МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт
для підготовки здобувачів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки» та
126 «Інформаційні системи і технології»

Київ 2024

УДК 519.81(075.8)

Т

Укладачі: О.В. Горда, канд. техн. наук, доцент;

Ю.Ю. Нечипорук, асистент

Рецензент О.А. Поплавський, канд. техн. наук, доцент

Відповідальна за випуск Т.А. Гончаренко, канд. техн. наук, доцент

Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій, протокол № 7 від 09 лютого 2024 року.

В авторській редакції.

Теорія прийняття рішень: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт / уклад.: Горда О.В., Нечипорук Ю.Ю. – Київ: КНУБА, 2024. – 75с.

Містять зміст, порядок оформлення і вказівки до виконання окремих лабораторних робіт.

Призначено для здобувачів спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки» та 126 «Інформаційні системи і технології»

© КНУБА, 2024

ЗМІСТ

Загальні положення

Дисципліна "Теорія прийняття рішень" входить до навчальних планів усіх комп’ютерних, а також ряду природничо-наукових та спрямованих на бізнес спеціальностей широкого профілю. Це викликано вимогами науково-технічного прогресу, в процесі якого людство йде по шляху використання все більш складних технічних та інформаційних засобів, а також використання складних природних об'єктів або систем.

Метою методичних вказівок до виконання лабораторних робіт є формування знань у студентів загальних принципів постановки та розв’язання задач прийняття рішень, а також використання математичних моделей і методів, аналізу, синтезу, й оптимізації, що виникають у процесі прийняття рішень у різноманітних галузях людської діяльності.

Методичні вказівки містять рекомендації для вирішення задач, які безпосередньо, в практичному зрізі відображають якість засвоєння здобувачами вивчення дисципліни, а саме:

- причинно-наслідковий аналіз проблеми;
- оцінка факторів. Узагальнений критерій багатокритеріальної задачі;
- «м’які» методи прийняття рішень;
- побудова Парето оптимальної множини;
- метод Сааті;
- експертні оцінки;
- базові критерії прийняття рішень в умовах ризиків та невизначеності;
- елементи теорії ігор. Матричні ігри;

Для кращого розуміння та полегшення засвоєння матеріалу в методичних вказівках наведені типові приклади вирішення завдань.

Завершивши вивчення дисципліни здобувач повинен вміти здійснювати постановку проблеми; ідентифікувати середовище прийняття рішень; застосовувати методи прийняття рішень в умовах визначеності, невизначеності і ризику; приймати рішення на основі теорії корисності; розробляти та реалізувати моделі прийняття рішень.

Лабораторна робота №1
Причинно-наслідковий аналіз проблеми

Теоретичний матеріал для виконання завдання викладений у лекції 2. Тему для виконання даної лабораторної роботи обираєте самостійно.

Основні завдання теми:

- навчитися проводити первинну оцінку знайденої інформації з погляду її важливості, точності та значущості;
- навчитися виділяти у великому інформаційному масиві ключові моменти та складання конкретного аналітичного документа;
- навчитися систематизувати, структурувати та зіставляти наявну інформацію.

Причинно-наслідкового аналіз метод глибинного аналізу систем, спрямований на встановлення ключових причин того, що сталося. Він застосовується для аналізу комплексних проблем, що залежать від багатьох причин. Результати проведення аналізу можуть представлятись у різних формах: текстовій; табличній; графічній.

Для проведення причинно-наслідкового аналізу пропонуються наступні методи:

– Методика Планкета-Хейла;

– INI-аналіз.

1. Методика Планкета-Хейла.

Л. Планкетт і Г. Хейл пропонують наступну методику причинно-наслідкового аналізу, яка включає такі кроки:

1) формулювання проблеми: виявлення об'єкта, підрозділу чи людини, що створює труднощі, виявлення наслідків, які необхідно усунути;

2) опис проблеми. Цей опис рекомендується робити у вигляді відповіді на запитання: що? (який дефект і якому об'єкті він помічений?), де? (де територіально знаходиться об'єкт із поміченим дефектом?), коли? (у який календарний час і на якому етапі життєвого циклу об'єкта було помічено дефект?), наскільки? (яка частина об'єкта дефектна і яка тенденція?);

3) виявлення відмінностей, що викликають проблему. Необхідно порівняти області, які торкнулися і не порушені змінами;

4) виявлення змін, які відповідають різним станам об'єкта;

5) виявлення можливих причин. Виявлені зміни в об'єкті порівнюються з різними станами об'єкта. Причину проблеми можна виявити, відповівши на запитання «Як ця зміна сама в поєднанні з якоюсь відмінністю могла створити цю проблему?»;

6) перевірка найбільш імовірних причин. Процес перевірки полягає у тому, щоб кожну з можливих причин поєднати з кожною одиницею інформації у визначенні проблеми;

7) підтвердження найбільш вірогідної причини. Це підтвердження полягає в усуненні дії цієї причини та перевірці стану об'єкта.

2. INI-аналіз.

Визначення причин проблеми має особливе значення, так як, воно нерідко веде безпосередньо до її вирішення. Для виявлення причин проблеми часто використовується, так званий, INI-аналіз (ні-так аналіз). Результати аналізу надаються у вигляді таблиці (табл. 1).

Таблиця 1

Таблиця результатів INI-аналізу

Ознака	**Питання**	**Не причина**	**Причина**
Об’єкт	Що?		
Процес	Як?		
Місце	Де?		
Час	Коли?		
Початок	З якого часу?		
Розмір	Скільки?		
Обладнання	Яке?		
Виконавець	Хто?		

Приклад. Обрана для опрацювання актуальна проблема всього всесвіту, а саме проблема інтенсивної вирубки лісів, яка в свою чергу є глобальною проблемою тварин та людства.

Застосування методики Планкета-Хейла.

Представимо результати аналізу у вигляді відповідей на питання.

1) Формулювання проблеми.

Інтенсивна вирубка лісів це одна з найпоширеніших проблем екології. Неконтрольоване знищення лісів призводить до таких негативних наслідків: зникають деякі види флори та фауни, знижується видова різноманітність, в атмосфері починає зростати кількість діоксиду вуглероду (глобальне потепління), інтенсивність призводить до зникнення диких тварин та рідкісних рослин.

2) Опис проблеми.

- Що? Інтенсивна вирубка лісів;
- Де? Глобальна проблема на всій планеті;
- Коли? Щороку знищується велика кількість дерев у різноманітних лісах;
- Наскільки? З кожним роком значення еталонних значень та даних по вирубці лісів зростає.

3) Виявлення відмінностей.

Порівнюючи обидва ліса, (А) в якому щорічно збільшували площі посадок, а також на якому вся території під спеціальною охороною, з особливим режимом лісокористування та (Б) в якому не було абсолютно ніяких дій для вирішення проблеми, можна зробити висновок, що при використанні комплексів додаткових заходів для запобігання проблеми – тенденція зменшується.

4) Виявлення змін.

Лісові території зникають зі швидкістю понад 1,6 мільйонів га. на рік, і ця швидкість стрімко зростає. Якщо втратити ліси, відновити екосистему, якою вона була, буде вже неможливо.

5) Виявлення можливих причин.

З часом в лісах зникають різноманітні тварини та рослини, а також підвищується температура на планеті з причини зростання кількості діоксиду в повітрі. Саме вирубка лісів, з причини недотримання комплексів заходів боротьби, є проблемою.

6) Перевірка та підтвердження найімовірніших причин.

Експерти стверджують, що дерева виконують захисні функції: вони запобігають ерозії та втраті ґрунтів і пом'якшують наслідки зміни клімату. Зникнення лісів продовжується, а отже лісового покриву втратять нові території планети.

Застосування методики INI-аналізу.

Результати аналізу представлено у вигляді таблиці (табл. 2).

Таблиця 2

Таблиця результатів INI-аналізу

Ознака	Питання	Не причина	Причина
Об'єкт	Що?	Території, які не вкриті лісовою рослинністю	Територія лісу
Процес	Як?	Всі процеси, не пов'язані з вирубкою лісу	Процеси інтенсивної вирубка дерев та кущів
Місце	Де?	Інфраструктурні об'єкти, а також житлові будинки	Центральна територія лісу та її околиця
Час	Коли?	Період з 12:00 по 08:00	Період з 08:00 по 12:00
Початок	З якого часу?	Літній сезон, зокрема період з 01.05.23 по 01.10.23	Зимово-весняний період 01.01.23-01.05.23 та Осінньо-зимовий п. 01.10.23-01.01.24
Розмір	Скільки?	Падіння дерев під час шторму та бурі	15 відсотків відсутності дерев та кущів на території лісу

Продовження таблиці 2

Ознака	Питання	Не причина	Причина
Обладнання	Яке?	Всі інші засоби	Сокири, бензопили та колуни, ланцюгові та циркулярні пили, лобзики, ножівки та їх електричні аналоги.
Виконавець	Хто?	Люди та тварини, які не пов'язані зі пошкодженням та рубкою дерев або кущів	Групи робітників, які приїхали виконувати свою роботу, або люди які рублять дерева незаконно

Завдання для аудиторного заняття

Застосування процедури причинно-наслідкового аналізу для вирішення проблем із персоналом.

1. Щоб перевірити постановку проблеми, доцільно поставити такі питання:

- чи вимоги до співробітника (підрозділу) є конкретними та вимірними? (На підставі чого Ви судитимете про їх виконання? Які показники ефективності роботи можна використовувати?)

- чи реалістичні вимоги, що висуваються? (Чи вдавалося комусь їх виконати? Чи має ця людина кваліфікацію та ресурси, необхідні для їх виконання?)

- чи однаково розуміють вимоги всі, кого вони стосуються?

- чи обізнані працівники про фактичний рівень ефективності їхньої праці? Чи знають вони про відхилення?

2. При описі проблеми можна використовувати тільки ті дані про поведінку співробітників, які піддаються реальному спостереженню, так звані факти, що «спостерігаються». Необхідно уникати емоційно забарвлених слів та узагальнень, оскільки вони є лише думками, а не надійними фактами. Описувати поведінку співробітника N необхідно так: «Співробітник N мінімум разів на тиждень спізнюється працювати, а буває зовсім не виходить», то з'являються конкретні формулювання, придатні

для подальшого аналізу. Для опису ефективності роботи необхідно правильно сформулювати питання для отримання фактичних даних.

3. Розбіжності, що спостерігаються, повинні бути описані найбільш повно і ретельно. При описі слід уникати оцінного компонента. Наприклад: "Менеджер X набагато гірше працює з клієнтами, ніж менеджер Y" - неправильний опис. Слід уточнити відмінності: «У менеджера X кількість постійних клієнтів у 1,5 рази менша, ніж у менеджера Y».

4. Аналізом необхідно охоплювати триваліший відрізок часу і особливо уважно перевіряти причини проблем.

5. Звичайна реакція виникнення проблеми — це пошук винного. Тим часом, перш за все, необхідно звертати увагу на зміни довкілля та конкретну поведінку співробітників.

6. Якщо при вирішенні технічних проблем керуючі безпосередньо на практиці перевіряють безліч різних рішень, методів, то вони ризикують часом і грошима. Але якщо вони застосовують такий підхід до людей, то вони ризикують втратити і людей. Аргумент багатьох керуючих: «Ринок праці переповнений, не подобається - нехай іде, знайду ще краще!» - Не витримує критики. Величезна кількість хороших фахівців — ілюзія, а пошук необхідного Вам професіонала та адаптація його в колективі забере чимало часу і призведе до відчутних фінансових втрат. Ось чому так важливо ретельно перевіряти причини та звіряти їх із визначенням проблеми.

7. Перш ніж приступити до встановлення найбільш вірогідної причини, ретельно продумайте: «Кого слід опитати?», «Яку інформацію потрібно зібрати чи перевірити», «Чи потребує додаткових методів збору інформації? Якщо так, то які методи використати? (анкетування, психологічні методики, аналіз документів, статистичний аналіз і т. п.)», «Де слід проводити обговорення?», «Коли найбільш вдалий час для цього?», «Скільки питань поставити?».

Теми, що пропонуються для самостійного виконання.

1. Аналіз набору абітурієнтів на комп'ютерні спеціальності до КНУБА.

2. Аналіз відвідування студентами 4-го курсу комп'ютерних спеціальностей аудиторних занять.

3. Аналіз працевлаштування випускників комп'ютерних спеціальностей за фахом.

4. Аналіз рівня успішності студентів 4-го курсу

5. Аналіз стану технічного забезпечення навчального процесу комп'ютерних спеціальностей КНУБА.

6. Аналіз використання навчально-методичного матеріалу студентами 4-го курсу комп'ютерних спеціальностей КНУБА на сайті org2.knuba.edu.ua.

7. Аналіз ринку комп’ютерної техніки (або будь-якої іншої продукції).

8. Аналіз використання комп’ютерних додатків.

9. Аналіз популярності комп’ютерної гри.

10. Аналіз популярності та попиту на знання мов програмування.

Лабораторна робота №2
Побудова дерева проблем

Теоретичний матеріал для виконання завдання викладений у лекції 2. За результатами аналізу завдання №1 побудувати дерево проблем.

Основні завдання теми:

- навчитися проводити аналіз та структуризацію проблеми;
- представляти результати аналізу проблеми у схематичному вигляді;
- шукати можливі шляхи вирішення проблеми.

"Дерево проблем" – це структурована, побудована за ієрархічним принципом сукупність проблем (розподілена за рівнями, ранжированих), на вирішення яких може бути спрямована діяльність ОПР. Візуалізація дерева проблем виглядає наступним чином (рис. 1):

1. Коріння дерева – відображають першопричини.
2. Стовбур – основна проблема. Проблема, яка потребує вирішення.
3. Гілки – проблеми-наслідки.

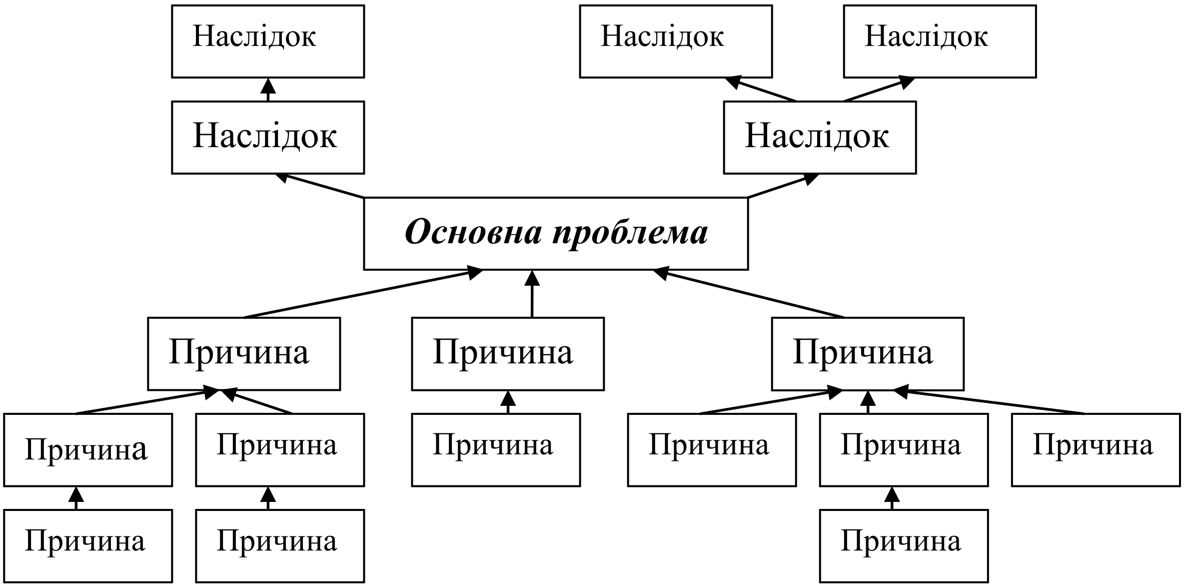

Рис.1. «Дерево проблем»

Приклад. Дерево проблем до проблеми вирубки лісів (рис. 2).

