

УДК 697.92

Геометричний та кінематичний аналіз інтенсивності турбулентності опуклих напівобмежених струмин

О.М. Гумен¹, В.Б. Довгалюк², В.О. Мілейковський³

¹докт. тех. наук, професор. Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”, gumens@ukr.net

²канд. техн. наук, професор. Київський національний університет будівництва і архітектури, 2280170@ukr.net

³канд. техн. наук, доцент. Київський національний університет будівництва і архітектури, mileikovskiy@gmail.com

На підставі геометричного та кінематичного аналізу визначено інтенсивність турбулентності напівобмежених струмин, які настилаються на опуклі поверхні завдяки ефекту Коанда. Отримана максимальна інтенсивність турбулентності в перерізі відповідає відомим дослідним даним. Виявлено, що відомий феномен ефекту Коанда – знижена інтенсивність турбулентності – визначається середньомасштабними та дрібномасштабними вихорами.

Ключові слова: турбулентний потік, обчислювальна гідромеханіка, напівобмежена струмина, струминний примезовий шар.

Постановка проблеми. Організація повітрообміну є одним з визначальних факторів, що впливають на енергоспоживання систем вентиляції та кондиціонування повітря. У рамках гармонізації вітчизняних будівельних норм зі стандартами ЄС постала необхідність урахувати турбулентні характеристики потоків у приміщеннях при проектуванні організації повітрообміну. На кафедрі теплогазопостачання і вентиляції Київського національного університету будівництва і архітектури розробляються повітророзподільники, що формують опуклі напівобмежені струмини, які настилаються на опуклі поверхні. Існує необхідність визначення турбулентних характеристик таких струмин.

Аналіз основних досліджень і публікацій. У 50-80-х роках ХХ століття було виконано достатньо великий обсяг експериментальних досліджень усередненого руху та турбулентних пульсацій у струминних течіях різної форми [1, 2, 3]. На сьогодні ці дослідження продовжуються з уточненням отриманих результатів [4, 5]. Інтенсивність турбулентності в перерізі з максимальною швидкістю u_m та пульсаційною швидкістю u' визначається [6] за формулою:

$$\varepsilon = u' / u_m, \quad (1)$$

причому як пульсаційну швидкість зазвичай використовують середньоквадратичне її відхилення:

$$u' = \sqrt{(u - \bar{u})^2}, \quad (2)$$

де риска над виразом означає його середнє значення.

У плоских напівобмежених струминах (що настилаються на плоску поверхню) дослїдне максималне значення $\varepsilon = 0,16...0,19$ [2, 5]. В опуклих напівобмежених струминах [3] спостерігається менше дослїдне значення – $\varepsilon = 0,14...0,17$, що пояснюється специфічною дією відцентрових сил.

Теорія турбулентних течій залишається недостатньо розвиненою. Для вирішення турбулентних течій широко використовують програми обчислювальної гідродинаміки [7], що мають високу вартість і вимагають потужного апаратного забезпечення. Закладені рівняння мають умовні фізичні величини на кшталт турбулентної в'язкості та експериментальні константи. На відміну від таких підходів професор кафедри теплогазопостачання і вентиляції Київського національного університету будівництва і архітектури А.Я. Ткачук розробив підхід до розв'язання турбулентних примежових шарів за методом особливостей [8]. Поверхні розриву тангенціальної складової швидкості розглядаються як вихрова пелена, вихори якої періодично відриваються і силами Магнуса переміщуються вглиб потоку(ів). Продовженням цього підходу є опис течій з турбулентною макроструктурою, серед яких струминні течії. Напівобмежені струмини, які настилаються на поверхні різної кривини, складаються з пристінного та струминного примежових шарів. Останній [9] може бути поданий як ланцюг клубів - великомасштабних вихорів - що практично торкаються один одного і котяться вільною межею. Пристінний шар виконує для них роль змащування. Таким способом авторами отримано профілі швидкості та температури, темп затухання та розширення струмини тощо. Проте інтенсивність турбулентності не розглядалася.

