МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

# ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.
# КІНЕМАТИКА.
# КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Методичні вказівки
до вивчення курсу
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти спеціальностей
131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»,
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,
192 «Будівництво та цивільна інженерія»
за ОПП «Міське будівництво та господарство»

Київ 2025

УДК 531.3
Т11

Укладачі: В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук, професор;
К.Е. Котенко, канд. техн. наук, професор

Рецензент К.І. Почка, д-р техн. наук, професор

Відповідальний за випуск В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук, професор

*Затверджено на засіданні кафедри теоретичної механіки, протокол № 4 від 13 травня 2025 року.*

В авторській редакції.

**Теоретична** механіка. Кінематика. Комп'ютерні технології : методичні вказівки до вивчення курсу / уклад. : В.В. Гайдайчук, К.Е. Котенко. – Київ : КНУБА, 2025. − 56 с.
Т11

Містять приклади задач з теоретичної механіки розділу кінематика та методику їх розв'язання з використанням комп'ютерного програмування.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, які навчаються за спеціальностями 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», і 192 «Будівництво та цивільна інженерія» за ОПП «Міське будівництво та господарство».

КНУБА, 2025

# ЗМІСТ

# ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

«Теоретична механіка» є фундаментальною дисципліною фізико-математичного циклу, що вивчає закони руху і рівноваги тіл та виникаючу взаємодію між ними. В цьому відношенню вона є основою «Опору матеріалів», «Будівельної механіки», «Теорії механізмів і машин», «Деталей машин» та інших важливих інженерних дисциплін, які охоплюють широкий спектр знань, необхідних для розробки, проєктування, будівництва та експлуатації різних механічних систем.

Загальний курс «Теоретичної механіки» розглядається в такихрозділах: статика, кінематика, динаміка та аналітична механіка. Кожний розділ курсу відрізняється специфікою тематики.

Основними задачами розділу кінематики є визначення основних законів руху та знаходження таких кінематичних характеристик: траєкторії руху, швидкості і прискорення.

Важливою передумовою для виконання такого завдання є математичне моделювання кінематичної поведінки тіла.

Наведені методичні вказівки сприяють успішному засвоєнню матеріалів дисципліни і набуттю навичок його практичного використання. Вони містять короткі теоретичні відомості і приклади задач на кінематику матеріальної точки, обертальний та плоскопаралельний рухи твердого тіла з використанням комп'ютерного програмування. Успішне засвоєння здобувачами освіти комп'ютерного моделювання і виконання розрахунків задач різного ступеня складності у розповсюдженій математичній системі *програмування MathCAD* є важливим фактором підготовки фахівця інженерного профілю.

Основною *метою даної роботи* є застосування ефективних підходів і формування методичних умов для поглибленого засвоєння студентами теоретичного матеріалу розділу «КІНЕМАТИКА» та його поширеного практичного використання.

*Завданням роботи* є навчити студентів використанню системи *MathCAD* для аналізу кінематичної поведінки твердих тіл і матеріальних точок відповідно до поставлених задач теоретичної механіки.

## 1. Кінематика точки. Визначення швидкості і прискорення матеріальної точки за заданими рівняннями її руху

### *1.1. Короткі відомості з теорії*

Категорія задач, передбачених даним розділом, потребує використання студентами базових положень кінематики матеріальної точки.

Траєкторія руху – це сукупність (послідовність) положень точки у просторі. Якщо траєкторія руху точки є пряма лінія, то рух називається прямолінійним, якщо – крива, то рух називається криволінійним. Рух точки в просторі можна задати такими трьома основними способами: векторним, координатним і натуральним (табл. 1.1).

У векторному способі положення точки задається за допомогою радіуса-вектора, проведеного з заданої нерухомої т. $O$ в дану т. $M$, що рухається.

В координатному способі положення т. $M$ визначається координатами системи координат, які задаються як функції часу ($t$). При цьому система координат може бути як декартовою, так і полярною, циліндричною або сферичною. Обрана система координат пов'язується з тілом відліку.

Для натурального способу задавання руху вводиться спеціальна природна система координат *($\tau$, $\eta$, $b$)*, що рухається разом з точкою та задається напрям руху. Положення точки визначається на траєкторії руху від початку відліку т. $O$.

Швидкість точки – це фізична величина, яка показує напрямок руху точки і як швидко змінюються координати положення точки. Вектор швидкості спрямовано по дотичній до траєкторії руху в бік напрямку руху. При координатному способі завдання руху модуль швидкості визначається через складові вектора швидкості (проекції на координатні осі) як похідні за часом від координат:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

І повна величина швидкості дорівнює:

$$V = \sqrt{V_x + V_y + V_z}$$

Прискорення точки – це фізична величина, яка показує, як змінюється значення і напрямок швидкості руху точки. При координатному способі задавання руху модуль прискорення визначається через складові вектора прискорення як перші похідні за часом від швидкості або другі похідні за часом від координат.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

Повна величина прискорення визначається:

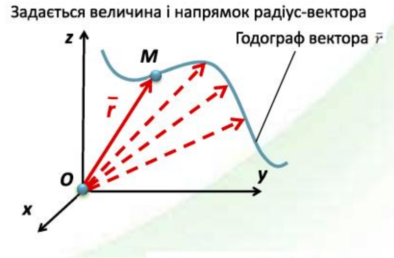
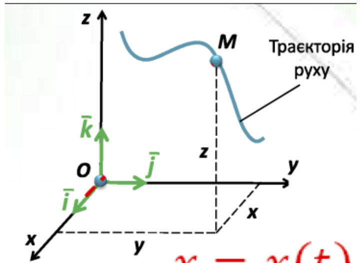
$$a = \sqrt{a_x + a_y + a_z}$$

### *1.2. Порядок розв'язування задач*

1. Оберіть декартову систему координат, виходячи з умов задачі.
2. За заданими в умові задачі рівняннями руху точки у параметричній формі знайдіть і побудуйте траєкторію руху точки у координатній формі.
3. Визначте положення точки *M* в моменти часу $t_0$ *і* $t_1$ і встановіть напрямок її руху.
4. За рівняннями руху точки визначте складові вектора швидкості на осі декартової системи координат і величину повної швидкості точки. У вибраному масштабі швидкостей зобразіть знайдені вектори на графіку.
5. За рівняннями руху точки чи за рівняннями проекцій швидкості точки визначте складові вектора прискорення точки. У вибраному масштабі прискорень зобразіть знайдені вектори на графіку.
6. У випадку, коли траєкторія руху точки є крива лінія, визначте дотичне та нормальне прискорення, радіус кривизни. У вибраному масштабі прискорень зобразіть знайдені вектори на графіку.

*Таблиця 1.1*

**Кінематичні характеристики за різних способів задавання руху точки**

<table>
<tr><th rowspan="2">Характеристика руху</th><th colspan="3">Спосіб задавання руху матеріальної точки</th></tr>
<tr><th>Векторний</th><th>Координатний</th><th>Натуральний</th></tr>
<tr><td>Рівняння (або закон) руху</td><td><br>$\bar{r} = \bar{r}(t)$</td><td><br>$x = x(t)$<br>$y = y(t)\ z = z(t)$</td><td><br>$s = s(t)$</td></tr>
<tr><td>Швидкість</td><td>$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}$</td><td>$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$<br>$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$<br>$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$</td><td>$v_\tau = \frac{ds}{dt}$</td></tr>
<tr><td>Прискорення</td><td>$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}$</td><td>$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$<br>$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$<br>$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$</td><td>$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \quad a_n = \frac{{v_\tau}^2}{\rho}$<br>$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$</td></tr>
</table>

## *1.3. Умова і приклад розв’язання задачі*

**Приклад 1.**

Точка *M* рухається у площині *XY* згідно з рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2 - 3\,cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 1 \\ y = 4\,sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \end{cases}$$

Визначити рівняння траєкторії руху точки; величину і напрямок її швидкості; величину і напрямок повного, дотичного, нормального прискорення і радіус кривизни для моменту часу $t = \frac{1}{3}$ с.