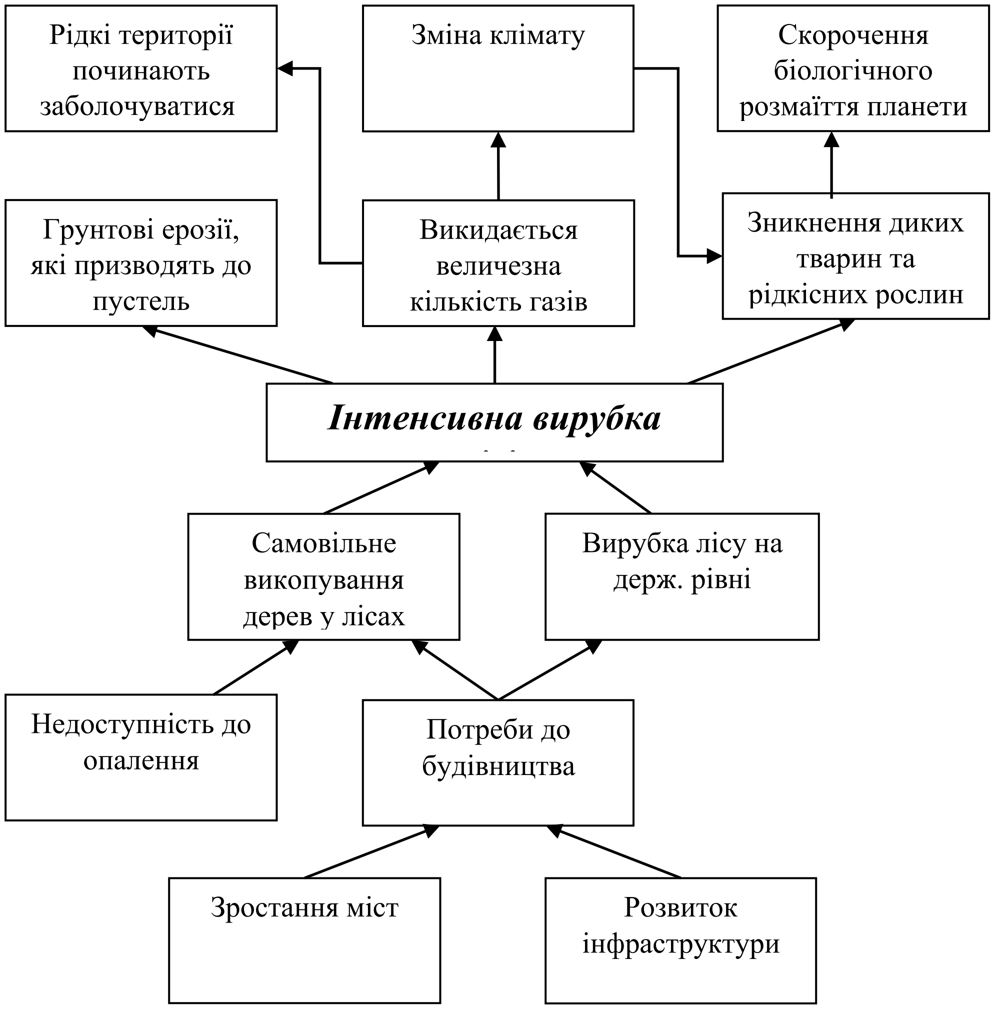

Рис. 2. «Дерево проблем» інтенсивна вирубка лісів

Завдання для аудиторного заняття

Побудова дерева проблем застосування дистанційного навчання.

Для вирішення проблеми необхідно виділити основні класи причин та наслідків. Провести їх декомпозицію. На основі проведеного аналізу побудувати дерево проблем.

Лабораторна робота №3

Оцінка факторів. Узагальнений критерій багатокритеріальної задачі

Теоретичний матеріал для виконання завдання викладений у лекціях 4 та 5. Лабораторна робота виконується за результатами завдання №1 та завдання №2.

Основні завдання теми:

- навчитися приводити дані до однієї шкали вимірювання та одного масштабу без спотворень їх діапазону;
- підготувати дані для проведення їх аналізу;
- формулювати критерії для задач прийняття рішень;
- згідно до характеру та особливостей задачі прийняття рішень правильно обирати необхідний тип критерію.

1. За результатами аналізу завдання 1 та завдання 2 дати оцінку кожному фактору та виконати їх нормування. Результати представити у вигляді таблиці (табл. 1).

Таблиця 1

(Назва проблеми)

Назва критерію	Тип (якісній, кількісний)	Шкала вим.	Діапазон	Знач.	Од. вим.	Норм. знач.	Вага
Кр1							
Кр2							
Кр3							
…..							

2. Побудувати узагальнений критерій:

а) методом адитивної згортки;

б) методом «витрати / ефект»;

в) методом цільового програмування;

г) методом лексикографічного ранжування.

Метод адитивної згортки

Цільову функцію будують шляхом додавання нормованих значень власних критеріїв. В загальному випадку узагальнена цільова функція має наступний вид:

$$F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{f_i(\bar{x})}{f^o i(\bar{x})} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{H,i}(\bar{x}) \rightarrow \max(\min)$$

де *n* – кількість об’єднаних часткових критеріїв; C_i – ваговий коефіцієнт і – го часткового критерію; $f_i(x)$ – числове значення *і* – го часткового критерію; $f^o i(x)$ – *і* – й нормований дільник; $f_{H,i}(x)$ – нормоване значення *і* – го часткового критерію.

Метод «витрати / ефект»

Цільова функція з використанням мультиплікативного критерію записується наступним чином:

$$P = \prod_{i=1}^{m} p_i \Bigg/ \prod_{j=m+1}^{n} p_j \rightarrow \max,$$

де *П* – знак добутку; α_i – ваговий коефіцієнт і –го часткового критерію; $f_i(x)$ – числове значення *і* – го часткового критерію.

Метод цільового програмування

Основна ідея методів цієї групи полягає в припущенні, що існує певна точка, де значення усіх критеріїв $f_i(x)$, $i = 1,n$ досягають найоптимальнішого (цільового, найбільшого $f_i\ max\ (x)$) значення (тобто досягається певна ціль).

В самому загальному випадку задача цільового програмування (ЦП) може бути сформульована як мінімум сум відхилень цільових функцій (критеріїв) від цільових значень (оптимальних) з нормованими коефіцієнтами

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$$\Delta\left(F(\bar{x}), F^{\max}\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left| f_i(\bar{x}) - f_i^{\max} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \to \min$$

де $F^{max}=(f_1^{max}, f_2^{max}, \ldots, f_n^{max})$ – вектор цільових значень КО;
$\Delta(F(x), F^{max})$ – відхилення між $f(x)$ та f^{max}, $1 \le p < \infty$.

Метод лексикографічного ранжування

Лексикографічне упорядкування часто використовується для встановлення правил старшинства, пріоритету і т.д., завдяки МЛР зручно визначати переможців у спортивних змаганнях.

Приклад. До проблеми вирубки лісів складемо таблицю порівнянь основних факторів та виконаємо їх нормалізацію (табл. 2).

Таблиця 2

Інтенсивна вирубка лісів

Назва критерію	**Тип (якісний, кількісний)**	**Шкала вим.**	**Діапазон**	**Знач.**	**Од. вим.**	**Норм. знач.**	**Вага**
Кількість незаконно вирубаного лісу	Кількісний	Площа	Від 0 до 10000	1000	$км^2$	0	0,021
Кількість вирубки лісу на державному рівні	Кількісний	Площа	Від 0 до 10000	5000	$км^2$	0,20	0,105
Скорочення лісових площ для побудови інфраструктури	Кількісний	Площа	Від 0 до 10000	4000	$км^2$	0,25	0,316
Видобуток деревини	Кількісний	Об`єм	Від 0 до 100000	70000	$км^3$	1	0,543

Для проблеми «Інтенсивного знелісся» можна визначити критерій з найбільшим впливом на проблему.

Кількість незаконно вирубаного лісу (1) – 1;

Кількість вирубки лісу на державному рівні (2) – 2;

Видобуток деревини (4) – 4;

Скорочення лісових площ для побудови інфраструктури (3) – 3.

Завдання для аудиторного заняття

Задана таблиця виведення оцінки науково-методичної роботи викладачів. Виконати нормування даних та сформувати критерії оцінки.

В таблиці використані наступні позначення стовпчиків: 1 – к-ть монографій (др.арк.); 2 – к-ть підручників (др.арк.); 3 – к-ть посібників (др.арк.); 4 – к-ть конспектів лекцій (др.арк.); 5 – к-ть методичних вказівок до практичних, лаборат орних занять та курсових робіт (др.арк.); 6 – кількість статей у наукометричних базах Scopus та Web of sscience (с.); 7 – к-ть статей у фахових виданнях та тих, що входять до міжнародних науковометричних баз (с.); 8 – кількість опублікованих тез доповідей на міжнародних конференціях (с.); 9 – кількість участей у міжнародних та фахових наукових конференціях (к-ть); 10 – к-ть підготовлених наукових студентських робіт (к-ть); 11 – робота з гуртками (к-ть студентів) (табл. 3).

Таблиця 3

Науково методична робота викладачів

Прізвище	1	19	18	4	5	6	7	8	9	10	11
Гончар	9,5	-	15,2	11,2	35,3	12	9	8	3	-	
Науменко	-	17,6	13,4	13,1	21,4	21	23	12	4	2	25
Петров	24,2		4,5	7,8	22,5	-	7	8	1	-	-
Сидорчук	7,4	-	1,6	13,1	26,1	7	9	9	2	1	12
Степанов	16,2	-	-	3,7	36,6	-	5	5	2	1	-

Виконати наступні дії:

- вибрати спосіб нормування та привести дані до єдиного масштабу;
- для кожного показника визначити ваговий коефіцієнт;
- сформувати критерії для складання рейтингу кожного викладача та визначити кращого за кожним критерієм.

Лабораторна робота №4
«М’які» методи прийняття рішень

Теоретичний матеріал для виконання завдання викладений у лекції 6. Лабораторна робота виконується за результатами завдання №1 та завдання №3.

Основні завдання теми:

- навчитися визначати основні фактори, що визначають проблему;
- навчитись визначати взаємний зв'язок та вплив факторів;
- виконувати їх оцінку;
- застосовувати метод когнітивних карт для оцінки можливих шляхів вирішення проблеми та знаходження кращого рішення.

1. За результатами аналізу завдання 1 та завдання 3 визначити основні фактори (критерії) проблеми, Визначити вагові коефіцієнти факторів. Побудувати таблицю взаємних впливів факторів (табл. 1).

Таблиця 1

Фактори взаємного впливу

№	*Назва фактору*	*Напрям впливу (+/-)*						*Значення вагових коефіцієнтів*
		А	Б	В	Г	Д	Е	
А	Фактор 1		+		+	+		w_1
Б	Фактор 2	+		+				w_2

2. Побудувати когнітивну карту проблеми.
3. Провести аналіз шляхів досягнення мети. Обрати оптимальний шлях.

Приклад. Розглянемо когнітивну карту, яка дозволяє судити про шляхи досягнення задоволеністю життям і приймати відповідні рішення стосовно його покращення (рис. 1). Для її побудови складемо таблицю факторів (табл. 2).

Таблиця 2

Фактори взаємного впливу на задоволення життям

№	*Назва фактору*	А	Б	В	Г	Д	Е
А	Задоволеність життям		+		+	+	
Б	Сімейне благополуччя	+		+			
В	Гроші				+	-	
Г	Успіх у роботі	+					+
Д	Хобі						-
Е	Час на роботу	+					

Отже, будемо вважати, що в житті є три істотні цінності – сім'я, робота і хобі. Також будемо вважати, що весь продуктивний час присвячений або роботі, або хобі (це не означає, що немає часу на сім'ю). Що на цій карті роблять гроші, думаю, пояснювати не треба. Основні зв'язки тривіальні, але кілька зв'язків вимагають пояснень.

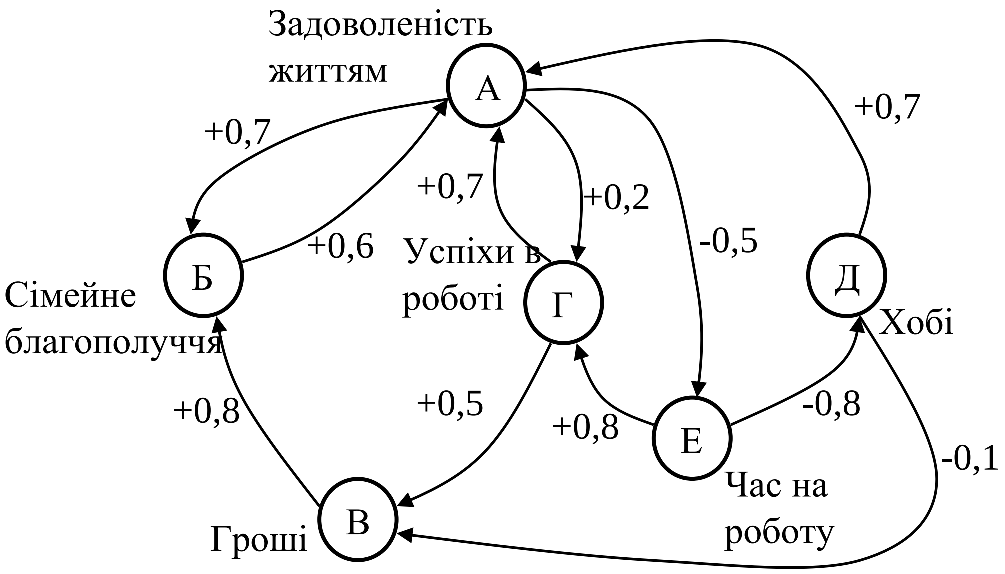

Рис. 1 Когнітивна карта задоволеністю життям

Негативний вплив задоволеності життям на роботу в психології називається пароксизмом достатку (не дарма гроші не входять в список цінностей) – коли людині добре, то вона працює продуктивніше (+0,2 до успіхів в роботі), але намагається працювати поменше (-0,5 до часу роботи).

Всі ваги дуг відносяться до відсотків зміни. Наприклад, якщо працювати на 10% більше, то хобі буде присвячено на 8% менше часу і на 8% зростуть успіхи в роботі. Ці зміни підвищать заробітки на 4% (= 8% * 0,5) і підвищать задоволеність життям на 11,2% (= 8% * 0,7 + 8% * 0,7). Цей розрахунок легко автоматизувати, наприклад, в середовищі Excel.

Завдання для аудиторного заняття

Побудувати когнітивну карту розвитку підприємства. Для побудови когнітивної картки підприємства виділити такі основні фактори:

- баланс (фінансові кошти підприємства (баланс), управління доходами та видатками);
- персонал (представлений власне персоналом, інтенсивністю приросту кадрів, розподілом та інтенсивністю звільнення);
- виробництво (виробництво продукції, керування обсягом виробництва);
- менеджмент (управління підприємством, керування персоналом (структура, накази, розпорядження)).
- ринок (управління ціною).

Розкрити основні блоки та побудувати більш розгорнуту когнітивну карту.

Побудувати таблицю факторів та графічне представлення когнітивної карти. Проаналізувати можливі шляхи зменшення витрат.

Лабораторна робота №5
Багатокритеріальні задачі прийняття рішень

Теоретичний матеріал для прийняття рішень у випадку багатокритеріальних задач викладений у лекції 7.

У багатокритеріальних задачах найчастіше виникає ситуація, коли оптимальні рішення за кожним частинним критерієм відрізняються і постає питання знаходження єдиного оптимального рішення за всіма критеріями.

Тому, для розв'язання багатокритеріальних задач існує наступна процедура:

- побудова Парето-оптимальної множини. Стан А (множина параметрів) називається Парето-оптимальним, якщо не існує іншого стану (множини інших параметрів) домінуючого стан А щодо цільової функції.
- знаходження кращого рішення, застосовуючи методи звуження множини Парето.

При розгляді багатокритеріальних задач виділяють два випадки в залежності від типу критеріїв: дискретний та неперервний.

Основні завдання теми:

- навчитися будувати множину кращих рішень для багатокритеріальних задач для дискретного та неперервного випадку;
- знаходити краще рішення для багатокритеріальних задач застосовуючи методи звуження Парето-оптимальної множини.

Звуження Парето-оптимальної множини.

Метод узагальненого показника (згортка)

Метод базується на адитивному критерії:

$$\hat{F} = \sum_{i=1}^{n} g_i F_i ,$$

де $\hat{F}$ – узагальнений критерій, g_i – коефіцієнт відносної важливості i-го часткового критерію (ваговий коефіцієнт), F_i – значення i-го критерію, n – кількість частинних критеріїв.

Метод цільового програмування

Зміст оцінки – це відстань від «ідеальної точки» в просторі оцінок:

$$\hat{F} = \sum_{i=1}^{n} g_i \left(F_i - P_{i\partial}\right)^2 ,$$

де $P_{i\partial}$ – «ідеальне» значення оцінки з точки зору ОПР, g_i – коефіцієнт відносної важливості i-го показника (ваговий коефіцієнт). В якості ідеальної точки можна взяти точку екстремуму. Кращою буде та оцінка, значення якої є меншим.

Метод послідовних поступок

При застосуванні методу послідовних поступок виконують наступну послідовність дій:

- визначити важливість окремих критеріїв і розташувати частинні критерії в порядку убування важливості. Таким чином, головним вважається критерій F_1, менш важливим F_2 і т. д.;
- знаходиться оптимальне значення першого за важливістю критерію F_{1opt} і призначається величина допустимого зниження поступки $\Delta_1 \geq 0$ критерію F_1 і шукається оптимальне значення критерію F_2 за умови, що значення F_1 має бути не більше, ніж $F_{1opt} \pm \Delta_1$ (+ – для min, - – для max);
- далі призначається поступка $\Delta_2 \geq 0$, але вже за другим критерієм, яка разом з першою використовується при знаходженні оптимального значення F_3 і т. д.;
- нарешті, мінімізується останній за важливістю критерій F_m за умови, що значення кожного критерію F_i з $m-1$ попередніх повинні бути не більш відповідної величини $F_{iopt} \pm \Delta_i$.

