x}$;

5.30. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right)$, в) $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt[x]{x}$;

5.31. а) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$, б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+1)^3\cdot e^{-x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\dfrac{3}{2}x\right)^{\frac{4}{5x^2}}$;

5.32. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$, б) $\lim\limits_{x\to +0} x\cdot\ln^3 x$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Завдання 6. За допомогою диференціала наближено обчислити задані величини.

6.1. а) $\sqrt[5]{64}$, б) $\operatorname{arctg}1,05$;

6.2. а) $\sqrt[4]{16,64}$, б) $\operatorname{tg}44^\circ$;

6.3. а) $\sqrt[5]{31}$, б) $\cos 151^\circ$;

6.4. а) $(2,01)^3+(2,01)^2$, б) $\arcsin 0,6$;

6.5. а) $\dfrac{2,9}{\sqrt{(2,9)^2+16}}$, б) $\lg 11$;

6.6. а) $\sqrt[4]{15,8}$, б) $e^{2,01}$;

6.7. а) $\sqrt[5]{200}$, б) $\operatorname{arctg}\sqrt{0,97}$;

6.8. а) $\sqrt{\dfrac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}$, б) $\operatorname{ctg}29^\circ$;

6.9. а) $\sqrt[3]{27,5}$, б) $\ln\operatorname{tg}46^\circ$;

6.10. а) $\sqrt{640}$, б) $2^{2,1}$;

6.11. а) $\sqrt[10]{1025}$, б) $e^{0,2}$;

6.12. а) $(5,07)^3$, б) $\log_2 1,9$;

6.13. а) $\sqrt[3]{1,02}$, б) $\ln\left(e^2+0,2\right)$;

6.14. а) $\sqrt[3]{26,19}$, б) $\operatorname{arctg}\sqrt{3,1}$;

6.15. а) $\sqrt{8,76}$, б) $\sin 31^\circ$;

6.16. а) $\sqrt[3]{70}$, б) $\cos 85^\circ$;

6.17. а) $\sqrt[3]{65}$, б) $\sin 33^\circ$;

6.18. а) $\sqrt{\dfrac{4-3,02}{4+3,02}}$, б) $\ln 1,08$;

6.19. а) $\sqrt[3]{10}$, б) $\arcsin 0,52$;

6.20. а) $(3,02)^5$, б) $\arccos 0,45$;

6.21. а) $\sqrt[7]{130}$, б) $\cos 61^\circ$;

6.22. а) $\sqrt{17}$, б) $\operatorname{arctg} 0,96$;

6.23. а) $\sqrt{1,2}$, б) $\ln \operatorname{ctg} 47^\circ$;

6.24. а) $(3,02)^4 + (3,02)^3$, б) $\ln \sqrt[3]{0,97}$;

6.25. а) $(4,01)^{1,5}$, б) $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{0,98}$;

6.26. а) $\sqrt[3]{70}$, б) $\ln\left(\sqrt{4,02} - 1\right)$;

6.27. а) $\sqrt[4]{17}$, б) $4^{1,2}$;

6.28. а) $\sqrt[2]{66}$, б) $\operatorname{arctg}(1,04)^2$;

6.29. а) $\sqrt{120}$, б) $\ln\left((2,02)^3 - 7\right)$;

6.30. а) $\sqrt[3]{340}$, б) $2^{3,05}$;

6.31. а) $\sqrt[5]{33}$, б) $\lg 101$;

6.32. а) $(2,04)^4$, б) $\ln \sin 91^\circ$.

Завдання 7. Провести повне дослідження функції і побудувати графік.

7.1. а) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$, б) $y = e^{\frac{1}{5+x}}$;

7.2. а) $y = \dfrac{4x - x^2 - 4}{x}$, б) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

7.3. а) $y = \dfrac{x^2}{4x^2 - 1}$, б) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$;

7.4. а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - x + 1}$, б) $y = x - \ln\left(1 + x^2\right)$;

7.5. а) $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$, б) $y = x^2 - 2\ln x$;

7.6. а) $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$, б) $y=x^3\cdot e^{-x^2/2}$;

7.7. а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-27}$, б) $y=x\cdot\ln x$;

7.8. а) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$, б) $y=(x-1)\cdot e^{3x+1}$;

7.9. а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$, б) $y=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

7.10. а) $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$, б) $y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$;

7.11. а) $y=\dfrac{4-2x}{1-x^2}$, б) $y=e^{2x-x^2}$;

7.12. а) $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$, б) $y=x+\ln\left(x^2-4\right)$;

7.13. а) $y=\dfrac{2(x+1)^2}{x-2}$, б) $y=x\cdot\ln^2 x$;

7.14. а) $y=\dfrac{5x^4+3}{x}$, б) $y=\dfrac{4e^{x^2}-1}{e^{x^2}}$;

7.15. а) $y=\dfrac{2+x}{(x+1)^2}$, б) $y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$;

7.16. а) $y=\dfrac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$, б) $y=x\cdot e^x$;

7.17. а) $y=\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$, б) $y=x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$;

7.18. а) $y=\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$, б) $y=(x+2)\cdot e^{1-x}$;

7.19. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-9}$, б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

7.20. а) $y=\dfrac{4x}{4-x^2}$, б) $y=(2x-1)\cdot e^{\frac{2}{x}}$;

7.21. а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$, б) $y=\ln\left(x^2-2x+6\right)$;

7.22. а) $y=\dfrac{2x^2+2+4x}{2-x}$, б) $y=1-\ln^3 x$.

7.23. а) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$, б) $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

7.24. а) $y=\dfrac{(x+2)^2}{(x-1)^2}$, б) $y=x^{2/3}\cdot e^{-x}$;

7.25. а) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$, б) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$;

7.26. а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, б) $y=\ln\left(4-x^2\right)$;

7.27. а) $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x+2}$, б) $y=\dfrac{1}{x}\cdot e^{x^2}$;

7.28. а) $y=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, б) $y=2x+4\operatorname{arctg}x$;

7.29. а) $y=\dfrac{10x}{(x+1)^3}$, б) $y=5x\cdot e^{-x}$;

7.30. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-16}$, б) $y=\dfrac{1}{e^{2x}-1}$;

7.31. а) $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$, б) $y=\ln\left(x^2-2x+2\right)$;

7.32. а) $y=\dfrac{1}{(x-2)\left(x^2-1\right)}$, б) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$.

3. Завдання до розділу «Диференціальне числення функцій багатьох змінних»

Завдання 8. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

8.1. $z = y \cdot \operatorname{tg} \ln\left(x^2 - y^2\right);$

8.2. $z = \arcsin \dfrac{x^2}{x+y};$

8.3. $z = y^3 \cdot \sin\sqrt{x - y^3};$

8.4. $z = \operatorname{arctg} x^2 + \sin\sqrt{xy};$

8.5. $z = (\arcsin x)^y;$

8.6. $z = xy^3 \cdot \ln\sin(x - 2y);$

8.7. $z = \sin^3 x \cdot \cos(x + 3y);$

8.8. $z = 3^{x-y} \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{xy};$

8.9. $z = \arccos \dfrac{\ln x}{\sqrt{y}};$

8.10. $z = \dfrac{\sin\left(x^3 \cdot y^2\right)}{x - \ln y};$

8.11. $z = \sqrt{2x - 3y} \cdot e^{x-y};$

8.12. $z = e^{xy^2} \cdot \left(x^2 - y\right);$

8.13. $z = \cos^5\left(x^3 + xy - y^3\right);$

8.14. $z = \left(e^x \cdot \cos y + e^{\sin y}\right)^3;$

8.15. $z = 2^{(x+y)\cdot\sin(x-y)};$

8.16. $z = \dfrac{y^2 \cdot \ln x}{x \cdot \ln\left(y^2 + 1\right)};$

8.17. $z = \left(x + y^2\right) \cdot (\sin x)^{\cos y};$

8.18. $z = \dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}{x^2 + y^2};$

8.19. $z = \dfrac{\ln\ln(x \cdot \operatorname{ctg} x)}{x^2};$

8.20. $z = \sin\ln\left(2x + 4y^2\right);$

8.21. $z = \ln\arcsin\left(x^5 - xy^3\right);$

8.22. $z = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{x+2y^3}}\right);$

8.23. $z = \arcsin \dfrac{\sqrt{x}}{y-1} \cdot e^{\frac{x}{y}};$

8.24. $z = y^{2x^3} \cdot \sin y^2;$

8.25. $z = \operatorname{arctg}^2 \dfrac{x + 2y}{3 - y};$

8.26. $z = \ln\left(x^3 - \operatorname{tg} x\right) \cdot \cos 5x;$

8.27. $z = e^{-\sqrt{xy}} \cdot x^{-3y};$

8.28. $z = 4^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{\sqrt{x} - y^2}{\arcsin x};$

8.29. $z = \left(\dfrac{y}{\sqrt{y-1}}\right)^{-5x};$

8.30. $z = \dfrac{\arcsin\left(x^2 \cdot y^3\right)}{\sqrt{x - y^2}};$

8.31. $z = e^{y^3 - x^2} \cdot \ln\cos 3x;$

8.32. $z = \operatorname{ctg}\dfrac{y}{x-1} \cdot x^{\ln y}$.

