

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Київський національний університет будівництва і архітектури

**ОПР МАТЕРІАЛІВ**

*Змістовий модуль 1*

**Геометричні характеристики поперечних перерізів.**

**Розтяг та стиск стержнів**

Методичні рекомендації

для самостійної роботи та дистанційного навчання  
здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія»  
ОП «Промислове і цивільне будівництво»

Київ 2024

УДК 539.3

О-61

Укладачі: О.П. Кошевий, канд. техн. наук, доцент;  
Л. О. Григор'єва, канд. фіз.-мат. наук, доцент;  
А. Г. Чубарев, асистент;  
І. Р. Дамнаті, асистент.

Рецензент Д. В. Левківський, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск О. П. Кошевий, канд. техн. наук,  
завідувач кафедри

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів, протокол  
№ 3 від 23 листопада 2023 року.*

В авторській редакції

**Опір** матеріалів. Змістовий модуль 1. Геометричні характеристики  
О-61 поперечних перерізів. Розтяг та стиск стержнів [Електронний  
ресурс]: методичні рекомендації для самостійної роботи та  
дистанційного навчання / уклад.: О. П. Кошевий та ін. – Київ: КНУБА,  
2024. – 32 с.

Містять теоретичні відомості, приклади оформлення звітів та  
завдань до виконання розрахунково-графічної роботи №1.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня  
вищої освіти спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія» ОП  
«Промислове і цивільне будівництво».

©КНУБА, 2024

## ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ .....	4
1. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ. 5	
Теоретичні відомості.....	5
Задача 1.1. Визначення геометричних характеристик симетричного поперечного перерізу.....	9
Задача 1.2. Визначення геометричних характеристик несиметричного поперечного перерізу.....	11
2. РОЗТЯГУВАННЯ (СТИСКУВАННЯ) СТЕРЖНІВ. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ. ....	16
Теоретичні відомості.....	16
Задача 2.1. Перевірка міцності східчастої колони.....	18
Задача 2.2. Розрахунок підвіски.....	21
Задача 2.3. Розрахунок статично визначеної стержневої системи. ....	23
3. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.....	26
Додатки.....	28
Список рекомендованої літератури .....	32

## ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Перед виконанням розрахунково-графічних робіт необхідно опрацювати теоретичні відомості і методи розв'язання задач, стисло наведені в тексті методичних рекомендацій. Відповідні розділи теоретичного курсу опору матеріалів більш широко викладено в підручниках, вказаних в списку літератури.

Задачі і вправи виконуються за індивідуальними завданнями, дані для яких вибираються відповідно до шифру, виданого викладачем у вигляді тризначного числа. Перша цифра шифру відповідає варіанту розрахункової схеми, друга і третя цифри шифру – значенням геометричних розмірів і величин силових факторів. Умови задач наведені в тексті методичних вказівок і в додатках.

Під час оформлення розв'язків контрольних задач і пояснювальної записки до розрахунково-графічної вправи спочатку вказується шифр, наводиться відповідна шифру схема і необхідні вихідні дані, потім викладається розрахунок.

Розв'язки задач і вправ виконуються в одиницях СІ. Кожен окремий етап розрахунку повинен мати заголовок. Розв'язання задач оформлюється на стандартних аркушах паперу формату А4, текст і розрахунки повинні бути написані акуратно і без помарок. Графічні ілюстрації виконуються з дотриманням масштабу і нанесенням всіх необхідних розмірів. До кожної РГР додається титульний лист, зразок якого приведений у дод. 1. Під час здачі РГР студент повинен захистити основні її положення, відповісти на теоретичні питання і вміти розв'язувати задачі в обсязі відповідного розділу курсу. Наступна робота приймається після здачі попередньої.

Терміни виконання розрахунково-графічних вправ і поточного контролю установлюються відповідно до робочих планів по дисципліні. До іспитів студент допускається тільки після здачі усіх вправ і виконання завдань, передбачених робочим планом.

# 1. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

## Теоретичні відомості

Основними геометричними характеристиками плоского перерізу, віднесеного до правосторонньої системи координат  $yOz$ , є:

- площа  $A = \iint da$  ;
- статичні моменти  $S_y = \iint z dA$ ,  $S_z = \iint y dA$ ;
- осьові моменти інерції  $I_y = \iint z^2 dA$ ,  $I_z = \iint y^2 dA$ ;
- відцентровий момент інерції  $I_{yz} = \iint yz dA$ .

В полярній системі координат  $r, \varphi$  вводиться полярний момент інерції  $I_p = \iint r^2 dA$ .

Центр ваги перерізу знаходиться в точці  $C$  з координатами

$$c_y = S_z / A, \quad c_z = S_y / A. \quad (1.1)$$

Координатні вісі  $y_c, z_c$ , що проходять через центр ваги перерізу, називаються *центральною вісями*. Статичні моменти відносно центральних вісей  $S_y = S_z = 0$ .

При паралельному переносі системи координат

$$y = y_c + c_y, \quad z = z_c + c_z \quad (1.2)$$

моменти інерції плоскої фігури в новій системі координат визначаються за формулами

$$I_y = I_{y_c} + c_z^2 A, \quad I_z = I_{z_c} + c_y^2 A, \\ I_{yz} = I_{y_c z_c} + c_y c_z A. \quad (1.3)$$

При повороті системи координат на кут  $\alpha$  проти годинникової стрілки

$$\bar{y} = y \cos \alpha + z \sin \alpha, \quad \bar{z} = -y \sin \alpha + z \cos \alpha \quad (1.4)$$

моменти інерції перетворюються за формулами

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{\bar{z}} &= I_y \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{\bar{y}\bar{z}} &= I_{yz} \cos 2\alpha - \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система координат  $u, v$ , з початком в центрі ваги перерізу, в якій відцентровий момент інерції  $I_{uv} = 0$ , називається *головною центральною системою координат*. Її положення відносно вихідної центральної системи координат  $yCz$  визначається кутом  $\alpha_0$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}. \quad (1.6)$$

Якщо  $I_y = I_z$ , то або всі осі головні (при  $I_{yz} = 0$ ) або  $\alpha_0 = \pi/4$  (при  $I_{yz} \neq 0$ ). Після визначення кута  $\alpha_0$  головні осьові моменти інерції  $I_u, I_v$  знаходяться за першими двома формулами (1.5). Третє рівняння (1.5) можна використовувати для перевірки.

Осьові моменти інерції в головній системі координат набувають екстремальних значень (найбільше і найменше з усіх можливих). Ці величини визначаються з квадратного рівняння і дорівнюють

$$I_{\max, \min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}. \quad (1.7)$$

Головні радіуси інерції  $i_u$  та  $i_v$  визначаються за формулами

$$i_u = \sqrt{I_u / A}, \quad i_v = \sqrt{I_v / A}. \quad (1.8)$$

За їх допомогою будується еліпс інерції

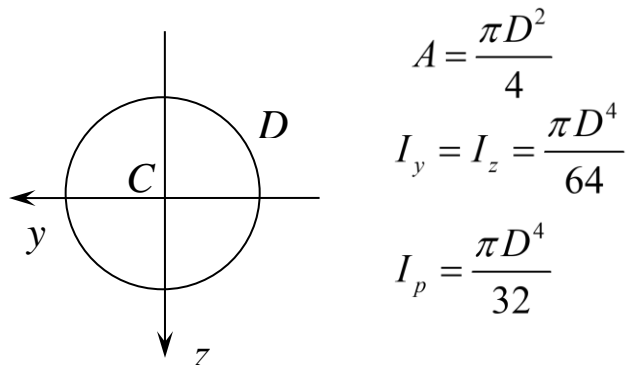
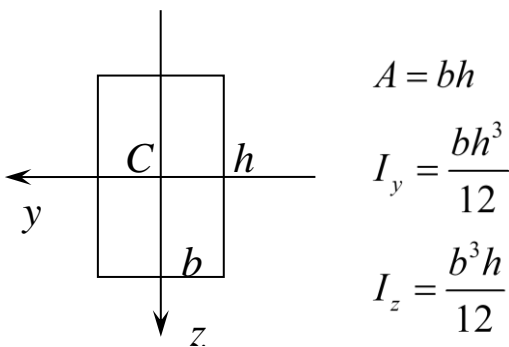
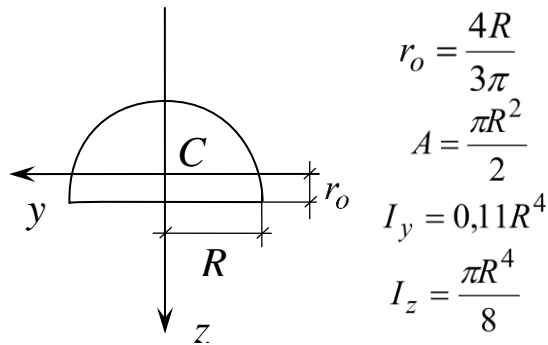
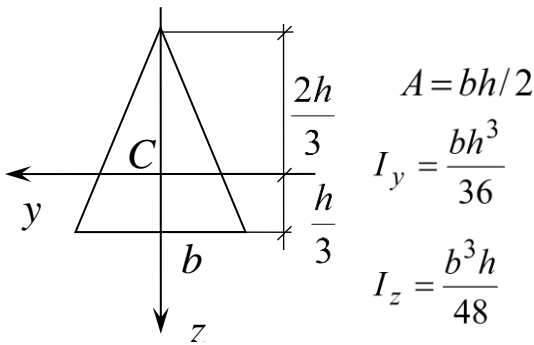
$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1. \quad (1.9)$$

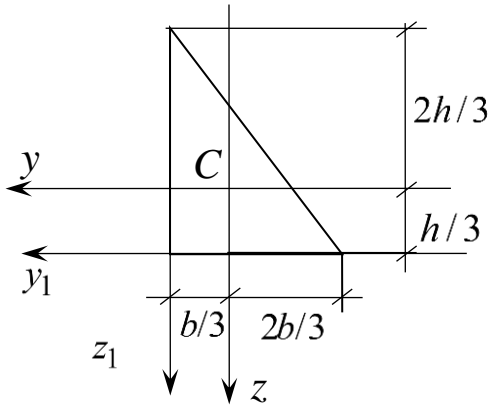
Головні моменти опору визначаються за формулами

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}}, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}}, \quad (1.10)$$

де  $u_{\max}$ ,  $v_{\max}$  – відповідно відстані до найвіддаленіших точок від осей  $v$  та  $u$ .