Отримане в результаті рішення вважається оптимальним.

Лексикографічний критерій

Нехай є стратегія X_1, якій відповідає вектор значень часткових критеріїв $F = (F_1(X_1), F_2(X_1), ..., F_m(X_1))$, причому, всі часткові критерії строго впорядковані за важливістю $F_1 \succ F_2 \succ ... \succ F_m$. При порівнянні стратегій в першу чергу використовується критерій F_1 і кращої вважається та стратегія, для якої значення цього критерію менше / більше, якщо знаходять min / max. Якщо значення першого критерію для обох стратегій виявляються рівним, то застосовується другий критерій F_2, і перевага віддається тій стратегії, для якої його значення краще, якщо другий критерій не дозволяє виділити кращу стратегію, залучається третій, і т. д. до F_m.

Наведені методи звуження Парето-оптимальної множини для отримання єдиного оптимального рішення застосовуються як для дискретного, так і неперервного випадків.

Лабораторна робота №5.1
Побудова дискретної Парето оптимальної множини

Для виконання лабораторної роботи, можна самостійно обрати тему роботи та скласти порівняльну таблицю за показниками. Для виконання обчислень можна використовувати програмні додатки Excel або Mathcad.

Порядок виконання роботи:

- визначити список альтернатив та критеріїв порівняння, скласти порівняльну таблицю;
- попарним порівнянням альтернатив побудувати Парето-оптимальну множину;
- застосовуючи методи звуження знайти оптимальне рішення.

Зауваження. Для звуженння Парето-оптимальної множини методами згортки та цільового програмування дані порівняльної матриці необхідно нормалізувати.

Для випадку двокритеріальної задачі побудову Парето-оптимальної множини можна проілюструвати графічно.

Приклад. Є сім виробників оперативної пам’яті (табл. 1). Кожен варіант оцінюється за бальною шкалою за п’ятьма показниками. Пріоритет показників невідомий. Потрібно знайти Парето-оптимальні рішення.

Таблиця 1

Порівняльна таблиця варіантів оперативної пам’яті

Показники	Виробники						
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
Надійність	10	4	6	9	5	3	3
Продуктивність	2	7	8	2	1	8	5
Технології	3	3	3	3	0	0	4
Ремонтопридатність	2	3	4	1	2	4	7
Дизайн	4	1	2	3	2	1	7

Порівняємо x_1 з іншими альтернативами відкидаючи ті, що гірше за всіма показниками. x_2, x_3 гірші за надійністю але кращі за продуктивністю, отже їх відкидати неможна. x_4, x_5 – гірші або рівні за всіма показниками, тому їх відкидаємо. Отже, на першому кроці отримаємо наступну множину $X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_7\}$. Далі з множини X_1, вибираємо наступну альтернативу, це x_2, і послідовно порівнюємо з іншими альтернативами множини X_1. x_3 краща, а x_6, x_7 – не гірші або рівні, отже x_2 відкидаємо. Отримаємо множину $X_2 = \{x_1, x_3, x_6, x_7\}$. Продовжуємо послідовне порівняння поки вже не вичерпаємо всі можливі варіанти. В результаті отримаємо Парето-оптимальну множину $X_P = \{x_1, x_3, x_7\}$.

Але необхідно обрати один найкращий варіант, для цього застосуємо методи звуження

1. *Метод узагальненого показника*. Так як кількісні оцінки критеріїв задані за однією шкалою в однаковому масштабі, то їх можна не нормувати. Для кожного критерію визначимо вагові коефіцієнти і складемо розрахункову таблицю (табл. 2)

Таблиця 2

Порівняльна таблиця варіантів оперативної пам'яті

Показники	Виробники			Вага
	X₁	*X₃*	*X₇*	g_i
Надійність	10	**6**	3	0,3
Продуктивність	2	**8**	5	0,32
Технології	3	**3**	4	0,1
Ремонтопридатність	2	**4**	7	0,2
Дизайн	4	**2**	7	0,08
$\hat{F} = \sum_{i=1}^{n} g_i F_i$	4,66	**5,62**	4,86	$\sum g_i = 1$

Кращим буде виробник x_3 так як він має найбільшу оцінку.

2. *Метод цільового програмування.* Для застосування даного методу для кожного критерію визначимо ідеальне значення (ідеальну точку).

Нехай це будуть максимальні значення за кожним показником. Складемо розрахункову таблицю (табл. 3.).

Таблиця 3

Порівняльна таблиця варіантів оперативної пам’яті

Показники	Виробники			Вага	Ід. т.
	X_1	X_3	X_7	g_i	$P_{iд}$
Надійність	10	**6**	3	0,3	10
Продуктивність	2	**8**	5	0,32	8
Технології	3	**3**	4	0,1	4
Ремонтопридатність	2	**4**	7	0,2	7
Дизайн	4	**2**	7	0,08	7
$\hat{F}=\sum_{i=1}^{n} g_i \left(F_i - P_{iд}\right)^2$	17,34	**8,7**	17,58	$\sum g_i = 1$	

Як видно з табл. 3, кращим буде виробник x_3 так як він має найменшу оцінку (найближче до ідеальної точки).

3. *Метод послідовних поступок*. Для застосування методу виконаємо ранжування критеріїв за ступенем їх важливості: 1 – продуктивність; 2 – надійність; 3 – ремонтопридатність; 4 – технології; 5 – дизайн.

Зробимо поступку за продуктивністю $\Delta_1 = 1$ бал, тоді нижні значення продуктивності для варіантів x_3 та x_7 відповідно можуть становити 7 та 4. Але і в цьому випадку Парето-оптимальна множина не звузиться тому призначимо поступку для другого критерію $\Delta_2 = 5$, тоді нижні значення продуктивності для варіантів x_3 та x_1 відповідно можуть становити 5 та 1. Якщо зробити поступки для ремонтопридатності та дизайну $\Delta_3 = 4$, $\Delta_5 = 4$, то альтернативу x_7 можна виключити. З урахуванням поступок Δ_1 та Δ_2 кращим буде варіант x_3.

4. *Лексикографічний метод*. Якщо використовувати порядок важливості критеріїв, визначений для методу послідовних поступок, то вже за першим критерієм кращим буде варіант x_3.

Приклад завдання для самостійного виконання.

Визначити кращу модель автомобіля (табл. 4). Для звуження Парето оптимальної множини застосувати методи:

а) метод узагальненого показника та послідовних поступок;

б) метод цільового програмування, лексикографічний метод.

Таблиця 4

Порівняльна таблиця різних марок автомобіля

Критерій	**Daewoo**	**Kia Rio**	**Opel**	**Skoda**	**VW Pointer**
Дизайн	75	105	130	120	105
Зовнішність	40	55	65	60	50
Інтер'єр	35	50	65	60	55
Ергономіка	100	120	125	125	130
Місце водія	40	55	60	75	55
Огляд	60	65	65	50	75
Динаміка	205	220	210	210	205
Динаміка розгону	60	70	55	55	55
Тормозна динаміка	75	75	75	70	80
Управляємість	65	75	80	85	70
Комфорт їзди	140	165	155	155	145
Плавність ходу	55	65	60	60	60
Акустичний комфорт	45	55	50	50	40
Мікроклімат	40	45	45	45	45
Комфорт салону	90	145	140	130	100
Пасажирські місця	45	45	55	45	30
Багажник	45	55	45	45	40
Трансформація салону	0	45	40	40	30

Лабораторна робота №5.2
Побудова неперервної Парето-оптимальної множини

Порядок виконання роботи:

- знайти оптимальне рішення за кожним критерієм окремо;

- на основі частинних рішень визначити Парето-оптимальну множину. Множина точок оптимальних по Парето лежить між точками оптимуму, отриманих при вирішенні задачі математичного програмування для кожного окремого критерію;

- застосовуючи методи звуження знайти оптимальне рішення.

Для випадку двокритеріальної задачі побудову Парето-оптимальної множини можна проілюструвати графічно. Якщо кількість критеріїв перевищує два, то для відшукання часткових ефективних рішень застосовують симплекс метод.

Приклад. Для виробництва двох видів виробів A та B використовується токарне, фрезерне та шліфувальне обладнання. Норми витрат часу кожного з типів устаткування на один виріб цього виду наведено у табл. 1. Там же вказано загальний фонд робочого дня кожного з типів устаткування, вартість одного виробу і його виробництво. Знайти план випуску виробів, що забезпечує максимальний прибуток та мінімальні витрати за умови, що підприємство не може випускати менше 5 виробів.

Таблиця 1

Норми витрат часу устаткування на один виріб

Тип обладнання	**Витрати часу на обробку одного виробу**		**Загальний фонд корисного робочого часу обладнання**
	A	**B**	
Фрезерне	10	8	168
Токарне	5	10	180
Шліфувальне	6	12	144
Ціна	14	18	max
Витрати	7	5	min

Запишемо умови задачі лінійного програмування. Нехай x_1 і x_2 - план випуску виробів A і B. Допустима область описується нерівностями:

$$\begin{cases} 10x_1 + 8x_2 \le 168 \\ 5x_1 + 10x_2 \le 180 \\ 6x_1 + 12x_2 \le 144 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Цільові функції будуть мати вигляд:

$$F_1 = 14x_1 + 18x_2 \to \max, \; F_2 = 7x_1 + 5x_2 \to \min.$$

Для приведення частинних критеріїв до однорідного вигляду другу цільову функції домножимо на –1, отримаємо: $F_2 = -7x_1 - 5x_2 \to \max$.

Так як задача містить дві змінні, то її простіше розв'язати графічно. На рис. 1 представлена область допустимих значень задачі.

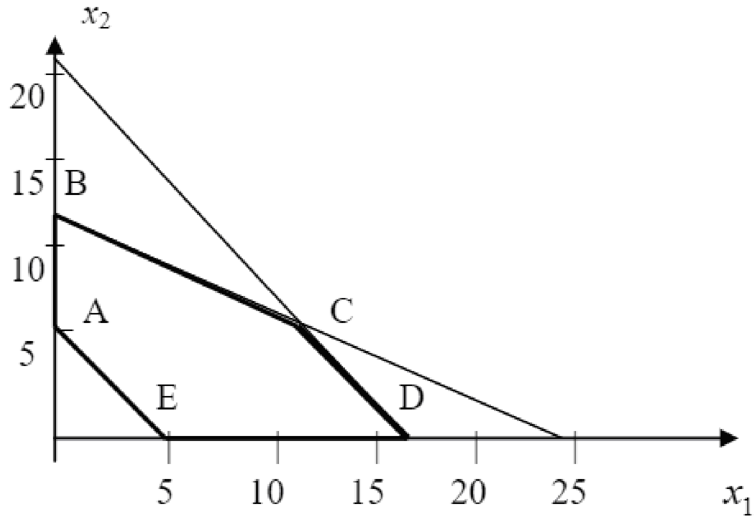

Рис. 1. Область допустимих значень

Знайдемо розв'язок задачі для кожного критерію окремо.

Для критерію F_1 запишемо $gradF_1 = (14{,}18)$, знайдемо точку перетину перпендикуляра до градієнта з областю допустимих значень. Це буде точка $C(12, 6)$. Оптимальне значення $F_{1опт} = 276$.

Аналогічно знайдемо оптимальний розв'язок за критерієм F_2. Оптимальне значення критерій приймає в точці $A(0, 5)$ $F_{2опт} = -25$.

Як видно, розв'язки першої та другої задачі не співпадають і оптимальне рішення за обома критеріями знаходиться на прямих BC та CD (Парето-оптимальна множина). Застосуємо методи звуження для отримання єдиного розв'язку.

1. *Метод узагальненого показника*. Для складання комплексної цільової функції необхідно визначити вагові коефіцієнти критеріїв. Виконаємо параметричний аналіз задачі. Щоб вони задовольняли

необхідним вимогам, покладемо $g_1 = \dfrac{\alpha}{F_{1опт}}$, $g_2 = \dfrac{1-\alpha}{F_{2опт}}$. Запишемо комплексну цільову функцію:

$$F(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{176}(14x_1 + 18x_2) + \frac{1-\alpha}{25}(7x_1 + 5x_2) =$$
$$= \left(\frac{14\alpha}{276} + \frac{7(1-\alpha)}{25}\right)x_1 + \left(\frac{18\alpha}{276} + \frac{5(1-\alpha)}{25}\right)x_2.$$

Для знаходження оптимального рішення знайдемо кутовий коефіцієнт прямої $F(x_1, x_2) = a \cdot x_1 + b \cdot x_2$, $k = a/b$ і порівняємо його з кутовими коефіцієнтами прямих BC та CD.

$$k_F = \frac{966 - 791\alpha}{690 - 465\alpha}, \ k_{BC} = -\frac{1}{2}, \ k_{CD} = -\frac{10}{8}.$$

Якщо $|k_F| < |k_{BC}|$, то оптимальний розв'язок знаходиться в точці B, якщо $|k_{BC}| < |k_F| < |k_{CD}|$ – в точці C, якщо $|k_F| > |k_{CD}|$ – в точці D. Якщо $k_F = k_{BC}$, оптимальною може бути будь-яка точка відрізка BC, а якщо $k_F = k_{CD}$, то будь-яка точка відрізка CD.

Перевіримо умову $|k_F| < |k_{BC}|: \left|-\dfrac{966 - 791\alpha}{690 - 465\alpha}\right| < \dfrac{1}{2}$. Отримаємо $\alpha > \dfrac{1242}{1117}$, але $\alpha \le 1$, отже точка B не є оптимальним рішенням.

Перевіримо умову $|k_{BC}| < |k_F| < |k_{CD}|$. В цьому випадку $\left|-\dfrac{966 - 791\alpha}{690 - 465\alpha}\right| < \dfrac{10}{8} \Rightarrow \alpha > \dfrac{414}{839}$.

Якщо $0 < \alpha < \dfrac{414}{839}$, то оптимальне рішення досягається у точці D. Отже, якщо $0 \le \alpha < \dfrac{414}{839}$, то $x_1 = 16{,}8$, $x_2 = 0$, $F_{\max} = \dfrac{13524 - 11074\alpha}{2875}$, якщо $\dfrac{414}{839} < \alpha \le 1$, то $x_1 = 12$, $x_2 = 6$, $F_{\max} = \dfrac{2622 - 2047\alpha}{575}$, якщо $\alpha = \dfrac{414}{839}$, то оптимальне значення – це будь-яка точка відрізку CD, $F_{\max} = \dfrac{2352}{839} \approx 2{,}8$.

Якщо покласти $g_1 = g_2 = 0{,}5$, то задача зразу зводиться до однокритеріальної розв'язком якої є $x_1 = 12$, $x_2 = 6$, $F_{\max} \approx 2{,}78$.

2. *Метод цільового програмування.* Виходячи з умови задачі та вигляду області допустимих рішень визначимо ідеальну точку наступним чином $P_{i\partial}(15{,}5)$. Нехай $g_1 = g_2 = 0{,}5$, складемо загальний критерій:

$$\hat{F} = \sum_{i=1}^{n} g_i\left(F_i - P_{i\partial}\right)^2 = 0{,}5\Big(\left(14x_1 + 18x_2 - 15\right)^2 + 0{,}5\left(7x_1 + 5x_2 - 5\right)^2\Big) =$$

$$= 122{,}5x_1^2 + 174{,}5x_2^2 + 287x_1x_2 - 245x_1 - 295x_2 + 125 \to \min.$$

Отримаємо одно параметричну нелінійну оптимізаційну задачу, Для отримання розв'язку можна застосувати метод множників Лагранжа.

3. *Метод послідовних поступок*. Нехай критерій F_1 переважає критерій F_2. Тоді для критерію F_1 призначимо поступку $\Delta_1 > 0$. Тоді наша двокритеріальна задача зведеться до однокритеріальної, де в якості цільової функції буде виступати критерій F_2, а система обмежень доповниться нерівністю $F_1(x_1, x_2) \geq F_{1опт} - \Delta_1$.

Для неперервного випадку в багатокритеріальних задачах збільшення кількості критеріїв призводить до задач надмірної складності, тому, як правило, обмежуються кількістю критеріїв не більше 5.

Завдання для самостійного виконання

1. Знайти Парето-оптимальну множину та оптимальне за всіма критеріями рішення застосувавши:

- метод послідовних поступок. В якості поступки взяти 10% від F_1.

- метод згортки при $\alpha_1 = 0{,}6$, $\alpha_2 = 0{,}4$.

1.1 $F_1 = 7x_1 + 12x_2 + 13x_3 \to \max$

$F_2 = 9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}4x_3 \leq 35 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \leq 42 \\ 0{,}6x_1 + 0{,}8x_2 + 1{,}2x_3 \leq 100 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1.2 $F_1 = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max$

$F_2 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120 \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 240 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1.3 $F_1 = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max$

$F_2 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$

1.4 $F_1 = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 \to \max$

$F_2 = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 0{,}4x_3 \le 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1x_3 \le 180 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 210 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 700 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

2. Знайти Парето-оптимальну множину та оптимальне за всіма критеріями рішення застосувавши метод:

а) узагальненого критерію при $\alpha_1 = 3/5$, $\alpha_2 = 2/5$;

б) метод цільового програмування (вибір ідеальної точки обгрунтувати).

