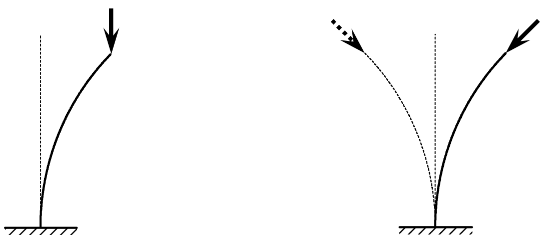
УДК. 539.3

Соловйов І.Л., канд. техн. наук

ДИНАМІЧНА ВТРАТА СТІЙКОСТІ ТОНКОСТІННИХ ВАЛІВ, ЩО ОБЕРТАЮТЬСЯ, ПІД ДІЄЮ СТИСКУ ОСЬОВОЇ СЛІДКУЮЧОЇ СИЛИ

Вступ. Тонкостінні трубчасті вали є одним з основних конструктивних елементів сучасного авіа- і енергомашинобудування. Під час роботи швидкість їх кутового обертання може досягати 30000 об/хв. Відцентрові сили інерції, що виникають при такому обертанні, призводять не тільки до появи інтенсивних полів напружень в цих валах, але можуть бути також і причиною їх біфуркаційного квазістатичного випинання. Проблемам дослідження стійкості валів, що обертаються, при різних схемах обпирання присвячена велика кількість статей. Постановки задач їх стійкості, методику дослідження та огляд наукової літератури з цих питань можна знайти в публікаціях [1-6]. У роботах [2,3,6] розглядаються задачі біфуркаційного випинання валів з урахуванням їх стиску або розтягу осьовою силою. При цьому передбачається, що ці сили є "мертвими" (не слідкуючими) (рис.1,а), і тому у валах реалізується ейлерова втрата стійкості.



а *б*

Рис.1. Схема стиску стержня "мертвою" і слідкуючою повздовжніми силами

У роботах [7-10] звернено увагу на характер дії осьових сил на стержневі системи. В них показано, що якщо сила прикладена до вільного кінця консольного стержня є слідкуючою (рис.1,б), то втрата його стійкості може бути реалізованою тільки в результаті переходу в нестійкий коливальний рух.

Задача дослідження поведінки тонкостінного вала істотно ускладнюється, якщо він обертається та піддається дії осьових слідкуючих навантажень одночасно. У цьому випадку залежно від співвідношення сил інерції обертання та осьових навантажень можуть бути реалізовані як статична [10-15], так і динамічна форми втрати стійкості [8, 10]. Питання поведінки валів при таких видах навантаження залишаються практично невивченими. При цьому важливим є питання вибору моделі тонкостінного вала, що обертається. Залежно від діаметра, товщини та довжини вала моделювання його поведінки може здійснюватися як за допомогою теорії стержнів, так і теорії тонких оболонок.

Метою даної роботи є чисельне дослідження статичних і динамічних критичних станів тонкостінних консольних валів, що обертаються, навантажених осьовою слідкуючою силою. Поставлене завдання вирішується за допомогою моделей теорії стержнів, а також теорії тонких оболонок, проводиться аналіз впливу обраної моделі на значення критичних навантажень.

Модель теорії балок. Нехай пружний стержень, що напружений поздовжньою силою *T*, обертається з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо своєї осі. Сформулюємо рівняння його руху. Для цього введемо інерціальну систему координат *OXYZ* з початком у деякій точці стержня та систему координат *Oxyz* з ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, яка обертається разом з ним. У вихідному недеформованому стані осі *OZ*, *Oz* збігаються з поздовжньою віссю стержня. Будемо досліджувати коливання стержня в системі координат *Oxyz*. Приймемо, що пружні переміщення його елементів вздовж осей *Ox* і *Oy* складають *u* і *v*, переміщеннями вздовж осі *Oz* знехтуємо.

