УДК 72.01

С. И. Ботвиновская
кандидат технических наук,
доцент кафедры начертательной геометрии и инженерной графики
Київського національного університету будівництва і архітектури

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ ФОРМУЛ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Аннотация: статья посвещена вопросам дискретного моделирования и формообразования геометрических объектов по заданым исходящим условиям. Разные рекурентные формулы одной и тойже числовой последовательности могут быть основой для дискретного моделирования разных поверхностей с одинаковыминачальными условиями.

Извесно также что не каждая числовая последовательность дискретно определяет непрерывный геометрический образ, по этому актуальной проблемой есть анализ рекурентных формул безконечных числовых последовательностей с позиции их использования для дискретного определения непрерывных геометрических образов разной измеримости.

Ключевые слова: дискретное моделироване, числовые последовательности, рекурентные формулы, геометрические модели, непрерывные геометрические образы, точечный каркас поверхности.

ВВЕДЕНИЕ

Использование математического аппарата числовых последовательностей для формирования дискретных геометрических образов (ДГО) произвольной размерности значительно может расширить возможности дискретного геометрического моделирования процессов, объектов и явлений. Известно, что не всякая числовая последовательность может дискретно определять непрерывный геометрический образ. Поэтому, актуальной проблемой на сегодня является анализ рекуррентных формул разных числовых последовательностей с точки зрения их использования для формирования дискретных моделей непрерывных геометрических образов различной размерности.

Все природные явления и процессы, объекты которые нас окружают, строго структурированы в зависимости от их: размеров, характера, происхождения, сложности, устойчивости, динамичности, взаимосвязей одного с другим. Практически все, что нас окружает, имеет непрерывную природу. Для дальнейшего изучения и описания всех объектов, есть возможность использовать непрерывные и дискретные геометрические модели, т. е. все можно описать дифференциальными уравнениями или представить в дискретном виде.

Анализ основных публикаций и Постановка задачи

Использованию математического аппарата числовых последовательностей для формирования ДГО посвящены многочисленные публикации в рамках докторской диссертации С. И. Пустюльги [1], где проанализированы особенности метода конечных разностей, статико-геометрического метода и метода числовых последовательностей. Результаты этих исследований раскрывают новые возможности в области дискретного моделирования объектов, процессов и явлений.

Целью данной статьи является анализ рекуррентных формул бесконечных числовых последовательностей с точки зрения их использования для дискретного моделирования непрерывных геометрических образов разной размерности.

основная часть

Запись члена бесконечной ***n***-мерной числовой последовательности в замкнутой форме (формула общего члена) может быть получена для любой функции ***n*** аргументов, которая задана в явном виде, путем замены непрерывных аргументов (*x, y, z,…, n*) на дискретные (*i, j, k, .., l*). Например, функция

$$u = f(x, y, z \ldots n) \qquad (1)$$

является непрерывным аналогом ***n***-мерной числовой последовательности

$$a_{i,j,k \ldots n} = f(i, j, k \ldots n) \qquad (2)$$

где *i, j, k,…, n* – нумерация числовой последовательности на равномерной ***n***-мерной сетке. С геометрической точки зрения последовательность (2) представляет собой дискретную модель ***n***-мерного многообразия в (*n+1*) мерном пространстве [1]. Бесконечные числовые последовательности, в отличии от других математических аппаратов, имеют две формы аналитической зависимости.

Первая форма (2) – называется замкнутой. Обеспечивает (*n+1*) координату точки геометрического образа в процессе ее нумерации на ***n***-мерной равномерной сетке и является дискретным аналогом непрерывной аналитической функции.

Другая форма – рекуррентная. Она определяет зависимость между соседними узлами дискретного образа и является дискретным аналогом дифференциального уравнения непрерывного образа. Эта форма очень удобная для формирования дискретных геометрических моделей, поскольку позволяет задавать различные исходные данные.