2.1 $F_1 = 2x_1 + x_2 + 1 \to \min$

$F_2 = x_1 - x_2 + 5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 0 \le x_1 \le 6 \\ 0 \le x_2 \le 3 \end{cases}$$

2.2 $F_1(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$F_2(x) = -x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2.3 $F_1(x) = 2x_1 - x_2 \to \max$

$F_2(x) = -x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 \le 6, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2.4 $F_1(x) = x_1 + 2x_2 \to \max$

$F_2(x) = 3x_1 + 2x_2, \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2.5 $F_1(x) = 7x_1 + 5x_2 \to \min$

$F_2(x) = 10x_1 + 8x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 45, \\ 0 \le x_2 \le 35, \\ 0 \le x_1 \le 45. \end{cases}$$

2.6 $F_1(x) = -2x_1 + 5x_2 \to \max$

$F_2(x) = 3x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 - 4x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Лабораторна робота №6
Метод аналізу ієрархій (метод Сааті)

Теоретичний матеріал викладений у лекції 8.

Основні завдання теми:

- вивчити підхід для прийняття рішень у складних ситуаціях коли необхідно враховувати багато критеріїв серед яких можуть бути і якісні критерії;
- навчитися структурувати складні задачі прийняття рішень;
- вміти не тільки знаходити краще рішення, а і проводити внутрішній аналіз проблеми.

Порядок виконання лабораторної роботи:

Етап 1. Визначити множину альтернатив та множину критеріїв для їх оцінки. Представити структуру задачі у вигляді дерева ієрархій (рис. 1).

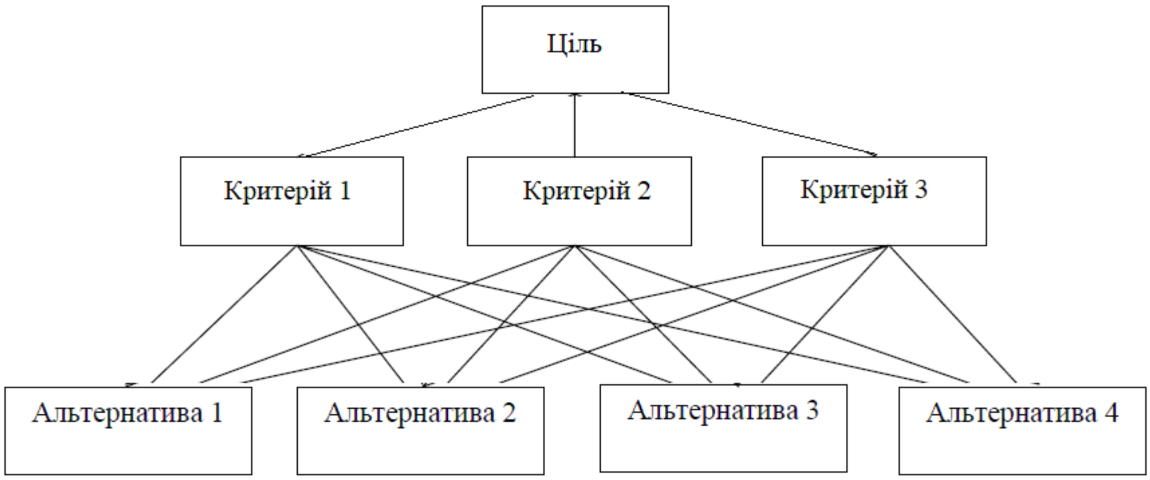

Рис. 1. Дерево ієрархій

Етап 2. Побудувати:

- оціночну матрицю альтернатив для кожного критерію K_i;
- оціночну матрицю порівняння ступеня важливості критеріїв R.
- оцінити якість та придатність оціночних матриць для отримання оптимального рішення;
- визначити пріоритети альтернатив та критеріїв.

Оціночна матриця – зворотно симетрична квадратна матриця: $a_{ij} = 1/a_{ji}$. Для побудови оціночної матриці, а саме визначення значень a_{ij} застосовують шкалу Сааті (табл. 1).

Таблиця 1

Числова шкала відносної переваги

Якісна оцінка відносної переваги	**Кількісна оцінка відносної переваги**
однакові за значущістю	1
слабка перевага	2
середній ступінь переваги	3
перевага вище середньої	4
помірно сильніша перевага	5
сильна перевага	6
значно сильніша перевага	7
значно значно сильніша перевага	8
абсолютна перевага	9

Для оцінки придатності використання оціночних матриць та визначення пріоритетів для кожної з них необхідно знайти власний вектор та максимальне власне число $\lambda_{\max}$ та знайти оцінки для індексу узгодженності *ІУ* та відношення узгодженості *ВУ*. Для цього доцільно скласти наступну розрахункову таблицю (табл. 2).

Таблиця 2

Розрахункова таблиця оцінки пріоритетів та узгодженості оціночної матриці

	Матриця				Середнє геометричне рядка $\sqrt[n]{\prod_j a_{ij}}$	Власний вектор
	a_{11}	a_{12}	…	a_{n1}	as_1	$v_1 = as_1/S$
	a_{21}	a_{22}	…	a_{n1}	as_2	$v_2 = as_2/S$
	…	…	…	…	…	…

Продовження таблиці 2

	a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	a_{nn}	as_n	$v_3 = as_n / S$
$\sum\limits_i a_{ij}$	s_1	s_2		s_n	S	
$\lambda_{\max} = \sum\limits_i s_i \cdot v_i = s_1 \cdot v_1 + s_2 \cdot v_2 + ... + s_n \cdot v_n$						
індекс узгодженості $IУ = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$, відношення узгодженості $BУ = \frac{IУ}{M(IУ)}$						

$M(IУ)$ – середнє значення (математичне сподівання) індексу однорідності. Значення вибирається з таблиці (табл. 3), вхідним параметром для вибору виступає розмірність матриці n. Значення відношення узгодженості повинно відповідати вимозі: $BУ < 0{,}1$.

Таблиця 3

Середнє значення індексу однорідності

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$M(IO)$	0	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51

Етап 3. Знайти оптимальне рішення та оцінити його якість. Складається матриця (розмірності $m \times n$, m – кількість критеріїв, n – кількість альтернатив) з власних векторів оціночних матриць за критеріями і множиться на власний вектор матриці пріоритетів. В результаті отримуємо глобальні пріоритети.

Приклад. Нехай перед нами стоїть питання стосовно вибору роботи. При виборі роботи нас нехай цікавить:

- скільки ***грошей*** будемо заробляти;
- наскільки ***цікаво*** цим займатися;
- чи буде час на ***власне життя***;
- ***кар'єрні*** перспективи;
- чи буде час бувати на ***природі*** або бачити сонце і дерева раз на рік;

- наскільки близька ***культура*** колег, сусідів та інших людей.

При цьому можливі такі альтернативи:

- А1 –нічого не міняти;
- А2 –переїхати до столиці;
- А3 –переїхати за кордон;
- А4 – зайнятися фрілансом чи якимось підприємництвом.

Побудуємо дерево ієрархій (рис. 2).

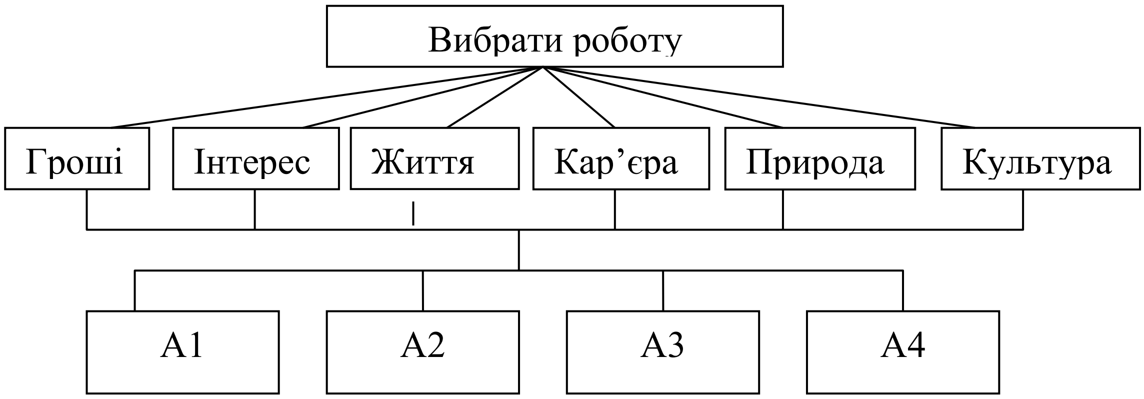

Рис. 2. Дерево ієрархій пошуку роботи

Далі, використовуючи шкалу Сааті побудуємо матрицю оцінок критеріїв. Наприклад, що для нас важливіше: інтерес чи гроші? Інтерес важливіший, але не сказати, що дуже сильно. Якщо максимальна оцінка 9 до 1, то можна оцінити пріоритети як 5 до 1.

Чи, наприклад, що важливіше: гроші чи наявність часу для життя, хобі? Чи готові ми заради додаткових грошей працювати у вихідні чи стояти по дві години у пробках? Оцінимо значимість цих критеріїв як 1 до 7. Продовжуючи цей процес, отримаємо матрицю оцінок критеріїв, представлену у табл. 4.

Таблиця 4

Матриця оцінок критеріїв

	Гроші	Інтерес	Життя	Кар’єра	Природа	Культура
Гроші	1	1/5	1/7	3	1/3	1/5
Інтерес	5	1	1/3	7	3	1
Життя	7	3	1	5	3	3
Кар’єра	1/3	1/7	1/5	1	1/3	1
Природа	3	1/3	1/3	3	1	1
Культура	5	1	1/3	1	1	1

Очевидно, що по діагоналі завжди будуть одиниці. Також очевидно, що всі оцінки будуть обернено-симетричні щодо головної діагоналі. Наприклад, якщо ми оцінюємо значущість «інтерес-гроші» як 5 до 1, то значущість «гроші-інтерес» буде 1 до 5.

Визначимо *ІО* та *ВО* для нашої матриці. Матриця має розмірність 6×6 $(n = 6)$. Для цього необхідно знайти власні числа. Оцінку якості матриці будемо виконувати за наступною схемою:

1) знайдемо середнє геометричне для кожного рядка нашої матриці:

$$a_i = \sqrt[6]{\prod_{j=1}^{6} w_{ij}}\ ,\ i = \overline{1{,}6},\ a_1 = \sqrt[6]{1 \cdot 1/5 \cdot 1/7 \cdot 3 \cdot 1/3 \cdot 1/5} = 0{,}423\ ,$$

$$a_2 = 1{,}809,\ a_3 = 3{,}133,\ a_4 = 0{,}383,\ a_5 = 1,\ a_6 = 1{,}089;$$

2) обчислимо суму середніх геометричних: $s = \sum_{i=1}^{6} a_i = 7{,}836$;

3) обчислимо значення компонентів нормалізованого вектора пріоритетів:

$$НВП_1 = \frac{0{,}423}{7{,}836} = 0{,}054,\ НВП_2 = 0{,}231,\ НВП_3 = 0{,}4,$$

$$НВП_4 = 0{,}049,\ НВП_5 = 0{,}128,\ НВП_6 = 0{,}139.$$

Видно, що найбільш важливим є 3-й критерій – власне життя;

4) перевіримо узгодженість локальних пріоритетів шляхом розрахунку трьох характеристик:

4.1) власного числа матриці (сума добутків суми елементів стовпчика на відповідне значення нормалізованого вектора пріоритетів):

$$\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{6}\left(\sum_{i=1}^{6} a_{i,j} \cdot НВП_i\right) = 6{,}483;$$

4.2) індекс узгодженості: $ІУ = ІО = \dfrac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = 0.097$;

4.3) відношення узгодженості: $ВУ = \dfrac{ІУ}{M(ІО)} = \dfrac{0{,}097}{1{,}24} = 0{,}078$,

де *M(ІО)* – беремо з табл. 3. Отримане значення $ВУ < 0{,}1$, отже можна вважати, що наші оцінки є узгодженими.

На наступному кроці необхідно побудувати оціночні матриці попарного порівняння альтернатив за кожним критерієм. Для цього знову скористаємося шкалою Сааті (табл. 1).

Гроші

	A1	**A2**	**A3**	**A4**
A1	1	1/7	1/7	1/3
A2	7	1	1	1
A3	7	1	1	1
A4	3	1	1	1

Інтерес

	A1	**A2**	**A3**	**A4**
A1	1	7	9	5
A2	1/7	1	1	1/3
A3	1/9	1	1	1/3
A4	1/5	3	3	1

Життя

	A1	**A2**	**A3**	**A4**
A1	1	7	1	1/3
A2	1/7	1	1/3	1/5
A3	1	3	1	1
A4	3	5	1	1

Кар'єра

	A1	**A2**	**A3**	**A4**
A1	1	1	7	1
A2	1	1	3	1
A3	1/7	1/3	1	1
A4	1	1	1	1

Природа

	A1	**A2**	**A3**	**A4**
A1	1	5	1/3	1/9
A2	1/5	1	1/7	1/9
A3	3	7	1	1/5
A4	9	9	5	1

Культура

	A1	**A2**	**A3**	**A4**
A1	1	1/3	1/7	3
A2	3	1	3	1
A3	7	1/3	1	1/5
A4	1/3	1	5	1

Рис. 3 Матриці оцінок для попарних порівнянь

Далі обчислюємо компоненти власних векторів та перевіряємо узгодженість кожної матриці за попереднім алгоритмом. Якщо матриці узгоджені, то складаємо матрицю з власних векторів для альтернатив за кожним критерієм. Обчислення виконуються у відповідності до третього кроку нашого алгоритму (табл. 5).

Таблиця 5

Матриця власних векторів альтернатив

	Гроші	Інтерес	Життя	Кар’єра	Природа	Культура
A1	0,059	0,671	0,256	0,369	0,096	0,143
A2	0,335	0,074	0,065	0,298	0,035	0,402
A3	0,335	0,070	0,272	0,106	0,210	0,192
A4	1,271	0,185	0,407	0,227	0,659	0,264

Отримана матриця множиться на нормований власний вектор матриці попарних оцінок критеріїв:

$$\begin{vmatrix} 0,059 & 0,671 & 0,256 & 0,369 & 0,096 & 0,143 \\ 0,335 & 0,074 & 0,065 & 0,298 & 0,035 & 0,402 \\ 0,335 & 0,070 & 0,272 & 0,106 & 0,210 & 0,192 \\ 1,271 & 0,185 & 0,407 & 0,227 & 0,659 & 0,264 \end{vmatrix} \text{ x } \begin{vmatrix} 0,054 \\ 0,231 \\ 0,400 \\ 0,049 \\ 0,128 \\ 0,139 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,310 \\ 0,136 \\ 0,202 \\ 0,352 \end{vmatrix}$$

Серед отриманих значень вибираємо максимальне, воно відповідає кращій альтернативі. Для нашої задачі це четверта альтернатива А4 – фріланс (А4 = 0,352).

Завдання для самостійного виконання

За абсолютними показниками якості двигунів (потужністю П, обертаючим моментом ОМ, массою М) знайти оптимальний варіант двигуна.

Варіант 1					**Варіант 2**			
В-ти д-нів	Показники якості				В-ти д-нів	Показники якості		
	П, л.с	ОМ, кгс.м	М, кг			П, л.с	ОМ, кгс.м	М, кг
1	180	67	850		1	180	67	850
2	176	70	1000		2	179	38	870
3	176	68	860		3	176	67	850
4	181	67	820		4	181	67	820
5	177	68	860		5	177	68	860
6	180	66	800		6	179	66	800

Варіант 3 За абсолютними показниками якості двигунів знайти оптимальний варіант двигуна.

Варіанти двигунів	Показники якості		
	Потужність, л.с	Обертаючий момент, кгс.м	Маса, кг
1	180	67	850
2	180	68	880
3	176	68	860
4	179	38	870
5	175	67	820
6	180	66	800

За показниками ефективності вибору квартири (площа S, час поїздки на роботу tp, час поїздки в зону відпочинку $tв$) обрати найбільш оптимальний варіант.

Варіант 4					**Варіант 5**			
В-ти кв-ир	Показники ефективності				В-ти кв-ир	Показники ефективності		
	S, м²	tp, хв.	$tв$, хв.			S, м²	tp, хв.	$tв$, хв.
1	60	50	30		1	47	30	50
2	50	45	25		2	50	35	30
3	45	30	20		3	45	30	50
4	60	40	30		4	52	40	40
5	42	20	10		5	35	20	30
6	45	30	15		6	45	30	15

Варіант 6 Показники ефективності вибору квартири наведені в наступній таблиці. Потрібно обрати найбільш оптимальний варіант.