Для знаходження динамічної рівноваги стержня використаємо принцип Даламбера у вигляді рівнянь згину в площинах *xOz* і *yOz*

$$\frac{d^2M_y}{dz^2} = q_x, \quad \frac{d^2M_x}{dz^2} = q_y. \qquad (1)$$

Тут M_x, M_y – внутрішні моменти в розглянутому перерізі балки, які діють відносно осей, що проходять через центр перерізу паралельно осям *Ox* і *Oy*; q_x, і q_y – інтенсивності сил інерції, які спрямовані паралельно відповідним осям.

Оскільки стержень попередньо напружений поздовжньою силою *T*, то для внутрішніх згинаючих моментів використовуються формули

$$M_x = EI\frac{d^2v}{dz^2} - Tv, \; M_y = EI\frac{d^2u}{dz^2} - Tu. \qquad (2)$$

Тут другі доданки в правих частинах визначають додаткові згинаючі моменти, обумовлені ексцентриситетом повздовжньої сили T при деформуванні балки.

Для обчислення складових q_x і q_y поперечного розподіленого навантаження на стержень необхідно враховувати, що його роль відіграють сили інерції, які викликані обертанням стержня та його пружними коливаннями. Тому вектор $\vec{q}$ цього навантаження знаходиться за допомогою рівності

$$\vec{q} = -\rho F \vec{a}\,, \tag{3}$$

де ρ – густина матеріалу стержня, F – площа його поперечного перерізу, $\vec{a}$ – абсолютне прискорення елемента. При обчисленні вектора $\vec{q}$ врахуємо, що механічна поведінка балки розглядається в системі координат $Oxyz$, яка обертається, у зв'язку з цим рух кожного елемента є складним. В цьому випадку абсолютне прискорення $\vec{a}$ підраховується за формулою Коріоліса

$$\vec{a} = \vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^c\,, \tag{4}$$

де $\vec{a}^e$, $\vec{a}^r$, $\vec{a}^c$ - вектори переносного, відносного та коріолісового прискорень.

Вектор переносного прискорення $\vec{a}^e$ обчислюється за формулою

$$\vec{a}^e = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,, \tag{5}$$

де $\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + z\vec{k}$ - радіус-вектор елемента стержня в системі координат $Oxyz$.

Виконавши відповідні векторні операції, отримуємо

$$a_x^e = -\omega^2 u\,,\;\; a_y^e = -\omega^2 v\,,\;\; a_z^e = 0\,. \tag{6}$$

Складові вектора відносного прискорення в напрямках осей системи координат $Oxyz$ визначаються рівностями

$$a_x^r = \frac{d^2 u}{dt^2}\,,\;\; a_y^r = \frac{d^2 v}{dt^2}\,,\;\; a_z^r = 0\,. \tag{7}$$

Вектор коріолісового прискорення $\vec{a}^c$ елемента стержня обчислюється за формулою

$$\vec{a}^c = 2\vec{\omega} \times \vec{V}^r\,, \tag{8}$$

де $\vec{V}^r$ - вектор відносної швидкості елемента із складовими

$$V_x^r = \frac{du}{dt}, \; V_y^r = \frac{dv}{dt}, \; V_z^r = 0 . \tag{9}$$

З урахуванням рівностей (8), (9) отримуємо

$$a_x^c = -\omega \frac{dv}{dt}, \; a_y^c = \omega \frac{du}{dt}, \; a_z^c = 0 . \tag{10}$$

Підставляючи знайдені значення компонентів прискорень (6), (7), (10) в (4) і потім в (3), отримуємо складові вектора сил інерції

$$q_x = -\rho F\left(-\omega^2 u - 2\omega \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right), \; q_y = -\rho F\left(-\omega^2 v + 2\omega \frac{du}{dt} + \frac{d^2 v}{dt^2} \right). \tag{11}$$

Після переходу від звичайних похідних до частинних, на основі співвідношень (1), (2), (11) будуються рівняння коливань стержня, що обертається, та напружений поздовжньою силою Т

$$\begin{aligned} EI\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - T\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho F\omega^2 u - 2\rho F\omega \frac{\partial v}{\partial t} + \rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ EI\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - T\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \rho F\omega^2 v + 2\rho F\omega \frac{\partial u}{\partial t} + \rho F\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