Дано:

$$\begin{cases} x = 2 - 3\,cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \\ y = 4\,sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \end{cases};\ \text{м}$$

$t = \frac{1}{3}$ с

---

*y(x)* – ?; $V-?$; $a-?$; $a_\tau-?$; $a_n-?$; $\rho-?$

Запишемо вихідні рівняння наступним чином:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-3} = cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \\ \frac{y}{4} = sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \end{cases}$$

Рух точки *M* задано координатним способом у декартовій системі координат. Вихідні рівняння руху точки можна трактувати як параметричні рівняння траєкторії руху точки.

Для того, щоб знайти рівняння траєкторії у координатному вигляді, виключаємо час *t*. Для цього використовуємо відоме співвідношення з тригонометрії:

$$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1,$$

і, враховуючи:

$$sin^2\,\alpha = \frac{y^2}{16};\quad cos^2\,\alpha = \frac{(x-2)^2}{9},$$

визначаємо, що траєкторією руху точки є рівняння еліпса, центр якого знаходиться у точці $O_1$ з координатами (2; 0):

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

Зобразимо траєкторію руху точки на графіку (рис. 1.1) і покажемо положення точки *M*.

В момент часу $t_0 = 0$ точка *M* знаходиться у положенні точки $M_0$ з початковими координатами $M_0$ (-1; 0):

$$\begin{cases} x_0 = 2 - cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = -1 \\ y_0 = 4\,sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) = 0 \end{cases}$$

,

а в момент часу $t_1 = \frac{1}{3}$ с точка *M* буде знаходитися в положенні $M_1$ відповідно з координатами (-0,819; 1,368):

$$\begin{cases} x_1 = 2 - cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) = -0{,}819 \\ y_1 = 4\,sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) = 1{,}368 \end{cases}$$

Таким чином напрямок руху точки відбувається від $M_0$ до $M_1$.

Для визначення швидкості точки візьмемо похідну за часом від рівнянь руху:

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = \pi\,sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \\ V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{-4\pi\,cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{3} \end{cases};$$

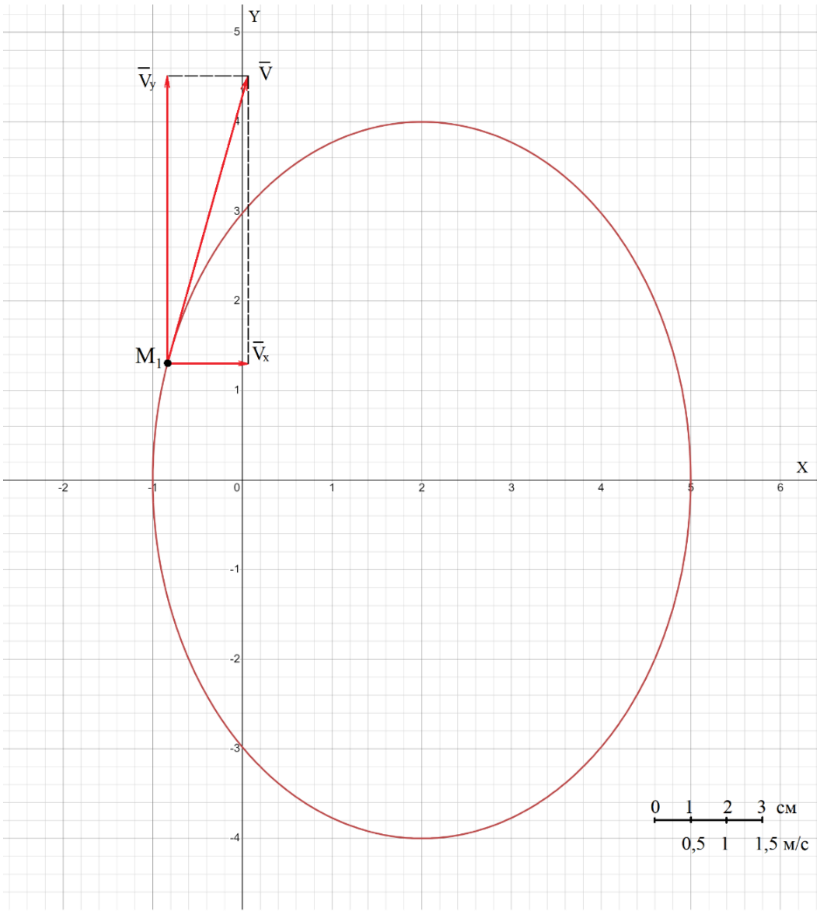
Проекції швидкості направлені паралельно відповідним осям координат і їхні модулі в момент часу $t_1$ =1с дорівнюють:

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = \pi\,sin\left(\dfrac{\pi}{3}t\right) = \pi\,sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right) = 3{,}14\cdot sin(20°) = 1{,}074 \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4\pi\,cos\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)}{3} = -\dfrac{4\pi\,cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)}{3} = -\dfrac{4\pi\,cos(20°)}{3} = \\ = -\dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot cos(20°)}{3} = 3{,}936 \end{cases}$$

$$V_x = 1{,}074\frac{м}{с}; V_y = 3{,}936\frac{м}{с}$$

Знайдемо величину повної швидкості точки:

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = \sqrt{(1{,}074)^2 + (3{,}936)^2} = 4{,}08\,\frac{м}{с^2};$$




Масштаб

$1\ см: 0{,}5\frac{м}{с}$

Рис. 1.1. Траєкторія руху точки. Вектори швидкості

Вектор прискорення точки визначається за формулою:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

Проекції прискорення на осі визначаємо як першу похідну від відповідної проекції  швидкості на вісь за часом, м/с$^2$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{\pi^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)}{3} \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = -\dfrac{4\pi^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)}{9} \end{cases}$$

При $t_1 = \frac{1}{3}$ с ;

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{\pi^2 cos\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)}{3} = \dfrac{3{,}14^2 \cdot cos(20°)}{3} = 3{,}09 \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = -\dfrac{4\pi^2 sin\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)}{9} = -\dfrac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot sin(20°)}{9} = -1{,}50 \end{cases}$$

$$a_x = 3{,}09\frac{м}{c^2}; a_y = -1{,}50\frac{м}{c^2}$$

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2} = \sqrt{(3{,}09)^2 + (-1{,}50)^2} = 3{,}43\frac{м}{c^2}$$

Визначаємо дотичне і нормальне прискорення точки *M*:

$$a^\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \frac{1{,}074 \cdot 3{,}090 - 3{,}936 \cdot 1{,}500}{4{,}080} = -0{,}633\frac{м}{c^2}$$