Формулювання цілей і завдання статті. Метою даної роботи є розробка підходу до визначення інтенсивності турбулентності напівобмежених струмин, що настилаються на опуклі поверхні.

Спрощена схема струмини. Спрощена схема струмини передбачає (рис. 1) ланцюг клубів, умовно збільшених до торкання. Поверхня настилення w є циліндром радіусом R . Виділимо клуб 1 радіусом r з центром у розрахунковому перерізі, нормальному до поверхні настилення. Уведемо систему декартових координат. Вісь y спрямуємо вздовж розрахункового перерізу в напрямку від поверхні настилення назовні, а вісь x – за дотичною до поверхні в напрямку руху струмини. Характерні ординати в перерізі: y_d – межі A_1 примежових шарів d ; y_c – центра O_1 клубу 1 (або лінії g – геометричного місця центрів клубів під час їхнього руху); y_b – точки B_1 – вільної межі струмини b . Лінія максимальної швидкості m не збігається з лінією розділу примежових шарів d .

Проводимо з центра O поверхні настилення дотичну OB до клубу 1. Точка B має довільну поточну ординату y . Проекцію цієї точки на вісь y позначимо A . Перетин з межею клубу 1 лінії AB , перпендикулярної до осі y , позначимо C . Якщо в межах клубу 1 для спрощення знехтувати кривиною струмини та її

розширенням, то середня швидкість може бути знайдена усередненням локальної швидкості за відрізком AB . Аналогічним чином може бути знайдено і квадрат пульсаційної швидкості u'^2 шляхом усереднення квадрата відхилення локальної швидкості за тим же відрізком AB .

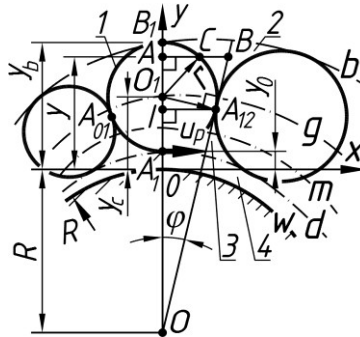


Рис 1. Схема опуклої напівобмеженої струмини:

- 1 – клуб; 2 – зовнішня частина міжклубного шару; 3 – внутрішня частина міжклубного шару;
4 – пристінний примежовий шар;
лінії: b – вільна межа; g – геометричне місце центрів клубів; m – лінія максимальної швидкості;
d – лінія розділу примежових шарів; w – поверхня настилення

Геометричний аналіз спрощеної схеми струмини. Зв'язок між характерними розмірами визначається рівністю довжини відрізків A_1O_1 та B_1O_1 : $|A_1O_1| = |B_1O_1| = r$. Тут і надалі знак модуля $|IJ|$ означатиме довжину відрізка IJ . Таким чином

$$y_c = (y_b + y_d) / 2; \quad (3)$$

$$r = (y_b - y_d) / 2. \quad (4)$$

Розглянемо прямокутний трикутник $O_1A_{12}O$ (точка A_{12} – точка торкання дотичної OB), у якому прямим є кут $O_1A_{12}O$, катет O_1A_{12} дорівнює радіусу клубу r , а гіпотенуза – сума радіуса поверхні R та ординати центра клубу O_1 . З урахуванням формул (3) і (4)

$$\sin(\varphi) = r / (R + y_c) = (y_b - y_d) / (2R + y_b - y_d). \quad (5)$$

Замінюємо синус на тангенс. Після елементарних перетворень за роівнянням (5)

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\varphi) - 1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\hat{R}(\hat{R} + 1)}}, \quad (6)$$

де $\hat{R}$ – параметр радіуса поверхні настилення для розрахунку струминного примежового шару опуклої напівобмеженої струмини

$$\hat{R} = (R + y_d) / (y_b - y_d). \quad (7)$$

Довжина відрізка AB знаходиться з прямокутного трикутника OAB з прямим кутом OAB , відомим катетом $|OA| = R + y$ та кутом AOB , рівним φ . Після елементарних перетворень з урахуванням залежностей (6) та (7):

$$|AB| = (R + y) \operatorname{tg}(\varphi) = (y_b - y_d) (\hat{R} + \tilde{y}) / \sqrt{(2\hat{R} + 1)^2 - 1}, \quad (8)$$