Завдання 9. За допомогою частинних похідних знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функції $y(x)$, що задана неявно виразом.

9.1. $e^{x^2+1} - y \cdot e^{xy^3-7y} + 2x \cdot \ln y = 9;$

9.2. $2^{4x+y} - y \cdot \cos(xy) - x = 0;$

9.3. $\sin^2(x+3y) - \ln\sqrt{x^2-y^2} = 0;$

9.4. $y^2 \cdot \sin 2x = \operatorname{arctg}(x-2y);$

9.5. $x \cdot \sin 5y - y \cdot \cos x = \ln\left(x^2+y^3\right);$

9.6. $e^{2x-y} + \sin(x+3y) = xy^3;$

9.7. $x \cdot y^3 - y \cdot e^x = \ln\left(x^3-y^3\right);$

9.8. $x \cdot \cos 2y - y \cdot 4^{-x} = (x-y)^2;$

9.9. $3^y + \sqrt{xy} + \ln^2 y = \sin x - \dfrac{y}{x};$

9.10. $xy - e^{x+y} + 3y^2 = 0;$

9.11. $\sin\dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{x}{y} = 2;$

9.12. $\sqrt{\ln x + \ln y} - \dfrac{x^2}{y^3} + 3\ln 5 = 0;$

9.13. $y \cdot \sqrt{x} + \dfrac{1}{y} = (x+7y)^3;$

9.14. $\sqrt{1+5\ln y} - \operatorname{tg}(x-3y) = \dfrac{x}{2-y};$

9.15. $\operatorname{arctg} y + \sqrt{1-2y} + e^{2y} = 4x^3;$

9.16. $x^2 \cdot \sin 3y = y^3 + 2y + 5;$

9.17. $\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{x}{y}=2-y^3;$

9.18. $x^2+\ln y-x^2\cdot e^y=\sqrt{y};$

9.19. $\ln\left(2y+x^3\right)-\frac{x}{\sqrt{y}}=2-5xy;$

9.20. $\arcsin\frac{2}{y}-\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}=e^{-x^2-y^2};$

9.21. $\sin\left(2x-5y\right)-\frac{1}{\ln y}=3^{xy^2};$

9.22. $xy-y\cdot 2^{-x^2}=\sqrt{\left(x-y\right)^5};$

9.23. $\left(\frac{x}{y}\right)^2-x\sqrt{y}=\arcsin 3x;$

9.24. $\ln x-e^{-2y}=\frac{x}{\sqrt{y}};$

9.25. $\cos^2\left(xy\right)-2x^2y=3-y^2;$

9.26. $\left(x^2+y^2\right)^3=e^{\frac{y}{x}}-\frac{\ln 3x}{y};$

9.27. $\sqrt{1-y^2}\cdot\cos x=\frac{1}{\left(x+7y\right)^3};$

9.28. $\frac{\ln\left(y-2\right)}{y-2}+\sin 2y-\operatorname{tg}2x=\frac{1}{x^2};$

9.29. $\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}e^y-3^{\frac{y}{x}};$

9.30. $y\cdot\ln x-x\cdot\ln y=e^{2x-y};$

9.31. $2^{x-y}+\left(x-y\right)^2=\frac{1}{\sqrt{xy}};$

9.32. $\sqrt{3x^2-y^2}+\frac{2}{x+y}=5\cos 6x.$

Завдання 10. Для заданої функції $u(x,y,z)$ знайти похідну за напрямом $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$ та градієнт в точці A.

10.1. $u=x^2y+y^2z+xz^2,\quad A(-3;2;1),\quad B(0;5;7);$

10.2. $u=\ln(xy+yz+xz),\quad A(1;2;3),\quad B(2;2;4);$

10.3. $u=x^z-5xyz,\quad A(-4;2;1),\quad B(3;3;8);$

10.4. $u=\sqrt{1+x^2+y^2+z^2},\quad A(-2;1;5),\quad B(4;1;2);$

10.5. $u=e^{xz-y^2},\quad A(0;1;2),\quad B(-3;5;1);$

10.6. $u=xe^z-ye^x,\quad A(-6;1;5),\quad B(9;1;-3);$

10.7. $u=x\cdot e^{y^2-z^2},\quad A(4;1;-1),\quad B(-1;0;5);$

10.8. $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad A(3;4;-1),\quad B(5;2;6);$

10.9. $u=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x},\quad A(4;1;1),\quad B(-3;5;2);$

10.10. $u=x^2y+y^2z+xz^2,\quad A(-4;-3;1),\quad B(5;1;0);$

10.11. $u=(x+y)^z,\quad A(8;-3;0),\quad B(7;2;-1);$

10.12. $u=(x+2y+3z)^2,\quad A(-5;3;-1),\quad B(4;5;-2);$

10.13. $u=(x\cdot y)^z,\quad A\left(\dfrac{1}{2};2;3\right),\quad B\left(\dfrac{3}{2};4;-6\right);$

10.14. $u=x\cdot\ln\left(yz+x^2\right),\quad A(4;-2;1),\quad B(5;1;-3);$

10.15. $u=\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2},\quad A(-6;8;0),\quad B(-5;7;1);$

10.16. $u=x^2-2yx^3-3y^2z,\quad A(8;5;-3),\quad B(7;4;2);$

10.17. $u=\dfrac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\quad A(0;3;-5),\quad B(1;-4;1);$

10.18. $u=x^3y+y^3z-3xyz,\quad A(-1;-2;-1),\quad B(0;3;2);$

10.19. $u=\ln\left(xyz+x^3\right),\quad A(1;3;3),\quad B(4;3;5);$

10.20. $u = z \cdot e^{xy-2z}, \quad A(6;-1;2), \quad B(3;3;2);$

10.21. $u = 7xy^2z^3, \quad A(-4;1;3), \quad B(2;-1;2);$

10.22. $u = 2x^2y^3 - 4xyz + 3z, \quad A(-1;0;5), \quad B(2;2;7);$

10.23. $u = e^{xz-y^2}, \quad A(-2;1;5), \quad B(4;3;6);$

10.24. $u = \ln(xy + yz + 3), \quad A(0;1;3), \quad B(-2;4;5);$

10.25. $u = x^2y - z^3 + 2xz^2, \quad A(-4;1;2), \quad B(3;0;5);$

10.26. $u = x \cdot e^{y^2-z^3}, \quad A(8;1;2), \quad B(7;-3;1);$

10.27. $u = \dfrac{xy}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad A(-4;-3;2), \quad B(1;-3;5);$

10.28. $u = x^2 + y^2 - 7xyz, \quad A(2;1;-5), \quad B(4;0;-3);$

10.29. $u = x^{yz}, \quad A(5;1;-1), \quad B(3;2;8);$

10.30. $u = (x+z)^{2y}, \quad A(4;-3;1), \quad B(5;4;1);$

10.31. $u = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2, \quad A(1;-1;3), \quad B(9;4;14);$

10.32. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad A(1;2;1), \quad B(3;5;6).$

Завдання 11. Знайти дивергенцію та ротор векторного поля $\vec{F}$.