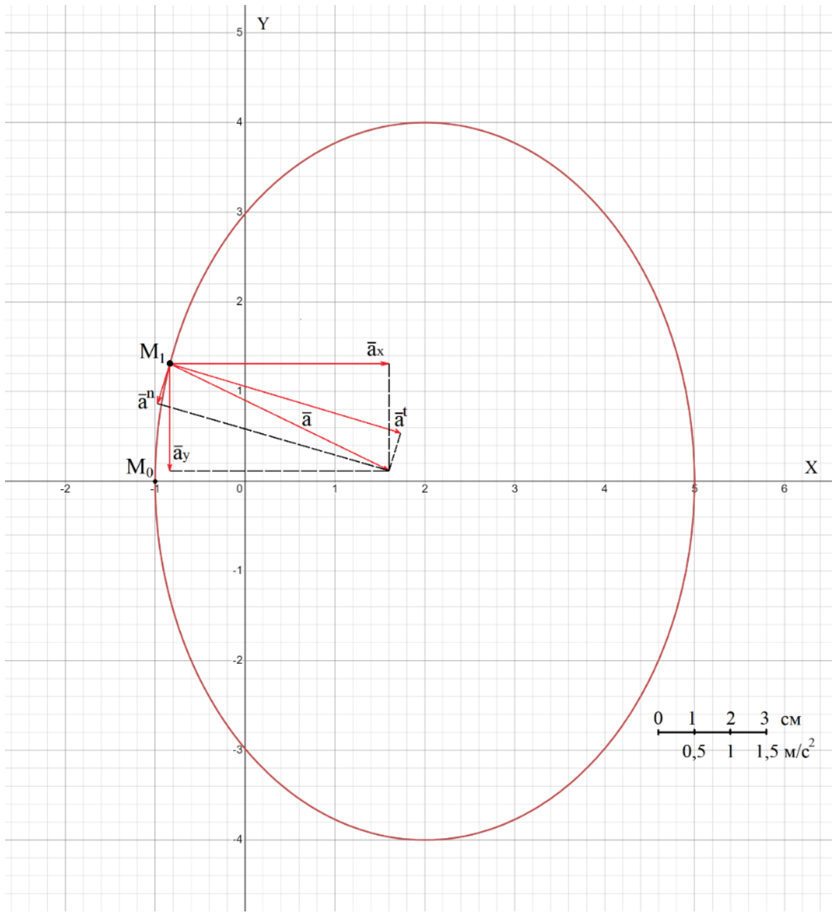
$$a^n = \left|\frac{V_x a_y - V_y a_x}{V}\right| = \left|\frac{-1{,}074 \cdot 1{,}500 - 3{,}936 \cdot 3{,}090}{4{,}080}\right| = 3{,}377\frac{м}{c^2}$$

або

$$a^n = \sqrt{(a)^2 - (a^\tau)^2} = \sqrt{3{,}43^2 - (-0{,}633)^2} = 3{,}377\frac{м}{c^2}$$

Вектор дотичного прискорення повинен спрямовуватися по дотичній до траєкторії руху точки в напрямку, протилежному напрямку вектора повної швидкості (враховуючи знак «-»).

Вектор нормального прискорення спрямовуємо до центра кривизни (рис. 1.2).




Масштаб

$1см: 1\frac{м}{с^2}$

Рис. 1.2. Траєкторія руху точки. Вектори прискорень

Визначаємо радіус кривизни:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{4{,}080^2}{3{,}377} = 4{,}929м$$

Відповідь: траєкторією руху матеріальної точки є коло, задане рівнянням

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$V_x = 1{,}074\frac{м}{с}; V_y = 3{,}936\frac{м}{с}; a_x = 3{,}090\frac{м}{с}; a_y = -1{,}500\frac{м}{с}$$

$$a^\tau = -0{,}633\frac{м}{с^2}; a^n = 3{,}377\frac{м}{с^2}; a = 3{,}43\frac{м}{с}; \rho = 4{,}929м$$

Тепер розв'яжемо задачу на визначення кінематичних характеристик точки за заданими законами її руху, використовуючи систему комп'ютерного програмування *MathCAD*. Для цього введемо числові значення вихідних даних.

Вихідні дані задачі для розрахунку:

$$ORIGIN := 1$$

$$T := \frac{1}{3} \qquad \omega := \frac{\pi}{3} \qquad x(t) := 2 - 3\,cos(\omega \cdot t) \qquad x(t) := 4\,s\,i\,n(\omega \cdot t)$$

Положення т. *M* в момент часу t=T:

$$x(T) \to 2 - 3\,cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = 0.819 \qquad y(T) \to 4\,s\,i\,n\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1.368$$

Визначаємо проекції вектора швидкості точки *M* і його напрямок відносно осі OX у довільний момент часу, а також при t=T:

$$VX(t) := \frac{d}{dt}x(t) \quad VX(t) \to \pi \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \quad VX(T) \to \pi \cdot sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1.074$$

$$VY(t) := \frac{d}{dt}y(t) \quad VY(t) \to \frac{4 \cdot \pi \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{3} \quad VY(T) \to \frac{4 \cdot \pi \cdot cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{3} = 3.936$$

$$V(t) := \sqrt{VX(t)^2 + VY(t)^2} \quad V(t) \to \sqrt{\frac{16 \cdot \pi^2 \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}{9} + \pi^2 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}$$

$$V(T) \to \sqrt{\frac{16 \cdot \pi^2 \cdot cos\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{9} + \pi^2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{9}\right)^2} = 4.08$$

Кут $\alpha$ між додатним напрямком оси осі OX і повним вектором швидкості:

$$\alpha V(t) := \frac{angle\big(VX(t), VY(t)\big)}{deg}$$

$$\alpha V(T) \to \frac{-angle\left(\pi \cdot sin\left(\frac{\pi}{9}\right), \frac{4 \cdot \pi \cdot cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{3}\right)}{deg°} = 74.732°$$

Знайдемо проекції вектора прискорення точки $M$ і його напрямок відносно осі OX у довільний момент часу, а також при t=T:

$$aX(t) := \frac{d^2}{dt^2}x(t) \quad aX(t) \rightarrow \frac{\pi^2 \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{3} \quad aX(T) \rightarrow \frac{\pi^2 \cdot cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{3} = 3.091$$

$$aY(t) := \frac{d^2}{dt^2}y(t) \quad aY(t) := \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{9} \quad aY(T) := \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{9} = -1.5$$

$$a(t) := \sqrt{aX(t)^2 + aY(t)^2} \quad a(t) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi^4 \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}{9} + \frac{16 \cdot \pi^4 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}{81}}$$

$$a(T) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi^4 \cdot cos\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{9} + \frac{16 \cdot \pi^4 \cdot sin\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{81}} = 3.436$$

Знаходимо величину кута $\beta$ між додатним напрямком осі OX і вектором повного прискорення:

$$\beta a(t) := \frac{angle\big(aX(t), aY(t)\big)}{deg}$$

$$\beta a(T) \rightarrow \frac{angle\left(\frac{\pi^2 \cdot cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{3}, \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{9}\right)}{deg^\circ} = 334.113^\circ$$

Далі визначаємо дотичне прискорення т. $M$ у довільний момент часу та при t=T:

$$a_\tau(t) := \frac{VX(t)\cdot aX(t) + VY(t)\cdot aY(t)}{V(t)}$$

$$a_\tau(t) \to \frac{7\cdot\pi^3\cdot cos\left(\frac{\pi\cdot t}{3}\right)\cdot sin\left(\frac{\pi\cdot t}{3}\right)}{27\cdot\sqrt{\frac{16\cdot\pi^2\cdot cos\left(\frac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}{9} + \pi^2\cdot s\,i\,n\left(\frac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}}$$

$$a_\tau(T) \to \frac{7\cdot\pi^3\cdot cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cdot sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{27\cdot\sqrt{\frac{16\cdot\pi^2\cdot cos\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{9} + \pi^2\cdot s\,i\,n\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}} = -0.633$$

