

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук
І.І. Солодей, канд. техн. наук,
А.Ю. Приходько

ВИКОРИСТАННЯ НАПІВНАЛІТИЧНОГО МЕТОДА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧАХ ПЕРІОДИЧНИХ КОЛИВАНЬ ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

На основі напіваналітичного метода скінченних елементів розроблено ефективний підхід до дослідження стаціонарних періодичних коливань неоднорідних тіл із складною формою та структурою поперечного перерізу. Вірогідність отриманих результатів і ефективність підходу підтверджені розв'язанням контрольних прикладів, що охоплюють тіла довільної мірності при різноманітних граничних умовах. Проведено аналіз особливостей процесів динамічного деформування, що протікають у реальних конструкціях.

Вступ

Значна частина реальних конструкцій, що розглядається з позицій механіки деформівного твердого тіла, перебуває під дією нестационарних зовнішніх впливів. Для визначення найбільш небезпечних з погляду міцності конструкцій значень параметрів напружено-деформованого стану необхідно простежити весь процес деформування, що призводить до необхідності розв'язання нестационарних просторових задач. Це вимагає здійснення просторово-часової апроксимації і веде до збільшення розмірності задачі.

Зважаючи на складність поставленої задачі, її розв'язання потребує застосування чисельних методів. В наш час найбільш універсальним чисельним методом, що використовується у наукових дослідженнях, особливо для розрахунку складних об'єктів, є метод скінченних елементів [6]. Не дивлячись на те, що дослідження просторового динамічного напружено-деформованого стану методом скінченних елементів є одним з найважливіших напрямків сучасної механіки деформівного тіла, залишаються суттєві труднощі, які зумовлені високою розмірністю математичної моделі МСЕ та великим об'ємом інформації, що звужують область його використання для розв'язання складних просторових задач динаміки.

Істотно підвищити ефективність МСЕ дозволяє його поєднання з методом розділення невідомих. Цей підхід одержав назву напіваналітичного методу скінченних елементів. НМСЕ був запропонований в роботах [1, 10] як ефективний метод розв'язання просторових задач теорії пружності для невісесиметрично навантажених тіл обертання, та розвинений в роботах [2, 3, 9]. Висока ефективність

напіваналітичного варіанта у порівнянні з традиційним МСЕ зумовлена, у класичному випадку, зведенням просторової задачі до ряду двовимірних.

Для апроксимації просторових неоднорідних тіл використовуються неоднорідні замкнені кругові або прямолінійні призматичні скінченні елементи, що являють собою призму утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж твірної у вигляді дуги кола або прямої [8]. Суть апроксимації полягає у розкладі невідомих задачі вздовж твірної по деякій системі неперервних гладких функцій (ряди Фур'є) у поєднанні із скінчено елементною дискретизацією в області поперечного перерізу. Основні теоретичні положення методики, що використовується в даній роботі висвітлені в публікаціях [4, 5].

Розробка ефективних методів розв'язання великих задач, що виникають при розрахунку конструкцій споруд та об'ємних тіл складної форми, значно зменшують час аналізу, що в свою чергу зменшує строки виконання проекту, його кошторис та збільшує якість, завдяки реальній можливості за невеликий час оцінити велику кількість конструктивних рішень. Це суттєво розширює можливості МСЕ програм, що орієнтовані на доступні рядовому користувачу персональні комп'ютери.

1. Дослідження збіжності та вірогідності результатів НМСЕ в задачах періодичних коливань просторових конструкцій

Проведено дослідження збіжності НМСЕ в задачі періодичних коливань защемленої по контуру круглій пластини під дією розподіленого по частині пластини нормального навантаження (рис.1), що змінюється за законом $q = q_0 \sin pt$, $q_0 = 1$ Н/м, $p = 40$ с⁻¹. Радіус пластини $R = 3$ м,

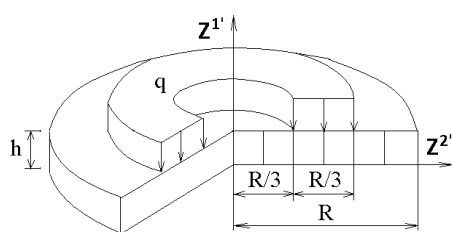


Рис. 1

товщина $h = 0.2$ м. Аналітичне рішення задачі отримане в [11] і відображене на рис. 2 і рис. 3 у вигляді епюр амплітуд нормальних переміщень (цифра 4). На рис. 2 показані результати для даної задачі при використанні неузгодженої матриці мас, на рис. 3 – погодженої. Цифрами позначені

графіки, побудовані при описі пластини вздовж радіусу наступним числом скінчених елементів: 1 – $n = 3$, 2 – $n = 6$, 3 – $n = 12$. При використанні обох типів матриці мас спостерігається добра збіжність чисельних рішень, а використання 12 СЕ вздовж радіусу забезпечує похибку результатів в області максимальних значень амплітуд коливань в межах 1%.