де $\tilde{y}$ – відносна ордината в межах струминного примежового шару:

$$\tilde{y} = (y - y_d) / (y_b - y_d). \quad (9)$$

Довжина відрізка AC визначається з прямокутного трикутника O_1AC , у якому прямим є кут O_1AC , гіпотенуза O_1C дорівнює радіусу клуба r , а катет AO_1 дорівнює $|AO_1| = |y - y_c|$. Знак модуля правої частини робить це рівняння незалежним від того, чи точка A на рис. 1 розташована вище центра клуба O_1 , нижче точки O_1 або збігається з точкою O_1 . За теоремою Піфагора після перетворень з урахуванням залежностей (3), (4) та (9)

$$|AC| = \sqrt{r^2 - (y - y_c)^2} = (1/2)(y_b - y_d) \sqrt{1 - (2\tilde{y} - 1)^2}, \quad (10)$$

Довжина відрізка BC дорівнює різниці довжини відрізків AB та AC . За рівняннями (8) та (10)

$$|BC| = |AB| - |AC| = (y_b - y_d) \left(\frac{\hat{R} + \tilde{y}}{\sqrt{(2\hat{R} + 1)^2 - 1}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - (2\tilde{y} - 1)^2} \right). \quad (11)$$

За рівняннями (8), (10) та (11) частки довжини відрізків AC (параметр $\hat{\Xi}$) та BC у довжині відрізка AB :

$$\hat{\Xi} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{(2\hat{R} + 1)^2 - 1}}{2(\hat{R} + \tilde{y})} \sqrt{1 - (2\tilde{y} - 1)^2}, \quad (12)$$

$$\frac{|BC|}{|AB|} = 1 - \hat{\Xi} = 1 - \frac{\sqrt{(2\hat{R} + 1)^2 - 1}}{2(\hat{R} + \tilde{y})} \sqrt{1 - (2\tilde{y} - 1)^2}. \quad (13)$$

Плоску напівобмежену струмину можна розглядати як граничний випадок опуклої напівобмеженої струмини при $R \rightarrow \infty$. Тоді параметр (12)

$$\Xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \hat{\Xi} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(2\hat{R}+1)^2 - 1}}{2(\hat{R} + \tilde{y})} \sqrt{1 - (2\tilde{y} - 1)^2} = \sqrt{1 - (2\tilde{y} - 1)^2}. \quad (14)$$

Для визначення ординати точки торкання A_{12} приймаємо точку I – проекцію точки A_{12} на вісь y . З прямокутного трикутника $A_{12}IO_1$ з прямим кутом $A_{12}IO_1$, гіпотенузою $A_{12}O_1$ завдовжки r та з кутом $O_1A_{12}I$, що дорівнює φ :

$$IO_1 = r \sin(\varphi). \quad (15)$$

Ордината точки торкання A_{12} відповідає ординаті I , що дорівнює різниці ординати y_c та довжини відрізка IO_1 . З урахуванням рівнянь (3), (4) та (15):

$$y_t = \frac{y_b + y_d}{2} - \frac{(y_b - y_d)^2}{2(2R + y_b + y_d)} = \frac{2y_b y_d + R(y_b + y_d)}{2R + y_b + y_d}. \quad (16)$$

Відносна ордината за рівняннями (7) та (16):

$$\hat{y}_t = \frac{y_t - y_d}{y_b - y_d} = \frac{R + y_d}{2R + y_b + y_d} = \frac{\hat{R}}{2\hat{R} + 1}. \quad (17)$$

Для плоскої напівобмеженої струмини при $R \rightarrow \infty$ за рівняннями (7) та (17).