*Геометричні характеристики простих фігур.* Для багатьох фігур головні центральні координати, площа і моменти інерції визначені шляхом інтегрування по площі і приведені в навчальній та довідниковій літературі. Для найпростіших фігур маємо наступні характеристики:





$$A = bh/2$$

$$I_y = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_z = \frac{b^3h}{36}$$

$$I_{yz} = \frac{b^2h^2}{72}$$

$$I_{y_1} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{z_1} = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_{y_1z_1} = \frac{b^2h^2}{24}$$

Для прокатних балок (двотавр, швелер, кутик) геометричні характеристики беруться з таблиць сортаменту.

Для складних перерізів координати центру ваги  $C(C_{0y}, C_{0z})$  в довільній початковій системі координат  $y_0, z_0$  знаходяться за формулами

$$C_{0y} = \frac{\sum y_{0i}A_i}{A}, \quad C_{0z} = \frac{\sum z_{0i}A_i}{A}, \quad A = \sum A_i, \quad (1.11)$$

де  $y_{0i}, z_{0i}$  – координати центру ваги  $i$ -тої фігури,  $A$  – загальна площа перерізу. Вводимо центральну систему координат  $yCz$ , паралельну до  $y_0, z_0$ , та знаходимо координати центрів ваги складових фігур за формулами паралельного переносу:

$$c_{yi} = y_{0i} - C_{0y}, \quad c_{zi} = z_{0i} - C_{0z}. \quad (1.12)$$

Моменти інерції для складного перерізу обчислюються за формулами

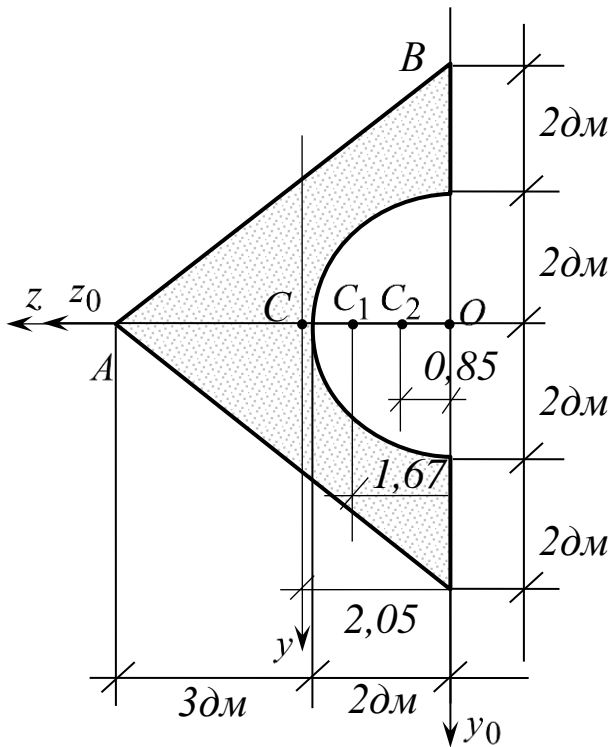
$$I_y = \sum (I_{y_i} + c_{zi}^2 A_i), \quad I_z = \sum (I_{z_i} + c_{yi}^2 A_i),$$

$$I_{yz} = \sum (I_{y_i z_i} + c_{yi} c_{zi} A_i). \quad (1.13)$$

В формулах (1.11), (1.13) площа та моменти інерції для «вирізаних» складових перерізу беруться зі знаком «мінус».

## Задача 1.1. Визначення геометричних характеристик симетричного поперечного перерізу

Для заданого поперечного перерізу визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти інерції та моменти опору. Форма і розміри поперечного перерізу вказані в додатку 4.



**Рис. 1.1**

$C_1$  лежить на горизонтальній осі симетрії на відстані

$$y_{10} = h/3 = 1,67\delta m \text{ від основи, } A_1 = \frac{bh}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ см}^2,$$

$$I_{y_1} = \frac{b^3 h}{48} = \frac{8^3 \cdot 5}{48} = 53,3 \delta m^4, \quad I_{z_1} = \frac{h^3 b}{36} = \frac{5^3 \cdot 8}{36} = 27,8 \delta m^4.$$

2) для півкола з радіусом  $R = 2\delta m$  центр ваги  $C_2$  лежить на горизонтальній вісі симетрії на відстані  $y_{20} = \frac{4R}{3\pi} = 0,85\delta m$  від основи,

$$A_2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{2} = 6,28 \text{ см}^2,$$

**Приклад.** Для заданого на рис. 1.1 поперечного перерізу знайти моменти опору.

*Розв'язання.* Переріз має одну вісь симетрії, що лежить горизонтально. Розбиваємо переріз на прості фігури так, щоб вісь симетрії була віссю симетрії для складових фігур, і визначаємо їх геометричні характеристики:

1) для рівнобедреного трикутника з основою  $b = 8\delta m$  та висотою  $h = 5\delta m$  центр ваги

$$I_{y_2} = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{8} = 6,28 \text{ дм}^4, \quad I_{z_2} = 0,11R^4 = 0,11 \cdot 2^4 = 1,76 \text{ дм}^4.$$

Вводимо початкову систему координат  $y_0, z_0$  та визначаємо координату  $y_{C0}$  центра ваги складного перерізу ( $z_{C0} = 0$  в силу симетрії):

$$y_{C0} = \frac{y_{10}A_1 - y_{20}A_2}{A_1 - A_2} = \frac{1,67 \cdot 20 - 0,85 \cdot 6,28}{20 - 6,28} = \frac{33,4 - 5,34}{13,72} = 2,05 \text{ дм}.$$

Позначаємо на рис. 1.1 центр ваги  $C$  та вводимо головну центральну систему координат  $yCz$ . Координати точок  $C_1, C_2$  в головній системі координат дорівнюють

$$C_{y1} = y_{10} - y_{C0} = 1,67 - 2,05 = -0,38 \text{ дм}; \quad C_{z1} = 0;$$

$$C_{y2} = y_{20} - y_{C0} = 0,85 - 2,05 = -1,2 \text{ дм}; \quad C_{z2} = 0.$$

За допомогою формул паралельного переносу знаходимо головні моменти інерції перерізу:

$$I_y = I_{y1} + C_{z1}^2 \cdot A_1 - I_{y2} - C_{z2}^2 \cdot A_2 = 53,3 - 6,28 = 47 \text{ дм}^4;$$

$$I_z = I_{z1} + C_{y1}^2 \cdot A_1 - I_{z2} - C_{y2}^2 \cdot A_2 = 27,8 + (-0,38)^2 \cdot 20 - 1,76 - (-1,2)^2 \cdot 6,28 = \\ = 27,8 + 2,89 - 1,76 - 9,04 = 19,89 \approx 20 \text{ дм}^4.$$

Знаходимо координати найбільш віддалених від осей точок перерізу та підставляємо їх в формули для моментів опору:

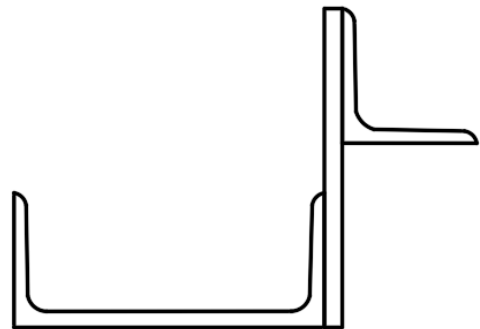
$$y_{\max} = y_A = 5 - 2,05 = 2,95 \text{ дм}; \quad z_{\max} = z_B = 4 \text{ дм};$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{47}{4} = 11,75 \text{ дм}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{20}{2,95} = 6,8 \text{ дм}^3.$$

## Задача 1.2. Визначення геометричних характеристик несиметричного поперечного перерізу

Для поперечного перерізу, заданого в дод. 3, визначити положення центру ваги, осьові та відцентровий моменти інерції в центральній системі координат, положення головної системи координат, головні моменти інерції, головні моменти опору, побудувати еліпс інерції.