11.1. $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - z^2\vec{k};$

11.2. $\vec{F} = (x^2 - 1)\vec{i} + 2y\vec{j} + (z^2 + 1)\vec{k};$

11.3. $\vec{F} = (x - y^2)\vec{i} + x^3z\vec{j} + xy\vec{k};$

11.4. $\vec{F} = 4xyz\vec{i} - y^2z\vec{j} - yz^2\vec{k};$

11.5. $\vec{F} = (2x^2 + 4y)\vec{i} + 2yz\vec{j} + (z^2 + 2xy)\vec{k};$

11.6. $\vec{F} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k};$

11.7. $\vec{F} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k};$

11.8. $\vec{F} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k};$

11.9. $\vec{F} = x^2 y\vec{i} + xy^2\vec{j} + z^2\vec{k};$

11.10. $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} - z^3\vec{k};$

11.11. $\vec{F} = x^2 y\vec{i} + xy^2\vec{j} + xyz\vec{k};$

11.12. $\vec{F} = x^2 y\vec{i} - xy^2\vec{j} + \left(x^2 + y^2\right)z\vec{k};$

11.13. $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + z^2\vec{k};$

11.14. $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + \left(y^2 + z^2\right)\vec{j} + \left(z^2 + x^2\right)\vec{k};$

11.15. $\vec{F} = \left(2x^2 y - z\right)\vec{i} + \left(3xz^2 + 1\right)\vec{j} + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\vec{k};$

11.16. $\vec{F} = \left(4x^3 z + y^2 - 3\right)\vec{i} + \left(2xy + z^2 + 1\right)\vec{j} + \left(x^4 + 2yz\right)\vec{k};$

11.17. $\vec{F} = xz\vec{i} + \left(2x^3 + y\right)\vec{j} + (z - 3y)\vec{k};$

11.18. $\vec{F} = x\vec{i} + (2 - z)\vec{j} + \left(z^2 + 2x\right)\vec{k};$

11.19. $\vec{F} = (z - x)\vec{i} + \left(y^2 + z\right)\vec{j} + \left(2y + x^2\right)\vec{k};$

11.20. $\vec{F} = (xz - 3)\vec{i} + \left(x^3 + 2y\right)\vec{j} + (z - 3y)\vec{k};$

11.21. $\vec{F} = (2x + yz)\vec{i} + (2y - x)\vec{j} + zy\vec{k};$

11.22. $\vec{F} = \left(x^2 + z\right)\vec{i} + x\vec{j} + (3x + y)\vec{k};$

11.23. $\vec{F} = \left(2y - z^3\right)\vec{i} + 2(x + z)\vec{j} + \left(2x - 3yz^2\right)\vec{k};$

11.24. $\vec{F} = (2x - y)\vec{i} + (1 - 2zy)\vec{j} + z^2\vec{k};$

11.25. $\vec{F} = \left(x^2 + z\right)\vec{i} + xy\vec{j} + (3x + y)\vec{k};$

11.26. $\vec{F} = (z - x)\vec{i} + \left(2 + y^2\right)\vec{j} + (x + 2y)\vec{k};$

11.27. $\vec{F} = (x + 2yz)\vec{i} + (3y - x)\vec{j} + (y - 2z)\vec{k};$

11.28. $\vec{F} = \left(2xyz^3 - 1\right)\vec{i} + \left(x^2 z^3 + 2\right)\vec{j} + \left(3x^2 yz^2 + 3\right)\vec{k};$

11.29. $\vec{F} = \left(4x^3 + yz\right)\vec{i} + \left(4y^3 + xz\right)\vec{j} + \left(xy + 4z^3\right)\vec{k};$

11.30. $\vec{F} = \left(3x^2 + y^2\right)\vec{i} + (2xy + z)\vec{j} + \left(y + 3z^2\right)\vec{k};$

11.31. $\vec{F}=\left(2x-z^3\right)\vec{i}+2\left(y+z\right)\vec{j}+\left(2y-3xz^2\right)\vec{k};$

11.32. $\vec{F}=\left(z-x\right)\vec{i}+\left(z+3y^3\right)\vec{j}+\left(z+2y\right)\vec{k}.$

Завдання 12. Дослідити на екстремуми функції.

12.1. $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y;$

12.2. $z=x^3+8y^3-6xy+5;$

12.3. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2;$

12.4. $z=1+6x-x^2-xy-y^2;$

12.5. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20;$

12.6. $z=2x^3+2y^3-6xy+5;$

12.7. $z=3x^3+3y^3-9xy+10;$

12.8. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1;$

12.9. $z=4\left(x-y\right)-x^2-y^2;$

12.10. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2;$

12.11. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y;$

12.12. $z=\left(x-2\right)^2+2y^2-10;$

12.13. $z=\left(x-5\right)^2+y^2+1;$

12.14. $z=x^3+y^3-3xy;$

12.15. $z=2xy-2x^2-4y^2;$

12.16. $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3;$

12.17. $z=2xy-5x^2-3y^2+2;$

12.18. $z=xy\cdot\left(12-x-y\right);$

12.19. $z=xy-x^2-y^2+9;$

12.20. $z=2xy-3x^2-2y^2+10;$

12.21. $z=x^3+8y^3-6xy+1;$

12.22. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y;$

12.23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20;$

12.24. $z = x^2 - xy + y^2 + x + y;$

12.25. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y;$

12.26. $z = xy - 3x^2 - 2y^2;$

12.27. $z = x^2 + 3\left(y+2\right)^2;$

12.28. $z = x^3 + y^3 - 5x^2y + 3xy^2 + 5x + 5y;$

12.29. $z = x^3 + y^3 - 3xy^2 - 9x + 9y;$

12.30. $z = e^{-x^2-y^2} \cdot \left(2x^2 + y^2\right);$

12.31. $z = x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 6y;$

12.32. $z = 27x^3 + 18xy^2 - 153x - 72y.$

Завдання 13. Знайти умовний екстремум функції $u(x, y, z)$.

13.1. $u = x + 2y,$ якщо $4x^2 + 9y^2 = 36;$

13.2. $u = 3y^3 + \dfrac{3}{2}x^2y - 2x^2 - 25y + 3,$ якщо $y - 3x - 1 = 0;$

13.3. $u = x - 2y + z,$ якщо $x + y^2 - z^2 - 1 = 0;$

13.4. $u = xy + yz + zx,$ якщо $x + y + z - 1 = 0;$

13.5. $u = x + y + yzx,$ якщо $x + y + z - 1 = 0;$

13.6. $u = xy^2z^2,$ якщо $x + 2y - 2z - 5 = 0;$

13.7. $u = 6x^3 + 10xy^2 + 2y^2 - 2x + 7,$ якщо $x + 2y - 2 = 0;$

13.8. $u = x^2yz^2,$ якщо $2x + y + 2z - 5 = 0;$

13.9. $u = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5,$ якщо $x + 2y = 3;$

13.10. $u = 18 + 3x - 4y,$ якщо $x^2 + y^2 = 25;$

13.11. $u = xyz,$ якщо $x^2 + y^2 - z - 1 = 0;$

13.12. $u = 2x^2 + y^2 + z^2,$ якщо $x^2 + z^2 - xy + 6x + 9y = 0;$

13.13. $u = x - 2y + 2z,$ якщо $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0;$

13.14. $u = x + y,$ якщо $9x^2 + 16y^2 = 144;$

13.15. $u = xy^2z^3$, якщо $x + 2y + 3z - 6 = 0$;

13.16. $u = x^2yz^3$, якщо $2x - y + 3z - 6 = 0$;

13.17. $u = x^3 + 2xy^2 + y^2 - 6x + 7$, якщо $5x + y = 3$;

13.18. $u = 2x^2 + y^2$, якщо $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} + 3 = 0$;

13.19. $u = x^2 + y^3 + 5y^2 + 48x + 2$, якщо $2x - 4y + 3 = 0$;

13.20. $u = xy$, якщо $x^2 + y^2 = 8$;

13.21. $u = x^2 + y^2 + z^2$, якщо $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1$;

13.22. $u = 2x + y + 3xyz$, якщо $2x + y + 3z - 1 = 0$;

13.23. $u = x + y + z$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$;

13.24. $u = 2x^2 + 6xy + 2y^2 - 1$, якщо $4x^2 + y^2 = 25$;

13.25. $u = 2x^2 + 5y^2 + z^2 + 2x$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$;

13.26. $u = x^3 + 6y^2 - 4x + 5$, якщо $4x - 3y + 5 = 0$;

13.27. $u = x + y$, якщо $9x^2 + y^2 = 9$;

13.28. $u = x - 6y + 2z$, якщо $x + 9y^2 - 4z^2 - 1 = 0$;

13.29. $u = 3 - 4x - 2y$, якщо $2x^2 + y^2 = 12$;

13.30. $u = 2x^2 + 12xy + y^2$, якщо $x^2 + 4y^2 = 25$;

13.31. $u = 2x + y - 2z$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 = 36$;

13.32. $u = xy^2z^3$, якщо $x + 2y + 3z = 12$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

Задачі до розділу «Границі та неперервність функцій»

Задача 1. Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$,

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot \operatorname{tg} x$,

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{3x-2}$.