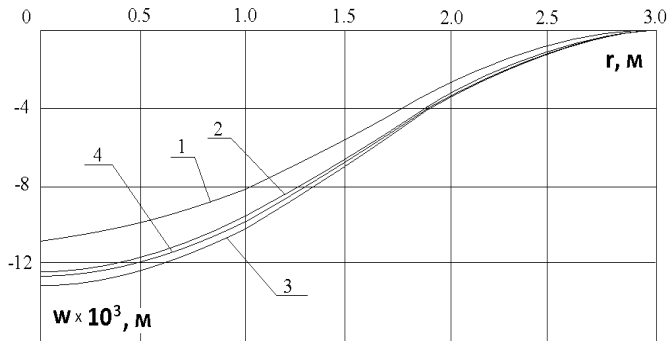


Рис. 2. Використання неузгодженої матриці мас

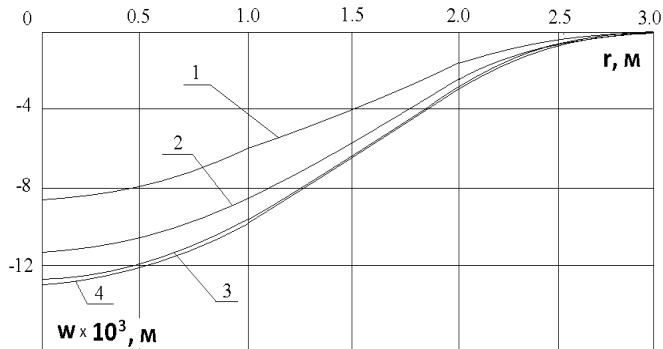


Рис. 3. Використання погодженої матриці мас

Можливість застосування підходу до дослідження сталих коливань призматичних тіл ілюструється на прикладі циліндричного зводу із шарнірним обпиранням по торцях (рис. 4). Звід навантажений зосередженою силою, що змінюється за законом $P = P_0 \sin pt$, прикладеної в центрі прольоту. Амплітуда сили $P_0 = 1$ Н, частота коливань $p = 2 \text{ с}^{-1}$. Довжина зводу $L = 54.4$ м, товщина $h = 0.2$ м, радіус серединної поверхні $R = 14.4$ м. Характеристики матеріалу зводу: $E = 5.6 \cdot 10^3$ МПа, $\rho = 1.6 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 0$.

В результаті досліджень збіжності чисельних рішень встановлено, що для апроксимації об'єкту досить сіткової області 2×17 і утримання 9 членів ряду Фур'є вздовж направляючої.

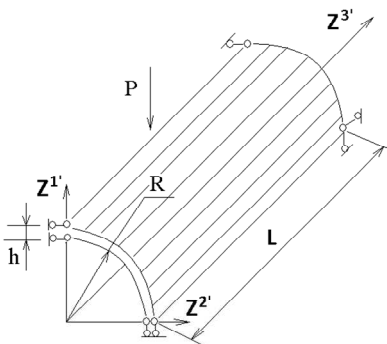


Рис. 4. Модель зводу

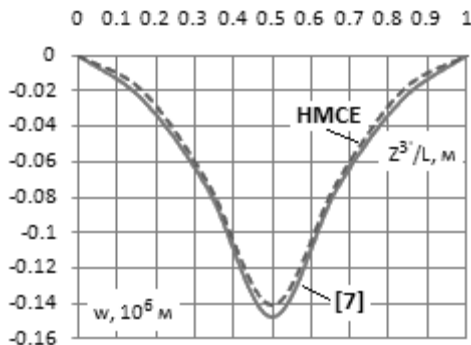


Рис. 5. Вертикальний прогин зводу

Така апроксимація забезпечує добре узгодження чисельного рішення з аналітичним [7] – похибка визначення максимальних значень амплітуди коливань складає 1-3% (рис. 5).

2. Аналіз стаціонарних коливань резервуару для прийому і зберігання пальмового стеарину під дією вітрового навантаження

Об'єктом дослідження є резервуар, що знаходиться під дією статичних і періодичних за часом силових зовнішніх навантажень. Резервуар призначено для зберігання пальмового стеарину.