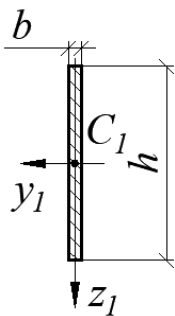
**Приклад.** Для заданого на рис. 1.2 поперечного перерізу визначити положення центру ваги, осьові та відцентровий моменти інерції в центральній системі координат, положення головної системи координат, головні моменти інерції, головні моменти опору, побудувати еліпс інерції. Дано: швелер №30, лист  $18 \times 280$  мм, кутик  $140 \times 10$  мм.



**Рис. 1.2**

*Розв'язання.* Визначаємо геометричні характеристики елементів перерізу:

а)



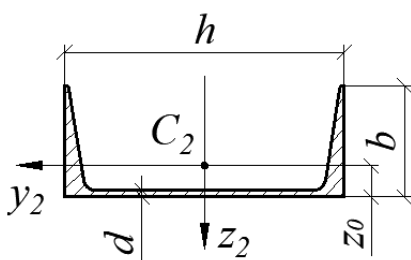
а) Прямокутник  $18 \times 280$

$$A_1 = bh = 1,8 \cdot 28 = 50,4 \text{ см}^2;$$

$$I_{y_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,8 \cdot 28^3}{12} = 3292,8 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_1} = \frac{b^3h}{12} = \frac{1,8^3 \cdot 28}{12} = 13,6 \text{ см}^4.$$

б)



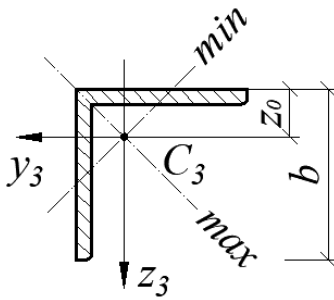
б) Швелер №30

$$h = 30 \text{ см}, b = 10 \text{ см}, z_0 = 2,52 \text{ см};$$

$$A_2 = 40,5 \text{ см}^2;$$

$$I_{y_2} = 327 \text{ см}^4; \quad I_{z_2} = 5810 \text{ см}^4.$$

в)



**Рис. 1.3**

в) Куттик 140×10

$$b = 14 \text{ см}, z_0 = 3,82 \text{ см}, A_3 = 27,33 \text{ см}^2;$$

$$I_{y_3} = I_{z_3} = 512,3 \text{ см}^4;$$

$$I_{\max} = 813,6 \text{ см}^4, I_{\min} = 211 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_3 z_3} = \pm \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} = + \frac{813,6 - 211}{2} = 301,3 \text{ см}^4.$$

Вибираємо за початкову систему координат головні осі першого елемента  $y_1$  та  $z_1$  (рис. 1.3, а).

Загальна площа перерізу

$$A = \sum A_i = 50,4 + 40,5 + 27,33 = 118,23 \text{ см}^2.$$

Координата центра ваги відносно осі  $y_1$ :

$$y_{1C} = \frac{\sum S_{z_{1i}}}{\sum A_i} = \frac{\sum y_{1i} A_i}{A} = \frac{0 \cdot 50,4 + 15,9 \cdot 40,5 + (-4,72) \cdot 27,33}{118,23} = 4,36 \text{ см}.$$

Відкладаємо центральну вісь  $z_c$  (рис. 1.2). Перевірка:

$$\begin{aligned} S_{z_c} &= \sum y_{Ci} A_i = (-4,36) \cdot 50,4 + 11,54 \cdot 40,5 + (-9,08) \cdot 27,33 = \\ &= 467,37 - 467,9 = -0,53 \text{ см}^3 \approx 0. \end{aligned}$$

Похибка:  $\varepsilon = \frac{0,53}{467,9} \cdot 100\% = 0,11\% < 0,5\%$ .

Координата центра ваги відносно осі  $z_1$ :

$$z_{1C} = \frac{\sum S_{y_{1i}}}{\sum A_i} = \frac{\sum z_{1i} A_i}{A} = \frac{0 \cdot 50,4 + 11,48 \cdot 40,5 + (-10,18) \cdot 27,33}{118,23} = 1,58 \text{ см}.$$

Відкладаємо центральну вісь  $y_c$  (рис. 1.4). Перевірка:

$$\begin{aligned} S_{z_c} &= \sum y_{Ci} A_i = (-1,58) \cdot 50,4 + 9,9 \cdot 40,5 + (-11,76) \cdot 27,33 = \\ &= 400,95 - 401,03 = -0,08 \text{ см}^3 \approx 0. \end{aligned}$$

Похибка:  $\varepsilon = \frac{0,08}{401,03} \cdot 100\% = 0,02\% < 0,5\%$ .

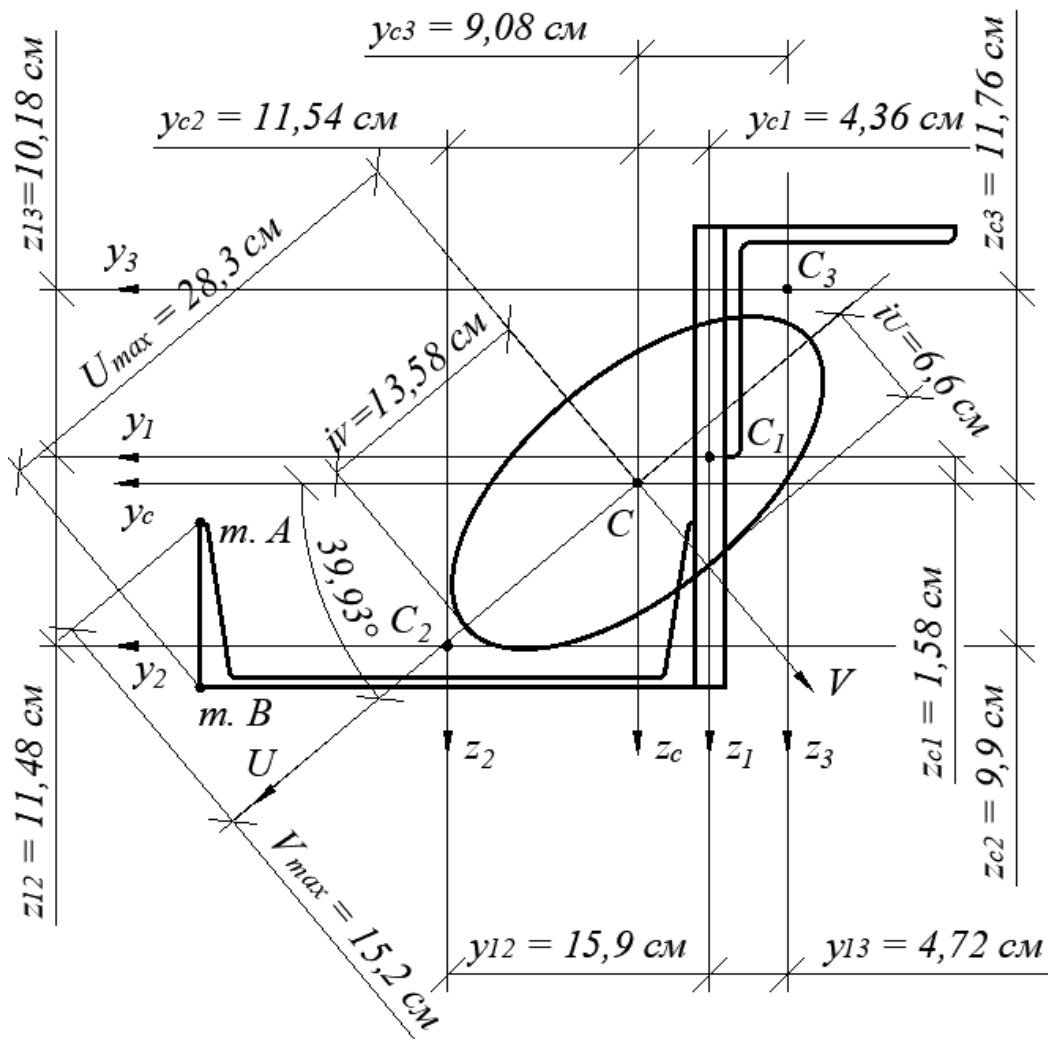


Рис. 1.4

Центральні моменти інерції:

$$I_{y_c} = \sum (I_{y_i} + z_{ci}^2 A_i) = 3292,8 + (-1,58)^2 \cdot 50,4 + 327 + 9,9^2 \cdot 40,5 + 512,3 + (-11,76)^2 \cdot 27,33 = 12007 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c} = \sum (I_{z_i} + y_{ci}^2 A_i) = 13,6 + (-4,36)^2 \cdot 50,4 + 5810 + 11,54^2 \cdot 40,5 + 512,3 + (-9,08)^2 \cdot 27,33 = 14940,7 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c z_c} = \sum (I_{y_i z_i} + y_{ci} z_{ci} A_i) = 0 + (-1,58) \cdot (-4,36) \cdot 50,4 + 0 + 9,9 \cdot 11,54 \cdot 40,5 + 301,3 + (-11,76) \cdot (-9,08) \cdot 27,33 = 8193,8 \text{ см}^4.$$