За допомогою цієї системи можна досліджувати динамічну втрату стійкості в стержні. Відзначимо, що незважаючи на її лінійність, вона має досить складну структуру, яка обумовлена наявністю доданків виду $-2\rho F\omega \partial v/\partial t$, $+2\rho F\omega \partial u/\partial t$. Наявність цих доданків призводить до більш складного закону зміни форми коливання та неможливості руху елементів стержня з однією загальною фазою. Ускладнення системи (12) зазначеними членами пов'язане з тим, що вони містять непарні похідні по t, а коефіцієнти перед цими доданками утворюють кососиметричні матриці.

При консольному обпиранні балки на краях $Z = 0$ і $Z = L$ реалізуються крайові умови

$$\begin{aligned} &u(0) = v(0) = 0, && \left.\frac{d^2 u}{dz^2}\right|_{z=0} = \left.\frac{d^2 v}{dz^2}\right|_{z=0} = 0, \\ &\left.\frac{d^2 u}{dz^2}\right|_{z=L} = \left.\frac{d^2 v}{dz^2}\right|_{z=L} = 0, && \left.\frac{d^3 u}{dz^3}\right|_{z=L} = \left.\frac{d^3 v}{dz^3}\right|_{z=L} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Заміною $u = U_s(z)\sin ct,\ v = V_c(z)\cos ct$ система диференціальних рівнянь (12) з частинними похідними перетворюється в систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &EI\frac{d^4U_s}{dz^4} - T\frac{d^2U_s}{dz^2} - \rho F\omega^2 U_s + 2\rho F\omega c V_c - \rho F c^2 U_s = 0,\\ &EI\frac{d^4V_c}{dz^4} - T\frac{d^2V_c}{dz^2} - \rho F\omega^2 V_c + 2\rho F\omega c U_s - \rho F c^2 V_c = 0, \end{aligned} \qquad (14)$$

яка розв’язується методом Рунге-Кутта із застосуванням процедури ортогоналізації по Годунову.

Модель теорії тонких оболонок. Будемо вважати, що тонкостінна циліндрична оболонка пов'язана із жорстким носієм, який обертається разом із системою координат $Oxyz$ з постійною за модулем кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ відносно осі симетрії Oz (рис. 2). Введемо праві системи координат: $OXYZ$ – інерціальна система координат з початком в центрі опорного контуру оболонки, вісь OZ збігається з віссю Oz. На серединній поверхні оболонки введемо ортогональну криволінійну систему координат $Ox^1x^2x^3$, в якій координатна лінія x^1 лежить у твірному перерізі, x^2 спрямована в коловому напрямку, x^3 – вздовж напрямку внутрішньої нормалі до поверхні оболонки.

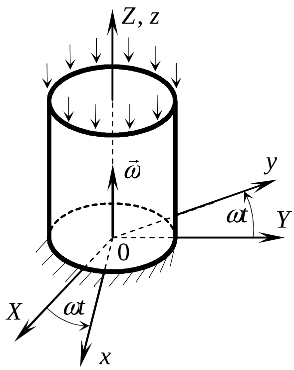


Рис.2. Схема оболонки, що обертається.

Рівняння динамічної рівноваги елемента оболонки, що записані в криволінійній ортогональній системі координат $Ox^1x^2x^3$ з базисними векторами $\vec{e}_\alpha$ на поверхні, мають вигляд [11-13]

$$\nabla_\alpha \vec{\mathrm{T}}^\alpha + \vec{p} = 0, \qquad \nabla_\alpha \vec{\mathrm{M}}^\alpha + (e_\alpha \times \vec{\mathrm{T}}^\alpha)\sqrt{a_{11}a_{22}} = 0, \quad (\alpha = 1, 2). \qquad (15)$$

Тут $\vec{\mathrm{T}}^\alpha$ – вектор внутрішніх сил в оболонці; $\vec{\mathrm{M}}^\alpha$ – вектор внутрішніх моментів; a_{11}, a_{22} – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні; $\vec{p}$ – вектор інтенсивності зовнішнього розподіленого навантаження.