Будівельні металоконструкції резервуару запроектовані в традиційній формі вертикального циліндру, що складається з днища, стінки і кришки. Стінка резервуару виготовляється у вигляді полотнища довжиною 28.3 м та висотою 17.88 м з 12 рядів листів по висоті, внутрішній діаметр - 9.0 м. Товщина листа – 10 мм. Стінка на рівні днища кріпиться до фундаменту за допомогою 12 фундаментних болтів марки М30. Кришка резервуару збірна конічна, складається з 12 щитів, має ухил 1:8. Всі заводські з'єднання зварні, монтажні – на болтах і зварні. Днище резервуару виготовляється у вигляді полотнища, має ухил 1:33, товщина 10 мм. По висоті резервуару розташовані 2 проміжних кільця жорсткості з інтервалом 5960 мм з L№75x6 С245. Відстань від днища резервуару до нижнього та від кришки до верхнього кільця жорсткості – 5760 мм та 6160 мм відповідно.

До статичних навантажень, що розглядаються, відносяться: вага термоізоляції 36 кгс/м², власна вага конструкції (розраховується виходячи із щільності матеріалу резервуару – 7800 кг/м³), вага продукту, що зберігається (розраховується виходячи із щільності матеріалу продукту – 920 кг/м³), вага обладнання 200 кгс/м², корисне навантаження і

надлишковий тиск 100 кгс/м^2 . Снігове навантаження 100 кгс/м^2 на площадках покриттів враховується з коефіцієнтом надійності рівним 1.4.

Вітрове навантаження визначається як сума середньої та пульсаційної складових:

$$q(z, t) = q_n^c(z) + q^t(z, t). \quad (1)$$

Нормативне значення середньої складової вітрового навантаження $q_n^c(z)$ на висоті z над поверхнею землі визначається за формулою:

$$q_n^c(z) = q_0 k c, \quad (2)$$

де q_0 - нормативне значення вітрового тиску; k – коефіцієнт, що враховує зміну вітрового тиску по висоті; c – аеродинамічний коефіцієнт.

Розрахунки проводились для для вітрового району III та типу місцевості С (міські райони).

Пульсаційна складова навантаження обчислюється за формулою:

$$q^t(z, t) = 2 \frac{v(z, t)}{v_n(z)} q_n^c(z), \quad (3)$$

де $v(z, t)$ - пульсаційна складова швидкості вітру на рівні z ; $v_n(z)$ - нормативна швидкість вітру на стандартній висоті анемометра (10 м).

При розрахунках висотних споруд, чутливих до динамічного впливу вітру, необхідно знати розподіл енергії турбулентного потоку по частотам. Цей розподіл називають енергетичним спектром (спектральною щільністю) пульсації компонент швидкості вітру, один з яких: емпіричний спектр Давенпорта $S(n)$ отриманий на основі аналізу спектрів повздовжньої пульсації швидкості при сильних вітрах. На практиці використовують його нормоване значення по відношенню до середнього квадрату пульсації швидкості (табл. 1):

$$S_n(n) = u^2 / \left[3n(1 + u^2)^{\frac{4}{3}} \right], \quad u = nL/v_n, \quad (4)$$

$L = 1200 \text{ м}$ – масштаб довжини.

При цьому, швидкість пульсації, що відповідає заданій частоті визначається виразом:

$$v_k(z) = \sqrt{S(n_k) \Delta n_k}. \quad (5)$$

Виходячи із $S_n(n) = \frac{S(n)}{6r_0 v_n^2(z)}$ та використавши коефіцієнт лобового опору підстилаючої поверхні $r_0 = 0.04$, що відповідає міській місцевості, отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{6r_0}} \frac{v_k(z)}{v_n(z)} = \sqrt{S_n(n)\Delta n} \quad (6)$$

оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{6r_0}} \approx 2, \text{ маємо } 2 \frac{v_k(z)}{v_n(z)} = \sqrt{S_n(n)\Delta n}. \quad (7)$$

Таблиця 1

Нормовані значення енергетично спектру Давенпорта

$T, \text{ c}$	$n, \text{ Гц}$	$\omega, \text{ рад/сек}$	$S_n(n)$
4347.826087	0.00023	0.001445	0.417311179
2173.913043	0.00046	0.00289	0.834141926
869.5652174	0.00115	0.007226	2.076981036
434.7826087	0.0023	0.014451	4.09509904
217.3913043	0.0046	0.028903	7.747200632
86.95652174	0.0115	0.072257	13.85037473
43.47826087	0.023	0.144513	12.70643235
21.73913043	0.046	0.289027	6.530971643
8.695652174	0.115	0.722566	1.692691328
4.347826087	0.23	1.445133	0.547922827
2.173913043	0.46	2.890265	0.17378234
0.869565217	1.15	7.225663	0.037810803
0.434782609	2.3	14.45133	0.011912965
0.217391304	4.6	28.90265	0.003752609
0.086956522	11.5	72.25663	0.000814908