Знаходимо величину нормального прискорення т. *M* у довільний момент часу, а також при t=T:

$$a_n(t) := \sqrt{a(t)^2 - a_\tau(t)^2}$$

$$a_n(T) \to \sqrt{\frac{\pi^4\cdot cos\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{9} + \frac{16\cdot\pi^4\cdot co\,s\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{81} - \frac{49\cdot\pi^6\cdot co\,s\left(\frac{\pi}{9}\right)^2\cdot sin\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{1296\cdot\pi^2\cdot co\,s\left(\frac{\pi}{9}\right)^2 + 729\cdot\pi^2\cdot sin\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}} =$$

$$= 3.377$$

Визначаємо радіус кривизни траєкторії в довільний момент часу і при t=T:

$\rho(t)$

$$\to \frac{\dfrac{16\cdot\pi^2\cdot cos\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}{9} + \pi^2\cdot sin\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}{\sqrt{\dfrac{\pi^4\cdot cos\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}{9} + \dfrac{16\cdot\pi^4\cdot sin\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}{81} - \dfrac{49\cdot\pi^6\cdot cos\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2\cdot sin\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}{1296\cdot\pi^2\cdot cos\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2 + 729\cdot\pi^2\cdot sin\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}}}$$

$$\rho(T) \to \frac{\dfrac{16\cdot\pi^2\cdot cos\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}{9} + \pi^2\cdot sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2}{\sqrt{\dfrac{\pi^4\cdot cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2}{9} + \dfrac{16\cdot\pi^4\cdot sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2}{81} - \dfrac{49\cdot\pi^6\cdot cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2\cdot sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2}{1296\cdot\pi^2\cdot cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2 + 729\cdot\pi^2\cdot sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2}}}$$

$$= 4.929$$

Надалі покажемо чисельний розв’язок поставленої задачі, її етапи виконання, результати розрахунку і графіки, зображені на моніторі комп’ютера у програмному середовищі *Mathcad*:

ORIGIN := 1

$T := \frac{1}{3}$ $\quad \omega := \frac{\pi}{3}$ $\quad x(t) := 2 - 3\cos(\omega\cdot t)$ $\quad y(t) := 4\sin(\omega\cdot t)$

$x(T) \to 2 - 3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = -0.819$ $\qquad y(T) \to 4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1.368$

Проекції вектора швидкості точки

$$VX(t) := \frac{d}{dt}x(t) \qquad VX(t) \rightarrow \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \qquad VX(T) \rightarrow \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 1.074$$

$$VY(t) := \frac{d}{dt}y(t) \qquad VY(t) \rightarrow \frac{4 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{3} \qquad VY(T) \rightarrow \frac{4 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{3} = 3.936$$

$$V(t) := \sqrt{VX(t)^2 + VY(t)^2} \qquad V(t) \rightarrow \sqrt{\frac{16 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}{9} + \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}$$

$$V(T) \rightarrow \sqrt{\frac{16 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{9} + \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)^2} = 4.08$$

$$\alpha V(t) := \frac{\mathrm{angle}(VX(t), VY(t))}{\deg} \qquad \alpha V(T) \rightarrow \frac{\mathrm{angle}\left(\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right), \frac{4 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{3}\right)}{\deg} = 74.732$$

Проекції вектора прискорення точки

$$aX(t) := \frac{d^2}{dt^2}x(t) \qquad aX(t) \rightarrow \frac{\pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{3}$$

$$aX(T) \rightarrow \frac{\pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{3} = 3.091$$

$$aY(t) := \frac{d^2}{dt^2}y(t) \qquad aY(t) \rightarrow -\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{9}$$

$$aY(T) \rightarrow -\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{9} = -1.5$$

$$a(t) := \sqrt{aX(t)^2 + aY(t)^2} \qquad a(t) \to \sqrt{\frac{\pi^4 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}{9} + \frac{16 \cdot \pi^4 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}{81}}$$

$$a(T) \to \sqrt{\frac{\pi^4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{9} + \frac{16 \cdot \pi^4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{81}} = 3.436$$

$$\beta a(t) := \frac{\text{angle}(aX(t), aY(t))}{\text{deg}} \qquad \beta a(T) \to \frac{\text{angle}\left(\frac{\pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)}{3}, -\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{9}\right)}{\text{deg}} = 334.113$$

Дотичне і нормальне прискорення точки

$$a\tau(t) := \frac{VX(t) \cdot aX(t) + VY(t) \cdot aY(t)}{V(t)} \qquad a\tau(t) \to -\frac{7 \cdot \pi^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{27 \cdot \sqrt{\frac{16 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}{9} + \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}}$$

$$a\tau(T) \to -\frac{7 \cdot \pi^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{27 \cdot \sqrt{\frac{16 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{9} + \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}} = -0.633$$

$$an(t) := \sqrt{a(t)^2 - a\tau(t)^2}$$

$$an(T) \to \sqrt{\frac{\pi^4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{9} + \frac{16 \cdot \pi^4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{81} - \frac{49 \cdot \pi^6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}{1296 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)^2 + 729 \cdot \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)^2}} = 3.377$$

Радіус кривизни

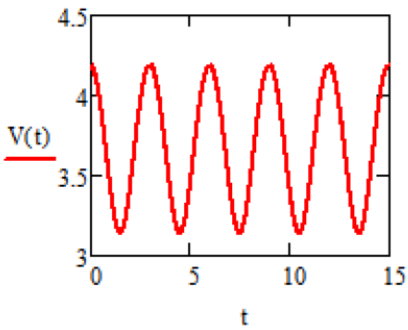
$$\rho(t) := \frac{V(t)^2}{an(t)}$$

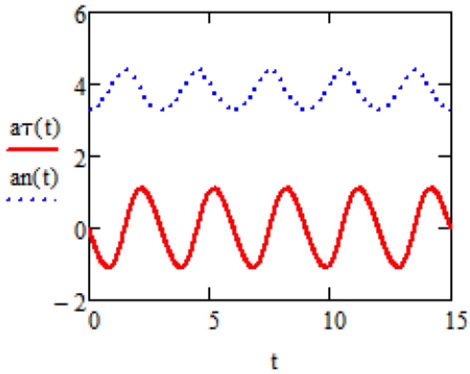
$$\rho(t) \to \frac{\dfrac{16\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}{9} + \pi^2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}{\sqrt{\dfrac{\pi^4\cdot\cos\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}{9} + \dfrac{16\cdot\pi^4\cdot\sin\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}{81} - \dfrac{49\cdot\pi^6\cdot\cos\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}{1296\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2 + 729\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi\cdot t}{3}\right)^2}}}$$

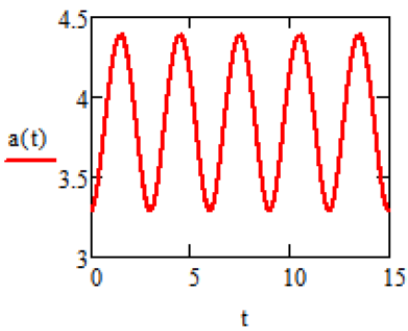
$$\rho(T) \to \frac{\dfrac{16\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2}{9} + \pi^2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2}{\sqrt{\dfrac{\pi^4\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2}{9} + \dfrac{16\cdot\pi^4\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2}{81} - \dfrac{49\cdot\pi^6\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2}{1296\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2 + 729\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{9}\right)^2}}} = 4.929$$