Розв’язання. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

Безпосередня підстановка у вираз $\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$ граничного значення аргументу $x=-2$ призводить до *невизначеності виду* $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Щоб позбутися цієї невизначеності, розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу за допомогою формули $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, де $x_1,\ x_2$ – корені квадратного тричлена, $a\neq 0$, і скоротимо на множник $\left(x+2\right)$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(x+2\right)\left(5x+3\right)}{\left(x+2\right)\left(3x-4\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$.

Підстановка граничного значення $x=4$ в ірраціональний вираз під знаком границі приводить знову до *невизначеності виду* $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Позбудемося ірраціональності в чисельнику, помноживши чисельник і знаменник на $\left(\sqrt{21+x}+5\right)$. Далі в чисельнику скористаємося формулою різниці квадратів $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, а в знаменнику, після скорочення однакових множників, вираз замінимо його значенням при $x=4$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{21+x}-5\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{21+x-25}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\left(x^3-64\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(x^2+4x+16\right)\left(\sqrt{21+x}+5\right)}=\frac{1}{480}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}x.$

При обчисленні границь функцій часто використовують *першу важливу границю*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

та *другу важливу границю*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad \text{або} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

а також *еквівалентності*, що пов’язані з важливими границями

$$x\sim\sin x\sim\operatorname{tg}x\sim\arcsin x\sim\left(e^x-1\right)\sim\ln(1+x),$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$a^x-1\sim x\ln a,$$

$$(1+x)^k-1\sim kx,$$

$$\log_a(1+x)\sim x\log_a e, \quad \text{якщо} \quad x\to 0.$$

У даному прикладі для розкриття *невизначеності* $\{0\cdot\infty\}$ використаємо ланцюжок еквівалетностей. Отримаємо

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}x=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\sin x}{\cos x}=$$

$$=\left\{\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}-x\to 0\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sim\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ \sin\frac{\pi}{2}=1\end{array}\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot 1}{\frac{\pi}{2}-x}=1.$$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{3x-2}$.

При підстановці у вираз під знаком границі маємо *невизначеність* $\{1^{\infty}\}$. Для розкриття невизначеності застосуємо другу важливу границю і властивість

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

Виконаємо тотожні перетворення

$$\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{3x-2}=\left(\frac{(x+1)-3}{x+1}\right)^{3x-2}=\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{3x-2}=\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-3}}\right)^{3x-2}=$$

$$\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(3x-2)}=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-9x+6}{x+1}}.$$

Отже, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-9x+6}{x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9x+6}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9x+6}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-9+\frac{6}{x}\right)}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=e^{-9}.$$

Задача 2. Дослідити на неперервність функції

а) $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, б) $y=3^{\frac{1}{x-2}}$.

У точках розриву знайти лівосторонню і правосторонню границі функцій. Визначити характер точок розриву.

Розв'язання. Точка $x=x_0$, в якій порушена хоча б одна з умов неперервності функції $f(x)$, є *точкою розриву* функції.

Для визначення характеру точок розриву функції обчислюють лівосторонню та правосторонню границі функції в точці $x=x_0$.

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ і

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)\neq f(x_0),$$

то точка $x=x_0$ є точкою *усувного розриву*.

Якщо ж

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

то в точці $x = x_0$ маємо *неусувний розрив першого роду*.

Якщо хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, то $x = x_0$ – точка *розриву другого роду*.

а) $y = \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Функція визначена для всіх x, крім $x=3$, і є неперервною на інтервалах $(-\infty;3)$, $(3;+\infty)$.

Обчислимо $\lim\limits_{x\to 3-0} y$ і $\lim\limits_{x\to 3+0} y$.

$$\lim_{x\to 3-0} y = \lim_{x\to 3-0} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3-0} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3-0} (x+3) = 6,$$

$$\lim_{x\to 3+0} y = \lim_{x\to 3+0} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3+0} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3+0} (x+3) = 6.$$

Маємо, що $\lim\limits_{x\to 3-0} y = \lim\limits_{x\to 3+0} y \neq y(3)$, бо для $x=3$ функція невизначена. У точці $x=3$ маємо *розрив усувний розрив*.

б) $y = 3^{\frac{1}{x-2}}$.

Маємо показникову функцію, яка неперервна в кожній точці її області визначення. У точці $x=2$ функція невизначена. Отже, функція неперервна на інтервалах $(-\infty;2)$, $(2;+\infty)$.

Обчислимо $\lim\limits_{x\to 2-0} y$ і $\lim\limits_{x\to 2+0} y$.

$$\lim_{x\to 2-0} y = \lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left\{ 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} \right\} = 0,$$

$$\lim_{x\to 2+0} y = \lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left\{ 3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+\infty} \right\} = +\infty.$$

Отже в точці $x=2$ функція має *розрив другого роду*.

Задачі до розділу
«Диференціальне числення функцій однієї змінної»

Задача 3. Знайти вказані похідні

а) $y=\sqrt[7]{\dfrac{x+5}{x-5}}\cdot\operatorname{ctg}(3x^2-4),\quad y'_x$, в) $\begin{cases}x(t)=3t^4-t^2\\ y(t)=t^3-5\end{cases},\quad y'_x,\ y''_{xx}$,

б) $y\cos x-x\sin y=0,\quad y'_x$, г) $y=\left(\sin 7x\right)^{\operatorname{arctg}(3x-5)},\quad y'_x$.

Розв'язання. а) $y=\sqrt[7]{\dfrac{x+5}{x-5}}\cdot\operatorname{ctg}\left(3x^2-4\right).$

Для знаходження похідної y'_x функції y за змінною x застосуємо наступні правила диференціювання: формулу для знаходження *похідної від добутку* двох диференційовних в точці x функцій $u(x)$ та $v(x)$

$$\left(u(x)\cdot v(x)\right)'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x);$$

формулу знаходження *похідної від частки* функцій $u(x)$ та $v(x)$, $v(x)\neq 0$,

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)};$$

формулу знаходження *похідної складеної функції* $y=f\left(g(x)\right)$, де функція $u=g(x)$ диференційовна в точці x, а функція $y=f\left(u\right)$ диференційовна в точці $u=g(x)$:

$$y'=f'\left(u\right)\cdot g'(x)$$

та формулу знаходження *похідної від суми (різниці)* функцій $u(x)$ та $v(x)$

$$\left(u(x)\pm v(x)\right)'=u'(x)\pm v'(x).$$

З урахуванням *таблиці похідних основних елементарних функцій* (див. Додаток 1) маємо

$$y'_x=\left(\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}\right)'\cdot\operatorname{ctg}(3x^2-4)+\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}\cdot\left(\operatorname{ctg}(3x^2-4)\right)'=$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{1-\frac{1}{7}}\cdot\left(\frac{x+5}{x-5}\right)'\cdot\operatorname{ctg}(3x^2-4)+$$

$$+\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}\cdot\frac{1}{-\sin^2(3x^2-4)}\cdot\left(3x^2-4\right)'=$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\frac{\left(x+5\right)'\cdot\left(x-5\right)-\left(x+5\right)\cdot\left(x-5\right)'}{\left(x-5\right)^2}\cdot\operatorname{ctg}(3x^2-4)+$$

$$+\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}\cdot\frac{1}{-\sin^2(3x^2-4)}\cdot 3\cdot 2x=$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\frac{1\cdot\left(x-5\right)-\left(x+5\right)\cdot 1}{\left(x-5\right)^2}\cdot\operatorname{ctg}(3x^2-4)-$$

$$-\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}\cdot\frac{6x}{\sin^2(3x^2-4)}=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\cdot\frac{-10}{\left(x-5\right)^2}\cdot\operatorname{ctg}(3x^2-4)-$$

$$=-\frac{10}{7}\cdot\frac{\operatorname{ctg}(3x^2-4)}{\sqrt[7]{\left(x+5\right)^6\left(x-5\right)^8}}-\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}\cdot\frac{6x}{\sin^2(3x^2-4)}.$$

б) $y\cos x - x\sin y = 0$.