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{y}_t = \lim_{\hat{R} \rightarrow \infty} \tilde{y}_t = \lim_{\hat{R} \rightarrow \infty} \left(\hat{R} / (2\hat{R} + 1) \right) = 1/2. \quad (18)$$

Кінематичний аналіз спрощеної схеми струмини. Проекція u_x на вісь x швидкості u потоку в клубі, який котиться зовнішньою межею струмини b , лінійно залежить від ординати y . Миттєвим центром обертання клубу ($u = u_x = 0$) є точка B_1 на вільній межі струмини b . Швидкість руху в точці A_1 на межі примезових шарів d позначимо u_p . Тоді з урахуванням формули (1) проекція швидкості потоку на вісь x у межах клубу $u_{x,\kappa}$ не залежить від абсциси x :

$$u_{x,\kappa} = u_p(1 - \tilde{y}). \quad (19)$$

У зовнішній частині міжклубного шару відбувається лише підтікання потоку до струмни в напрямку, практично перпендикулярному до осі x . Тому проекція швидкості потоку в межах цієї частини міжклубного шару $u_{x,i} \approx 0$. Внутрішня частина примежового шару 3 має складний характер руху. Тому приймаємо спрощену поліноміальну інтерполяційну формулу $u_p \approx P(\tilde{Y})$. Оскільки нуль можна вважати найбільш простим частинним випадком полінома, то приймаємо незалежно від ординати y :

$$u_m \approx u_p P(\tilde{y}) u_m. \quad (20)$$

Оскільки в межах відрізка AC та відрізка BC проекція швидкості практично незмінна, то усереднення швидкості або її відхилення (для узагальнення позначимо обидві величини для клубу і міжклубного шару, відповідно, v_k та v_m) виконується за формулою з урахуванням рівнянь (12) та (13):

$$\bar{v} = v_k (|AC|/|AB|) + v_m (|BC|/|AB|). \quad (21)$$

За формулами (12), (13), (19), (20) та (21) після елементарних перетворень середня проекція швидкості на вісь x

$$\bar{u}_x = u_p ((1 - \tilde{y} - P(\tilde{y}))\bar{\Xi} + P(\tilde{y})), \quad (22)$$

За формулами (4), (12), (13), (19), (20), (21) та (22) після перетворень середньоквадратичне відхилення проекції швидкості на вісь x .

$$u'_x = u_p |1 - \tilde{y} - P(\tilde{y})| \sqrt{\bar{\Xi}(1 - \bar{\Xi})} = (u_p / 2) |1 - \tilde{y} - P(\tilde{y})| \sqrt{1 - (2\bar{\Xi} - 1)^2}. \quad (23)$$

За формулами (2), (14), (18), (19), (20), (21) та (22) для плоскої напівобмеженої струмни

$$u' = u_p |1 - \tilde{y} - P(\tilde{y})| \sqrt{\sqrt{1 - (2\tilde{y} - 1)^2} \left(1 - \sqrt{1 - (2\tilde{y} - 1)^2}\right)}. \quad (24)$$

Це – інша форма запису результату, аналогічно отриманого безпосередньо для плоских струмин:

$$u_x^I = \frac{1}{2} u_p |1 - \tilde{y} - P(\tilde{y})| \sqrt{1 - (1 - 4\sqrt{\tilde{y}(1 - \tilde{y})})^2}. \quad (25)$$

Відповідна стаття прийнята до публікації в збірнику доповідей наукової конференції “moNGeometrija 2016”, який буде доступний вільно англійською мовою на сайті <http://mongeometrija.com> у розділі “Konferencije” – “moNGeometrija 2016”.

Згідно з роботою [7], при використанні уточненої гіпотези І.А. Шепелева про можливість вилучення з розгляду пристінного шару ($y_d \approx 0$), приймаємо

$$P(\tilde{y}) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } \tilde{y} \geq \tilde{y}_t, \\ 3/4 & \text{якщо } \tilde{y} < \tilde{y}_t. \end{cases} \quad (26)$$