Виходячи із отриманих значень вводимо тимчасову функцію $f(t)$ коефіцієнтів пульсації:

$$f(t) = 2 \frac{v(z, t)}{v_n(z)} = \sum_k 2 \frac{v_k}{v_n} \sin \omega_k t. \quad (8)$$

Тоді формула для обчислення значень вітрового навантаження приймає вигляд:

$$q(z, t) = [1 + f_p(t)] q_n^c(z). \quad (9)$$

На першому етапі отримано розв'язок статичної задачі відносно ряду стаціонарних навантажень (включаючи постійну складову вітрового навантаження). Епюри максимальних кільцевих та повздовжніх напруг вздовж поперечного перерізу конструкції представлені на рис. 7. Як видно, найбільш проблемними є області з'єднань циліндричної частини з кришкою та днищем. При цьому значення напружень не перевищують 150 МПа.

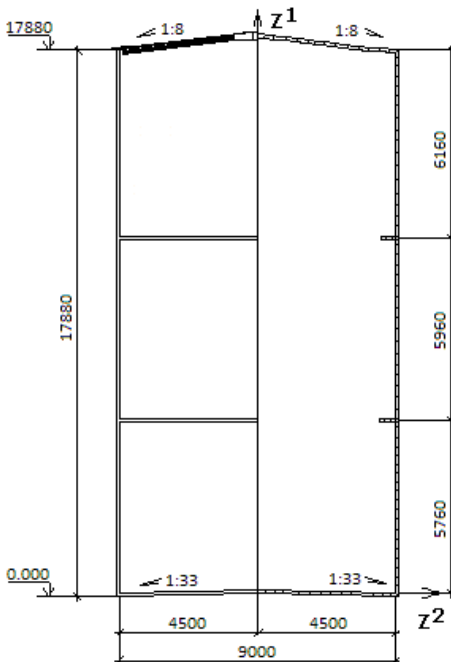


Рис. 6. Модель резервуару

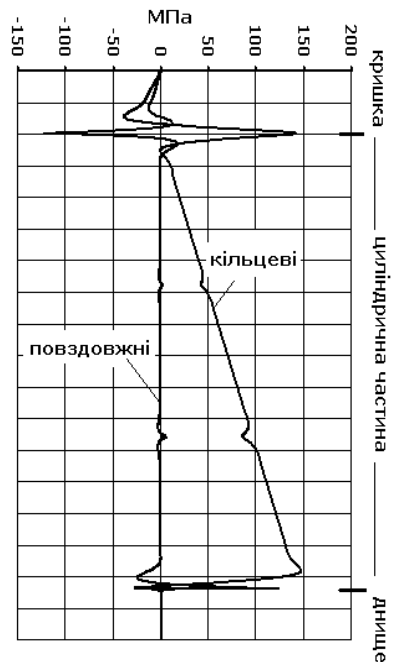


Рис. 7. Результати задачі статики

На другому етапі проводився розрахунок динамічної задачі. Для подання пульсаційної частини вітрового навантаження використовувався ряд Фур'є. На рис. 8, 9 показано еволюцію максимальних повздовжніх та кільцевих напружень у часі, які реалізуються в зоні з'єднання циліндру і кришки. Результати показують, що динамічна частина вітрового навантаження привносить до загального напружено-деформованого стану напруження приблизно рівні 18 МПа, що складає 12% від результатів статичного розв'язку.