Положення головних осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{y_c z_c}}{I_{z_c} - I_{y_c}} = \frac{2 \cdot 8193,8}{14940,7 - 12007} = 5,58598;$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(5,58598) = 39,93^\circ.$$

Головні моменти інерції визначаємо за допомогою трьох наборів формул:

$$\begin{aligned} \text{а) } I_U &= I_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + I_{z_c} \sin^2 \alpha_0 - I_{y_c z_c} \sin 2\alpha_0 = 12007 \cos^2 39,93^\circ + \\ &+ 14940,7 \sin^2 39,93^\circ - 8193,8 \sin(2 \cdot 39,93^\circ) = 5149,8 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_V &= I_{y_c} \sin^2 \alpha_0 + I_{z_c} \cos^2 \alpha_0 + I_{y_c z_c} \sin 2\alpha_0 = 12007 \sin^2 39,93^\circ + \\ &+ 14940,7 \cos^2 39,93^\circ + 8193,8 \sin(2 \cdot 39,93^\circ) = 21797,9 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

$$\text{б) } I_U = I_{y_c} - I_{y_c z_c} \operatorname{tg} \alpha_0 = 12007 - 8193,8 \cdot \operatorname{tg} 39,93^\circ = 5149,8 \text{ см}^4;$$

$$I_V = I_{z_c} + I_{y_c z_c} \operatorname{tg} \alpha_0 = 14940,7 + 8193,8 \cdot \operatorname{tg} 39,93^\circ = 21797,9 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } I_{\frac{\max}{\min}} &= \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2}\right)^2 + I_{y_c z_c}^2} = \frac{12007 + 14940,7}{2} \pm \\ &\pm \sqrt{\left(\frac{12007 - 14940,7}{2}\right)^2 + 8193,8^2} = 13473,85 \pm 8324,05. \end{aligned}$$

Оскільки  $I_{y_c} < I_{z_c}$ , то  $I_U < I_V$

$$I_U = I_{\min} = 13473,85 - 8324,05 = 5149,8 \text{ см}^4;$$

$$I_V = I_{\max} = 13473,85 + 8324,05 = 21797,9 \text{ см}^4.$$

Головні радіуси інерції:

$$i_U = \sqrt{\frac{I_U}{A}} = \sqrt{\frac{5149,8}{118,23}} = 6,6 \text{ см}; \quad i_V = \sqrt{\frac{I_V}{A}} = \sqrt{\frac{21797,9}{118,23}} = 13,58 \text{ см}.$$

Будуємо еліпс інерції (рис. 1.4).

На рис. 1.4 найбільш віддаленою точкою від осі  $U$  є точка  $A(26,54; 2,42)$ , а від осі  $V$  – точка  $B(26,54, 12,42)$ . Тоді:

$$U_{\max} = y_B \cos \alpha_0 + z_B \sin \alpha_0 = 26,54 \cos 39,93^\circ + 12,42 \sin 39,93^\circ = 28,3 \text{ см};$$

$$V_{\max} = -y_A \sin \alpha_0 + z_A \cos \alpha_0 = -26,54 \sin 39,93^\circ + 2,42 \cos 39,93^\circ = -15,2 \text{ см}.$$

Ці відстані можна визначити графічно в редакторі. Знаходимо моменти опору:

$$W_U = \frac{I_U}{|V_{\max}|} = \frac{5149,8}{|-15,2|} = 338,8 \text{ см}^3;$$

$$W_V = \frac{I_V}{|U_{\max}|} = \frac{21797,9}{|28,3|} = 770,2 \text{ см}^3.$$

## 2. РОЗТЯГУВАННЯ (СТИСКУВАННЯ) СТЕРЖНІВ. РОЗРАХУНОК СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

### Теоретичні відомості

Під час одновісного навантаження стержня рівнодійна внутрішніх сил в заданому перерізі називається *поздовжньою силою*  $N$ . Для визначення сили  $N$  використовується *метод перерізів*: стержень розрізається на дві частини, одна з яких відкидається; вплив відкинutoї частини на ту, що залишилась, замінюють зусиллям  $N$ . Значення зусилля  $N$  визначається з рівняння рівноваги для частини стержня, що залишилась, і залежить від зовнішніх сил, в тому числі власної ваги.

Під час навантаження стержня зосередженими поздовжніми силами без врахування власної ваги поздовжня сила  $N$  залишається постійною в довільному перерізі ділянки стержня між точками прикладання сил. Зусилля  $N$  дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють на відрізану частину стержня.  $N$  додатне, якщо ділянка розтягнута (діє від перерізу), і від'ємне, якщо ділянка стиснута (діє до перерізу).

Графік, що показує зміну  $N$  по довжині стержня, називається *епюрою поздовжніх сил* (епюрою  $N$ ).

Під час розрахунків на розтягування (стискування) стержнів вважаємо, що для поперечних перерізів стержня виконується *гіпотеза плоских перерізів*: *плоскі поперечні перерізи стержня в процесі деформування рухаються як жорсткі тіла, залишаючись плоскими та перпендикулярними до деформованої осі стержня.*

Середнє нормальне напруження в конкретному перерізі стержня з врахуванням гіпотези плоских перерізів визначається за формулою

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.1)$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу. Графік, що показує зміну нормальних напружень за довжиною стержня, називається *епюрою нормальних напружень* (епюрою  $\sigma$ ).

Переріз, в якому нормальне напруження має найбільше абсолютне значення ( $\sigma = \sigma_{\max}$ ), називається *небезпечним*.

У межах пружності  $\sigma \leq \sigma_e$  виконується закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (2.2)$$

де  $E$  – модуль Юнга (модуль пружності першого роду),  $\varepsilon = \frac{du}{dx}$  – відносна поздовжня деформація.

Видовження  $u_l = \Delta$  ділянки стержня довжиною  $l$  зі сталою жорсткістю на розтяг  $EA$  під дією сталої сили  $N$  знаходиться за формулою

$$\Delta = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.3)$$

Умова міцності при осьовому розтягуванні або стискуванні має вигляд

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq \sigma_{adm}, \quad (2.4)$$

де  $\sigma_{adm}$  – допустимі нормальні напруження для конкретного матеріалу.

Для крихких матеріалів (камінь, бетон, цегла) допустимі значення нормальних напружень на розтягування та стискування суттєво відрізняються, тому оцінка міцності для розтягнутих і стиснутих ділянок проводиться окремо:

$$\sigma_{\max}^+ \leq \sigma_{adm}^+, \quad \sigma_{\max}^- \leq \sigma_{adm}^-. \quad (2.5)$$

Під час перевірки міцності допускається перенапруження

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{adm}}{\sigma_{adm}} \cdot 100\% \leq 5\%. \quad (2.6)$$

Під час підбору перерізу необхідна площа поперечного перерізу знаходиться за допомогою виразу

$$A_{нб} = \frac{N_{\max}}{\sigma_{adm}}. \quad (2.7)$$

## Задача 2.1. Перевірка міцності східчастої колони

Перевірити міцність заданої в дод. 5 ступінчатої кам'яної колони та визначити переміщення її характерних перерізів, якщо модуль Юнга  $E = 0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , допустимі напруження  $\sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа}$ .

**Приклад.** Двоступінчата кам'яна колона (площа верхнього перерізу  $A_1 = 0,3 \text{ м}^2$ , площа нижнього перерізу  $A_2 = 0,5 \text{ м}^2$ ) навантажена силами  $F_1 = 320 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 250 \text{ кН}$  (рис. 2.1). Побудувати епюри поздовжньої сили  $N$ , нормальних напружень  $\sigma$  та пререміщень поперечних перерізів  $u$  (модуль Юнга  $E = 0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ). Перевірити міцність колони, якщо допустиме напруження на розтягування  $\sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}$ , на стискування  $\sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа}$ .

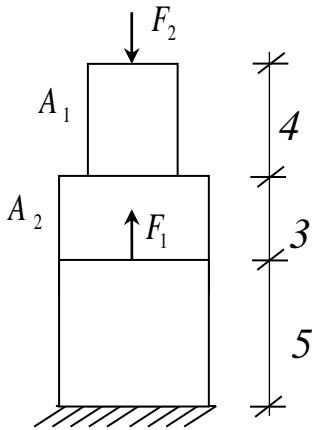


Рис. 2.1

**Розв'язання.** 1. Розбиваємо стержень на ділянки по точках прикладання сили та зміни площі поперечного перерізу та нумеруємо їх, починаючи з вільного кінця (рис. 2.3).

**Зауваження.** Поздовжня сила  $N$  завжди вводиться додатною, тобто такою, що розтягує відрізану частину (діє від перерізу), власна вага  $Q$  діє вниз. Тобто якщо стержень закріплений зверху, то відкидається верхня частина стержня, вісь  $x$  та сила  $N$  спрямовуються вгору.

За допомогою методу перерізів знаходимо значення внутрішньої сили  $N$  на кожній з ділянок (рис. 2.2).