Визначення максимальної швидкості в перерізі виконується пошуком максимуму рівняння профілю швидкості (22) з урахуванням формули (26). Похідна формули (22) після елементарних перетворень:

$$\begin{aligned} d\bar{u}_x/dy &= \left(\sqrt{\hat{R}(\hat{R}+1)} / \left(\sqrt{\tilde{y}(1-\tilde{y})} (\hat{R} + \tilde{y})^2 \right) \right) \times \\ &\times \left[2\tilde{y}^3 + (4\hat{R}-1)\tilde{y}^2 + ((2\hat{R}+1)P(\tilde{y}) - 5\hat{R}-1)\tilde{y} + (1-P(\tilde{y}))\hat{R} \right] = \\ &= \left(\sqrt{\hat{R}(\hat{R}+1)} / \left(\sqrt{\tilde{y}(1-\tilde{y})} (\hat{R} + \tilde{y})^2 \right) \right) \times \\ &\times \left[2\tilde{y}^3 + (4\hat{R}-1)\tilde{y}^2 - (5\hat{R}+1)\tilde{y} + \hat{R} + ((2\hat{R}+1)\tilde{y} - \hat{R})P(\tilde{y}) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Похідна (27) у межах $0 < \tilde{y} < 1$ при $\hat{R} > 0$ завжди існує та може обернутися в нуль лише в коренях множника у квадратних дужках. Якщо прийняти $P(\tilde{y}) = 0$, то жодного кореню у межах $\tilde{y}_t < \tilde{y} < 1$ немає. У випадку $0 < \tilde{y} < \tilde{y}_t$ при $P(\tilde{y}) = 3/4$ за тригонометричною формулою Вієта знаходиться лише один корінь

$$\tilde{y}_m = \left(1 - 4\hat{R} - \cos \left(\frac{\arccos \left(\frac{13 - ((256\hat{R} + 312)\hat{R} + 12)\hat{R}}{\sqrt{2}((2\hat{R}+1)(16\hat{R}+5))^3} \right) + \pi}{3} \right) \sqrt{(4\hat{R}+2)(16\hat{R}+5)} \right) / 6.$$

Отримане значення $\tilde{y}_m$ підставляється до профілю швидкості (22). Таким чином визначається максимальна швидкість u_m . Це дозволяє розрахувати інтенсивність турбулентності за формулою (1).

Результати моделювання. Результати розрахунків (рис. 2) показали, що при $\hat{R} \geq 2,4978$ максимальна інтенсивність турбулентності практично постійна (змінюється в межах 2,19 %) і становить 0,1239...0,1266. Це значення менше за експериментальні дані на 0,013...0,066. Ця різниця відповідає впливу середньота дрібномасштабних вихорів. Саме на цьому рівні реалізується зменшення інтенсивності турбулентності опуклих струмин [8].

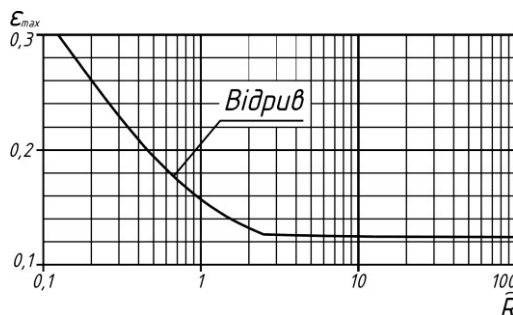


Рис. 2. Залежність максимальної інтенсивності турбулентності ε_{max} від відносного радіуса $\hat{R}$.

При зменшенні $\hat{R}$ рис 2 показує швидке зростання інтенсивності турбулентності, що свідчить про передвідривний стан (швидке розширення) та відрив струмини. Це було аналітично передбачено в роботі [8]. Тобто запропонований підхід дозволяє без залучення дослідних даних оцінити вплив макроструктури струмин на максимальну інтенсивність турбулентності.

Висновки. Геометричний та кінематичний аналіз великомасштабної вихрової структури турбулентних напівобмежених струмин дозволяє оцінити вплив цієї структури на максимальну інтенсивність турбулентності без використання дослідних коефіцієнтів і умовних фізичних величин. Також цей аналіз дозволяє оцінити умови відриву струмини від поверхні настилення.

