УДК 539.3:538.6:534.1

**Шульга М.О.,** д-р фіз.-мат. наук

# ДО ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ТЕОРІЇ МАГНІТОСТРИКЦІЇ ФЕРИТІВ З ДИСИПАТИВНИМ ФЕРОМАГНІТНИМ РЕЗОНАНСОМ

Одними із актуальних задач електромагнітомеханіки, що мають важливе фундаментальне і прикладне значення, є дослідження магнітопружного деформування тіл із феримагнітних магнітострикційних матеріалів з врахуванням феромагнітного резонансу. Цьому питанню присвячені роботи [4-7, 9-16]. В даній статті пропонується перетворення системи тривимірних диференціальних рівнянь лінеаризованої магнітострикції феритів кубічної системи, в якій враховується феромагнітний резонанс і дисипативні властивості фізико-механічних властивостей, до системи гамільтонового типу.

Тривимірна зв'язана задача електромагнітомеханіки для матеріалів з магнітострикцією вимагає спільного розв'язання механічних рівнянь коливань

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{i1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial x_3} \tag{1}$$

відносно механічних переміщень $u_i$ і напружень $\sigma_{ik}\left(i,k=1,2,3\right)$ та квазістатичного наближення

$$div\,\mathbf{B}=0\,,\quad rot\,\mathbf{H}=0 \tag{2}$$

рівнянь Максвелла відносно напруженості $\mathbf{H}$ і індукції $\mathbf{B}$ магнітного поля.

Системи (1) і (2) замикаються квадратичними по намагніченості $\mathbf{M}=\left(\mathbf{B}-\mathbf{H}\right)/4\pi$ визначальними співвідношеннями магнітострикції [2, 9] феритів кубічної системи з феромагнітним резонансом, лінеаризованими в сколі статичного поля підмагнічування $\mathbf{H}=\mathbf{H}_0 e_3$, $\mathbf{M}=\mathbf{M}_0 e_3$

$$\sigma_{11}=c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+c_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{22}=c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+c_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{33}=c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{32}=c_{55}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)+\frac{\beta_2}{M_0}m_2,$$

$$\sigma_{31}=c_{55}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)+\frac{\beta_2}{M_0}m_1,$$

$$\sigma_{12}=c_{55}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),\qquad b_3=\mu_{33}h_3,$$

$$b_2=h_2+4\pi m_2,\qquad \frac{\partial m_2}{\partial t}+\frac{m_2}{\tau_r}=-\gamma\left(-H_0m_1+M_0h_1-\beta_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\right),$$

$$b_1=h_1+4\pi m_1,\qquad \frac{\partial m_1}{\partial t}+\frac{m_1}{\tau_r}=-\gamma\left(H_0m_2-M_0h_2+\beta_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\right). \qquad (3)$$

Малі збурення $\mathbf{h}$, $\mathbf{b}$ магнітного поля задовольняють рівняння (2), які запишемо у вигляді

$$\frac{\partial b_1}{\partial x_1}+\frac{\partial b_2}{\partial x_2}+\frac{\partial b_3}{\partial x_3}=0,\qquad h_k=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k},\qquad k=1,2,3, \qquad (4)$$

де $\varphi$ – магнітний потенціал.

У виразах (1)-(3) прийняті загальновживані позначення [1, 2, 3, 8, 9]: $c_{ik}$ – модулі пружності, $\rho$ – густина, $\beta_2$ – магнітопружна стала, $\mu_{33}$ – магнітна проникність, $\gamma$ – гіромагнітне відношення.

В рівняннях прецесії намагніченості додані дисипативні складові з часом релаксації $\tau_r$ [1, 6, 7]. Експериментальні дані і їх теоретичні інтерпретації показують достатність використання одного параметру для опису втрат в феритах [1].