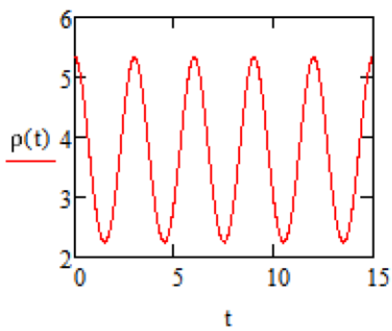
Побудуємо графікі залажностей знайдених величин кінематичних характеристик

$t := 0, 0.01 .. 15$



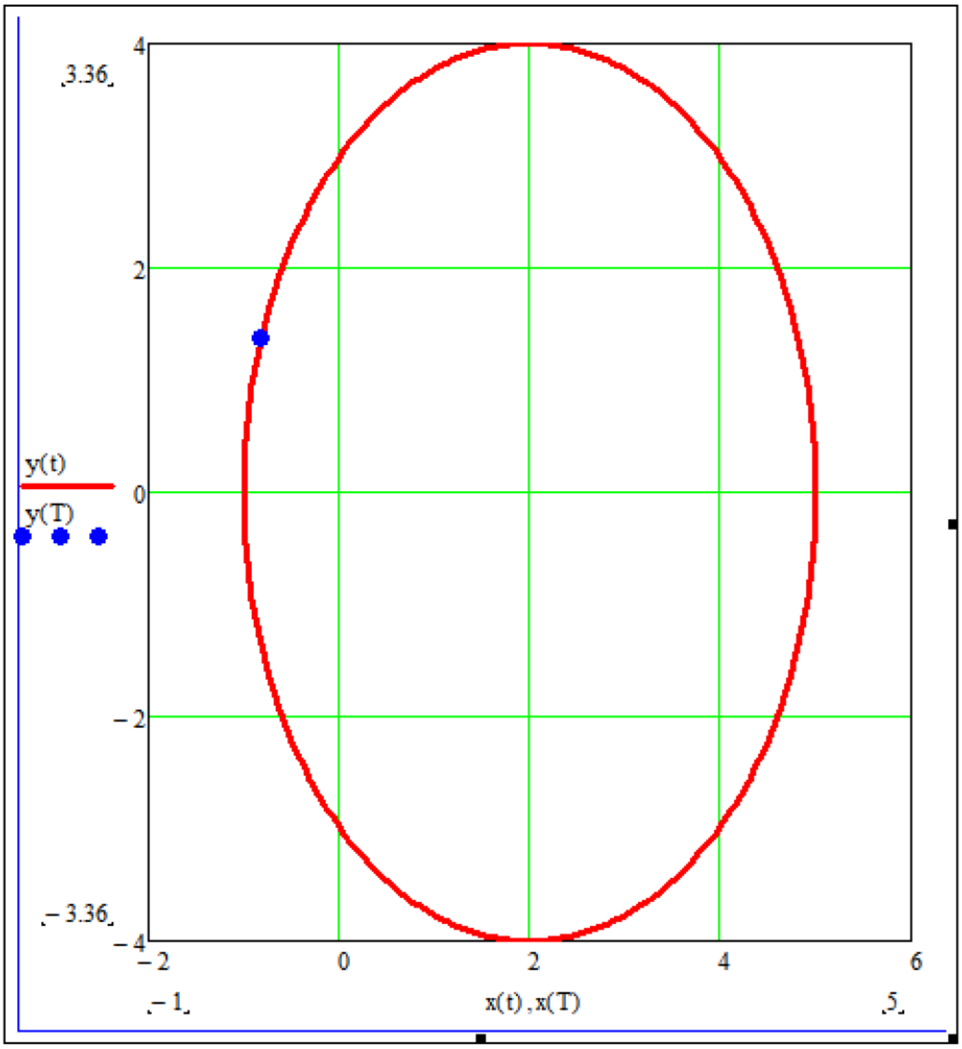



Нажаль стандартні інструменти і методи середовища *Mathcad* не дозволяють показати на графіках вектори швидкостей і прискорень точки. Тому наведемо графік траєкторії руху точки і її положення в момент часу t=T.

Побудуємо графік траєкторії руху точки




**Приклад 2.**

Точка рухається у площині *XY* згідно з параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = -6\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 1 \\ y = 6\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) \end{cases}$$

Визначити рівняння траєкторії руху точки; величину і напрямок її швидкості; величину і напрямок повного, дотичного, нормального прискорення і радіус кривизни для моменту часу $t$ = 1с.

Дано:

$$\begin{cases} x = -6\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 1 \\ y = 6\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) \end{cases} \text{; м}$$

$t$ = 1 с

$y(x)$ – ?; $V$–?; $a$–?; $a_\tau$–?; $a_n$–?; $\rho$–?

Для рівняння траєкторії у координатному вигляді виключаємо час t. Для цього використовуємо відоме тригонометричне співвідношення:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha + 1$$

тобто

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right)$$

Із параметричних рівнянь руху знаходимо відповідні функції

$$\cos\ (\tfrac{\pi}{4}t) = \tfrac{1-x}{6},\ \ \sin\ (\tfrac{\pi}{8}t) = \tfrac{y}{6},$$

отже,

$$\frac{1-x}{6} = 1 - 2\frac{y^2}{36} = 1 - \frac{y^2}{18}$$

Таким чином рівняння траєкторії руху точки у координатному вигляді має вигляд:

$$y^2 - 3x - 15 = 0 \text{ або } x = \frac{y^2}{3} - 5.$$

Це рівняння параболи.

Зобразимо траєкторію руху точки на графіку (рис. 1.10) і покажемо положення точки *M*.

В момент часу $t_0$ = 0 точка *M* знаходиться у положенні точки $M_0$ з координатами $M_0$ (-5; 0):

$$\begin{cases} x_0 = -6\,cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 1 = -5 \\ y_0 = 6\,sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = 0 \end{cases}$$

,

а в момент часу $t_1$ = 1c точка $M$ буде знаходитися в положенні $M_1$ відповідно з координатами (-3,242; 2,296):

$$\begin{cases} x_1 = -6\,cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 1 = -3{,}242 \\ y_1 = 6\,sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = 2{,}296 \end{cases}$$

Таким чином напрямок руху точки відбувається від $M_0$ до $M_1$.

Для визначення швидкості точки візьмемо похідну за часом від рівнянь руху:

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}\pi\,sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{3}{4}\pi\,cos\left(\frac{\pi}{8}t\right) \end{cases};$$

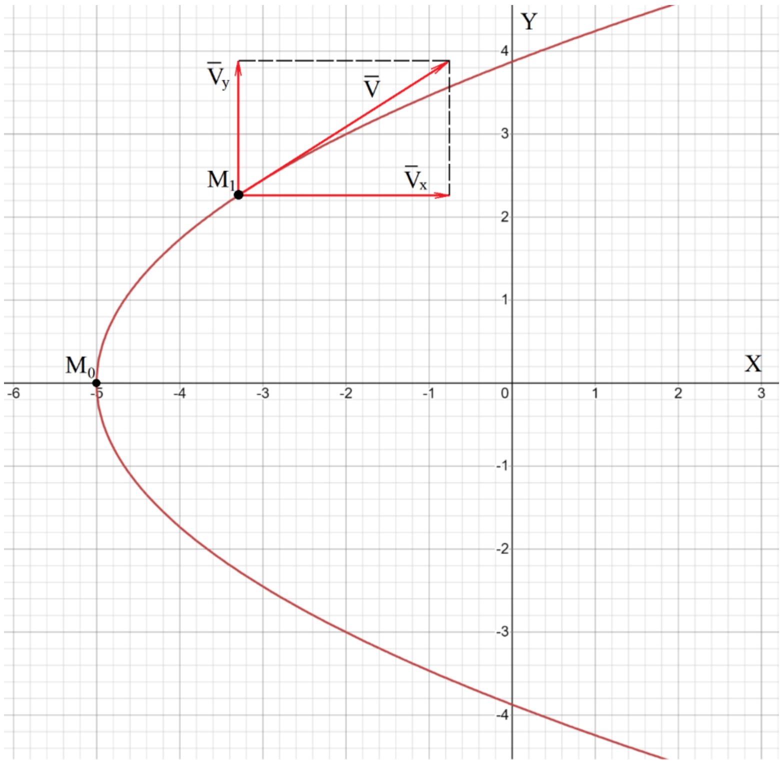
Проекції швидкості направлені паралельно відповідним осям координат і їхні модулі в момент часу $t_1$ =1с дорівнюють:

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}\pi\,sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3}{2}\pi\,sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 1\right) = \frac{3}{2}\pi\,sin(45°) = 3{,}332 \\ V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{3}{4}\pi\,cos\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{3}{4}\pi\,cos\left(\frac{\pi}{8}\cdot 1\right) = \frac{3}{4}\pi\,cos(22{,}5°) = 2{,}177 \end{cases};$$

$$V_x = 3{,}332\frac{м}{c};\, V_y = 2{,}177\frac{м}{c}$$

Знайдемо величину повної швидкості точки:

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + \left(V_y\right)^2} = \sqrt{(3{,}332)^2 + (2{,}177)^2} = 3{,}980\frac{м}{с}$$




Масштаб

$1см: 0,5\frac{м}{с}$

Рис. 1.3. Траєкторія руху точки. Вектори швидкості

Вектор прискорення точки визначається за формулою:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

Проекції прискорення на осі визначаємо як першу похідну від відповідної проекції  швидкості на вісь за часом, м/с$^2$

$$\begin{cases} a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi^2}{4} cos\left(\frac{\pi}{4} t\right) \\ a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{8} sin\left(\frac{\pi}{4} t\right) \end{cases}.$$

При $t_1$ =1с;

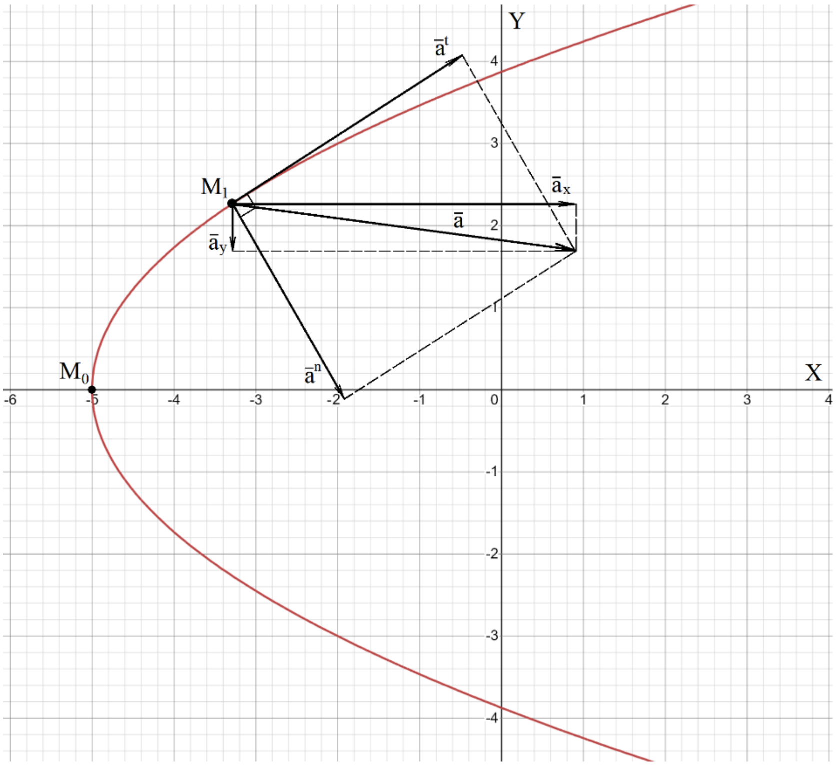
$$\begin{cases} a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{3\pi^2}{8} cos\left(\frac{\pi}{4} t\right) = \frac{3 \cdot 3{,}14^2}{8} cos(45°) = 2{,}617 \\ a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} sin\left(\frac{\pi}{8} t\right) = -\frac{3 \cdot 3{,}14^2}{32} sin(22{,}5°) = -0{,}354 \end{cases}$$

$$a_x = 2{,}617\frac{м}{с^2}; a_y = -0{,}354\frac{м}{с^2}$$

$$a = \sqrt{(a_x)^2 + \left(a_y\right)^2} = \sqrt{(2{,}617)^2 + (-0{,}354)^2} = 2{,}641\frac{м}{с^2}$$

$$a^\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \frac{3{,}332 \cdot 2{,}617 + 2{,}177 \cdot (-0{,}354)}{3{,}98} = 1{,}997\frac{м}{с^2}$$

$$a^n = \left|\frac{V_x a_y - V_y a_x}{V}\right| = \left|\frac{3{,}332 \cdot (-0{,}354) - 2{,}177 \cdot 2{,}617}{3{,}98}\right| = 1{,}728\frac{м}{с^2}$$




Масштаб

$1см: 0{,}25\frac{м}{с^2}$

Рис. 1.4. Траєкторія руху точки. Вектори прискорень

Визначаємо радіус кривизни:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{3{,}980^2}{1{,}728} = 9{,}169м$$

В і д п о в і д ь : траєкторією руху матеріальної точки є парабола, задана рівнянням $x = \frac{y^2}{3} - 5$

$$V_x = 3{,}332\frac{м}{с}; V_y = 2{,}177\frac{м}{с}; a_x = 2{,}617\frac{м}{с}; a_y = -0{,}354\frac{м}{с}$$
$$a^\tau = 1{,}997\frac{м}{с}; a^n = 1{,}728\frac{м}{с}; a = 2{,}641\frac{м}{с}; \rho = 9{,}169м$$

Розв'яжемо цю задачу, використовуючи систему комп'ютерного програмування *MathCAD.* Введемо числові значення вихідних даних і виконаємо відповідні етапи розрахунку.

Дані задачі для розрахунку:

$$ORIGIN := 1$$

$$T := 1 \qquad \omega := \frac{\pi}{4}$$

$$x(t) := -6\,cos(\omega \cdot t) + 1 \qquad y(t) := 6\,s\,i\,n\left(\omega \cdot \frac{t}{2}\right)$$

Положення т. *M* в момент часу t=T:

$$x(T) \to 1 - 3\sqrt{2} = -3.243 \qquad y(T) \to 3 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2.296$$

Визначаємо проекції вектора швидкості точки *M* і його напрямок відносно осі OX у довільний момент часу, а також при t=T:

$$VX(t) := \frac{d}{dt}x(t) \qquad VX(t) \to \frac{3 \cdot \pi \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{2}$$

$$VX(T) \to \frac{3 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}}{4} = 3.332$$

$$VY(t) := \frac{d}{dt}y(t) \qquad VY(t) \to \frac{3 \cdot \pi \cdot co\,s\left(\frac{\pi \cdot t}{8}\right)}{4}$$

$$VY(T) \to \frac{3 \cdot \pi \cdot \sqrt{\sqrt{2} + 2}}{8} = 2.177$$

$$V(t) := \sqrt{VX(t)^2 + VY(t)^2} \quad V(t) \to \sqrt{\frac{9 \cdot \pi^2 \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot t}{8}\right)^2}{16} + \frac{9 \cdot \pi^2 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}{4}}$$

$$V(T) \to \sqrt{\frac{9 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{2} + 2}{64} + \frac{9 \cdot \pi^2}{8}} = 3.98$$