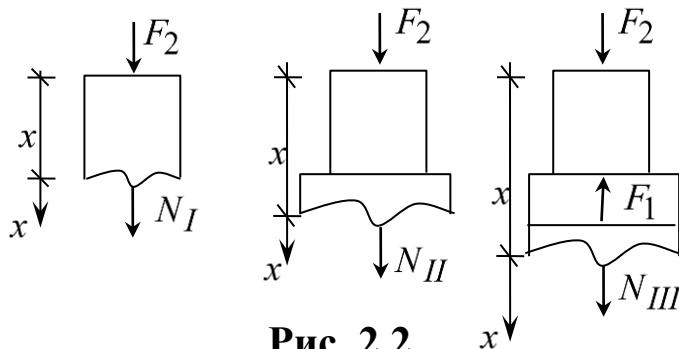


Рис. 2.2

Рівняння рівноваги для першої та другої ділянок однакові

$$N_I + F_2 = 0, \quad N_{II} + F_2 = 0, \quad N_I = N_{II} = -F_2 = -250 \text{ кН}.$$

Для третьої ділянки маємо

$$N_{III} + F_2 - F_1 = 0, \quad N_{III} = F_1 - F_2 = 320 - 250 = 70 \text{ кН}.$$

2. Знаходимо нормальні напруження  $\sigma$  на кожній з ділянок:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_1} = \frac{-250 \cdot 10^3}{0.3} = -833,3 \text{ кПа} = -0,83 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_2} = \frac{-250 \cdot 10^3}{0.5} = -500 \text{ кПа} = -0,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_2} = \frac{70 \cdot 10^3}{0.5} = 140 \text{ кПа} = 0,14 \text{ МПа}.$$

По знайдених значеннях  $N$  та  $\sigma$  на рис. 2.3 будемо епюри :

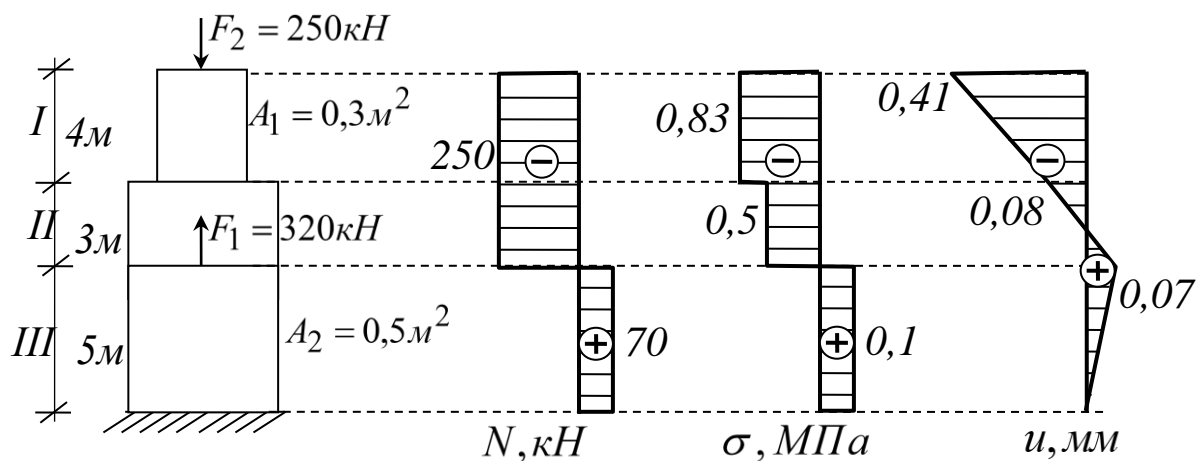


Рис. 2.3

3. Робимо перевірку міцності по максимальних напруженнях на стиснутих і розтягнутих ділянках:

$$\sigma_{\max}^- = 0,83 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^+ = 0,14 \text{ МПа} \leq \sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}.$$

Міцність колони забезпечено.

4. Визначаємо видовження кожної з ділянок стержня:

$$\Delta_I = \frac{N_I l_I}{EA_1} = \frac{\sigma_I l_I}{E} = \frac{-0,83 \cdot 4}{0,1 \cdot 10^5} = -3,32 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,33 \text{ мм};$$

$$\Delta_{II} = \frac{N_{II} l_{II}}{EA_2} = \frac{\sigma_{II} l_{II}}{E} = \frac{-0,5 \cdot 3}{0,1 \cdot 10^5} = -1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,15 \text{ мм};$$

$$\Delta_{III} = \frac{N_{III} l_{III}}{EA_2} = \frac{\sigma_{III} l_{III}}{E} = \frac{0,14 \cdot 5}{0,1 \cdot 10^5} = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,07 \text{ мм}.$$

Переміщення характерних перерізів стержня визначаємо, починаючи з закріплення стержня:

$$u(12) = 0; \quad u(8) = u(12) + \Delta_{III} = 0 + 0,07 = 0,07 \text{ мм};$$

$$u(5) = u(8) + \Delta_{II} = 0,07 - 0,15 = -0,08 \text{ мм};$$

$$u(0) = u(5) + \Delta_I = -0,08 - 0,33 = -0,41 \text{ мм}.$$

На рис. 2.3 будуємо епюру переміщень.

## Задача 2.2. Розрахунок підвіски

Для заданої стержневої системи (дод. 4) визначити зусилля в стержні та підібрати його поперечний переріз. Визначити переміщення заданої точки системи.

**Приклад.** Абсолютно жорсткий брус (рис. 2.4) навантажений силами  $P_1 = 2$  т та  $P_2 = 1$  т. Підібрати діаметр сталевій підвіски  $AB$ , якщо  $\sigma_{adm} = 200$  МПа. Визначити переміщення точки  $D$ , якщо  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

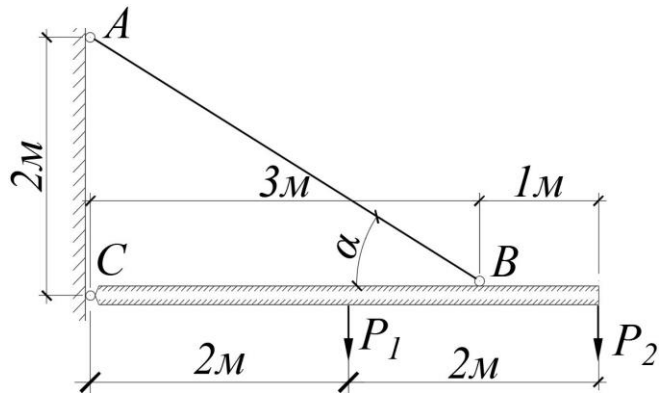


Рис. 2.4

*Розв'язання.* Рівняння рівноваги (рис. 2.4):

$$\sum M_C = 0; \quad P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot 4 - N_B \cdot 3 = 0;$$

$$N_B = \frac{2P_1 + 4P_2}{3} = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{3} = 2,667 \text{ т} = 26,7 \text{ кН}.$$

Розглянемо  $\Delta ABC$ :  $l_{AB} = \sqrt{13} = 3,6$  м;  $\sin \alpha = \frac{2}{3,6} = 0,555$ ;

$$N = \frac{N_B}{\sin \alpha} = \frac{2,667}{0,555} = 4,805 \text{ т} = 48,05 \text{ кН}.$$

Необхідна площа поперечного перерізу

$$A_{нб} = \frac{N}{\sigma_{adm}} = \frac{48,05 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} \text{ м}^2 = 2,4 \text{ см}^2,$$

шуканий діаметр  $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,4}{3,14}} = 1,75 \text{ см} = 17,5 \text{ мм}.$

Видовження стержня  $AB$

$$\Delta_{AB} = \frac{Nl}{EA} = \frac{48,05 \cdot 10^3 \cdot 3,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,4 \cdot 10^{-4}} = 36 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 3,6 \text{ мм}.$$