Лінеаризовані диференціальні рівняння прецесії компонент $m_1$, $m_2$ вектора намагніченості, які входять в систему (3), в загальному випадку можна подати [7] в інтегральній формі. При усталених гармонічних коливаннях з круговою частотою $\omega$, коли $a(x_1,x_2,x_3,t)=\mathrm{Re}\,a(x_1,x_2,x_3)\exp(-i\omega t)$ і для амплітудних множників $a(x_1,x_2,x_3)$ залишаємо такі ж позначення, що і для $a(x_1,x_2,x_3,t)$), для амплітудних величин $m_1(x_1,x_2,x_3)$ та $m_2(x_1,x_2,x_3)$ знаходимо

$$m_1 = \frac{\gamma}{\omega_H^2 - \omega_c^2}\left( i\beta_2\omega_c\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) - \beta_2\omega_H\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \right.$$

$$\left. + M_0\omega_H h_1 - iM_0\omega_c h_2 \right),$$

$$m_2 = -\frac{\gamma}{\omega_H^2 - \omega_c^2}\left( \beta_2\omega_H\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + i\beta_2\omega_c\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - \right.$$

$$\left. - iM_0\omega_c h_1 - M_0\omega_H h_2 \right), \qquad (5)$$

де $\omega_H = \gamma H_0$ – частота феромагнітного резонансу, $\omega_c = \omega + i\omega_r$, $\frac{1}{\tau_r} = \omega_r$ – частота релаксації.

Після підстановки (5) в (3) для амплітудних величин $\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3)$ і т.д. ( $\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathrm{Re}\,\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3)\exp(-i\omega t)$ і т.д.) одержимо вирази

$$\sigma_{11} = c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{22} = c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{33} = c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{32} = c_{55*}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + ic_{54*}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + i\beta_{52}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \beta_{51}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{31} = -ic_{54*}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + ic_{55*}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \beta_{51}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i\beta_{52}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2},$$

$$\sigma_{12} = c_{55}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \qquad b_3 = -\mu_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3},$$

$$b_2 = 4\pi\beta_{51}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + 4\pi i\beta_{52}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + i\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \mu\frac{\partial \varphi}{\partial x_2},$$

$$b_1 = -4\pi i\beta_{52}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + 4\pi\beta_{51}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - \mu\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}. \qquad (6)$$

В формулах (6) використані позначення

$$c_{55*} = c_{55} + \frac{4\pi\omega_H \gamma^2 \beta_2^2}{(\omega_c^2 - \omega_H^2)\,\omega_M},$$

$$c_{54*} = \frac{4\pi\omega_c \gamma^2 \beta_2^2}{(\omega_c^2 - \omega_H^2)\,\omega_M},$$

$$\beta_{51} = \frac{\omega_H \gamma \beta_2}{\omega_c^2 - \omega_H^2}, \qquad \beta_{52} = \frac{\omega_c \gamma \beta_2}{\omega_c^2 - \omega_H^2},$$

$$\mu = 1 - \frac{\omega_H \omega_M}{\omega_c^2 - \omega_H^2}, \quad \alpha = \frac{\omega_c \omega_M}{\omega_c^2 - \omega_H^2}, \tag{7}$$

причому $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$.

В дев’ять визначальних рівнянь (6), три рівняння механічних коливань (1) і одне рівняння

$$\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3} = 0 \tag{8}$$

входять амплітудні множники трьох механічних переміщень $u_i(x_1, x_2, x_3)$, шести механічних напружень $\sigma_{ik}(x_1, x_2, x_3)$, трьох компонент магнітної індукції $b_i(x_1, x_2, x_3)$ і магнітного потенціалу $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. Таким чином сукупність тринадцяти рівнянь (1), (6), (8) має тринадцять невідомих функцій.

Один шлях спрощення системи рівнянь (1), (6), (8) аналогічний виводу рівнянь Ламе-Нав’є теорії пружності в переміщеннях. Але тепер за незалежні невідомі треба взяти три амплітуди механічних переміщень $u_i(x_1, x_2, x_3)$ та магнітного потенціалу $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. В результаті одержимо систему чотирьох диференціальних рівнянь в частинних похідних. Ця система досить громіздка і її явного вигляду виписувати не будемо.

Інший шлях спрощення системи тринадцяти рівнянь (1), (6), (8) полягає у спеціальному виборі восьми розв’язувальних функцій і аналогічний перетворенню системи дев’яти рівнянь пружності до шести рівнянь, які формально можна представити у вигляді операторної гамільтонової системи. Таке представлення вперше було запропоновано і виконано в монографії [3] і розвинуто в подальших роботах [8, 9 та ін.].