Використовуючи співвідношення зв'язку між контраваріантними компонентами функцій внутрішніх сил T^{ij} і моментів M^{ij} та коваріантними складовими функцій деформації ε_{ij} і зміни кривин μ_{ij}

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}^{ij} &= \mathrm{E}h\varepsilon_{\alpha\beta}(a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta})/(1-\nu^2),\\
\mathrm{M}^{ij} &= \mathrm{E}h^3\mu_{\alpha\beta}(a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta})/12(1-\nu^2),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

виразивши ці функції через коваріантні компоненти u_1, u_2, u_3 вектора переміщень $\vec{u}$ і кути повороту ϑ_i перерізів, отримуємо розрахункові рівняння стійкості.

В даній роботі вивчаються критичні стани простого обертання оболонки, що реалізовані за найменш енергоємною формою деформування, по першій гармоніці (за координатою x^2). Будемо апроксимувати шукані функції першими гармоніками $\sin(ct+x^2)$, $\cos(ct+x^2)$ за фазовою координатою $ct+x^2$, де c - частота вільних коливань [13]. Тоді з урахуванням цього спрощення з (15), (16) можна отримати рівняння вільних коливань

$$
\begin{aligned}
& d\mathrm{T}^{(11)}/dx^1 - T^{(12)} + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2)\mathrm{T}^{(11)} + \Gamma_{22}^1\mathrm{T}^{(22)} - b_1^1\mathrm{T}^{(13)} - \\
& \qquad - \omega^2\Delta\vartheta_{(1)}\, r/a_{11} - c^2\, u_{(1)}/a_{11}] = 0\,,\\
& dT^{(12)}/dx^1 + T^{(22)} + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(12)} + T_0^{(11)}\, d^2u_{(2)}\Big/d\left(x^1\right)^2 - b_2^2T^{(23)} - \\
& \qquad - \gamma h[-\omega^2\vartheta_{(2)}\, r/a_{22} - 2\omega c\, u_{(3)}\Big/\sqrt{a_{22}} - c^2u_{(2)}/a_{22} - \omega^2\, u_{(2)}/a_{22}] = 0\,, \qquad (17)\\
& dT^{(13)}/dx^1 - T^{(23)} + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(13)} + b_{11}\Delta T^{(11)} - \mu_{(11)}T_0^{(11)} + b_{(22)}T^{(22)} - \\
& \qquad - \mu_{(22)}T_0^{(22)} - \gamma h[-2\omega c\, u_{(2)}\Big/\sqrt{a_{22}} - \omega^2u_{(3)} - c^2u_{(3)}] = 0\,.
\end{aligned}
$$

Відзначимо, що вільні коливання, які описуються цією системою рівнянь, мають вигляд гармонічної хвилі, що біжить у напрямку кола з кутовою швидкістю c. Причому, якщо при ω=0, кожна із частот є двократною і ці хвилі виявляються стоячими, то при $\omega \neq 0$ кратні частоти розчіплюються на дві і їх моди починають прецесувати в різних напрямках. Від'ємній частоті c відповідає прецесія в напрямку обертання оболонки (пряма регулярна прецесія); додатній частоті c - прецесія у зворотному напрямку (зворотна регулярна прецесія).

Постановка задачі Штурма-Ліувілля та методика її розв’язання. Приведемо системи (14) і (17) до системи з восьми рівнянь першого порядку

$$
\frac{d\vec{y}}{dz} = Q_1\vec{y} + TQ_2\vec{y} + \omega^2 Q_3\vec{y}\ . \tag{18}
$$

Тут $\vec{y}(z)$ – восьмивимірна шукана вектор-функція з компонентами $y_1 = u$, $y_2 = \frac{du}{dz}$, $y_3 = \frac{d^2u}{dz^2}$, $y_4 = \frac{d^3u}{dz^3}$, $y_5 = v$, $y_6 = \frac{dv}{dz}$, $y_7 = \frac{d^2v}{dz^2}$, $y_8 = \frac{d^3v}{dz^3}$ для теорії балок і $y_1 = u_{(1)}$, $y_2 = u_{(2)}$, $y_3 = u_{(3)}$, $y_4 = \vartheta_{(1)}$, $y_5 = \varepsilon_{(11)}$, $y_6 = \varepsilon_{(12)}$, $y_7 = \mu_{(11)}$, $y_8 = \mathrm{T}^{(13)}$ для теорії оболонок; Q_1, Q_2, Q_3 – постійні матриці коефіцієнтів розміру 8×8.