Застосовуємо метод засічок (рис. 2.5). Відкладаємо  $\Delta_{AB}$  на продовженні стержня і проводимо перпендикуляр. До стержня  $CD$  також проводимо перпендикуляр в т.  $B$ . Вертикальне переміщення точки  $B$   $f_B$  дорівнює гіпотенузі отриманого трикутника

$$f_B = \frac{\Delta_{AB}}{\sin \alpha} = \frac{3,6}{0,555} = 6,5 \text{ мм}.$$

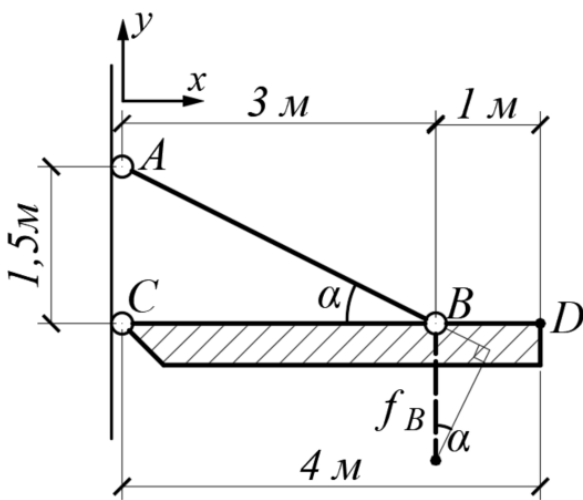


Рис. 2.5

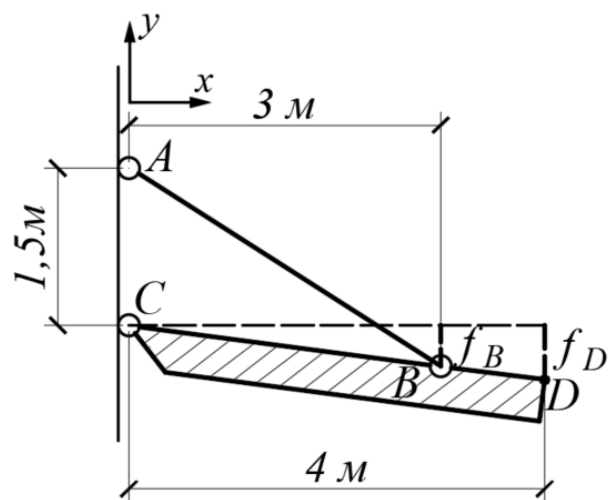


Рис. 2.6

Залежність між  $f_B$  та  $f_D$  складемо за подібністю трикутників (рис.2.6). Маємо  $\frac{f_B}{f_D} = \frac{3}{4}$ . Знаходимо переміщення точки  $D$ :

$$f_D = \frac{4}{3} f_B = \frac{4 \cdot 6,5}{3} = 8,7 \text{ мм}.$$

### Задача 2.3. Розрахунок статично визначеної стержневої системи

Для заданої стержневої системи (дод. 5) визначити зусилля в стержнях, підібрати поперечні перерізи, визначити переміщення точки з'єднання стержнів.

**Приклад.** До шарнірно з'єднаних стержнів 1, 2 однакового поперечного перерізу підвішено вантаж вагою  $F = 120 \text{ кН}$  (рис. 2.7). Потрібно визначити зусилля в стержнях, підібрати площі поперечних перерізів стержнів при  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$  та знайти переміщення точки  $B$  прикладання сили.

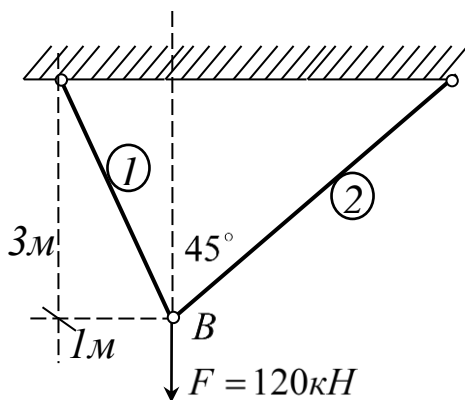


Рис. 2.7

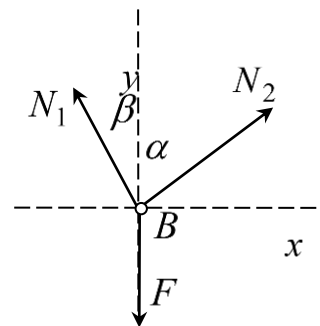


Рис. 2.8

*Розв'язання.* При такому навантаженні в стержнях 1, 2 виникають внутрішні поздовжні сили  $N_1$ ,  $N_2$ , які знаходимо з рівняння рівноваги для точки  $B$  (рис. 2.8):

$$-N_1 \sin \beta + N_2 \sin \alpha = 0, \quad N_1 \cos \beta + N_2 \cos \alpha - F = 0.$$

Знайдемо довжини стержнів та тригонометричні значення для кутів:

$$l_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 3,16 \text{ м},$$

$$l_2 = a / \cos 45^\circ = 3\sqrt{2} = 4,24 \text{ м},$$

$$\sin \alpha = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \beta = b / l_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \beta = a / l_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Розв'язуємо систему рівнянь рівноваги:

$$N_1 = N_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = N_2 \frac{\sqrt{2}\sqrt{10}}{2} = \sqrt{5}N_2, \quad \sqrt{5}N_2 \frac{3}{\sqrt{10}} + N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0,$$

$$N_2 \left( \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - F = 2\sqrt{2}N_2 - F = 0, \quad N_2 = \frac{F}{2\sqrt{2}} = \frac{120}{2\sqrt{2}} = 42,4 \text{ кН},$$

$$N_1 = \sqrt{5}N_2 = \sqrt{5} \cdot 42,4 = 94,9 \approx 95 \text{ кН}.$$

Підбираємо площу поперечних перерізів стержнів з умови міцності  $\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq \sigma_{adm}$ :

$$A_{нб} = \frac{N_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{95 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,59 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \approx 6 \text{ см}^2.$$

Визначаємо напруження в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{95 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 15,8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 158 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{42,4 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 7,07 \cdot 10^7 \text{ Па} = 70,7 \text{ МПа}.$$

Видовження стержнів

$$\Delta_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{158 \cdot 10^6 \cdot 3,16}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 249,6 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 2,5 \text{ мм},$$

$$\Delta_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{70,7 \cdot 10^6 \cdot 4,24}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 149,8 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 1,5 \text{ мм}.$$

Положення точки  $B$  після деформування системи знайдемо за допомогою *методу засічок*: на кожному з стержнів відкладаємо від точки  $B$  його видовження (або скорочення) та проводимо перпендикуляри до стержнів в отриманих точках. Точка  $B$  переміститься в точку  $B_1$  перетину цих перпендикулярів (рис. 2.9).

Проекції переміщення точки  $B$   $u_{Bx}, u_{By}$  на осі  $x, y$  знайдемо за допомогою наступного правила: видовження  $\Delta$  стержня дорівнює сумі проекцій переміщень  $u_{Bx}, u_{By}$  на напрямок цього стержня. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \Delta_1 = u_{By} \cos \beta + u_{Bx} \sin \beta, \\ \Delta_2 = u_{By} \cos \alpha - u_{Bx} \sin \alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3u_{By} + u_{Bx} = \Delta_1 \sqrt{10}, \\ u_{By} - u_{Bx} = \Delta_2 \sqrt{2}, \end{cases}$$

$$u_{By} = \frac{\Delta_2 \sqrt{2} + \Delta_1 \sqrt{10}}{4} = \frac{1,5\sqrt{2} + 2,5\sqrt{10}}{4} = 2,5 \text{ мм},$$

$$u_{Bx} = -\Delta_2 \sqrt{2} + u_{By} = -1,5\sqrt{2} + 2,5 = 0,38 \text{ мм}.$$

Повне переміщення точки  $B$

$$u_B = \sqrt{u_{Bx}^2 + u_{By}^2} = \sqrt{2,5^2 + 0,38^2} = 2,53 \text{ мм}.$$

Рисунок для методу засічок потрібно виконувати в масштабі. В такому випадку значення  $u_{Bx}, u_{By}$  можна перевірити шляхом безпосереднього вимірювання на рисунку.

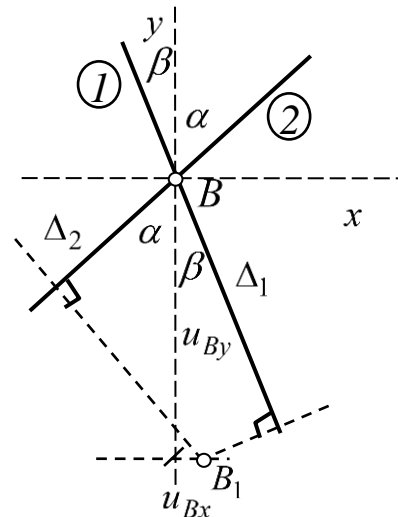


Рис. 2.9

## 2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

### Розрахунково-графічна робота №1

#### Геометричні характеристики плоских перерізів та розтяг-стиск.

#### Задача 1. Геометричні характеристики поперечного перерізу

Для поперечного перерізу складної форми визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти інерції, моменти опору, радіуси інерції і побудувати еліпс інерції. Форма і розміри поперечного перерізу вказані в дод. 2,3.