Функція $y(x)$ задана *неявно* рівнянням

$$y\cos x - x\sin y = 0.$$

Диференціюємо ліву та праву частини рівняння, вважаючи, що y є функцією від x. Згідно з правилом диференціювання складеної функції, маємо

$$\left(y(x)\cdot\cos x - x\cdot\sin y(x)\right)' = 0',$$

$$\left(y(x)\cdot\cos x\right)' - \left(x\cdot\sin y(x)\right)' = 0,$$

$$\left(y(x)\right)'\cdot\cos x + y(x)\cdot\left(\cos x\right)' - x'\cdot\sin y(x) - x\cdot\left(\sin y(x)\right)' = 0,$$

$$y(x)'\cdot\cos x + y(x)\cdot\left(-\sin x\right) - 1\cdot\sin y(x) - x\cdot\cos y(x)\cdot y'(x) = 0.$$

Розвяжемо лінійне рівняння відносно шуканої похідної

$$y(x)'\cdot\left(\cos x - x\cdot\cos y(x)\right)=\sin y(x)+y(x)\cdot\sin x\,,$$

звідки

$$y'_x=\frac{\sin y + y\cdot\sin x}{\cos x - x\cdot\cos y}\,.$$

в) $\begin{cases} x(t)=3t^4-t^2 \\ y(t)=t^3-5 \end{cases}$.

Для знаходження y'_x та y''_{xx} від *функції* $y(x)$, заданої *параметрично*, скористаємося формулами

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\qquad y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}\,.$$

Оскільки

$$x_t{}'=12t^3-2t\,,\qquad y_t{}'=3t^2\,,$$

то

$$y'_x=\frac{3t^2}{12t^3-2t}=\frac{3t}{12t^2-2}\,.$$

Тепер

$$\left(y'_x\right)_t{}'=\left(\frac{3t}{12t^2-2}\right)'_t=\frac{(3t)'\cdot\left(12t^2-2\right)-3t\cdot\left(12t^2-2\right)'}{\left(12t^2-2\right)^2}=$$

$$=\frac{3\cdot\left(12t^2-2\right)-3t\cdot 24t}{\left(12t^2-2\right)^2}=\frac{-36t^2-6}{\left(12t^2-2\right)^2}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{6t^2+1}{\left(6t^2-1\right)^2}\,.$$

Маємо

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{6t^2+1}{\left(12t^3-2t\right)\left(6t^2-1\right)^2}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{6t^2+1}{t\left(6t^2-1\right)^3}\,.$$

г) $y=\left(\sin 7x\right)^{\operatorname{arctg}(3x-5)}$.

Маємо показниково-степеневу функцію $y=\left(\sin 7x\right)^{\operatorname{arctg}\left(3x-5\right)}$, для якої і основа, і степінь залежать від x.

Для знаходження похідної y'_x застосуємо *логарифмічне диференціювання*.

Спочатку прологарифмуємо задану функцію

$$\ln y=\ln\left(\sin 7x\right)^{\operatorname{arctg}\left(3x-5\right)},$$

$$\ln y=\operatorname{arctg}\left(3x-5\right)\cdot\ln\left(\sin 7x\right).$$

Далі диференціюємо обидві частини останньої рівності за x

$$\left(\ln y\right)'=\left(\operatorname{arctg}\left(3x-5\right)\cdot\ln\left(\sin 7x\right)\right)',$$

звідки

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\left(\operatorname{arctg}\left(3x-5\right)\right)'\cdot\ln\left(\sin 7x\right)+\operatorname{arctg}\left(3x-5\right)\cdot\left(\ln\left(\sin 7x\right)\right)',$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{1+\left(3x-5\right)^2}\cdot\left(3x-5\right)'\cdot\ln\left(\sin 7x\right)+\operatorname{arctg}\left(3x-5\right)\cdot\frac{1}{\sin 7x}\cdot\left(\sin 7x\right)'.$$

Тепер знаходимо y'_x

$$y'_x=y\cdot\left(\frac{3\ln\left(\sin 7x\right)}{1+\left(3x-5\right)^2}+7\operatorname{arctg}\left(3x-5\right)\cdot\frac{\cos 7x}{\sin 7x}\right),$$

$$y'_x=\left(\sin 7x\right)^{\operatorname{arctg}\left(3x-5\right)}\cdot\left(\frac{3\ln\left(\sin 7x\right)}{1+\left(3x-5\right)^2}+7\operatorname{arctg}\left(3x-5\right)\cdot\operatorname{ctg}7x\right).$$

Задача 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2+2xy^2+3y^4=6$ в точці $M_0\left(1;-1\right)$.

Розв'язання. З рівняння крівої $x^2+2xy^2+3y^4=6$ знаходимо похідну y'_x

$$2x+2y^2+4xyy'+12y^3y'=0,$$

$$y'=-\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}\ .$$

Звідси знаходимо значення похідної в точці $M_0(1;-1)$

$$y'\big|_{(1;-1)}=-\frac{1+(-1)^2}{2\cdot 1\cdot(-1)+6\cdot(-1)^3}=\frac{1}{4}\ .$$

Рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0;y_0)$ знайдемо за формулами:

$$y=y_0+f'(x_0)\cdot(x-x_0),\qquad y=y_0-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0).$$

Тоді

$$y=-1+\frac{1}{4}(x-1)\quad \text{або}\quad x-4y-5=0$$

– *рівняння дотичної,*

$$y=-1-4(x-1)\quad \text{або}\quad 4x+y-3=0$$

– *рівняння нормалі*.

Задача 5. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\operatorname{tg}^2 2x}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\cdot e^{-x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

Підставивши у вираз значення , отримаємо невизначеність виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Для розкриття невизначеностей виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ використовують *правило Лопіталя*, яке полягає в тому, що границя відношення двох функцій дорівнює границі відношення похідних функцій у випадку їх існування.

Отже, маємо

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\operatorname{tg}^2 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(1-\sin x)'}{\left(\operatorname{tg}^2 2x\right)'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{2\operatorname{tg}2x\cdot\dfrac{2}{\cos^2 2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos^3 2x\cdot\cos x}{4\sin 2x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos^3 2x\cdot\cos x}{4\cdot 2\sin x\cdot\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos^3 2x}{8\sin x}=\frac{1}{8}.$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\cdot e^{-x}$.

Маємо невизначеність виду $\{0\cdot\infty\}$. Функція представлена у вигляді добутку. Для того, щоб скористатися правилом Лопіталя, ми повинні записати функцію у вигляді відношення функцій. Для цього скористаємося рівністю $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$, після чого застосуємо правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\cdot e^{-x}=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(6x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=\left\{\frac{6}{\infty}\right\}=0.$$

Слід зазначити, що правило Лопіталя застосовано тричі.

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$.

Підставивши у вираз значення $x=0$, переконаємося, що маємо невизначеність $\left\{1^\infty\right\}$.

Скористаємось співвідношенням

$$(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{\ln(\cos 2x)^{3/x^2}}=e^{\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\left\{1^\infty\right\}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x}=\left\{e^{\frac{0}{0}}\right\}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}}.$$

Залишилося обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}$. Знайдемо цю границю, застосовуючи правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(3\ln\cos 2x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\dfrac{1}{\cos 2x}\cdot\left(-\sin 2x\right)\cdot 2}{2x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}2x\to 0\\ \sin 2x\sim 2x\\ \cos\left(2\cdot 0\right)=1\end{array}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 1\cdot\left(-2x\right)\cdot 2}{2x}=-6.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{3}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}}=e^{-6}\,.$$

Задача 6. За допомогою диференціала наближено обчислити задані величини

а) $\sqrt[3]{27,1}$, б) $\operatorname{arctg}0,98$.

Розв'язання. а) $\sqrt[3]{27,1}$.

Представимо величину $\sqrt[3]{27,1}$ у вигляді $\sqrt[3]{27+0,1}$ і розглянемо функцію

$$y=\sqrt[3]{x},\quad \text{де}\quad x=x_0+\Delta x,\quad x_0=27,\quad \Delta x=0,1.$$

Для малих Δx має місце *наближена формула обчислення приросту функції через диференціал*

$$\Delta y\approx dy$$

або

$$y\left(x_0+\Delta x\right)\approx y\left(x_0\right)+y'\left(x_0\right)\Delta x.$$

У нашому випадку

$$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Отже, маємо

$$\sqrt[3]{27,1}\approx\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}\cdot 0,1=3+\frac{1}{3\cdot 3^2}\cdot 0,1=3+\frac{0,1}{27}=3,0037.$$

б) $\operatorname{arctg}0,98$.

Скористаємося тією самою схемою. Представимо величину $\operatorname{arctg} 0,98$ у вигляді $\operatorname{arctg}(1-0,02)$ і розглянемо функцію

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad \text{де} \quad x = x_0 + \Delta x, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = -0,02.$$

Знаходимо похідну

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Отже, маємо

$$\operatorname{arctg} 0,98 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1+1^2} \cdot (-0,02) = \frac{\pi}{4} - 0,5 \cdot 0,02 \approx 0,77.$$

Задача 7. Провести повне дослідження функції і побудувати графік

а) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$, б) $y = x \cdot e^{-x^2/2}$.