Виберемо за розв’язуючі функції певним чином підібраного наступного вектор-стовпчика невідомих

$$\left[\sigma_{11},\ 4\pi u_2,\ 4\pi u_3,\ \varphi, 4\pi u_1,\ \sigma_{12},\ \sigma_{13},\ b_1\right]^{TP}, \tag{9}$$

які входять в сукупність рівнянь (1), (6), (8). Після досить громіздких цілеспрямованих перетворень рівнянь (1), (6), (8) одержимо наступну систему восьми рівнянь

$$\frac{d}{dx_1}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{R}_{32} & \hat{R}_{33} & \hat{R}_{34} & \hat{Q}_{31} & 0 & \hat{Q}_{33} & \hat{Q}_{34} \\ 0 & \hat{R}_{42} & \hat{R}_{43} & \hat{R}_{44} & 0 & 0 & \hat{Q}_{43} & \hat{Q}_{44} \\ -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & -\hat{P}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{P}_{21} & -\hat{P}_{22} & -\hat{P}_{23} & -\hat{P}_{24} & 0 & 0 & -\hat{R}_{32} & -\hat{R}_{42} \\ -\hat{P}_{31} & -\hat{P}_{32} & -\hat{P}_{33} & -\hat{P}_{34} & 0 & 0 & -\hat{R}_{33} & -\hat{R}_{43} \\ 0 & -\hat{P}_{42} & -\hat{P}_{43} & -\hat{P}_{44} & 0 & 0 & -\hat{R}_{34} & -\hat{R}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Ненульові операторні елементи симетричних операторних матриць $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ та операторної матриці $\mathbf{R}$ мають наступні значення

$$\hat{Q}_{11} = -\frac{\rho\omega^2}{4\pi}, \quad \hat{Q}_{12} = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \hat{Q}_{13} = -\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\hat{Q}_{22} = \frac{1}{4\pi c_{55}}, \quad \hat{Q}_{33} = \frac{4\pi\mu}{\Delta_1}, \quad \hat{Q}_{34} = \frac{4\pi\beta_{51}}{\Delta_1}, \quad \hat{Q}_{44} = -\frac{c_{55*}}{\Delta_1},$$

$$-\hat{P}_{11} = \frac{4\pi}{c_{11}}, \quad -\hat{P}_{12} = -\frac{c_{12}}{c_{11}}\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad -\hat{P}_{13} = -\frac{c_{12}}{c_{11}}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$-\hat{P}_{22} = -\frac{1}{4\pi}\left[\rho\omega^2 + \left(c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right],$$

$$-\hat{P}_{23} = -\frac{1}{4\pi}\left[\alpha_{11} - \left(c_{12} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}}\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad -\hat{P}_{24} = \alpha_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$-\hat{P}_{33} = \frac{1}{4\pi}\left[\rho\omega^2 - \alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \left(c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right], \quad -\hat{P}_{34} = \alpha_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$\hat{R}_{33} = -ir_{11}\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \hat{R}_{34} = -ir_{21}\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \hat{R}_{42} = -ir_{12}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$\hat{R}_{43} = -ir_{12}\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \hat{R}_{44} = -ir_{22}\frac{\partial}{\partial x_2}. \qquad (11)$$

Тут використані позначення

$$r_{11}r_{00} = -\mu c_{54*} - 4\pi\beta_{51}\beta_{52},$$

$$r_{21}r_{00} = -4\pi\alpha\beta_{51} - 4\pi\mu\beta_{52},$$

$$r_{12}r_{00} = \beta_{52}c_{55*} - \beta_{51}c_{54*},$$

$$r_{22}r_{00} = \alpha c_{55*} - 4\pi\beta_{51}\beta_{52},$$

$$r_{00} = \mu c_{55*} + 4\pi\beta_{51}^2,$$

$$-\alpha_{11} = c_{55*} + c_{54*}r_{11} + 4\pi\beta_{52}r_{12},$$

$$-\alpha_{12} = \beta_{51} + \beta_{52}r_{11} + \alpha r_{12},$$

$$-\alpha_{22} = -\mu + \beta_{52}r_{21} + \alpha r_{22}. \qquad (12)$$

Систему (10) можна записати у вигляді операторної гамільтонової системи

$$\frac{dq_i}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (13)$$

при наступному значенні операторної функції Гамільтона

$$H = \frac{1}{2}\hat{P}_{ik}q_i q_k + \hat{R}_{ik}p_i q_k + \frac{1}{2}\hat{Q}_{ik}p_i p_k. \qquad (14)$$