Кут $\alpha$ між додатним напрямком оси осі ОХ і повним вектором швидкості:

$$\alpha V(t) := \frac{angle\left(VX(t), VY(t)\right)}{deg}$$

$$\alpha V(T) \to \frac{angle\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}}{4}, \frac{3 \cdot \pi \cdot \sqrt{\sqrt{2} + 2}}{8}\right)}{deg°}$$

Знайдемо проекції вектора прискорення точки $M$ і його напрямок відносно осі ОХ у довільний момент часу, а також при t=T:

$$aX(t) := \frac{d^2}{dt^2} x(t) \qquad aX(t) \to \frac{3 \cdot \pi^2 \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)}{8} \qquad aX(T) \to \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi^2}{16} = 2.617$$

$$aY(t) := \frac{d^2}{dt^2} y(t) \quad aY(t) := \frac{3 \cdot \pi^2 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{8}\right)}{32} \quad aY(T) := \frac{3 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{64} = -0.354$$

$$a(t) := \sqrt{aX(t)^2 + aY(t)^2} \quad a(t) \to \sqrt{\frac{9 \cdot \pi^4 \cdot cos\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right)^2}{64} + \frac{9 \cdot \pi^4 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{8}\right)^2}{1024}}$$

$$a(T) \to \sqrt{\frac{9 \cdot \pi^4}{128} + \frac{9 \cdot \pi^4 \cdot \left(\sqrt{2} - 2\right)}{4096}} = 2.641$$

Знаходимо величину нормального прискорення т. $M$ у довільний момент часу, а також при t=T:

$$a_n(t) := \frac{|VX(t) \cdot aY(t) - VY(t) \cdot aX(t)|}{V(t)}$$

$$a_n(t) \to \frac{\left|\frac{9\cdot\pi^3\cdot cos\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)}{32} - \frac{9\cdot\pi^3\cdot sin\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)\cdot sin\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)}{64}\right|}{\sqrt{\frac{9\cdot\pi^2\cdot cos\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)^2}{16} + \frac{9\cdot\pi^2\cdot sin\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)^2}{4}}}$$

При t=T:

$$a_n(T) \to \frac{\frac{9\cdot\sqrt{2}\cdot\pi^3\cdot\sqrt{\sqrt{2}+2}}{128} + \frac{9\cdot\sqrt{2}\cdot\pi^3\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}}{256}}{\sqrt{\frac{9\cdot\pi^2\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)}{64} + \frac{9\cdot\pi^2}{8}}} = 1.728$$

Визначаємо радіус кривизни траєкторії в довільний момент часу і при t=T:

$$\rho(t) := \frac{V(t)^2}{an(t)}$$

$$\rho(t) \to \frac{\frac{9\cdot\pi^2\cdot cos\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)^2}{16} + \frac{9\cdot\pi^2\cdot sin\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)^2}{4}}{\sqrt{\frac{9\cdot\pi^3\cdot cos\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)}{32} + \frac{9\cdot\pi^3\cdot sin\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right) sin\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)}{64}}}$$

$$\rho(T) \to \frac{\left[\frac{9\cdot\pi^2\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)}{64} + \frac{9\cdot\pi^2}{8}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{9\cdot\sqrt{2}\cdot\pi^3\cdot\sqrt{\sqrt{2}+2}}{128} + \frac{9\cdot\sqrt{2}\cdot\pi^3\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}}{256}} = 9.169$$

Покажемо чисельний розв’язок поставленої задачі, її етапи виконання, результати розрахунку і графіки, зображені на моніторі комп’ютера у програмному середовищі *Mathcad*:

$ORIGIN := 1$

$T := 1 \qquad \omega := \frac{\pi}{4} \qquad x(t) := -6\cos(\omega \cdot t) + 1 \qquad y(t) := 6\sin\left(\omega \cdot \frac{t}{2}\right)$

$x(T) \rightarrow 1 - 3\cdot\sqrt{2} = -3.243 \qquad y(T) \rightarrow 3\cdot\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2.296$

Проекції вектора швидкості точки

$$VX(t) := \frac{d}{dt}x(t) \qquad VX(t) \rightarrow \frac{3\cdot\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)}{2} \qquad VX(T) \rightarrow \frac{3\cdot\pi\cdot\sqrt{2}}{4} = 3.332$$

$$VY(t) := \frac{d}{dt}y(t) \qquad VY(t) \rightarrow \frac{3\cdot\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)}{4} \qquad VY(T) \rightarrow \frac{3\cdot\pi\cdot\sqrt{\sqrt{2}+2}}{8} = 2.177$$

$$V(t) := \sqrt{VX(t)^2 + VY(t)^2} \qquad V(t) \rightarrow \sqrt{\frac{9\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)^2}{16} + \frac{9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)^2}{4}}$$

$$V(T) \rightarrow \sqrt{\frac{9\cdot\pi^2\cdot(\sqrt{2}+2)}{64} + \frac{9\cdot\pi^2}{8}} = 3.98$$

$$\alpha V(t) := \frac{angle(VX(t), VY(t))}{deg} \qquad \alpha V(T) \rightarrow \frac{angle\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\sqrt{2}}{4}, \frac{3\cdot\pi\cdot\sqrt{\sqrt{2}+2}}{8}\right)}{deg} = 33.156$$

Проекції вектора прискорення точки

$$aX(t) := \frac{d^2}{dt^2}x(t) \qquad aX(t) \rightarrow \frac{3\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)}{8}$$

$$aX(T) \rightarrow \frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\pi^2}{16} = 2.617$$

$$aY(t) := \frac{d^2}{dt^2}y(t) \qquad aY(t) \rightarrow -\frac{3\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)}{32}$$

$$aY(T) \rightarrow -\frac{3\cdot\pi^2\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}}{64} = -0.354$$

$$a(t) := \sqrt{aX(t)^2 + aY(t)^2} \qquad a(t) \rightarrow \sqrt{\frac{9\cdot\pi^4\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)^2}{64} + \frac{9\cdot\pi^4\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)^2}{1024}}$$

$$a(T) \rightarrow \sqrt{\frac{9\cdot\pi^4}{128} - \frac{9\cdot\pi^4\cdot\left(\sqrt{2}-2\right)}{4096}} = 2.641$$

$$\alpha a(t) := \frac{\text{angle}(aX(t), aY(t))}{\text{deg}}$$

$$\alpha a(T) \rightarrow \frac{\text{angle}\left(\frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\pi^2}{16}, -\frac{3\cdot\pi^2\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}}{64}\right)}{\text{deg}} = 352.295$$