Розв'язання. Для повного дослідження функції та побудови її графіка можна рекомендувати таку *схему*:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти точки перетину графіку функції з осями координат;

3) дослідити функцію на парність, непарність (симетрію графіка), періодичнисть;

4) знайти точки розриву і встановити їх характер;

5) знайти асимптоти графіка функції;

6) за першою похідною знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;

7) за другою похідною знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;

8) дослідити поведінку функції в нескінченно віддалених точках;

9) побудувати графік функції з урахуванням результатів попередніх пунктів.

а) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$.

1) область визначення функції $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. На інтервалі $(-\infty;1)$ функція набуває від'ємних значень, на інтервалі $(1;+\infty)$ – додатних.

2) коли $x=0$, отримуємо $y=-1$. Отже, точка $\left(0;-1\right)$ – точка перетину графіка функції з віссю Oy.

Коли $y=0$, потрібно розв'язати рівняння $\dfrac{\left(x+1\right)^2}{x-1}=0$. Корінь рівняння буде $x=-1$. Отже, вісь Ox графік функції перетинає в точці $\left(-1;0\right)$.

3) функція не є парною, не є непарною, бо

$$y(-x)=\frac{\left(-x+1\right)^2}{-x-1}=-\frac{\left(-x+1\right)^2}{x+1},$$

тобто $y(-x)\neq y(x),\ y(-x)\neq -y(x)$.

Функція неперіодична, бо не існує такого числа T, $T>0$, щоб для довільного $x\in D(y)$

$$y\left(x+T\right)=y(x).$$

Отже, маємо функцію загального вигляду.

4) точка розриву функції $x=1$. Маємо розрив другого роду, бо

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0}\frac{\left(x+1\right)^2}{x-1}=\left\{\frac{1}{-0}\right\}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 1+0}\frac{\left(x+1\right)^2}{x-1}=\left\{\frac{1}{+0}\right\}=+\infty.$$

5) знайдемо асимптоти графіка функції.

Пряма $x=c$ є *вертикальною асисмптотою*, якщо

$$\lim_{x\to c+0} y=\pm\infty \text{ або } \lim_{x\to c-0} y=\pm\infty.$$

Із результатів п. 4) випливає, що пряма $x=1$ – вертикальна асимптота.

Пряма $y=kx+b$ є *похилою* (*горизонтальною* для $k=0$) *асимптотою*, якщо існують скінченні границі:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=k,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right)=b.$$

Знаходимо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2-x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-kx\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2-x(x-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=3.$$

Таким чином, існує єдина похила асимптота $y=x+3$.

6) досліджуємо функцію на зростання, спадання, локальний екстремум. Знаходим похідну

$$y'=\frac{\left((x+1)^2\right)'(x-1)-(x+1)^2(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2(x+1)(x-1)-(x+1)^2}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

і розв'язуємо рівняння $y'=0$, або $(x+1)(x-3)=0$, звідки дістаємо стаціонарні точки $x_1=-1$ та $x_2=3$. Крім того, похідна не існує в точці $x=1$, але вона не входить в область визначення функції. Отже, критичними точками функції (точками можливого екстремуму) є точки $x_1=-1$, $x_2=3$.

Точки $x_1=-1$, $x_2=3$ та точка розриву $x=1$ поділяють область визначення функції на інтервали $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;3)$, $(3;+\infty)$. Тепер обчислюємо знак похідної функції на вказаних інтервалах, який буде визначати поведінку функції.

На інтервалі $\left(-\infty;-1\right)$похідна $y'>0$, отже, функція зростає на цьому інтервалі; на інтервалі $\left(-1;1\right)$ $y'<0$, тобто функція спадає. Тому функція в точці $x_1=-1$ має локальний максимум $y_{\max}(-1)=0$.

На інтервалі $\left(1;3\right)$ похідна $y'<0$, отже, функція спадає на цьому інтервалі; на інтервалі $\left(3;+\infty\right)$ $y'>0$, тобто функція зростає. Тому функція в точці $x_2=3$ має локальний мінімум $y_{\min}(3)=8$.

7) досліджуємо графік функції на опуклість, вгнутість і визначаємо точки перегину. Для цього знаходимо другу похідну

$$y''=\frac{\left(x^2-2x-3\right)'\left(x-1\right)^2-\left(x^2-2x-3\right)\left(\left(x-1\right)^2\right)'}{\left(x-1\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(2x-2\right)\left(x-1\right)^2-\left(x^2-2x-3\right)\cdot 2\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)^4}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x+6}{\left(x-1\right)^3}=\frac{8}{\left(x-1\right)^3}.$$

Знак другої похідної визначає опуклість або вгнутість графіка функції.

На інтервалі $\left(-\infty;1\right)$похідна $y''<0$, отже, на цьому інтервалі крива опукла; на інтервалі $\left(1;+\infty\right)$ $y''>0$, тобто крива вгнута. Точки перегину немає, бо точка $x=1$, в околі якої змінюється знак другої похідної, є точкою розриву функції.

8) досліджуємо поведінку функції в нескінченно віддалених точках.

$$\lim_{x\to\pm\infty}y(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(x+1\right)^2}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1}{x-1}=\pm\infty.$$

9) будуємо графік функції $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$ на основі проведених досліджень (Рис. 1).

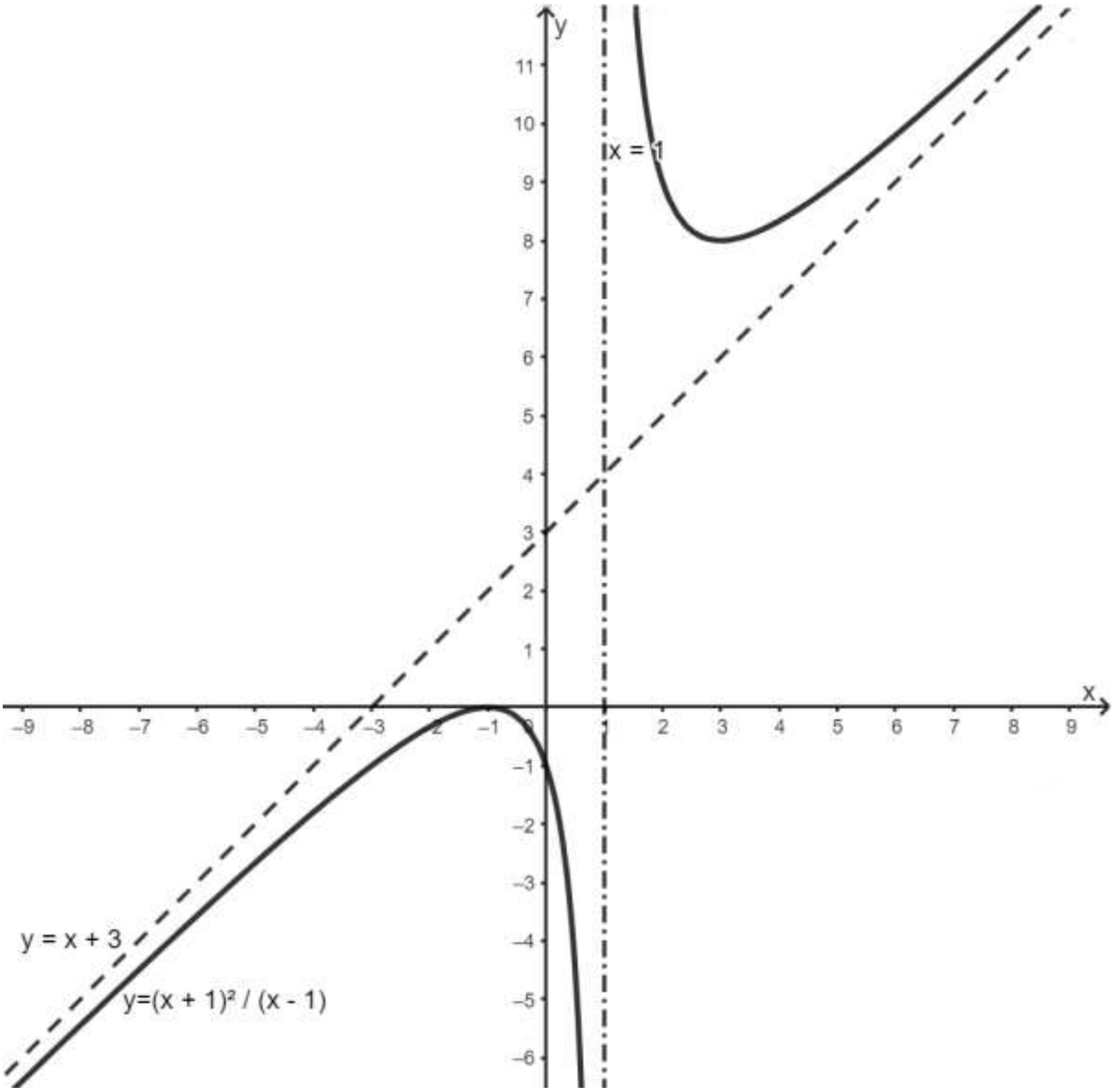

Рис. 1

б) $y = x \cdot e^{-x^2/2}$.