Елементи операторних матриць $\hat{\mathbf{P}}$, $\hat{\mathbf{Q}}$, $\hat{\mathbf{R}}$ в (14) і (13) розглядаються як сталі величини і тільки після обчислення частинних похідних в (13) їх треба розглядати як диференціальні оператори, що діють на канонічні змінні $q_i$, $p_i$.

Таким чином в результаті описаних перетворень система тринадцяти рівнянь (1), (6), (8) звелась до восьми рівнянь (10) або (13), відносно функцій (9). Таке представлення особливо буде доцільним при розв’язанні крайових задач з межами $x_1 = const$, тому що функції (9) при досконалому механічному і електромагнітному контактах при $x_1 = const$ будуть неперервними функціями на цих межах.

У випадку антиплоскої задачі для хвиль зсуву рівняння лінеаризованої магнітострикції феритів з дисипативним феромагнітним резонансом розглядалися в роботах [6, 7] і були перетворені [7] до операторної гамільтонової системи.

Робота виконана при частковій фінансовій підтримці в рамках "Комплексного інтеграційного проекту СВ РАН та НАН України".

1. *Гуревич А.Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 407 с.
2. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела. – Москва: Мир, 1975. – 453 с.
3. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наукова думка, 1981. – 200 с.
4. *Шульга М.О.* Про поширення поперечних хвиль в магнітопружних періодичних середовищах // Доп. НАН України. – 2002. – № 7. – С. 60 – 63.
5. *Шульга М.О.* До теорії магнітопружних хвиль в періодичних середовищах // Доп. НАН України. – 2002. – № 8. – С. 55 – 59.
6. *Шульга Микола.* Застосування гамільтонового формалізму в теорії поширення магнітов'язкопружних хвиль зсуву в неоднорідно-періодичних середовищах // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – Вип. 3. – 217-224.
7. *Шульга М.О.* Про визначальні співвідношення лінеаризованої магнітострикції феритів // Доп. НАН України. – 2006. – №8. – С. 67-71.
8. *Shul'ga N.A.* Propagation of elastic waves in periodic-nonhomogeneous space // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 7. – P. 763-796.
9. *Shul'ga N.A.* Propagation of coupled waves in layered-periodic continua for interaction an electromagnetic field // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 10. – P. 1146-1172.
10. *Shul'ga N.A., Levchenko V.V., Ratushnyak T.V.* Surface magnetoelastic shear waves in periodic-dielectric regularly stratified structures // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 11. – P. 1305-1309.
11. *Shul'ga N.A., Ratushnyak T.V.* Oscillation modes of magnetoelastic Lave-type waves in periodic-dielectric media // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, № 8. – P. 886-892.
12. *Shul'ga N.A., Ratushnyak T.V.* Spatial shapes of magnetoelastic shear body waves at the transmission edges in a periodically inhomogeneous magnetostrictive medium // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 3. – P. 300-307.
13. *Shul'ga N.A., Levchenko V.V., Ratushnyak T.V.* Propagation of magnetoelastic shear waves across layers in a periodically layered medium // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 6. – P. 655-660.
14. *Shul'ga N.A., Ratushnyak T.V.* On shapes of body waves in periodically inhomogeneous, magnetostrictive, dielectric materials // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 7. – P. 775-781.
15. *Shul'ga N.A.* Effective magnetoelastic properties of laminated composites // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 8. – P. 879-885.
16. *Shul'ga N.A., Ratushnyak T.V.* Volume magnetoelastic shear waves in periodically inhomogeneous media // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 10. – P. 1090-1101.

*Надійшло до редакції 13.10.2006 р.*