Вектор-функція $\vec{y}(z)$ повинна задовольняти граничним умовам, які можна подати у вигляді

$$A_1\vec{y}(0) = 0, \qquad A_2\vec{y}(L) = 0, \tag{19}$$

де A_1, A_2 – постійні матриці розміру 4×8.

Загальне рішення системи (18) при заданих T, ω подається у формі Коші

$$\vec{y}(z) = Y(z)\vec{C}, \tag{20}$$

де $Y(z)$ – матриця Коші розміру 8×8 розв’язків системи (18) з початковими умовами $Y(0) = E$, E – одинична матриця; $\vec{C}$ – шуканий постійний восьмивимірний вектор.

При застосуванні такого підходу спочатку при заданих T і ω шляхом інтегрування системи (18) методом Рунге-Кутта будується матриця $Y(z)$ на відрізку $0 \le z \le L$. Потім шляхом підстановки розв’язку (20) в умови (19) будується однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$D\vec{C} = 0. \tag{21}$$

Стани, у яких матриця D вироджується, є критичними, оскільки в них система (18), (19) має як тривіальні, так і нетривіальні розв’язки. Для знаходження нетривіального розв’язку, що визначає форму втрати стійкості, один з компонентів вектора $\vec{C}$ задається довільно, а сім інших обчислюються з відповідним чином усіченої системи (21). У математичній фізиці поставлене крайове завдання є задача на власні значення або задача Штурма-Ліувілля.

Результати чисельного дослідження. За допомогою розробленого підходу здійснене дослідження динамічної поведінки тонкостінних пружних валів, до вільного кінця яких прикладена осьова слідкуюча стискаюча сила (рис. 1,б). Для розрахунку вибрана трубчаста балка довжиною L=1м, товщиною $h=10^{-3}$ *м* і діаметром серединної поверхні d=0,1 *м*. Модуль пружності матеріалу труби $E=2{,}1\times10^{11}$ *Па*, коефіцієнт Пуассона ν =0,3, густина $\rho=7{,}8\cdot10^{3}$ *кг/м*^{3}. Дослідження виконувалися за допомогою моделей теорії балок і теорії оболонок.

Відзначимо, якщо консольний стержень робить тільки обертальні рухи і не піддається дії осьової сили, то зі збільшенням його кутової швидкості ω може бути тільки квазістатична форма втрати стійкості, при якій реалізується ейлерове випинання в системі координат, що обертається. У випадку, коли на стержень діє тільки поздовжня слідкуюча стискаюча сила, можлива лише динамічна втрата стійкості, що супроводжується переходом у режим коливальних рухів. Якщо обидва види збурень консольного стержня реалізуються одночасно, то залежно від співвідношення між їх величинами, може бути реалізовано як перший, так і другий критичні стани. Щоб встановити, який з них наступає раніше, спочатку було вирішено задачу про квазістатичну поведінку стержня, стиснутого силою T, який обертається. В рівняннях (14) вважалось, що c=0 і за різних значеннях ω і T підраховувався визначник рівняння (21). Значення параметрів ω і T, при яких детермінант матриці D перетворюється на нуль, є критичними.

Діаграми зміни величини $det(D)$ наведені на рис. 3. Представлені на ньому криві 1-5 відповідають наступним значенням кутової швидкості ω: 1 – 0; 2 – 50; 3 – 500; 4 – 1000; 5 – ω=2000 рад/с. Як випливає з наведених результатів, при $\omega\leq500$ рад/с визначник матриці D на нуль не перетворюється, тому статична втрата стійкості системи не може бути реалізована. Однак зі збільшенням кутової швидкості до ω=1000 рад/с фактори статичного випинання стержня починають переважувати над факторами його динамічної втрати стійкості і при ω=1000 рад/с, T=920000 *Н* реалізується його дивергентна втрата стійкості (крива 4). Якщо ω=2000 рад/с (крива 5), то біфуркаційне випинання стержня відбувається при T=1660000 *Н*.