1) область визначення функції $D(y) = (-\infty; +\infty)$. На інтервалі $(-\infty; 0)$ функція набуває від’ємних значень, на інтервалі $(0; +\infty)$ – додатних.

2) оскільки $y=0$ для $x=0$, то графік функції проходить через початок координат.

3) функція є непарною, бо

$$y(-x)=-x\cdot e^{\frac{-(-x)^2}{2}}=-x\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}=-y(x).$$

Отже, її графік симетричний відносно початку координат.

Функція неперіодична, бо не існує такого числа T, $T>0$, щоб для довільного $x\in D(y)$

$$y\left(x+T\right)=y(x).$$

4) точок розриву функція не має.

5) вертикальних асимптот графік функції не має, бо не існує такого числа c, щоб $\lim\limits_{x\to c} y=\infty$. Знаходимо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{x^2/2}}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-kx\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{e^{x^2/2}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(x\right)'}{\left(e^{x^2/2}\right)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x\cdot e^{x^2/2}}=0.$$

Отже, маємо горизонтальну асимптоту $y=0$.

6) досліджуємо функцію на зростання, спадання, локальний екстремум.

Знаходимо похідну

$$y'=\left(x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'=e^{-\frac{x^2}{2}}+x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(-x\right)=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1-x^2\right)=\frac{1-x^2}{e^{x^2/2}}$$

і розв'язуємо рівняння $y'=0$, або $1-x^2=0$, звідки дістаємо, що $x_1=-1$ та $x_2=1$. Отже, критичними точками функції (точками можливого екстремуму) є точки $x_1=-1,\ x_2=1$.

На інтервалі $\left(-\infty;-1\right)$ похідна $y'<0$, отже, функція спадає на цьому інтервалі; на інтервалі $\left(-1;1\right)$ $y'>0$, тобто функція зростає; на інтервалі $\left(1;+\infty\right)$ $y'<0$, і функція спадає. Тому функція в точці $x_1=-1$ має локальний мінімум $y_{\min}(-1)=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\approx -0,6$, а в точці $x_2=1$ – локальний максимум $y_{\max}(1)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\approx 0,6$.

7) досліджуємо графік функції на опуклість, вгнутість і визначаємо точки перегину. Для цього знаходимо другу похідну

$$y''=\frac{\left(1-x^2\right)'\cdot e^{x^2/2}-\left(1-x^2\right)\cdot\left(e^{x^2/2}\right)'}{\left(e^{x^2/2}\right)^2}=\frac{-2x\cdot e^{x^2/2}-\left(1-x^2\right)\cdot xe^{x^2/2}}{e^{x^2}}=$$

$$=\frac{x\cdot e^{x^2/2}\left(-2-1+x^2\right)}{e^{x^2}}=\frac{x\cdot\left(x^2-3\right)}{e^{x^2/2}}.$$

Якщо $y''=0$, то $x\cdot\left(x^2-3\right)=0$, звідки $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3}$.

На інтервалі $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ похідна $y''<0$, отже, на цьому інтервалі крива опукла; на інтервалі $\left(-\sqrt{3};0\right)$ $y''>0$, тобто крива вгнута; на інтервалі $\left(0;\sqrt{3}\right)$ $y''<0$, крива опукла; на інтервалі $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ $y''>0$, крива вгнута.

Оскільки в точках $x_1=0$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=\sqrt{3}$ друга похідна y'' змінює знак, то в цих точках графік функції має перегин, ординати яких:

$$y(\pm\sqrt{3})=\pm\sqrt{\frac{3}{e^3}}\approx\pm 0,4,\qquad y(0)=0.$$

8) досліджуємо поведінку функції в нескінченно віддалених точках.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2/2}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x)'}{\left(e^{x^2/2}\right)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x\cdot e^{x^2/2}} = 0.$$

9) будуємо графік функції $y = x\cdot e^{-x^2/2}$ на основі проведених досліджень (Рис. 2).

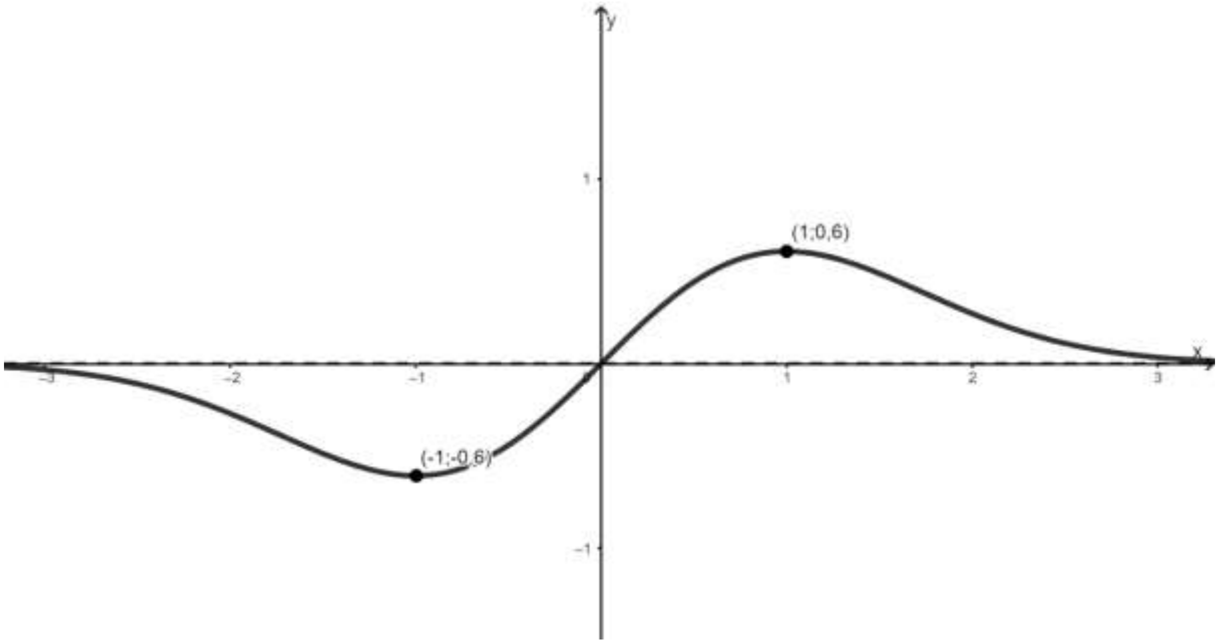

Рис. 2

Задачі до розділу «Диференціальне числення функцій багатьох змінних»

Задача 8. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ функції

$$z = \operatorname{arctg}\sqrt{x+y^3}\,.$$

Розв'язання. Вважаючи y сталою, знайдемо похідну за змінною x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x+y^3}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x+y^3}\right)'_x = \frac{1}{1+x+y^3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+y^3}}\,.$$

Вважаючи x сталою, знайдемо похідну за змінною y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\sqrt{x+y^3}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x+y^3}\right)'_y=\frac{1}{1+x+y^3}\cdot\frac{3y^2}{2\sqrt{x+y^3}}\ .$$

Задача 9. За допомогою частинних похідних знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ функції $y(x)$, що задана неявно виразом

$$x\cdot\cos y-e^{x^2}-2y^3+3=0.$$

Розв'язання. Позначимо ліву частину заданого рівняння через $F(x,y)$. Скористаємося формулою для визначення похідної функції $y=y(x)$, заданої неявно рівнянням $F(x,y)=0$:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},$$

де $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\cos y-2x\cdot e^{x^2}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-x\cdot\sin y-6y^2$.