Варіанти квартир	Показники ефективності при виборі квартири		
	Площа, м²	Час поїздки на роботу, хв.	Час поїздки в зону відпочинку, хв.
1	74	35	50
2	60	20	40
3	58	10	30
4	65	40	40
5	50	20	30
6	45	30	30

Варіант 7 Одній фірмі потрібно вибрати оптимальну стратегію технічного забезпечення процесу управління виробництвом. За допомогою статистичних даних та інформації відповідних заводів-виробників, були визначені локальні критерії функціонування необхідного обладнання.

Варіанти обладнання	Показники ефективності		
	Продуктивність	Вартість обладнання	Об'єм пам'яті
1	100	5	5
2	150	6	8
3	120	4	6
4	200	7	7
5	140	6	6
6	160	4	5

Варіант 8 Одній фірмі потрібно вибрати оптимальну стратегію технічного забезпечення процесу управління виробництвом. За допомогою статистичних даних та інформації відповідних заводів-виробників, були визначені локальні критерії функціонування необхідного обладнання.

Варіанти обладнання	Показники ефективності		
	Продуктивність	Вартість обладнання	Об'єм пам'яті
1	150	4	8
2	100	4	5
3	120	5	6
4	180	7	7
5	130	6	5
6	160	6	5

Варіант 9 Показники ефективності вибору квартири наведені в наступній таблиці. Потрібно обрати найбільш оптимальний варіант.

Варіанти квартир	Показники ефективності при виборі квартири		
	Площа, $м^2$	Час поїздки на роботу, хв.	Час поїздки в зону відпочинку, хв.
1	60	30	60
2	45	40	40
3	58	50	30
4	60	40	60
5	40	20	30
6	45	30	30

Варіант 10 Одній фірмі потрібно вибрати оптимальну стратегію технічного забезпечення процесу управління виробництвом. За допомогою статистичних даних та інформації відповідних заводів-виробників, були визначені локальні критерії функціонування необхідного обладнання.

Варіанти обладнання	Показники ефективності		
	Продуктивність	Надійність	Об'єм пам'яті
1	100	8	5
2	150	5	8
3	120	6	6
4	200	4	7
5	140	5	6
6	160	6	5

Лабораторна робота №7
Експертні оцінки (ЕО)

Теоретичний матеріал викладений у лекції 9.

Основні завдання теми:

- ознайомитись з особливостями та етапами виконання ЕО;
- навчитись на практиці застосовувати методи ЕО;
- вміти проводити аналіз результатів експертного оцінювання.

Обробка результатів експертного оцінювання складається з двох основних задач:

- складання таблиці оцінок експертів, знаходження кращого рішення. Для вирішення цієї задачі застосовують метод середньоарифметичного та метод медіан рангів.
- оцінка узгодженості думок експертів та аналіз результатів.

1. Знаходження кращого рішення.

Як правило зведена таблиця оцінок експертів складається з оцінок за бальною або ранговою шкалою, тому не потребує нормалізації.

Метод середньоарифметичного полягає у визначенні для кожного об'єкту середньоарифметичної оцінки за всіма експертами. Даний метод можна застосовувати до оцінок за бальною або ранговою (порядковою) шкалою.

Метод медіан рангів. Для оцінок за ранговою шкалою кращим є метод медіан. Метод полягає у знаходженні медіан рангів для кожної альтернативи.

2. Оцінка узгодженості думок експертів.

Коефіцієнт конкордації визначає степінь узгодженості думок експертів. Якщо думки експертів погано узгоджені, то їх неможна приймати до уваги. Порядок застосування методу. Для обчислення коефіцієнта конкордації оцінки повинні бути представлені за ранговою шкалою.

До зведеної таблиці оцінок додаються рядки оцінки відхилень від середніх значень. (табл. 8.2), де:

- $X = \sum_{i} x_i$ – сума рангів для кожного об'єкту;

- $\overline{X} = X / n$ – середнє арифметичне суми рангів;
- $X_i - \overline{X}$ – відхилення суми рангів від середнього арифметичного;
- $S = \left(X_i - \overline{X}\right)^2$ – квадрат відхилення.

За критерієм Кендалла коефіцієнт конкордації становить:

$$K = \frac{S}{S_{\max}} = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot \left(n^3 - n\right)},$$

де n – кількість об'єктів порівняння, m – кількість експертів.

Коли експерт ставить однакові оцінки декільком об'єктам вони називаються зв'язними. У випадку існування зв'язних оцінок коефіцієнт конкордації обчислюється а формулою:

$$K = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot \left(n^3 - n\right) - m \cdot \sum_{i=1}^{m} T_i},$$

де $T_i = \sum_{l=1}^{L} \left(t^3 - t\right)$, L – кількість груп зв'язаних рангів, t – кількість зв'язаних рангів у групі.

Залежно від ступеня важливості думок експертів коефіцієнт конкордації лежить в межах від 0 (при повній відсутності узгодженості) до 1 (при абсолютному одностайному голосуванні експертів).

Розкид думок ескретів, окрім коефіцієнта конкордації, оцінюється за допомогою інших статистичних показників:

а) дисперсія оцінок j-го об'єкту: $\sigma_j^2 = \frac{1}{m_j - 1} \sum_{i=1}^{m} \left(x_{i,j} - M_j\right)^2$,

де m_j – кількість експертів, що приймали участь в оцінюванні j-го об'єкту, M_j – середня оцінка j-го об'єкту;

б) коефіцієнт варіації оцінок j-го об'єкту: $V_j = \frac{\sqrt{\sigma_j^2}}{M_j} \cdot 100\%$;

в) загальна дисперсія оцінок: $\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(M_j - M\right)^2$, де $M = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} x_{i,j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} m_j}$ – загальне середнє (математичне сподівання);

г) загальна дисперсія рангів: $\sigma_R^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(S_j - S\right)^2$, де $S = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} R_{i,j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} m_j}$

– загальне середнє рангів;

S_j – середня оцінка рангів *j*-го об'єкту, S.

Приклад. Нехай п'ять суддів виставляються оцінки семи спортсменам, визначаючи зайняте ними місце. Розглянемо вибір кращого спортсмена за середнім арифметичним значенням (с. а.) та медіаною рангів (табл. 1). Зрозуміло, що чим менше значення рангу, тим оцінка краща.

Таблиця 1

Зведена таблиця оцінок спортсменів

Експерти (*m*)	**Спортсмени (n)**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Σ
1	1	2	3	4	5	6	7	
2	2	1	3	4	6	5	7	
3	1	3	2	4	5	7	6	
4	1	2	3	5	4	7	6	
5	1	3	2	4	5	6	7	
$\sum\limits_i x_i$	6	11	13	21	25	31	33	140
с.а. $\sum\limits_i x_i / m$	1,2	2,2	2,6	4,2	5	6,2	6,6	
Ранг за с. а.	1	2	3	4	5	6	7	
Медіани	1	2	3	4	5	6	7	

Оцінимо коефіцієнт конкордації. Порядок обчислень (табл. 2):

1. Заповнимо зведену таблицю оцінок експертів.

2. Обчислимо суму рангів, отриманих кожним спортсменом.

3. Обчислимо середню арифметичну суму рангів: $\overline{X} = 140/7 = 20$.

4. Розрахуємо відхилення і квадрат відхилення суми рангів кожного спортсмена від середньої арифметичної суми рангів.

6. Визначимо коефіцієнт конкордації:

$m = 5$ – кількість суддів,

$n = 7$ – кількість спортсменів,

$$K = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot \left(n^3 - n\right)} = \frac{12 \cdot 642}{5^2 \cdot \left(7^3 - 7\right)} = \frac{12 \cdot 642}{25 \cdot (343 - 7)} = \frac{7704}{25 \cdot 336} = 0{,}92.$$

Коефіцієнт конкордації досить близький до 1, отже можна вважати, що думки експертів щодо техніко-тактичної майстерності спортсменів цілком узгоджені.

Визначимо для першого спортсмена дисперсію. Математичне сподівання буде для нього становити $M = 1{,}2$, тоді дисперсія $\sigma^2 = 0{,}2$, коефіцієнт варіації $V = 37{,}268$. Обчисливши аналогічні оцінки для кожного спортсмену, можна знайти загальні оцінки.

Таблиця 2

Зведена таблиця оцінок спортсменів

Експерти (m)	**Спортсмени (n)**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Σ
1	1	2	3	4	5	6	7	
2	2	1	3	4	6	5	7	
3	1	3	2	4	5	7	6	
4	1	2	3	5	4	7	6	
5	1	3	2	4	5	6	7	
$\sum_i x_i$	6	11	13	21	25	31	33	140
$X_i - \overline{X}$	-14	-9	-7	1	5	11	13	
$S = \left(X_i - \overline{X}\right)^2$	196	81	49	1	25	121	169	642

Завдання для самостійного виконання

Варіант 1

	Об'єкти							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	100	90	80	70	60	50	40	30
2	100	80	90	60	70	50	40	30
3	90	80	100	50	70	60	40	30
4	80	100	90	70	50	60	30	40
5	90	100	70	80	60	40	50	30

Варіант 2

	Об'єкти							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	90	100	80	70	60	50	40	30
2	100	80	90	60	70	50	40	30
3	100	80	90	50	70	60	40	30
4	80	100	90	70	60	50	30	40
5	90	100	70	80	60	40	50	30

Варіант 3

	Об'єкти							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	90	100	80	70	60	50	40	30
2	100	80	90	60	70	50	40	30
3	100	80	90	50	70	60	40	30
4	80	100	90	70	60	50	30	40
5	90	100	70	80	60	40	50	30
6	100	80	90	70	50	60	40	30

Варіант 4

	Об'єкти							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	90	100	80	70	60	50	40	30
2	100	80	90	60	70	50	40	30
3	100	80	90	50	70	60	40	30
4	80	100	90	70	60	50	30	40
5	90	100	70	80	60	40	50	30
6	90	100	80	70	50	60	40	30

Варіант 5

	Об'єкти							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	90	100	70	80	60	50	40	30
2	100	90	80	60	70	50	40	30
3	100	80	90	50	70	60	40	30
4	70	100	80	70	60	50	30	40
5	90	100	70	80	60	40	50	30

Варіант 6

	Об'єкти							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	90	100	70	80	60	50	40	30
2	100	80	90	60	70	50	40	30
3	100	80	90	50	70	60	40	30
4	90	100	80	70	60	50	30	40
5	90	100	70	80	60	40	50	30

Варіант 7

	Об'єкти							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	100	80	90	70	60	50	40	30
2	100	80	90	60	70	50	40	30
3	100	80	90	50	70	60	40	30
4	80	100	90	70	60	50	30	40
5	90	100	70	80	60	40	50	30
6	100	80	90	70	50	60	40	30
7	90	100	80	70	60	50	30	40

Варіант 8

	Об'єкти							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	90	100	80	70	60	50	40	30
2	100	80	90	60	70	50	40	30
3	100	80	90	50	70	60	40	30
4	80	100	90	70	60	50	30	40
5	90	100	70	80	60	40	50	30
6	100	80	90	70	60	60	30	40
7	100	90	80	70	50	60	40	30

Варіант 9								
	Об’єкти							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	90	100	80	70	60	50	40	30
2	100	80	90	60	70	50	40	30
3	100	80	90	50	70	60	40	30
4	80	100	90	70	60	50	30	40
5	90	100	70	80	60	40	50	30

Варіант 10								
Об’єкти								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	100	90	80	70	60	50	40	30
2	100	90	80	60	70	50	40	30
3	100	80	90	50	70	60	40	30
4	80	100	90	70	60	50	30	40
5	90	100	70	80	60	40	50	30

Лабораторна робота №8
Базові критерії прийняття рішень в умовах ризиків та невизначеності

Теоретичний матеріал викладений у лекції 10.

Основні завдання теми:

- навчитися будувати оціночну матрицю та матрицю ризиків;
- вивчити основні методичні підходи до обґрунтування прийняття рішень щодо заданих цілей та обмежень у ситуаціях ризику та невизначеності.

1. Побудова матриці ризиків.

Матриця ризиків будується на основі матриці наслідків (доходу). Нехай $Q = \left|q_{ij}\right|$ матриця наслідків, тоді матриця ризиків $R = \left|r_{ij}\right|$ визначається наступним чином: $r_{ij} = q_j - q_{ij}$, де q_j – максимально можливе значення (max значення відповідного стовпчика матриці наслідків).

Приклад. Нехай задана матриця наслідків:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Складемо матрицю ризиків. Визначимо відповідні значення q_j:

$q_1 = 8$, $q_2 = 5$, $q_3 = 8$, $q_4 = 12$, і обчислимо ризики r_{ij}:

$$R = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

На основі зазначених матриць розраховується найкраще з альтернативних рішень за обраним критерієм.

2. Критерій Вальда, Севіджа, Байєса-Лапласа, Гурвіца

Мінімаксний критерій (ММ), або критерій Вальда

ММ-критерій відображає позицію крайньої обережності, або крайнього песимізму. Оціночна функція ММ-критерію:

$$Z_{mm} = \max_i \left(\min_j f_{ij} \right).$$

Правило вибору відповідно до ММ-критерієм: матриця рішень доповнюється ще одним стовпчиком з найменших результатів f_{ir} будь-якого рядка. Вибирається варіант (рядок), що відповідає найбільшому значенню f_{ir}.

Обрані таким чином варіанти повністю виключають ризик. Тобто не можна зіткнутися з результатом гірше. Тому ММ-критерій вважається одним з фундаментальних, в технічних завданнях він застосовується найчастіше. Однак небажання ризикувати призводить до різних втрат.

Критерій Севіджа (S)

Це критерій відносного песимізму, який оперує поняттям ризику, або залишку: $\Delta_{ij} = \max_j f_j - f_{ij}$ – різниця між максимальним значенням *j*-го стовпчика і результатом в даному стовпці, що відповідає *i*-й альтернативі. У стовпчик вектора результатів записується максимальне значення ризику для кожної альтернативи:

$$f_{ir} = \max_j \left(\max_i f_j - f_{ij} \right).$$

Оціночна функція вибирається як мінімальне значення ризику серед усіх альтернатив:

$$Z_s = \min_i f_{ir} = \min_i \max_j \left(\max_i f_{ij} - f_{ij} \right).$$

Правило вибору: будь-який елемент матриці рішень віднімається від найбільшого результату відповідного стовпчика. Різниці утворюють матрицю залишків. Ця матриця доповнюється стовпчиком найбільших різниць. Вибирається варіант, де стоїть найменше для цього стовпчика значення.

Вимоги до застосування S-критерію ті ж, що і для ММ. Критерії Вальда та Севіджа використовують в умовах повної невизначеності.

Критерій Байеса-Лапласа (BL)

Критерій застосовують за умови існування додаткової інформації, наприклад, інформація про ймовірність аналогічних результатів в минулому або оцінка за результатами експертних опитувань можливості настання тієї чи іншої зовнішнього події. Головне, щоб події становили повну групу.

Нехай p_j – ймовірність появи зовнішнього стану j,. $\sum_j p_j = 1$.

На відміну від розглянутих раніше критеріїв критерій BL враховує можливі наслідки кожної альтернативи.

Для BL-критерію:

$$f_{ir} = \sum_j f_{ij} \cdot p_j ,$$

$$Z_{BL} = \max_i f_{ir} = \max_i \sum_j f_{ij} \cdot p_j .$$

Правило вибору: матриця рішень доповнюється ще одним стовпчиком, що містить математичні очікування результатів кожного рядка. Вибираються ті варіанти X_i, в рядках яких стоїть найбільше значення f_{ir}.

Критерій Байеса-Лапласа використовується, якщо:

- ймовірності появи станів відомі і не залежать від часу;
- рішення реалізується нескінченно (теоретично) багато разів;
- для малого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

При досить великій кількості реалізацій значення поступово стабілізується, тому ризик практично наближається до нуля.

Вихідна позиція ОПР, що застосовує критерій BL, є більш оптимістичною, ніж при мінімаксному критерії, проте передбачає більш високий рівень інформованості і досить багато реалізацій.

Критерій Гурвіца (HW)

Критерій використовується в умовах повної невизначеності. Це позиція компромісу, але максимально врівноважена: $Z_{HW} = \max\limits_{i} f_{ir}$,

$$f_{ir} = c \cdot \min_{j} f_{ij} + (1 + c) \cdot \max_{j} f_{ij}\,,\ c \in (0{,}1)$$

Правило вибору: матриця рішень доповнюється стовпчиком, що містить середньозважену суму найменшого та найбільшого результатів рядка. Вибираються ті варіанти, де стоять найбільші значення f_{ir}.

При $c = 1$ критерій Гурвіца перетворюється в мінімаксний критерій і відображає позицію крайнього песимізму, при $c = 0$ – позиція граничного оптимізму, або азартного гравця.

Вибрати множник c важко, як і сам критерій. Тому найчастіше застосовують $c = 0{,}5$ (середня точка зору). Однак наступний приклад показує, що цей критерій може виявитися невигідним:

Приклад 1. Нехай задана оціночна матриця для 3-х альтернатив:

	f_{i1}	f_{i2}	f_{i3}	f_{ir}
X_1	100	100	100	**100**
X_2	70	120	120	70
X_3	-20	30	200	-20

За критерієм ММ (Вальда) обирається альтернатива X_1.