Таблиця даних до задачі №1

Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру для додатків 2,3				
	третя	перша		друга	
	№ схеми	№ двотавра*	№ швелера*	розміри листа, мм	розміри кутика*, мм
0	0	16	20а	220x10	160x16
1	1	18	20	220x12	160x10
2	2	18а	18а	240x14	150x12
3	3	20	18	240x16	150x10
4	4	20а	16а	280x16	140x10
5	5	22	16	280x20	125x14
6	6	22а	24а	300x16	125x10
7	7	24	24	300x20	120x10
8	8	24а	22а	340x18	120x8
9	9	27	22	340x22	110x8

\*Сортамент прокатної сталі наведено в [4-6]

## Задача 2. Розтяг (стиск)

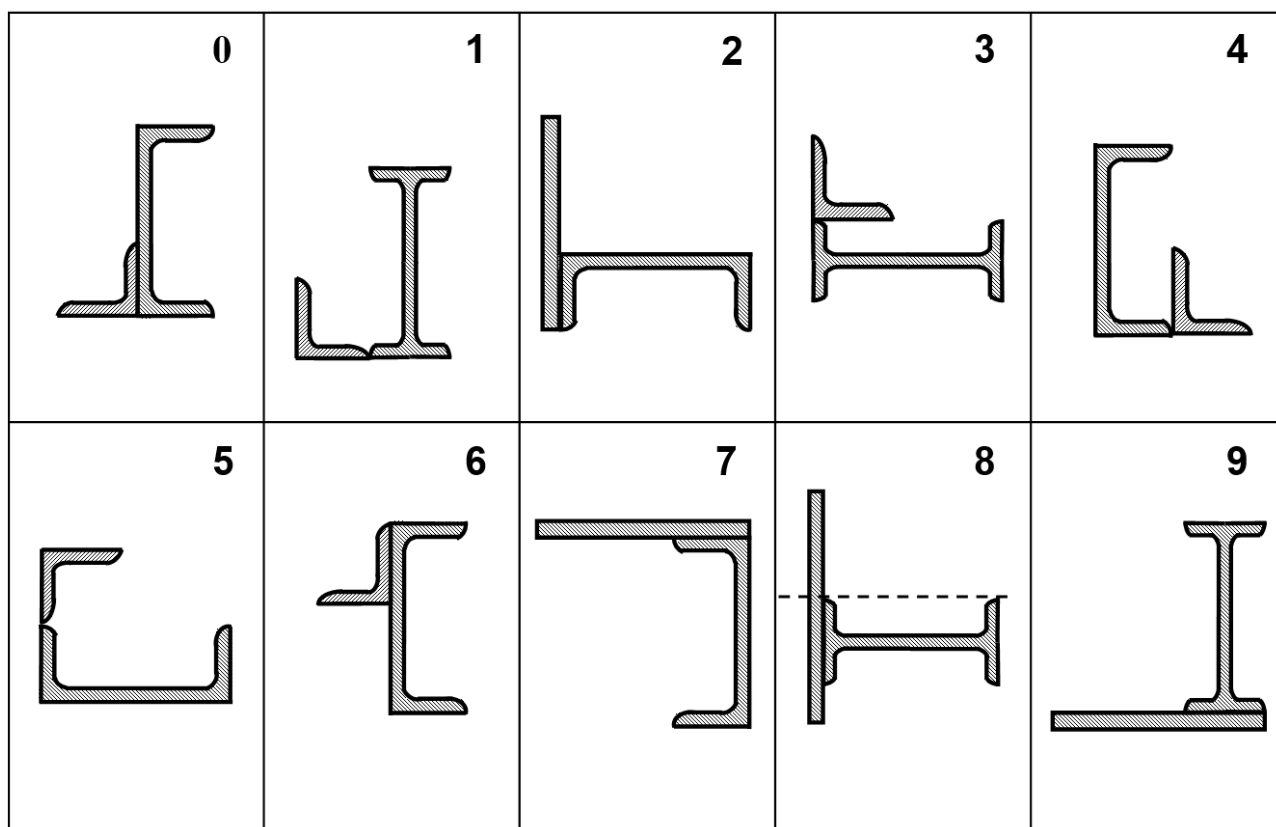
Для заданої стержневої конструкції підібрати круглий поперечний переріз стержня та визначити переміщення кінця стержня, якщо модуль пружності сталі  $E = 200 \text{ ГПа}$ .

Таблиця даних до задачі №2

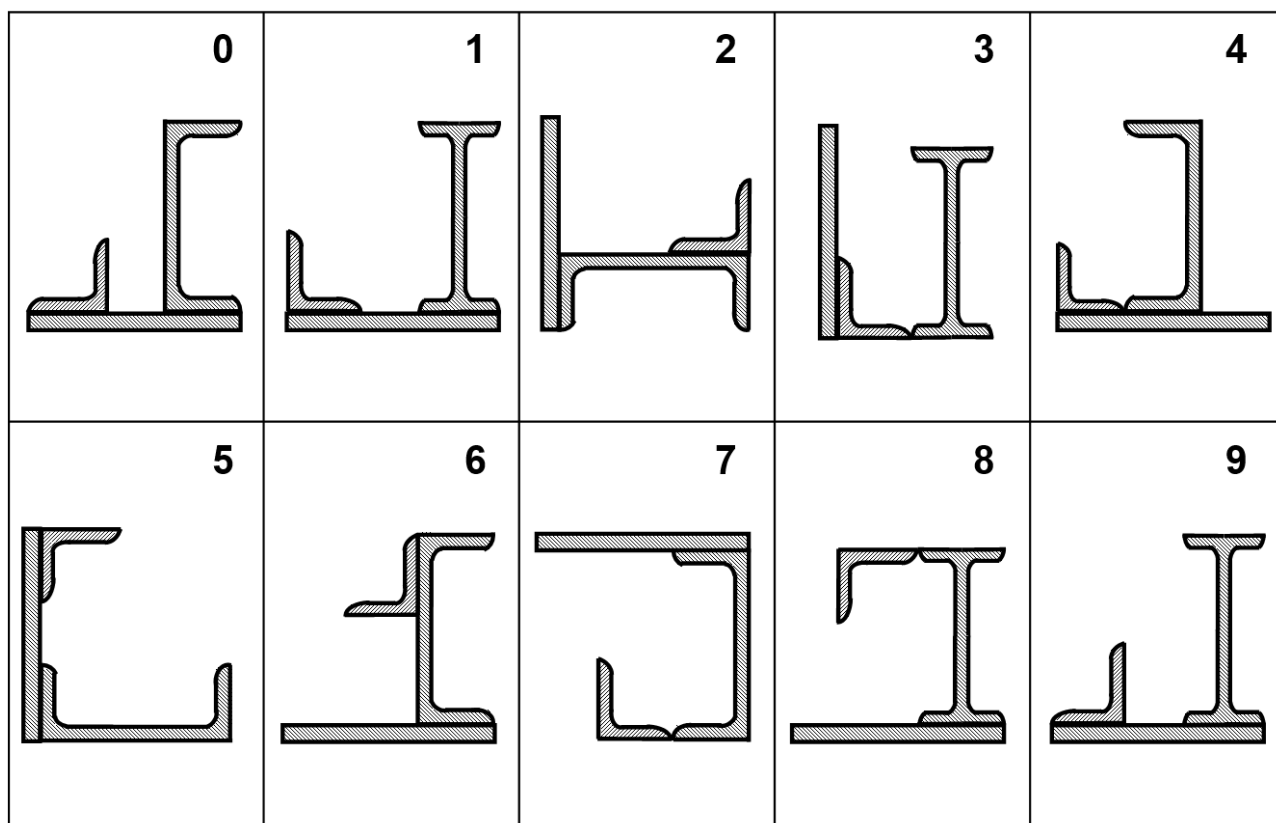
Цифра шифру	Перша цифра		Друга цифра		Третя цифра		
	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$c, \text{ м}$	$P, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$	$\sigma_{adm}, \text{ МПа}$	Схема
1	3	4	2	10	6	180	1
2	4	2	3	20	5	160	2
3	5	3	2	15	4	200	3
4	5	6	3	20	8	210	4
5	3	2	4	14	7	220	5
6	5	4	4	25	5	230	6
7	5	3	5	8	6	180	7
8	7	4	2	15	10	170	8
9	4	6	4	30	9	200	9
0	3	3	3	40	7	190	0