Отже, маємо

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos y-2x\cdot e^{x^2}}{-x\cdot\sin y-6y^2}=\frac{\cos y-2x\cdot e^{x^2}}{x\cdot\sin y+6y^2}.$$

Задача 10. Для заданої функції $u=x^2-2xz+y^2$ в точці $A(1;2;-1)$ знайти похідну за напрямом $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$, якщо $B(2;4;-3)$, та градієнт.

Розв'язання. Знаходимо вектор $\vec{l}=\overrightarrow{AB}$ і його напрямні косинуси:

$$\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k},$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці $A(1;2;-1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = \left.(2x-2z)\right|_A = 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = \left.2y\right|_A = 4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = \left.-2x\right|_A = -2.$$

Похідна за напрямом вектора $\vec{l}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A \cdot \cos\gamma =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

Градієнт знайдемо за формулою:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Отже,

$$\left.\operatorname{grad} u\right|_A = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Задача 11. Знайти дивергенцію та ротор векторного поля

$$\vec{F} = \left(x^2+y\right)\vec{i} + \left(y^2+z\right)\vec{j} + \left(z^2+x\right)\vec{k}.$$

Розв'язання. За означенням:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \qquad \operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

де $P(x,y,z) = x^2+y$, $Q(x,y,z) = y^2+z$, $R(x,y,z) = z^2+x$.

Тоді

$$\operatorname{div}\vec{F} = 2x + 2y + 2z,$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2+y & y^2+z & z^2+x\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\left(z^2+x\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(y^2+z\right)}{\partial z}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial\left(z^2+x\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(x^2+y\right)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial\left(y^2+z\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(x^2+y\right)}{\partial y}\right)\vec{k}=-\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right).$$

Задача 12. Дослідити на екстремуми функцію

$$z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2.$$

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4\left(x^3-x+y\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=4\left(y^3+x-y\right).$$

Розглянемо спочатку необхідну умову екстремуму. Стаціонарні точки функції визначимо із системи:

$$\begin{cases}x^3-x+y=0,\\ y^3+x-y=0.\end{cases}$$

Додаючи ці рівняння, знайдемо $x^3+y^3=0$, звідки $y=-x$.

Підставляючи $y=-x$ в перше рівняння, дістанемо $x^3-2x=0$, звідки $x_1=0,\ x_2=\sqrt{2},\ x_3=-\sqrt{2}$, тоді

$$y_1=0,\ y_2=\sqrt{2},\ y_3=-\sqrt{2}.$$

Отже, функція має три стаціонарні точки (точки можливого екстремуму):

$$M_1\left(0;0\right),\ M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right),\ M_3\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right).$$

З'ясуємо виконання достатньої умови локального екстремуму в знайдених точках. Знайдемо величину

$$\Delta\left(x,y\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(x,y\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(x,y\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(x,y\right)\right)^2.$$

Якщо $\Delta(x;y)>0$, то функція має в точці $M(x;y)$ екстремум, причому максимум при $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)<0$ і мінімум при $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)<0$. Якщо $\Delta(x;y)<0$, то в точці $M(x;y)$ функція екстремуму не має. Якщо $\Delta(x;y)=0$, то ніякого висновку про характер стаціонарної точки зробити не можна і потрібне додаткове дослідження.

Оскільки

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)=12x^2-4,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y)=4,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)=12y^2-4,$$

то

$$\Delta(x,y)=16\left(9x^2y^2-3x^2-3y^2\right).$$

Обчислимо величину $\Delta(x,y)$ в кожній стаціонарній точці:

$$\Delta(M_1)=0,\quad \Delta(M_2)=\Delta(M_3)=384>0.$$

Таким чином, оскільки $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_2)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_3)=20>0$, то точки M_2 та M_3 – точки мінімуму. В цих точках $z_{\min}=-8$.

У точці M_1 значення $\Delta(M_1)=0$, тому достатню умову екстремуму застосовувати не можна. Переконаємось, що в цій точці екстремуму немає. Дійсно, якщо $y=0$, то $z=x^4-2x^2=x^2\left(x^2-2\right)<0$ в околі точки M_1. Якщо $y=x$, то $z=x^4>0$ в околі точки M_1 .

Отже, в околі точки M_1 значення можуть бути як додатні, так і від'ємні, а це значить, що точка M_1 не є точкою локального екстремуму.

Задача 13. Знайти умовний екстремум функції $u=xyz$, якщо $x+y+z=3$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа

$$L=L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x+y+z-3)$$

Згідно з необхідними умовами екстремуму маємо системи рівнянь для визначення стаціонарної точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = yz + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xz + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = xy + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y + z - 3 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} yz = -\lambda, \\ xz = -\lambda, \\ xy = -\lambda = 0, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему, виключаючи випадок $\lambda = 0$. Знаходимо стаціонарну точку: якщо $\lambda = -1$, то $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$. Отже, точка $M(1;1;1)$ – точка можливого екстремуму функції $u = xyz$ за умови, що $x + y + z = 3$.

Щоб визначити характер умовного екстремуму в цій точці, знайдемо другий диференціал функції Лагранжа при $\lambda = -1$ і оцінимо його значення в точці $M(1;1;1)$. Якщо $d^2L > 0$, то точка $M(1;1;1)$ є точкою умовного мінімуму, якщо ж $d^2L < 0$, то точкою умовного максимуму.

Знаходимо

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}dz^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + 2\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}dxdz +$$

$$+2\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}dydz = 2\cdot z\cdot dxdy + 2\cdot y\cdot dxdz + 2\cdot x\cdot dydz.$$

Після підстановки в другий диференціал $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$ маємо вираз для d^2L в знайденій стаціонарній точці:

$$d^2L = 2dxdy + 2dxdz + 2dydz.$$

Знайшовши шляхом диференціювання з рівняння зв'язку $dx + dy + dz = 0$, тобто $dz = -(dx + dy)$, дістанемо

$$d^2L = 2dxdy + 2dxdz + 2dydz = 2dxdy + 2dz(dx + dy) = 2dxdy -$$

$$-2(dx + dy)^2 = -dx^2 - dy^2 - dxdy = -\left(dx^2 + dxdy + dy^2\right) =$$

$$= -\left(\left(dx + \frac{1}{2}dy\right)^2 + \frac{3}{4}dy^2\right) < 0.$$

Оскільки $d^2L < 0$ в стаціонарній точці $M(1;1;1)$, то функція $u = xyz$ за умови $x + y + z = 3$ має у цій точці максимум, причому $u_{\max} = 1$.

Список літератури

1. *Вища* математика: збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. – К.: «А.С.К.», 2005. – 480 с.

2. *Денисюк В.П.* Вища математика: навчальний посібник: у 4 ч. / В.П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2006-2009. – Ч. 1. – 296 с.; Ч. 2. – 276 с.

3. *Дубовик В.П.* Вища математика: навчальний посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: «А.С.К.», 2006. – 648 с.

4. *Овчинников П.П.* Вища математика: підручник: у 2 ч. / Пер. з рос. П.М. Юрченка, 3-тє вид., випр. / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко.– К.: Техніка, 2003. – Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. – 600 с.

5. *Тевяшев А.Д.* Вища математика у прикладах та задачах: у 3 ч. / А.Д. Тевяшев, О.Г. Литвин.– Харків: ХТУРЕ, 2002. – Ч.1: Лінійна алгебра і аналітична геометрія Диференціальне числення функцій однієї змінної. – 552 с.; Ч. 2: Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. – 440 с.

Похідні основних елементарних функцій

$C' = 0, (C = const)$	$x' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$
$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$
$\left(\mathrm{tg}\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\mathrm{ctg}\, x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\mathrm{arctg}\, x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\left(\mathrm{arcctg}\, x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$	$\left(u \cdot v\right)' = u' \cdot v + v' \cdot u$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$	$\left(C \cdot u\right)' = C \cdot u'$

Похідна складеної функції

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Похідна оберненої функції

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Похідна функції, заданої параметрично $\quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Змістовий модуль 2
Границі та неперервність функцій
Диференціальне числення

Методичні вказівки та завдання
до виконання розрахунково-графічної роботи
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 192 «Будівництво і цивільна інженерія»

Укладачі: **Божонок** Катерина Валеріївна,
Бондаренко Наталія В'ячеславівна

Комп'ютерне верстання *А. П. Селівестрової*

Підписано до друку 11. 10. 2024. Формат 60 × 84 1/16.
Ум. друк. арк. 3,72. Обл.-вид. арк. 4,0.
Електронний документ. Вид. № 144/ІІІ-24

Видавець і виготовлювач:
Київський національний університет будівництва і архітектури
проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002