Для застосування критерію Севіджа необхідно побудувати матрицю ризиків, або залишків. Для цього з максимального результату кожного стовпчика віднімемо відповідне значення результату з матриці рішень. У вектор результатів матриці залишків виноситься максимальне значення рядка. Кращій альтернативі відповідає мінімальне значення максимального ризику, пов'язаного з кожною альтернативою:

	f_{i1}	f_{i2}	f_{i3}	s_{ir}
X_1	0	20	100	100
X_2	30	0	80	**80**
X_3	120	90	0	120

З точки зору критерію Севіджа найкраща альтернатива – X_2, їй відповідає мінімальний ризик.

Приклад 2. Нехай деякий об'єкт треба піддати перевірці стосовно припиненням його експлуатації. Через це припиняється випуск продукції. Якщо ж вчасно не виявити несправність, то це призведе не тільки до припинення роботи, а й до поломки.

Варіанти вирішення: X_1 – повна перевірка; X_2 – мінімальна перевірка; X_3 – відмова від перевірки. Стани *j*: f_{i1} – несправностей немає; f_{i2} – є незначна несправність; f_{i3} – є серйозна несправність.

Результати f_{ij} включають:

1) витрати на перевірки і усунення несправностей;

2) витрати, пов'язані з втратами у випуску продукції і з поломкою.

Розглянемо мінімаксний (ММ), критерій Севіджа (S) і BL-критерії. Для останнього критерію приймемо, що їхні капітали в даному прикладі рівно вірогідні ($p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$). Нижче наведена матриця застосування критеріїв Вальда та Байеса-Лапласа:

	f_1	f_2	f_3	$f_{ir} = \min\limits_j f_{ij}$	$Z_{\min}$	$\sum f_{ir} \cdot p_j$	$Z_{BL} = \max\limits_j f_{ir}$
X_1	-20	-22	-25	***-25***	**-25**	-22.33	
X_2	-14	-23	-31	***-31***		-22.67	
X_3	0	-24	-40	***-40***		-21.33	**-21.33**

Як бачимо, кожен критерій пропонує своє рішення. Щоб вибрати, яким же критерієм слідувати, найкраще отримати додаткову інформацію про ситуацію.

Якщо прийняте рішення відноситься до значної кількості машин з однаковими параметрами, то доцільно дотримуватися критерію BL (є хоч якась інформація про зовнішні умови).

Якщо ж число реалізацій невелике, то кращі рішення приймають більш обережні рекомендації критерію Севіджа (S) або мінімаксного (ММ) критерію Вальда.

Нехай $p_1 = p_2 = 0{,}25$, а $p_3 = 0{,}5$ (серйозна несправність в 2 рази частіша), тоді для BL: $f_{ir} = (-23; -25; -26)$ і критерій BL також рекомендує повну перевірку (X_1). Ми отримали однаковий результат за двома критеріями.

Приклад 3. Нехай оціночна матриця має наступний вигляд:

	f_1	f_2	…	f_n	f_{ir}
X_1	10000	1	…	1	**10001**
X_2	9999	9999	…	0.99	9999.99

У цьому прикладі критерій Гурвіца пропонує вибрати першу альтернативу, хоча аналіз матриці рішень рекомендує використовувати позицію нейтралітету і вибрати альтернативу X_2.

Таким чином, HW використовується, якщо:

- про можливості появи подій нічого не відомо;
- реалізується мала кількість рішень;
- допускається деякий ризик.

Завдання для самостійного виконання

За критеріями Вальда, Севіджа, Баєса-Лапласа а Гурвіца знайти оптимальні рішення.

№ варіанта	Матриця цінності	№ варіанта	Матриця цінності	№ варіанта	Матриця цінності
1	100 80 50 90 90 70 60 70 80	6	100 80 50 90 100 70 60 90 80	11	100 70 50 90 90 60 50 60 70

2	100 70 60 80 90 70 60 70 80	7	100 80 50 80 90 70 60 90 80	12	100 70 50 80 90 60 60 70 80
3	100 80 40 70 90 60 60 70 80	8	100 80 40 70 90 50 50 70 80	13	100 80 50 70 90 60 60 70 70
4	100 80 20 80 90 40 30 40 80	9	100 80 50 80 90 70 40 70 80	14	100 80 50 70 90 70 40 60 70
5	100 80 50 80 95 70 60 70 80	10	100 80 30 90 90 40 50 60 70	15	100 80 40 80 90 70 50 70 100

Лабораторна робота №9
Метод «дерева рішень»

Теоретичний матеріал викладений у лекції 11.

Основні завдання теми:

Знаходження оптимального рішення з використанням дерева рішень складається з 3 етапів:

1. Будується дерево рішень в напрямку прийняття рішення. При цьому на граф наносяться всі відомі числові характеристики (корисності результатів, ймовірності випадкових подій) (рис. 1).

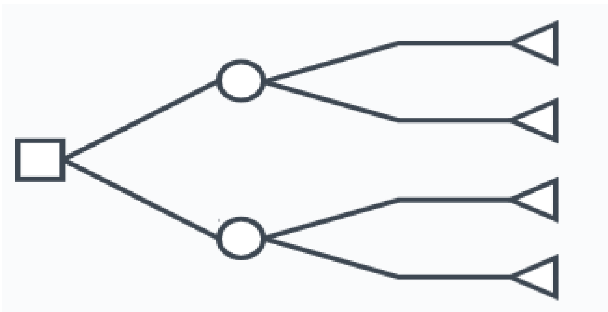

Рис. 1. Загальний вигляд «дерева рішень»

2. Оцінюється дерево рішень послідовно крок за кроком в зворотному напрямку починаючи з термінальних вершин. При оцінюванні дерева рішень послідовно обчислюються математичні очікування

випадкових подій (якщо вершина випадкова) або оцінки кращих альтернатив (якщо вершина відповідає прийняттю рішення). Дані оцінки приписуються відповідній вершині дерева. Процес оцінювання закінчується, коли оцінка приписана основі дерева.

3. Останній етап – це визначення оптимального рішення. Для знаходження оптимального рішення дерево ще раз проглядається в прямому напрямку.

Приклад. Розглядається проект купівлі частки (пакету акцій) в інвестиційному проекті. Пакет коштує 3,2 млн., і по завершенню проект принесе дохід 10 млн. із ймовірністю 0,4 або нічого із ймовірністю 0,6. При цьому через деякий час буде опубліковано прогноз аналітичної фірми щодо успіху цього проекту. Прогноз вірний із ймовірністю 0,8, тобто, рівні 0,2 умовні ймовірності. Однак, у разі позитивного прогнозу пакет породжує до 7,3 млн., а у разі негативного подешевшає до 1,2 млн. Потрібно скласти стратегію дій: чи купувати частку, чи чекати прогнозу, і чи купувати при тому чи іншому результаті прогнозу.

Побудуємо дерево рішень (рис. 2).

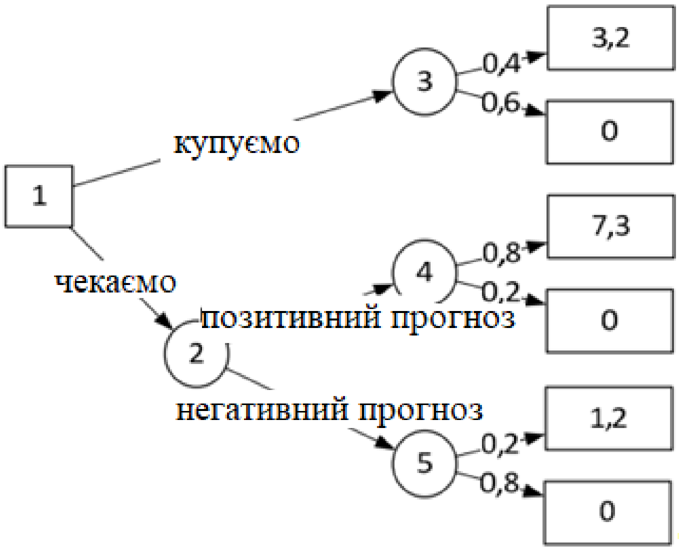

Рис 2 Дерево рішень

Оцінимо результати кожної стратегії та визначимо, які рішення слід приймати у "вирішальних" вершинах 1-5:

5: 0,2*1,2+0,8*0 = -0,96 млн. грн.

4: 0,8*7,3+0,2*0 = 5,84 млн. грн.

3: 0,4*3,2+0,6*0 = 1,28 млн. грн.

Далі вважаємо, що «позитивний» і «негативний» прогнози можуть бути рівною ймовірністю, тоді:

2: 0,5*5,84+0,5*0,96 = 3,4 млн. грн.

1: max(1,28;3,4)=3,4 – варто почекати прогноз.

Завдання для самостійного виконання

Знайти оптимальну стратегію за допомогою «дерева рішень».

Варіант 1. Фермер Маккой може вирощувати або кукурудзу, або соєві боби. Ймовірність того, що ціни на майбутній урожай цих культур підвищаться, залишаться на тому ж рівні або знизяться, що дорівнює відповідно 0.25, 0.30 та 0.45. Якщо ціни зростуть, урожай кукурудзи дасть 30 000 доларів чистого прибутку, а врожай соєвих бобів – 10 000 доларів. Якщо ціни залишаться постійними, Мак-Кой лише покриє витрати. Але якщо ціни стануть нижчими, урожай кукурудзи та соєвих бобів призведе до втрат у 35 000 та 5 000 доларів відповідно. Скласти стратегію дій на основі дерева рішень.

Варіант 2. Формула «Як стати багатим» Ж. Поля Гетгі складається з наступних елементів: «Вставай рано» – «Працюй старанно» – «Знайдеш нафту!». Значення ймовірностей настання подій та прибутку наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Обчислення очікуваних результатів пошуку нафти, зважених за ймовірністю

Рішення: "Вставай рано" + "Працюй старанно"	Можливості події	
	Не знайти нафту	Знайти нафту
Подія: прибуток (збиток), доларів	-200 000	10000 000
Подія: ймовірність настання події	0,90	0,10
Ризик = Прибуток (збиток) × Ймовірність, доларів	-180 000	1000 000
Очікуване значення результату (EV), доларів	1000000-180000 = 820 000	
	Спати допізна	Вставати рано
Працювати старанно Ймовірність	95%	=5%
Працювати з прохолодою Ймовірність	100%	0%

Варіант 3. Фірма може ухвалити рішення про будівництво великого чи дрібного підприємства. Будівництво великого підприємства відносно дешевше, якщо буде високий попит на товари, дрібне підприємство можна розширити. Діяльність фірми розглядається протягом десяти років, причому у разі будівництва дрібного підприємства питання про розширення розглядатиметься через два роки. Попит наперед невідомий (високий – $p = 0{,}75$, низький $p = 0{,}25$). Витрати та доходи: будівництво великого підприємства 5 млн грн.; будівництво малого – 1 млн грн.; витрати на розширення - 4,2 млн грн.; велике підприємство при високому попиті дає дохід – 1 млн грн. щорічно, а за низького – 300 тис. грн.; мале підприємство за високого попиту – 250 тис. грн. щорічно, за низького – 200 тис. грн.

Розширене мале підприємство у разі високого попиту приносить дохід – 900 тис. грн. на рік, і за низького попиту – 200 тис. грн.; мале підприємство без розширення при високому попиті на вироблений продукт приносить протягом двох років по 250 тис. грн. щорічно, а протягом наступних восьми по 200 тис. грн. Скласти стратегію дій на основі дерева рішень.

Варіант 4. Компанія приймає рішення, чи варто розробляти та запускати новий продукт. Очікується, що витрати на розробку становитимуть $400,000, при цьому ймовірність того, що продукт виявиться успішним, становить 70%, а ймовірність невдачі, відповідно, 30%. Нижче наведено оцінку прибутку від продажу продукту, залежно від рівня попиту – високого, середнього чи низького, а також відповідні кожному рівню ймовірності.

	Ймовірність	
Високий	0.2	$500,000 в рік, на протязі 2-х років
Середній	0.5	$400,000 в рік, на протязі 2-х років
Низький	0.3	$300,000 в рік, на протязі 2-х років

У разі невдачі є 60% ймовірність того, що результати розробки можна буде продати за $50,000, проте існує 40% ймовірність, що продати ці результати буде неможливо.

Варіант 5. Фірма, що виробляє обчислювальну техніку, провела аналіз ринку нового високопродуктивного персонального комп'ютера. Якщо буде випущена крупна партія комп'ютерів, то при сприятливому ринку прибуток складе 250 тис. грн., а за несприятливих умов фірма зазнає збитків в 185 тис. грн.. Невелика партія техніки в разі її успішної реалізації принесе фірмі 50 тис. грн.. прибутку і 10 тис. грн.. збитків − за несприятливих умов. Можливість сприятливого і несприятливого результатів фірма оцінює однаково. Використовуючи дерево рішень, виберіть правильну техніко-економічну стратегію. Яка очікувана грошова оцінка найкращого рішення?

Варіант 6. Головному інженерові компанії, треба вирішити, впроваджувати чи ні нову виробничу лінію, що використовує новітню технологію. Якщо нова лінія безвідмовно працюватиме, компанія отримає прибуток 200 млн. грн.. Якщо ж вона відмовить, то компанія може втратити 150 млн. грн.. По оцінках інженера, існує 60% шансів, що нова виробнича лінія відмовить. Можна створити експериментальну установку, а потім вже вирішувати, вмонтовувати чи ні виробничу лінію. Експеримент обійдеться в 10 млн. грн.. Існує 50% шансів, що експериментальна установка працюватиме. Якщо експериментальна установка працюватиме, то 90% шансів за те, що виробнича лінія, якщо її змонтувати, також працюватиме. Якщо ж експериментальна установка не працюватиме, то лише 20% шансів за те, що виробнича лінія працюватиме. Чи слід будувати експериментальну установку? Чи слід впроваджувати виробничу лінію?

Варіант 7. Для підприємства розроблено три варіанти розвитку (A, B, C). Розмір виграшу, який можна отримати, залежить від сприятливого або несприятливого стану ринку: ймовірність сприятливого результату проекту A = 0,6; проекту B = 0,4; проекту C = 0,5. Використовуючи дерево рішень, оберіть правильний проект.

Номер варіанту	Проект	Виграш в залежності від стану ринку, грн	
		сприятливий	несприятливий
1	A	200 000	100 000
2	B	300 000	100 000
3	C	270 000	80 000

Варіант 8. Підприємець провів аналіз, пов'язаний з відкриттям нового магазину. Якщо він відкриє великий магазин, то при сприятливому ринку отримає 60 млн. грн, при несприятливому ж ринку зазнає збитків 40 млн. грн. Маленький магазин принесе йому 30 млн. грн. прибутку при сприятливому ринку і 10 млн. грн. збитків при несприятливому. Можливість сприятливого і несприятливого ринків він оцінює однаково. Дослідження ринку, яке можна замовити в спеціалістів коштує 5 млн. Експерти вважають, що з імовірністю 0,6 ринок виявиться сприятливим. В той же час при позитивному висновку експертів ринок виявиться сприятливим лише з імовірністю 0,9. При негативному висновку експертів ринок теж може виявитися сприятливим з імовірністю 0,12. Чи слід замовити проведення обстеження ринку? Чи слід відкрити великий магазин? Яка очікувана вартісна цінність найкращого рішення?

Варіант 9. Керівництво компанії вирішує, чи створювати для випуску нової продукції велике підприємство, мале підприємство чи продати патент іншій фірмі. Розмір виграшу, який компанія може одержати, залежить від сприятливого чи несприятливого стану ринку. За допомогою дерева рішень надати рекомендації щодо прийняти управлінського рішення.

№ п/п	Дії компанії	Виграш, при стані економічного середовища, у.о.	
		Сприятливому	Несприятливому
1	Будівництво великого підприємства	200 000	-180 000
2	Будівництво малого підприємства	100 000	- 20 000
3	Продаж патенту	10 000	10 000

Варіант 10. Розглянемо типову бізнес -ситуацію. Компанії потрібно вибрати вигідне інвестиційне вкладення П1, П2, П3 за допомогою дерева рішень. Перший проект вимагає вкладення в розмірі 200 млн. грн. і принесе прибуток 100 млн. грн . Для другого необхідно 300 млн. грн. , але принесе 200 млн. грн . Третій, самий прибутковий, - 300 млн. грн., але потрібно вкласти 500. При цьому є ризик втратити все. При першому варіанті рівень ризику - 10 %, при другому - 5 %, і при третьому - 20 %. Який з проектів буде самий вигідний?

Лабораторна робота №10
Методи прогнозування

Теоретичний матеріал викладений у лекції 11.

Основні завдання теми:

- навчитися застосовувати методи прогнозування для прийняття оптимального рішення;
- ознайомитись із задачми прийняття рішень в умовах неповної визначеності;
- навчитись застосовувати метод дерева рішень для визначення оптимальної стратегії в умовах неповної визначеності.