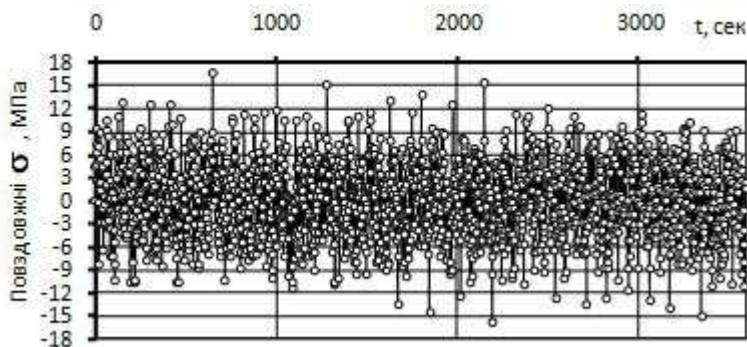


Рис. 8. Повздовжні напруження

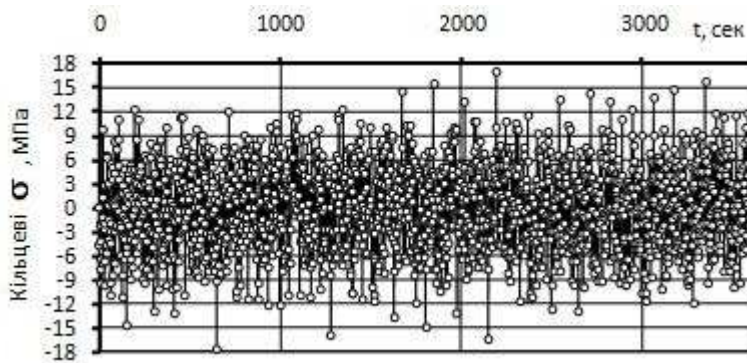


Рис. 9. Кільцеві напруження

Висновки

На основі напіваналітичного методу скінченних елементів розроблено ефективний підхід до дослідження стаціонарних періодичних коливань неоднорідних тіл із складною формою та структурою поперечного

перерізу. Вірогідність отриманих результатів і ефективність підходу підтверджені розв'язанням контрольних прикладів, що охоплюють тіла довільної мірності при різноманітних граничних умовах. В процесі виконання роботи проведено аналіз особливостей реальних процесів динамічного деформування, що протікають у складних конструкціях. На основі напіваналітичного методу скінченних елементів проведено дослідження нестационарного процесу деформування резервуару, який призначений для зберігання пальмового стеарину і являє собою просторове тіло обертання зі складною формою поперечного перерізу, під дією ряду статичних та змінного у часі вітрового динамічного навантаження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування простових тіл // КНУБА, 2005, 298с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.И., Солодей І.І.* Особливості реалізації НМСЕ в задачах динамічної взаємодії неоднорідних пружнопластичних тіл // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.69, 2001. – с.134-146
4. *Баженов В.А., Солодей І.І., Приходько А.Ю.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах лінійних стаціонарних коливань просторових тіл // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.81, 2007.-с.142-158.
5. *Баженов В.А., Солодей І.І., Приходько А.Ю.* Дослідження ефективності динамічного розрахунку будівельних конструкцій, що знаходяться під дією рухомих навантажень // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. – К.:КНУБА, Вип.84, 2009.-с.32-41.
6. *Бате К., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982. - 447 с.
7. *Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов О.В.* Устойчивость и динамика в примерах и задачах. – М.: Высш.шк. – 1987. – 264с.
8. *Солодей І.І.* Ефективність скінченноелементної бази напіваналітичного методу скінченних елементів для апроксимації тіл обертання та призматичних тіл в задачах динаміки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.82, 2008.-с.154-163.
9. *Солодей І.І., Вабіщевич М.О., Гуляр О.І.* Використання спеціальних скінченних елементів з тріщиною в задачах механіки руйнування при нестационарних динамічних навантаженнях // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. Збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.84, 2009. –с.49-64
10. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике.- М.: Мир, 1975.- 539 с.
11. *Коренев В.Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Физматлит, 1960. – 458с.

Отримано 17.09.10

Баженов В.А., Солодей И.И., Прыходько А.Ю.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

На основе полуаналитического метода конечных элементов разработан эффективный подход к исследованию стационарных периодических колебаний неоднородных тел со сложной формой и структурой поперечного сечения. Достоверность получаемых результатов и эффективность подхода подтверждены решением контрольных примеров, которые охватывают тела различной мерности при различных граничных условиях. Проведено анализ особенностей процессов динамического деформирования, которые протекают в реальных конструкциях.

Bazhenov V.A., Solodei I.I., Pryhodko A.Y.

SEMI-ANALYTICAL FINITE ELEMENT METHOD USES IN PERIODICAL 3D ANALYSIS

The advanced variant of Semi-analytical Finite Element Method (SFEM) is developed to simulate three-dimensional periodical oscillations of arbitrary loaded heterogeneous along all co-ordinates solids of revolution and hinged prismatic solids. Reliability of computational intelligence and efficiency of mentioned approach are corroborated with the help of test solutions. A stress analysis of important construction under static and dynamic periodical loading is considered to demonstrate method to solving 3D problems.