Перспективи подальших досліджень. Планується проаналізувати макроструктуру гнутих напівобмежених струмин для отримання інтенсивності турбулентності. Також буде виконано аналіз без використання гіпотези І.А.Шепелева, що вимагає більш складної форми багаточлена P , для чого підготовлена комп'ютерна програма в системі комп'ютерної алгебри SciLab.

Література

1. **Абрамович** Г. Н. Теория турбулентных струй / Г.Н. Абрамович. – М. : ЭКОЛИТ, 2011. – 720 с.
2. **Bradshaw** P. Turbulent Wall Jets with and without an External Stream. Reports and Memoranda No. 3252*, June, 1960 / Bradshaw, P., Gee M.T. – London.: Her Majesty's Stationary Office, 1962. - 50 p.
3. **Perera** K. R. L. Curved Wall Boundary Layer Flow. Thesis [Electronic resource]/ K. R. L. Perera. Thesis Advisor T. Houlihan. Gee M.T. – USA.: Naval Postgraduate School, 1971. - 56 p. [Access mode: <http://calhoun.nps.edu/bitstream/handle/10945/15642/curvedwallbounda00pere.pdf?sequence=1>]

4. **Tang Z.** Reynolds Stress Measurements in a Plane Turbulent Wall Jet on a Smooth Surface / Z. Tang, D. J. Bergstrom, J. D. Bugg, D. Sumner [Electronic resource] // International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP-9) June 30 – July 3, 2015, Melbourne, Australia. – P-47.[Access mode: <http://www.tsfp-conference.org/proceedings/2015/p1/P-47.pdf>]

5. **Eriksson J.** Experimental studies of the plane turbulent wall jet. Technical reports from Royal Institute of Technology Department of Mechanics FaxenLaboratoriet SE-100 44. Stockholm, Sweden / J. Eriksson. – Stockholm., 2003. – 42 pp.

6. **Juodis E. S.** Vedinimo aerodinamika. Vadovelis. / E. S. Juodis, V. Motuziene. – Vilnius.: Technika, 2014. – 296 p.

7. **Алямовский А.А.** SolidWorks 2007/2008. Компьютерное моделирование в инженерной практике / А.А. Алямовский, А.А. Собачкин, Е.В. Одинцов, А.И. Харитонович, Н.Б. Пономарёв. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 1040 с

8. **Довгалюк В.Б.** Аеродинаміка вентиляції: Навчальний посібник. – К.: ІВНВКП «Укреліотех», 2015. – 366 с.

9. **Mileikovskiy V.** The Geomtrical Analysis of Structure of the Semibounded Currents / V. Mileikovskiy // Buletinul Institutului Politehnic din Iași, Secțiunea Construcții de Mașini, Tomul LVII(LXI), Fasc. 3, 2011 – Iași, 2011 – P. 203 – 210.

10. **Довгалюк В.Б.** Геометричний аналіз структури струмин, що настиляються на поверхні різної кривини / В.Б. Довгалюк, В.О. Мілейковський // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 156–165.

Геометрический и кинематический анализ интенсивности турбулентности выпуклых полуограниченных струй **Е.Н. Гумен, В.Б. Довгалюк, В.А. Милейковский**

На основаниі геометрического и кинематического анализа определена интенсивность турбулентности полуограниченных струй, настиляющихся на выпуклые поверхности благодаря эффекту Коанда. Полученная максимальная интенсивность турбулентности в сечении соответствует известным экспериментальным данным. Выявлено, что известный феномен эффекта Коанда – сниженная интенсивность турбулентности – определяется среднemasштабными и мелкомасштабными вихрями.

Geometric and Kinematic Analysis of the Turbulence Intensity of Convex Wall Jets

O.Gumen, V. Dovhaliuk, V. Mileikovskiy

The turbulence intensity in wall jets, laid on a convex surface due to the Coanda effect, is determined on the basis of the geometric and kinematic analysis. The obtained maximum turbulence intensity in a section corresponds to the known experimental data. It was revealed that the known Coanda effect phenomenon – reduced turbulence intensity – is caused by medium-scale and small-scale vortices.

Надійшла до редакції 24.05.2016 р.