Метод ковзаючого середнього.

Нехай часовий ряд (значення проіндексовані у хронологічному порядку) є стійким і його члени є реалізацією наступного випадкового процесу:

$$y_t = b + \varepsilon_t, \quad (1)$$

де b – невідомий постійний параметр, який оцінюється на підставі існуючої інформації, ε_t – випадкова похибка з нульовим математичним сподіванням. Дані для різних часових періодів не корельовано і останні n спостережень є рівнозначно важливими для оцінки параметра b. Тоді значення для моменту часу $t+1$ знаходяться за формулою:

$$y_{t+1} = \frac{y_{t-n+1} + y_{t-n+2} + \ldots + y_t}{n}. \quad (2)$$

Необхідно зазначити, що для вибору n не існує чіткого правила. Якщо спостереження на досить великому часовому проміжку задовольняють моделі (1), то n може бути великим, а якщо спостереження відповідають моделі на малому часовому проміжку, то краще для n брати малі значення. На практиці дляn величини n, як правило, беруть значення від 2 до 10.

Експоненціальне згладжування.

В основі методу експоненціального середнього лежить така ж сама модель, що і в методі ковзаючого середнього (10.1) але, якщо в методі ковзаючого середнього всі значення вважаються рівноцінними, то в методі експоненціального згладжування останнім значенням y_t надається більший ваговий коефіцієнт:

$$y_{t+1} = \alpha \cdot y_t + \alpha(1-\alpha) \cdot y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 \cdot y_{t-2} + ...,$$

де $\alpha \in (0,1)$ – константа згладжування. Видно, що більші значення константи α визначають більші ваги останнім спостереженням.

Приклад.

Нехай заданий часовий ряд (табл. 1). Необхідно проаналізувати прибуток та зробити прогноз для $t = 8$ методом ковзної середньої для $n = 2, n = 4$; методом експонентного згладжування для $\alpha = 0{,}6$.

Таблиця 1

Вихідні дані часового ряду

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t (тис. од.)	46	50	48	53	51	52	57

Побудуємо графік часового ряду (рис. 2). З графіка видно, що спостерігається явна тенденція до зростання значень часового ряду, що призведе до неточності в прогнозах, виконаних методами ковзного середнього та експоненційного згладжування.

Для прогнозування методом ковзного середнього достатньо виконати єдиний розрахунок:

$$y_{8(m=4)} = \frac{52+57}{2} = 54{,}500 \text{(тис. од.)};$$

$$y_{8(m=4)} = \frac{53+51+52+57}{4} = 53{,}250 \text{(тис. од.)}.$$

Скористаємось формулою (2) та складемо розрахункову таблицю (табл. 2) намалюємо графіки (рис. 1) та (рис. 2).

Таблиця 2

Значення ковзаючого середнього

Місяць	Прибуток	Ковзаюче середнє		Абс. відхилення Δ		Відносне відхилення δ %	
		2 м-ці	4 м-ці	2 м-ці	4 м-ці	2 м-ці	4 м-ці
1	46						
2	50						
3	48	48,000		0,000		0,000	

4	53	49,000		4,000		7,500	
5	51	50,500	49,250	0,500	1,750	9,800	3,400
6	52	52,000	50,500	0,000	1,500	0,000	2,900
7	57	51,500	51,000	5,000	6,000	8,800	10,5
8		54,500	53,250	1,900	3,083	3,500	5,800

Абсолютне відхилення за 8-й місяць визначається як середнє арифметичне відповідних відхилень за попередні місяці, так для $n=2$: $\Delta_8 = \sum_{i=3}^{7} \Delta_i / 5$. Відносне відхилення визначається як відношення абсолютного відхилення до точного табличного значення помножимо на 100%: $\delta_i = \left(\Delta_i / |a|\right) \cdot 100\%$.

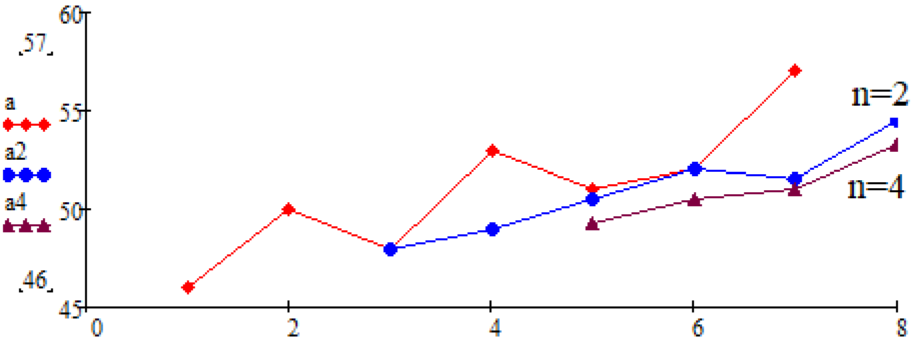

Рис. 1. Графіки прогнозу методом ковзаю чого середнього

Для аналізу відхилень треба вибрати однакову кількість спостережень, отже візьмемо дані з 5-го місяця по 8-й. Знайдемо середньоквадратичну похибку:

$$\sigma_{(n=2)} = \left(\sqrt{\sum_{i=5}^{7} \Delta^2_{i(n=2)}} \right) / 3 = 2{,}512, \; \sigma_{(n=4)} = \left(\sqrt{\sum_{i=5}^{7} \Delta^2_{i(n=4)}} \right) / 3 = 2{,}142.$$

За абсолютною та відносною похибкою більш точним є результат, отриманий при $n=2$, але за середньоквадратичною похибкою невелику перевагу має оцінка при $n=4$.

Для прогнозування методом експоненціального згладжування необхідно провести розрахунки для всіх моментів часу, крім $t=1$:

$$y_{2(\alpha=0{,}6)} = 0{,}6 \cdot 46 + 0{,}4 \cdot 46 = 46{,}000;$$
$$y_{3(\alpha=0{,}6)} = 0{,}6 \cdot 50 + 0{,}4 \cdot 46 = 48{,}400;$$

$y_{4(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 48 + 0,4 \cdot 48,4 = 48,16;$

$y_{5(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 53 + 0,4 \cdot 48,16 = 51,064;$

$y_{6(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 51 + 0,4 \cdot 51,064 = 51,026;$

$y_{7(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 52 + 0,4 \cdot 51,026 = 51,610;$

$y_{8(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 57 + 0,4 \cdot 51,610 = 54,844$ (тис. од.).

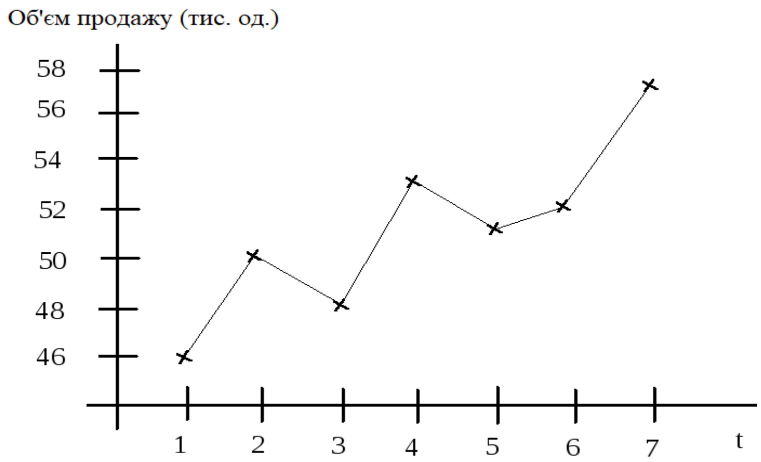

Рис. 2. Графік часового ряду

Завдання для самостійного виконання

1. За заданим часовим рядом знайти прогноз для $t = 11$ для $n = 2,4$; методом експонентного згладжування для $\alpha = 0,7$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t (тис. од.)	12	15	16	12	13	15	12	16	14	15

2. За заданим часовим рядом знайти прогноз для $t = 11$ для $n = 2,3$; методом експонентного згладжування для $\alpha = 0,65$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t (тис. од.)	37	35	36	32	33	29	27	30	27	25

3. За заданим часовим рядом знайти прогноз для $t = 12$ для $n = 2,4$; методом експонентного згладжування для $\alpha = 0,6$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
y_t (грн.)	760	820	846	790	760	780	830	890	916	931	950

4. За заданим часовим рядом знайти прогноз для $t = 12$ для $n = 2,3$; методом експонентного згладжування для $\alpha = 0,7$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t (од.)	4	5	5	6	9	9	8	10	11	13

5. За заданим часовим рядом знайти прогноз для $t = 12$ для $n = 2,5$; методом експонентного згладжування для $\alpha = 0,7$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t (од.)	2,8	3	3,5	4,6	5	5,6	6,2	7	7,1	7,3

6. За заданим часовим рядом знайти прогноз для $t = 12$ для $n = 2,4$; методом експонентного згладжування для $\alpha = 0,7$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t (од.)	4	5	5	6	9	9	8	10	11	13

7. За заданим часовим рядом знайти прогноз для $t = 11$ для $n = 2,3$; методом експонентного згладжування для $\alpha = 0,7$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t (тис. од.)	12	15	16	13	12	15	12	16	14	15

8. За заданим часовим рядом знайти прогноз для $t = 11$ для $n = 2,4$; методом експонентного згладжування для $\alpha = 0,65$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t (тис. од.)	37	36	35	32	33	29	27	30	27	25

9. За заданим часовим рядом знайти прогноз для $t = 12$ для $n = 2,5$; методом експонентного згладжування для $\alpha = 0,7$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t (од.)	2,6	3	3,4	4,8	5	5,6	6,5	7	7,1	7,3

10. За заданим часовим рядом знайти прогноз для $t = 11$ для $n = 2,4$; методом експонентного згладжування для $\alpha = 0,7$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t (тис. од.)	35	36	37	32	33	27	29	30	27	25

Лабораторна робота №11
Елементи теорії ігор. Матричні ігри

Теоретичний матеріал викладений у лекції 12.

Основні завдання теми:

- ознайомитись з методами прийняття рішень у конфліктних ситуаціях;
- навчитись формалізувати задачі прийняття рішень конфліктної ситуації двох гравців;
- вміти оцінювати стратегії поведінки та знаходити оптимальну.

Матрична гра між двома гравцями A та B задається матрицею виграшів:

	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	A_{11}	A_{12}	$\dots$	A_{1n}
A_2	A_{21}	A_{22}	$\dots$	A_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	A_{m1}	A_{m2}		A_{mn}

де A_{ij} виграш гравця A, в разі, якщо він скористається стратегією A_i, а гравець B – стратегією B_j.

Для вибору оптимальної стратегії використовують ***принцип максиміна*** для визначення оптимальної стратегії гравця A (нижня ціна гри) та ***принцип мінімаксу*** для гравця B (верхня ціна гри) (рис. 1).

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i	
A_1	5	6	7	4	5	4	
A_2	3	10	6	5	6	3	
A_3	12	5	3	9	8	3	
A_4	6	7	5	6	10	**5**	$\alpha = \max\limits_i \min\limits_j A_{ij}$
β_i	12	10	7	9	10		
			$\beta = \min\limits_j \max\limits_i A_{ij}$				

Рис. 1. Приклад матриці виграшів з визначенням нижньої та верхньої ціни гри

Якщо нижня ціна гри дорівнює верхній ціні гри $\max_i \min_j A_{ij} = \min_j \max_i A_{ij}$ то кажуть, що матриця виграшу має сідлову точку і така гра має розв'язок у чистих стратегіях. Оптимальними будуть стратегії, що відповідають сідло вій точці.

Якщо матриця виграшів не має сідловок точки то задача відшукання оптимальних стратегій вирішується у змішаних стратегіях. Застосування змішаних стратегій здійснюється, наприклад, таким чином: гра повторюється багато разів, але в кожній партії гравець застосовує різні чисті стратегії з відносними частотами їх застосування, рівними p_i (гравець A) і q_j (гравець B). Завдання змішаної стратегії гравця полягає у визначенні ймовірностей, з якими вибираються його чисті стратегії, причому ймовірності повинні становити повну групу подій:

$$\sum_i p_i = 1, \ \sum_j q_j = 1. \quad (1)$$

Величину $v = \alpha = \beta$ назвемо ціною гри. Якщо $v > 0$, то гра вигідна для гравця *A*, якщо $v < 0$ – для гравця *B*; при $v = 0$ гра справедлива, є однаково вигідною для обох учасників.

Будемо позначати змішані стратегії гравців *A* і *B* відповідно:

$$S_A = (p_1, p_2, ..., p_m); \qquad S_B = (q_1, q_2, ..., q_n).$$

Якщо гравець *A* застосовує змішану стратегію $S_A = (p_1, p_2, ..., p_m)$, а гравець *B* змішану стратегію $S_B = (q_1, q_2, ..., q_n)$, то середній виграш (математичне очікування) гравця *A* визначається співвідношенням:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot p_i \cdot q_j . \quad (2)$$

Природно, що очікуваний програш гравця *B* дорівнює такій самій величині v. Виходячи з умови (1) та умови (2) спочатку за кожним рядком, а потім та стовпчиком матриці виграшів складається лінійне рівняння. В результаті будемо мати дві системи рівнянь відносно (p_i, v) та (q_j, v) розв'язавши які визначимо ймовірності змішаних стратегій відповідно для першого та другого гравця.

Розглянемо гру розмірності 2 х 2 задану наступною платіжною матрицею:

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Припустимо, що гра не має сідлової точки, Отже, відповідно до основної теореми гра має оптимальне рішення в змішаних стратегіях:

$S_A = (p_1, p_2)$ і $S_B = (q_1, q_2)$, де:

$$p_1 + p_2 = 1,\ q_1 + q_2 = 1. \quad (3)$$

якщо гравець *A* використовує свою оптимальну змішану стратегію, а гравець *B* – свою чисту активну стратегію B_1 (B_2), то ціна гри v відповідно дорівнює:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v, \quad (4)$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v \quad (5)$$

Рівняння (3), (4) і (5) утворюють систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомим: p_1, p_2 і v.

Вирішуючи її, легко знаходимо, що:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \quad p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (6)$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

Якщо гравець *B* використовує свою оптимальну змішану стратегію, а гравець *A* – свою чисту активну стратегію A_1 (A_2), то ціна гри v відповідно дорівнює:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v \quad (7).$$

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v \quad (8)$$

Рівняння (3), (7) і (8) утворює систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими: q_1; q_2 і v.

Вирішуючи її, легко знаходимо, що

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}, \quad q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} \quad (9)$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}.$$

Щоб співвідношення (6), (9) мали сенс, необхідно, щоб виконувались наступні вимоги:

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0 \\ a_{11} - a_{12} > 0 \\ a_{22} - a_{12} > 0 \\ a_{11} - a_{21} > 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0 \\ a_{11} - a_{12} < 0 \\ a_{22} - a_{12} < 0 \\ a_{11} - a_{21} < 0 \end{cases}$$

Тоді $p_1 \in (0,1),\ p_2 \in (0,1),\ q_1 \in (0,1),\ q_2 \in (0,1)$.

Рішення системи рівнянь (6), (9), отримані алгебраїчним методом, але їх зручно отримувати і графічним методом (рис. 1). Для знаходження ймовірностей p_1, p_2 і ціни гри v в прямокутній системі координат по осі абсцис відкладається ймовірність $p_1 \in [0,1]$, а по осі ординат – відповідні виграші гравця *A*.

При $p_1 = 0$, гравець *A* застосовує чисту стратегію A_2. Якщо при цьому гравець *B* застосовує чисту стратегію B_1, то виграш гравця *A* дорівнює a_{21}, а якщо гравець *B* застосовує чисту стратегію B_2, то виграш гравця *A* дорівнює a_{22}.

При $p_1 = 1$, гравець *A* застосовує чисту стратегію A_1. Якщо при цьому гравець *B* застосовує чисту стратегію B_1, то виграш гравця *A* дорівнює a_{11}, а при застосуванні чистої стратегії B_2 – a_{12}.

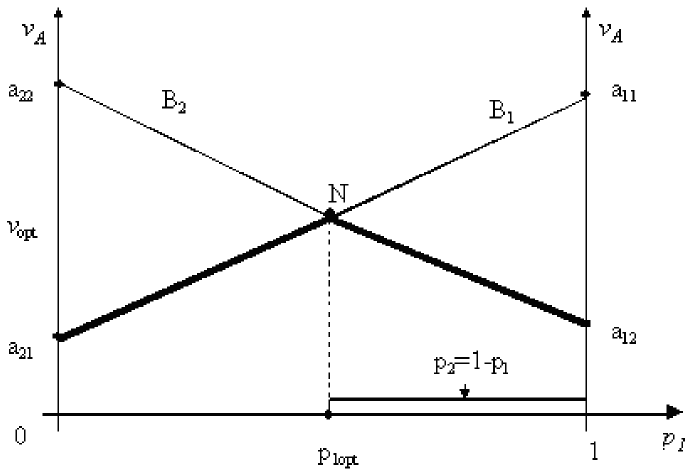

Рис. 1 Графічне представлення системи рівнянь 6

Так як значення p_1 лежать в межах [0,1], то поєднуючи крайні точки для стратегій B_1 і B_2 (графіки функцій $v_A = (a_{11} - a_{21})p_1 + a_{22}$ і

$v_A = (a_{12} - a_{22})p_1 + a_{22}$, отримуємо значення виграшів гравця *A* для всіх проміжних значень p.