Существует, как минимум, два способа получить рекуррентную формулу из аналитической функции. Первый способ – дифференцирование функции с последующим переходом к конечным разностям. Второй – замена непрерывных параметров (аргументов) на дискретные, т. е. переход от непрерывной функции (1) к замкнутой форме (2) описания числовой последовательности. С последующим освобождением от дискретных параметров (номеров членов числовой последовательности). Такой способ даст возможность из одной функции получить различные рекуррентные формулы.

Пример. Рассмотрим построение дискретной модели цилиндроида с помощью рекуррентной формулы. Задана функция

$$z = a^x + b^y \qquad (3)$$

Замкнутая форма описания числовой последовательности может быть получена при замене непрерывных параметров x, y на дискретные i, j.

$$z_{i,j} = a^i + b^j \qquad (4)$$

Для перехода к рекуррентной формуле составляется система уравнений, для описания краевых условий:

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= a^i + b^j, \\ z_{i+1,j} &= aa^i + b^j, \\ z_{i,j+1} &= a^i + bb^j. \end{aligned} \qquad (5)$$

В дальнейшем необходимо освободиться от дискретных параметров i и j. В результате получим рекуррентную формулу с двумя коэффициентами a и b.

$$(a-1)z_{i,j+1} - (ab-1)z_{i,j} + (b-1)z_{i+1,j} = 0, \qquad (6)$$

Если исключить дискретные параметры i и j из системы уравнений

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= a^i + b^j, \\ z_{i-1,j} &= \frac{a^i}{a} + b^j, \\ z_{i,j-1} &= a^i + \frac{b^j}{b}. \end{aligned}$$

можем получить другую рекуррентную формулу:

$$a(b-1)z_{i-1,j} - (ab-1)z_{i,j} + b(a-1)z_{i,j-1} = 0 \qquad (7)$$

Суперпозиции рекуррентных формул (6) и (7) дают две новые формулы:

$$a(b-1)z_{i-1,j} + b(a-1)z_{i,j-1} - 2(ab-1)z_{i,j} + (b-1)z_{i+1,j} + (a-1)z_{i,j+1} = 0; \qquad (8)$$

$$a(b-1)z_{i-1,j} + b(a-1)z_{i,j-1} + (1-b)z_{i+1,j} + (1-a)z_{i,j+1} = 0; \qquad (9)$$

Еще одну рекуррентную формулу можно получить из (3), если дискретные параметры исключить из системы уравнений в виде:

$$z_{i,j} = a^i + b^j,$$

$$z_{i,j+1} = a^i + bb^j,$$

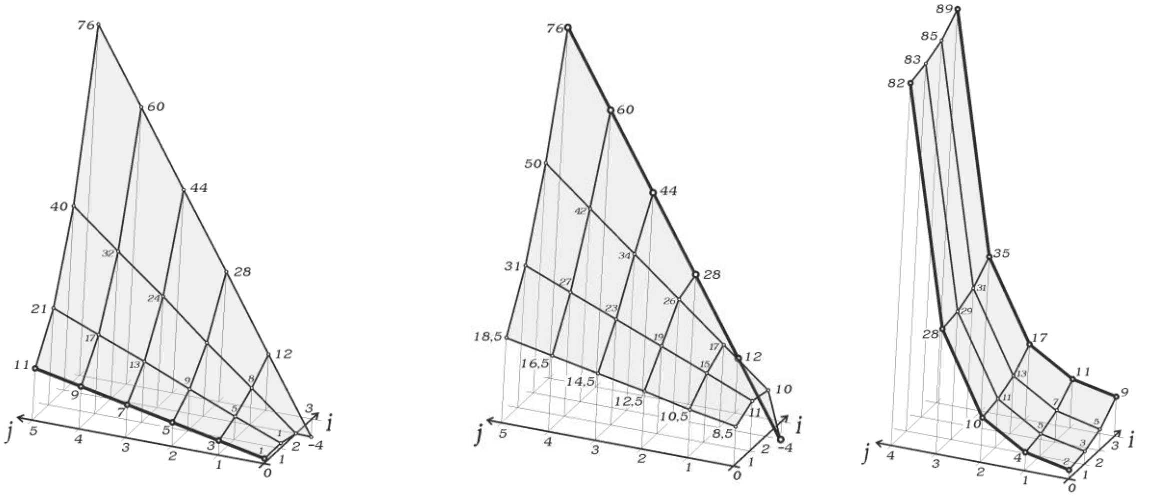
$$z_{i+1,j} = aa^i + b^j,$$

$$z_{i+1,j+1} = aa^i + bb^j.$$

Если из первого уравнения этой системы вычесть второе, а из третьего – четвертое, и полученные результаты прировнять, то будет получен известный конечно-разностный оператор типа:

$$z_{i,j} - z_{i,j+1} - z_{i+1,j} + z_{i+1,j+1} = 0 \qquad (10)$$

На (рис. 1, *а*) показана геометрическая модель цилиндроида в дискретном виде, сконструированная по рекуррентной формуле (6), с заданными коэффициентами a=2, b=3 и начальными условиями в виде (i=0, j=1; 3;5; 7; 9; 11). Исходный контур обозначен на рисунке утолщенной линией. Значения высотных координат (z_{ij}) проставлены около каждого узла поверхности. При других начальных условиях, когда (i=3, а j изменяет свои значения: j=-4; 12; 28; 44; 60; 76) рекуррентная формула (7) моделирует совсем другую поверхность (рис. 1, *б*). Только при условии, когда начальные и конечные условия соответствуют зависимости (4), рекуррентна формула (6) дискретно определяет единственную поверхность параллельного переноса (рис. 1, *в*).



а) цилиндроид *б*) цилиндроид *в*) поверхность параллельного переноса

Рис.1 Примеры построения различных дискретных поверхностей при заданных начальных условиях с помощью рекуррентных формул

ВЫВОДЫ

Рекуррентные формулы бесконечных числовых последовательностей при определенных ограничениях позволяют формировать дискретные геометрические модели непрерывных геометрических образов разной размерности с заданными начальными или краевыми условиями в виде точечных каркасов. Различные рекуррентные формулы одной последовательности могут быть основой для дискретного моделирования различных поверхностей с одинаковыми начальными условиями.

Литература

1. *Пустюльга С.І.* Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями. Дис...д-ра. техн. наук: 05.01.01/ КНУБА. – К.: 2006.
2. *Ковалев С.Н., Маркелов Н.А., Сафронеев И.В.* Уплотнение ячеек дискретной сети // Прикладная геометрия и инженерная графика. К.: Будівельник, 1989. – Вып. 47. – С. 18 - 20.

Анотація

Статтю присвячено питанням дискретного моделювання і формоутворення геометричних об'єктів за заданими вихідними умовами. Різні рекурентні формули однієї і тієї ж числової послідовності можуть бути основою для дискретного моделювання різних поверхонь з однаковими початковими умовами.

Відомо також, що не всяка числова послідовність дискретно визначає неперервний геометричний образ, тому актуальною проблемою є аналіз рекурентних формул нескінченних числових послідовностей з позицій їх придатності для дискретного визначення неперервних геометричних образів різної вимірності.

Ключеві слова: дискретне моделювання, числові послідовності, рекурентні формули, геометричні моделі, неперервні геометричні образи, точковий каркас поверхні.

Annotation

In clause questions of discrete modeling and formation of geometrical objects on the set conditions are considered.

Use of the mathematical device of numerical sequences for formation of discretely certain geometrical images of any dimension considerably expands opportunities of discrete geometrical modeling of objects, processes and the phenomena.

Redcurrants' formulas of infinite numerical sequences at the certain restrictions allow to form discrete geometrical models of continuous geometrical images of different dimension on the set initial and regional conditions in the form of dot skeletons.

Different Recurrent formulas of one sequence can be a basis for discrete modeling different surfaces with identical conditions

Keywords: discrete modeling, numerical sequences, recurrent form, geometrical model, continuous geometrical characters, carcass surfaces dots.