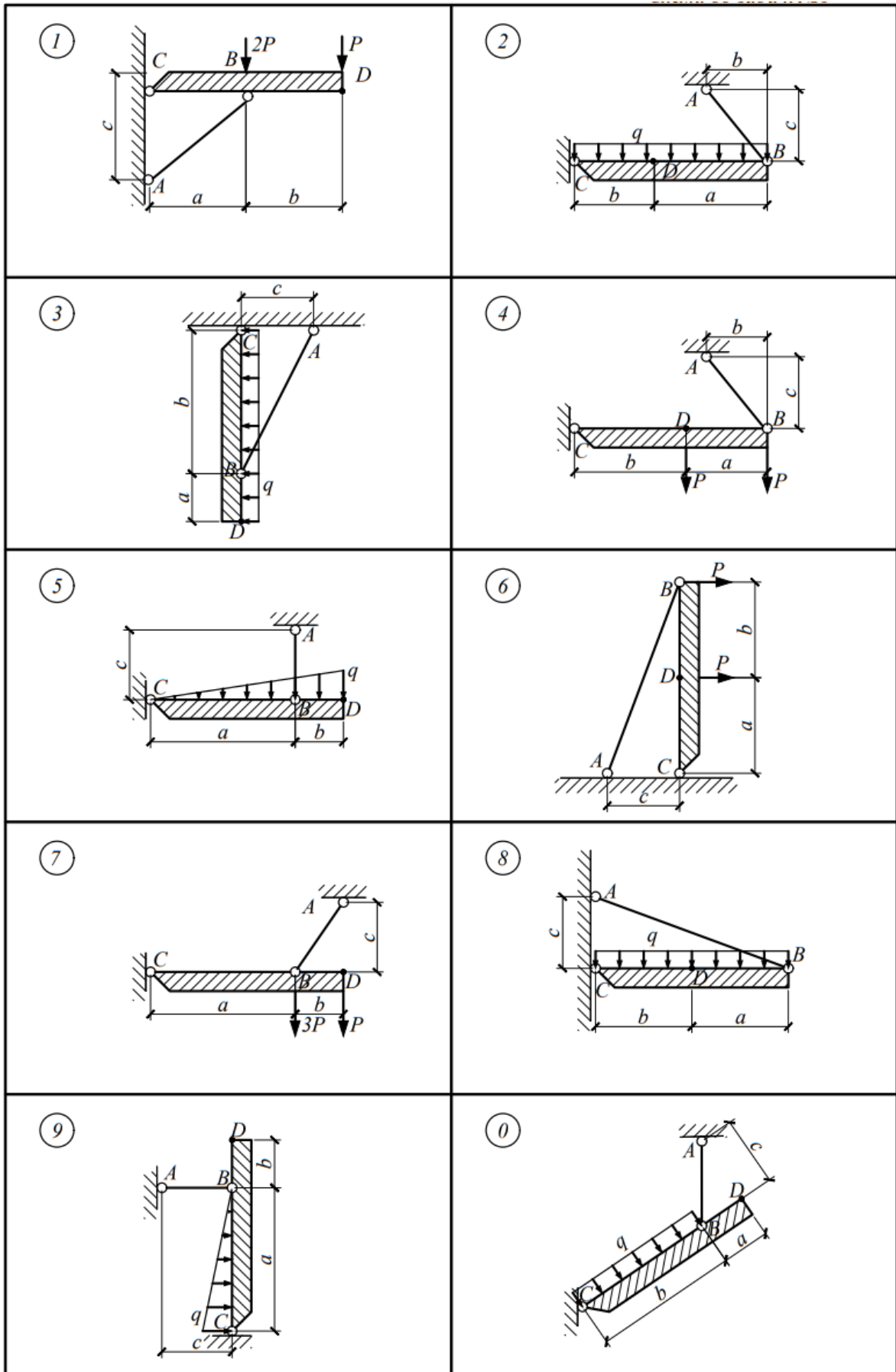


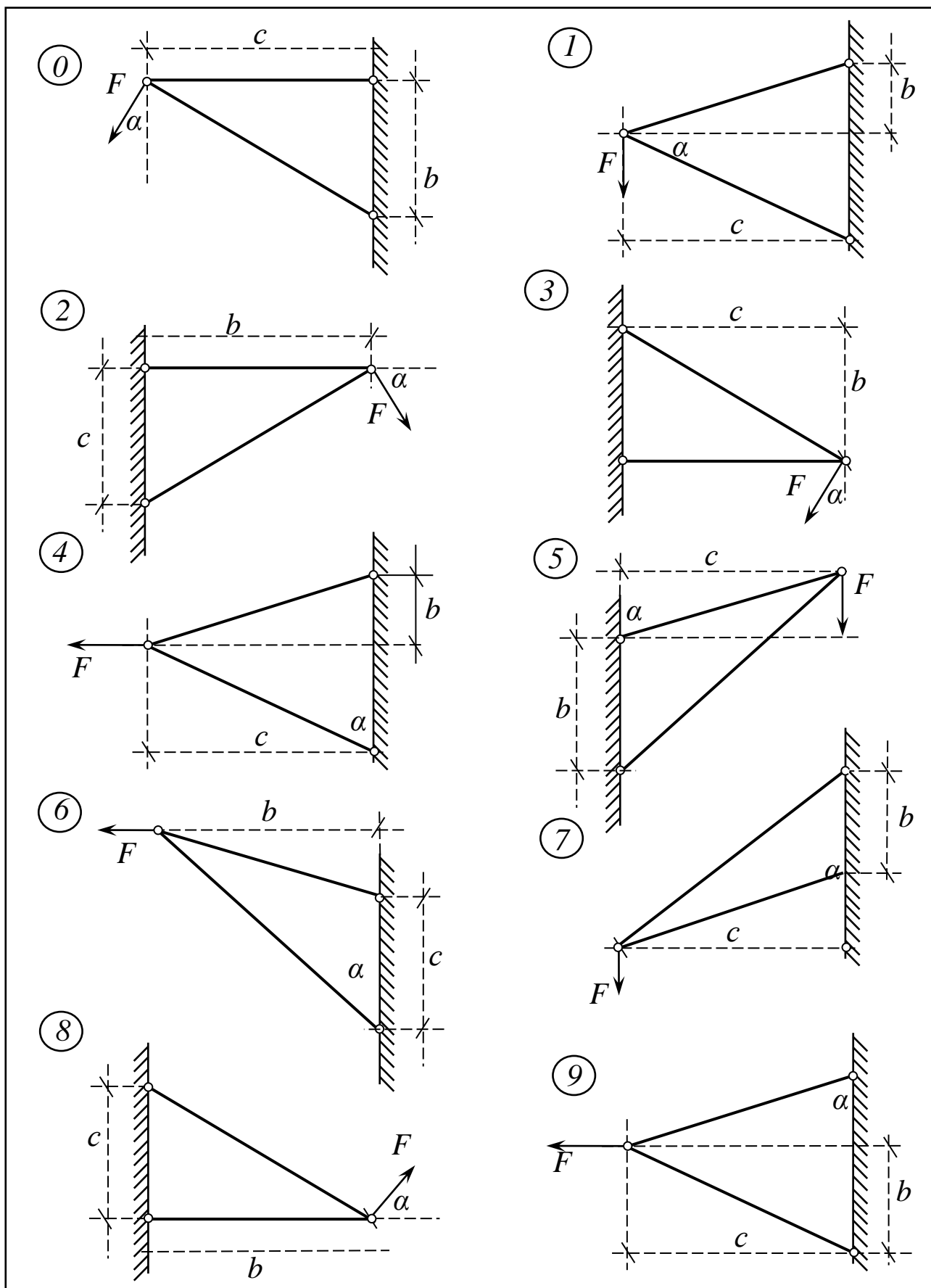
Додаток 2



Додаток 3







## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

### Підручники:

1. *Писаренко, Г. С.* та ін. Опір матеріалів: Підручник для студ. вищ. навч. закл. / За ред. Г.С. Писаренка. – 2-е вид., доп. і перероб. – Київ: Вища шк., 2004. – 655с.
2. *Шкельов Л.Т.* Опір матеріалів: Підручник для студентів вищих навчальних закладів / Л.Т. Шкельов, А.М. Станкевич, Д.В. Пошивач. К.:ЗАТ «Віпол», 2011. – 456с.
3. *Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн.* / За ред. В.Г. Піскунова. – Київ : Вища школа, 1995.

### Навчальні посібники:

4. *О.П. Кошевий, Григор'єва Л.О., Д.В. Левківський.* Опір матеріалів в Темах і задачах: навчальний посібник. Київ: КНУБА; –Кам'янець-Подільський: ТОВ «Друкарня «Рута», 2019. – 340с. ISBN 978-617-7626-86-1
5. *Л.О. Григор'єва, Д.В. Левківський, О.П. Кошевий.* Опір матеріалів з основами теорії пружності: Курс лекцій. Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 270 с. ISBN 978-617-520-044-5
6. *Збірник задач з опору матеріалів: навч. посіб.* / П.О. Іваненко, Л.О. Григор'єва, О.П. Кошевий та ін. За ред. П.О. Іваненка – Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 400 с. ISBN 978-617-520-163-3

### Додаткові джерела:

7. Збірник задач з опору матеріалів: Навч. посіб. / М. І. Бобир, А. Є. Бабенко, О.О. Боронко та ін.; за ред. М. І. Бобиря. – К.: Вища шк., 2008. – 399 с.
8. Hibbeler, R.C. Mechanics of materials / R.C. Hibbeler. Tenth edition. –NJ: Pearson, 2015. – 900 p.– ISBN 9780134319650
9. Серія відеоуроків та лабораторних робіт з опору матеріалів на Youtube [https://www.youtube.com/channel/UC4ptzya-AQGAFDj18iOB\\_rA](https://www.youtube.com/channel/UC4ptzya-AQGAFDj18iOB_rA) , [https://youtu.be/tibdfe\\_Q2s8](https://youtu.be/tibdfe_Q2s8)
10. Освітній сайт КНУБА. Курс для дистанційного навчання «Опір матеріалів. ПЦБ» <https://org2.knuba.edu.ua/course/view.php?id=2036>

Навчально-методичне видання

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ**

### *Змістовий модуль 1*

# **Геометричні характеристики поперечних перерізів. Розтяг та стиск стержнів**

Методичні рекомендації  
для самостійної роботи та дистанційного навчання  
здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія»  
ОП «Промислове і цивільне будівництво»

Укладачі: **Кошевий** Олександр Петрович,  
**Григор'єва** Людмила Олександрівна,  
**Чубарев** Антон Глібович,  
**Дамнаті** Іліас Рідович

Комп'ютерне верстання *А. П. Селівестрової*

Ум. друк. арк. 1,86. Обл.-вид. арк. 2,0

Електронний документ. Вид № 41/V-24.

Виконавець і виготовлювач  
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03680

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів  
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р