Динамічна втрата стійкості розглянутої системи при дії слідкуючих сил супроводжується їх переходом у режим коливання із зростаючою амплітудою. У цьому випадку частоти його власних коливань стають комплексними. Уявні частини цих значень відповідають частоті коливальної втрати стійкості, а дійсні частини – швидкості збільшення їх амплітуди. Тому в критичних станах частоти власних коливань перестають бути чисто уявними. В цьому випадку на графіку залежності частот від осьової сили T криві першої та другої частот зливаються. Цей факт є критерієм динамічної нестійкості системи [10].

За допомогою викладеного підходу, застосовуючи моделі трубчастих балок і циліндричних оболонок, виконано аналіз динамічної поведінки тонкостінних валів, що обертаються, при розглянутих вище значеннях кутової швидкості ω. Розрахунки показали, що значення слідкуючої сили T, при яких настає динамічна втрата стійкості, не залежать від величини ω. Застосування теорії оболонок дозволяє уточнити критичне значення T. Так, при застосуванні моделі теорії балок $T_{кр}$=1,65·10^6 H, для моделі теорії оболонок $T_{кр}$=1,39·10^6 H.

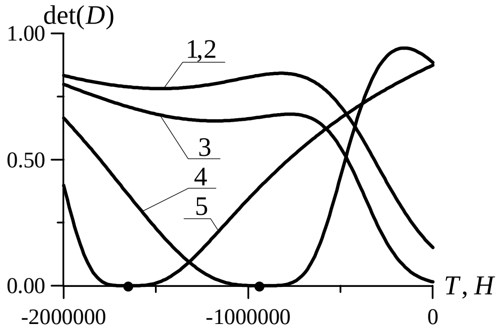


Рис. 3. Значення визначника матриці D

Аналогічні дослідження були виконані для валів інших довжин L. Як показали розрахунки, із збільшенням L різниця між значеннями $T_{кр}$, знайденими за теорією балок і оболонок, зменшується, із зменшенням L – різниця збільшується.

1. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 487 с.
2. *Каза К.Р., Квартерник Р.Г.* К выводу нелинейных уравнений изгиба в двух плоскостях и растяжения вращающейся балки // Ракетная техника и космонавтика. – 1977. № 6. – С. 87-95
3. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
4. *Abolghasemi M., Jalali M.A.* Attractors of a rotating viscoelastic beam // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2003. – Vol. 38, No. 5. – P. 739-751.
5. *Dubigeon S., Michon J.C.* Modes for deformable periodic cyclic symmetric systems driven in uniform rotation by a flexible shaft // J. Sound and Vibrat. – 1986. № 106(1), – P. 53-70.
6. *Тондл А.* Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 388 с.
7. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
8. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
9. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – С. 192.
10. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 237 с.

11. *Гуляев В.И., Гром А.А., Снежко Н.А.* Прецессионные колебания конических оболочек при сложном вращении // Изв. РАН. МТТ. – 1999. № 2. – С. 156-163.
12. *Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A.* Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies. // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – Vol. 41. – P. 3565-3583.
13. *Соловьев И.Л.* О вращении жестких и упругих цилиндрических оболочек, упруго связанных с основанием // Прикл. механика. – 2006. – 42,№ 2. – С. 107-115.
14. *Sivadas K.R.* Vibration analysis of prestressed rotating thick circular conical shell // J. Sound and Vibrat. – 1995. – V. 186. №1. – P. 99–109.
15. *Соловйов І.Л.* Критичні стани тонких оболонок, пружно зв'язаних з платформою при простому і складному обертаннях // Опір матеріалів та теорія споруд. – 2004. – Вип.75. – С. 71-79.

Надійшло до редакції 08.11.2006 р.