Відповідно до принципу максиміна, гравець *A* повинен вибрати таку змішану стратегію, при якій його мінімальний виграш максимальний. Точка N перетину відрізків прямих (рис. 2) і визначає як оптимальну ціну гри v_{opt}, так і оптимальні ймовірності p_{1opt} і $p_{2opt} = 1 - p_{1opt}$, змішаної стратегії гравця *A*, а саме дає розв'язок системи рівнянь (6).

Для графічного рішення системи (9), відкладемо по осі абсцис ймовірність $q \in [0,1]$, а по осі ординат відповідні виграші гравця *B*:

$$v_B = (a_{11} - a_{12})q_1 + a_{12}, \quad v_B = (a_{21} - a_{22})q_1 + a_{22}.$$

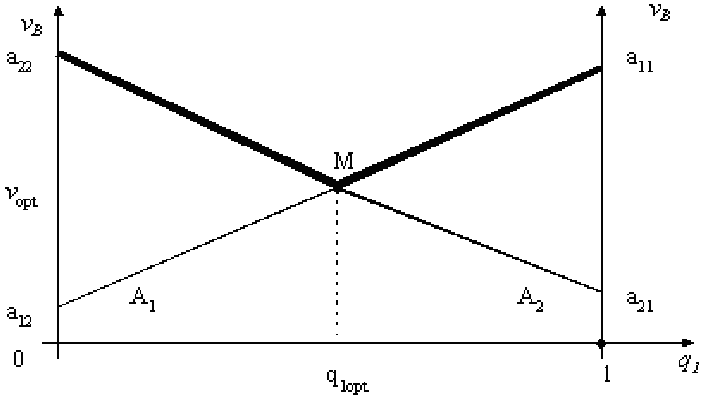

Рис. 2. Графічне представлення системи 9

Рішенням є координата точки *M* перетину прямих, що описуються нашими рівняннями: q_{1opt}, $q_{2opt} = 1 - q_{1opt}$ і v_{opt}. Це випливає і з принципу максиміна, відповідно до якого гравець *B* повинен вибрати таку змішану стратегію, при якій його максимальний програш буде мінімальним.

Приклад. Знайти алгебраїчним і геометричним методами рішення гри, платіжна матриця якої має вигляд:

	B_1	B_2	α
A_1	4	-2	-2
A_2	1	3	**1**
β	4	**3**	

У даній грі нижня ціна гри $\alpha = 1$ і не дорівнює верхній ціни гри $\beta = 3$, тому гра не має сідлової точки і, відповідно до основної теореми матричних ігор, має оптимальне рішення в змішаних стратегіях.

Для гравця *A* оптимальні ймовірності застосування стратегій A_1 і A рівні:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3-1}{4+3-1+2} = \frac{1}{4}$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4+2}{4+3-1+2} = \frac{3}{4}.$$

Для гравця *B* оптимальні ймовірності застосування стратегій B_1 і B_2 рівні:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3+2}{4+3-1+2} = \frac{5}{8}$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4-1}{4+3-1+2} = \frac{3}{8}$$

Таким чином, оптимальні змішані стратегії гравців:

$$S_A = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right),\ S_B = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right),$$

ціна гри:

$$v = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 \cdot 3 - (-2) \cdot 1}{4+3-1+2} = \frac{7}{4}.$$

Так як $v > 0$, то гра вигідна для гравця *A* (рис. 3).

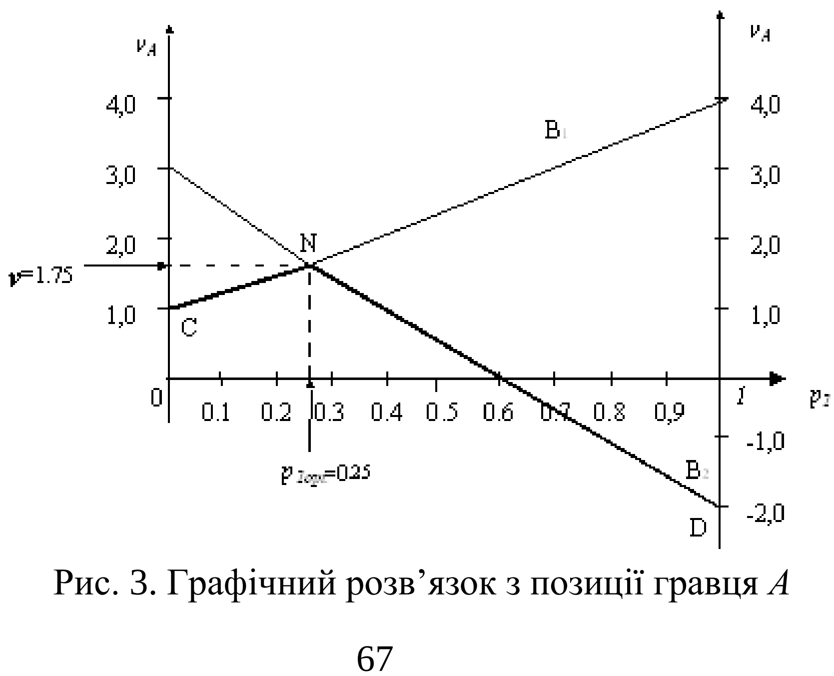

Рис. 3. Графічний розв’язок з позиції гравця *A*

Нижня межа виграшу гравця *A* визначається ламаної *CND*. Оптимальне рішення, визначається точкою *N* і дає теж рішення, що і алгебраїчний метод: $S_A = (0{,}25;\, 0{,}75)$.

Геометричне зображення гри для гравця *B* показано на рис.4.

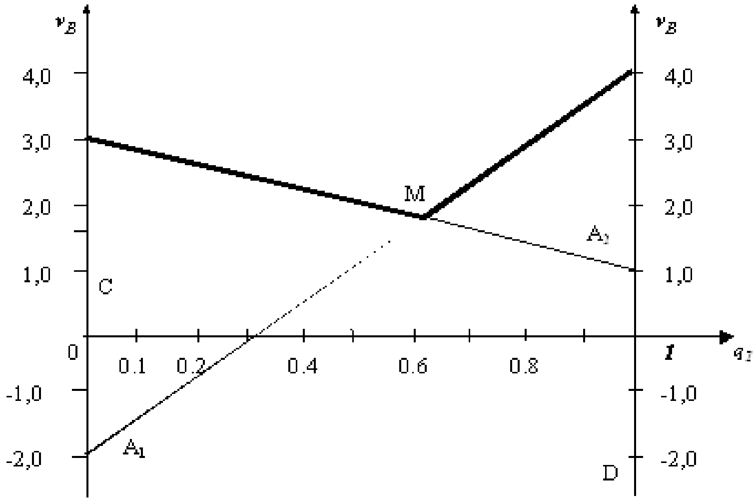

Рис. 4. Графічний розв'язок з позиції гравця *B*

Оптимальне рішення, яке визначається точкою *M*, дає рішення:

$$S_B = (0{,}625;\, 0{,}375),\ v = 1{,}75.$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти алгебраїчним і геометричним методами рішення гри, платіжна матриця якої має вигляд:

№ варіанта	Матриця	№ варіанта	Матриця	№ варіанта	Матриця
1	5 -2 2 3	6	5 -1 1 3	11	10 -3 3 6
2	4 -1 1 3	7	5 -1 2 4	12	10 -2 2 6
3	3 1 -1 3	8	9 1 -1 5	13	10 1 1 4
4	4 -2 -1 3	9	9 1 1 5	14	9 1 1 4
5	8 2 2 5	10	8 2 2 5	15	8 1 2 4

Лабораторна робота №12
Матричні ігри. Чисті та змішані стратегії

Теоретичний матеріал викладений у лекції 12.

Зведення гри до задачі лінійного програмування

Короткі теоретичні відомості:

Для того, щоб вирішити матричну гру в змішаних стратегіях, потрібно скласти пряме та двоїсте завдання лінійного програмування. У двоїстої задачі розширена матриця, в якій зберігаються коефіцієнти при змінних у системі обмежень, вільні члени і коефіцієнти при змінних функції цілі, транспонується. При цьому мінімуму функції мети вихідного завдання ставиться у відповідність максимум у двоїстому завданні.

Функція цілі у прямій задачі лінійного програмування:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} x_j \to \max(\min).$$

Система обмежень у прямій задачі лінійного програмування:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1 (\ge 1), \quad i=\overline{1,m}, \qquad x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}$$

Функція цілі у двоїстому завданні:

$$g(y)=\sum_{i=1}^{m} y_i \to \min(\max).$$

Система обмежень у двоїстому завданні:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge 1 (\le 1), \quad j=\overline{1,n}, \qquad y_i \ge 0, \quad i=\overline{1,m}$$

Оптимальний план прямої та двоїстої задачі лінійного програмування відповідно позначимо:

$$x^*=\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)^T, \qquad y^*=\left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\right).$$

Лінійні форми для відповідних оптимальних планів позначимо $f(x^*)$ і $g(y^*)$, а знаходити їх слід як суми відповідних координат оптимальних планів.

Змішані стратегії першого та другого гравців будуть визначатись відповідними ймовірностями:

$$p^* = \left(p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*\right), \quad q^* = \left(q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*\right)^T.$$

Доведено, що ціна гри виражається через лінійні форми оптимальних планів наступним чином:

$$v = \frac{1}{f(x^*)} = \frac{1}{g(y^*)},$$

тобто є величиною, оберненою до сум координат оптимальних планів. Звідси: $p^* = v \cdot y^*$, $q^* = v \cdot x^*$, де другі співмножники є векторами. Оптимальні змішані стратегії, як вже було визначено, є векторами. Тому, помноживши число (ціну гри) на вектор (з координатами оптимальних планів) отримаємо вектор.

Приклад. Нехай гра задана платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти оптимальні стратегії та ціну гри.

Розв'язок. Оскільки $\alpha = 1$ не дорівнює $\beta = 3$, то гра немає сідлової точки. У цій грі немає дублюючих та домінуючих стратегій. Отже, гру будемо вирішувати шляхом вирішення пари двоїстих завдань лінійного програмування.

Математичні моделі пари подвійних завдань лінійного програмування виглядатимуть так:

	Пряма задача	Двоїста задача
Цільова функція:	$f = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$	$g = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$
Обмеження:	$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \ge 1 \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \ge 1 \\ 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \ge 1 \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3. \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \le 1 \\ 3 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \le 1 \\ 1 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \le 1 \\ y_j \ge 0, \quad j = 1,2,3. \end{cases}$

Ці завдання вирішуються, наприклад, симплекс - методом. Двоїста задача вирішується простіше (не потрібно вводити штучні змінні, що обумовлено типом обмежень). Оптимальне рішення вихідної задачі можна буде безпосередньо отримати з даних сімплекс - таблиці для оптимального вирішення двоїстої задачі.

Початкова симплекс - таблиця двоїстої задачі має вигляд:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Розв'язок	
y_4	1	2	3	1	0	0	1	
y_5	3	1	1	0	1	0	1	←ведучий рядок
y_6	1	3	1	0	0	1	1	
g	-1	-1	-1	0	0	0	0	
	↑ведучий стовпчик							

Наступні симплекс – таблиці наведені нижче:

БЗ	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Розв'язок	
y_4	0	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
y_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
y_6	0	$2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	←ведучий рядок
g	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
	↑ведучий стовпчик							

БЗ	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Розв'язок	
y_4	0	0	$\frac{9}{4}$	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	←ведучий рядок
y_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	
y_2	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	
g	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	
	↑ведучий стовпчик							

Нарешті, отримуємо симплекс-таблицю, яка відповідає оптимальному рішенню двоїстої задачі:

БЗ	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Розв’язок
y_3	0	0	1	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$
y_1	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$
y_2	0	1	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$
g	0	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

Отримаємо оптимальний розв’язок двоїстої задачі:

$$y_1 = \frac{2}{9},\ y_2 = \frac{2}{9},\ y_3 = \frac{1}{9},\ \max g = \frac{5}{9} \Rightarrow v = \frac{1}{g(y^*)} = \frac{9}{5}.$$

Знайдемо оптимальну змішану стратегію гравця B:

$$q_1 = y_1 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5},\ q_2 = y_2 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5},\ q_3 = y_3 \cdot v = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5}.$$

Отже, $S_B = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Оптимальне рішення вихідної задачі знаходимо, використовуючи двоїсті оцінки: коефіцієнт при початковій базисній змінній в оптимальному рівнянні прямої задачі дорівнює різниці між правою та лівою частинами обмеження двоїстої задачі, асоційованого з даною початковою зміною.

Отримаємо: $x_1 = \frac{2}{9},\ x_2 = \frac{2}{9},\ x_3 = \frac{1}{9},\ \max f = \frac{5}{9}$.

Звідси знайдемо ймовірність застосування своїх активних стратегій гравцем А:

$$p_1 = x_1 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5},\ p_2 = x_2 \cdot v = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{2}{5},\ p_3 = x_3 \cdot v = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{1}{5}.$$

Отже, $S_A = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Варіанти для індивідуальних завдань

Знайти оптимальні стратегії та ціну гри. Гра задана платіжною матрицею:

№ варіанта	Матриця	№ варіанта	Матриця	№ варіанта	Матриця
1	1 3 3 3 2 1 1 3 1	6	1 2 6 6 1 1 1 6 1	11	2 3 6 6 2 2 2 6 2
2	1 1 2 2 1 1 1 2 1	7	2 4 3 4 2 2 2 3 4	12	3 2 1 1 3 2 2 1 3
3	1 1 3 3 2 1 2 3 1	8	1 2 3 3 1 1 2 3 1	13	5 4 3 3 5 3 3 3 5
4	1 3 4 4 1 1 1 4 1	9	3 1 2 1 3 1 2 1 3	14	1 3 6 6 1 1 1 6 1
5	1 3 4 4 2 1 2 4 1	10	2 3 5 5 2 2 2 5 2	15	3 5 6 6 3 3 3 6 3

Список літератури

1. Коряшкіна Л. С Моделі й методи прийняття рішень: навч. Посібник – Дніпропетровськ : НГУ, 2014. 300 с.
2. Волошин, О. Ф. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 336 с.
3. Подиновський В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальні рішення багатокритеріальних задач. – М. : Наука, Головна редакція фізико-математичної літератури, 1982. – 256с.
4. Василенко В.О. Теорія і практика розробки управлінських рішень. Навч. посібник. / В.О. Василенко– Київ: ЦУЛ, 2003. – 420с.
5. Вітлінський В.В. Аналіз ризиків. – Київ.: КНЕУ, 2002. – 198 с.
6. Гнатієнко Г.М. Експертні технології прийняття рішень: Монографія. / Г.М. Гнатієнко, В.Є. Снитюк – К.: ТОВ «Маклаут», 2008. – 444 с.
7. Приймак В.М. Прийняття управлінських рішень: Навч. посібник. – К.: Атіка, 2008. – 240 с.
8. Демиденко М.А. Системи підтримки прийняття рішень : Навч. посіб. Нац. гірн. ун-т. Електрон. дані. Д. 2016. 104 с. – Режим доступу: http://kist.ntu.edu.ua/textPhD/sppr2.pdf. / (дата звернення: 1.10.2023).
9. Кушлик-Дивульська О.І., Кушлик Б.Р. Основи теорії прийняття рішень. – К.: НТУУ «КПІ», 2014. – 94с.
10. Акуленко К. Ю. Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Теорія прийняття рішень» для студентів спеціальності 122 «Компютерні науки» денної форми навчання. – Рівне: НУВГП. 2017. – 51 с.
11. Негрей М.В. Теорія прийняття рішень: Навч. посібник. / М.В. Негрей, К.Л. Тужик – Київ: Центр навчальної літератури (ЦУЛ), 2019. – 272 с.
12. Катренко А.В. Прийняття рішень: теорія та практика : Підручник. / А.В. Катренко, В.В. Пасічник – Львів: «Новий Світ-2000», 2020. – 447 с.
13. Ізмайлова О.В. Методи прийняття багатокритеріальних рішень в інформаційних системах. Навч. посібник. – К.: КНУБА, 2002. – 112 с.

Навчально-методичне видання

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт № 1-12
для підготовки здобувачів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки» та
126 «Інформаційні системи і технології»

Укладачі: О.В. Горда,
Ю.Ю. Нечипорук

Комп'ютерне верстання

Підписано до друку 22.02.2024 Формат 60 × 84 1/ 16
Ум. друк. арк. 1,16. Обл.-вид. арк. 1,25.
Електронний документ. Вид № 59/ІІІ-17.

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03037
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.