Дотичне і нормальне прискорення точки

$$a\tau(t) := \frac{VX(t)\cdot aX(t) + VY(t)\cdot aY(t)}{V(t)}$$

$$a\tau(t) \rightarrow \frac{\frac{9\cdot\pi^3\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)}{16} - \frac{9\cdot\pi^3\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)}{128}}{\sqrt{\frac{9\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)^2}{16} + \frac{9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)^2}{4}}}$$

$$a\tau(T) \rightarrow \frac{\frac{9\cdot\pi^3}{32} - \frac{9\cdot\pi^3\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{2}+2}}{512}}{\sqrt{\frac{9\cdot\pi^2\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)}{64} + \frac{9\cdot\pi^2}{8}}} = 1.997$$

$$an(t) := \frac{\left|VX(t)\cdot aY(t) - VY(t)\cdot aX(t)\right|}{V(t)}$$

$$an(t) \rightarrow \frac{\left| -\frac{9\cdot\pi^3\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)}{32} - \frac{9\cdot\pi^3\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)}{64} \right|}{\sqrt{\frac{9\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)^2}{16} + \frac{9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)^2}{4}}}$$

$$an(T) \rightarrow \frac{\frac{9\cdot\sqrt{2}\cdot\pi^3\cdot\sqrt{\sqrt{2}+2}}{128} + \frac{9\cdot\sqrt{2}\cdot\pi^3\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}}{256}}{\sqrt{\frac{9\cdot\pi^2\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)}{64} + \frac{9\cdot\pi^2}{8}}} = 1.728$$

Радіус кривизни

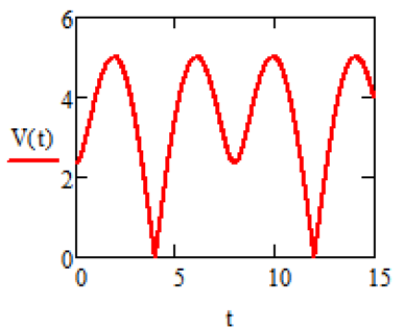
$$\rho(t) := \frac{V(t)^2}{an(t)}$$

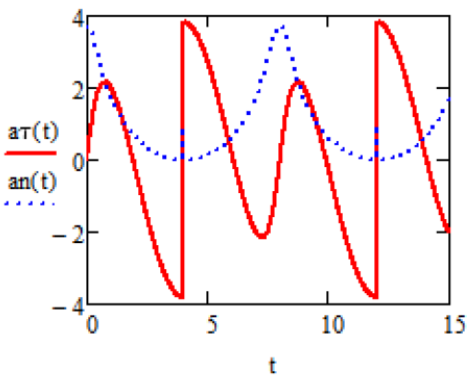
$$\rho(t) \rightarrow \frac{\left(\frac{9\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)^2}{16} + \frac{9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left| -\frac{9\cdot\pi^3\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)}{32} - \frac{9\cdot\pi^3\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{8}\right)}{64} \right|}$$

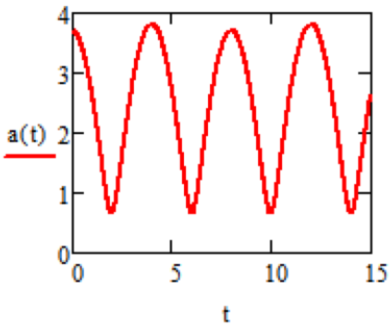
$$\rho(T) \rightarrow \frac{\left[\frac{9\cdot\pi^2\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)}{64} + \frac{9\cdot\pi^2}{8}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{9\cdot\sqrt{2}\cdot\pi^3\cdot\sqrt{\sqrt{2}+2}}{128} + \frac{9\cdot\sqrt{2}\cdot\pi^3\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}}{256}} = 9.169$$

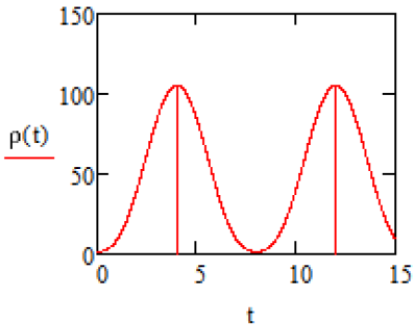
Побудуємо графікі залажностей знайдених величин кінематичних характеристик

$t := 0, 0.01 .. 15$

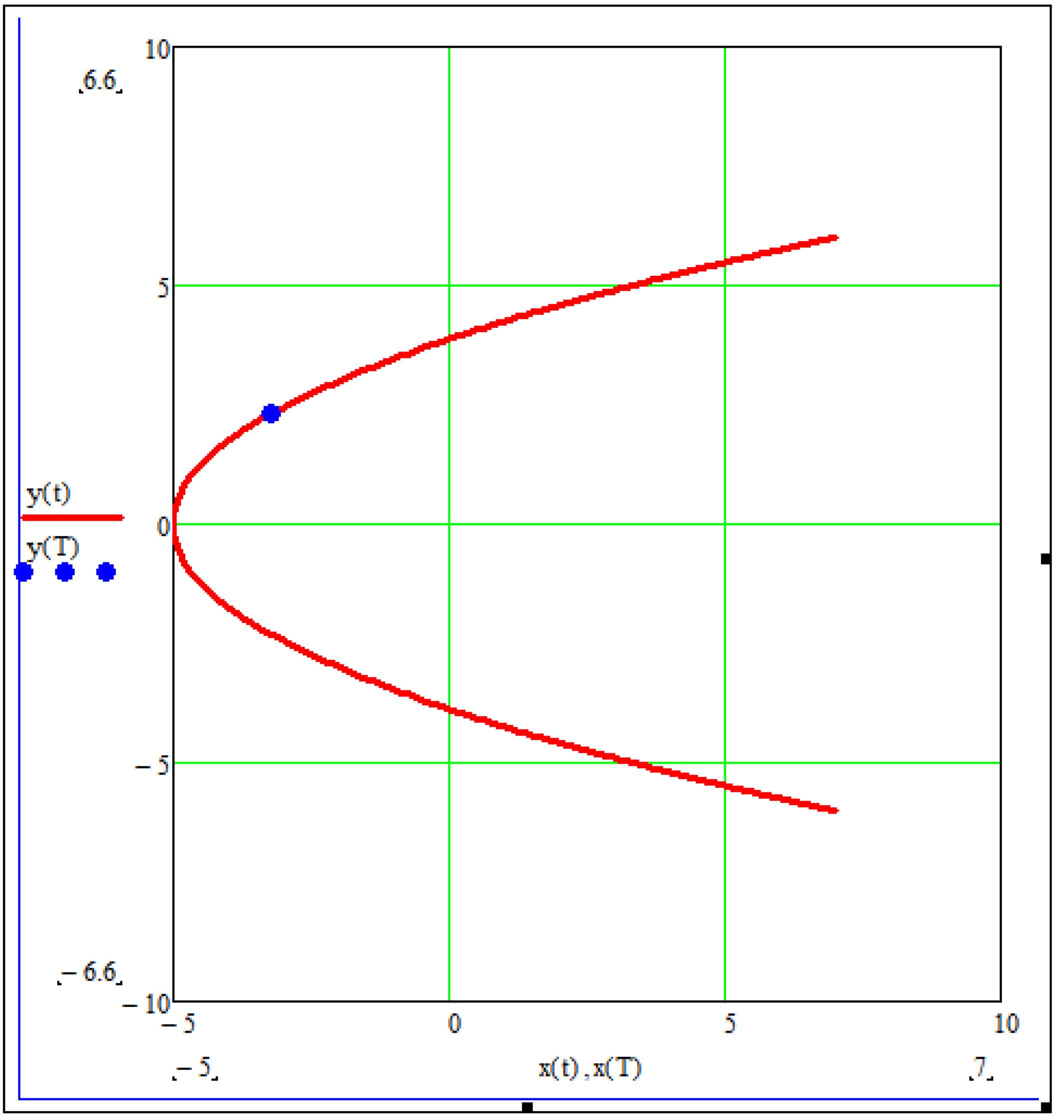





Враховуючи відсутність можливості стандартними інструментами і методами програмного комплексу *Mathcad* зобразити на графіках вектори швидкостей і прискорень точки, наведемо тільки графік траєкторії руху і положення точки в момент часу t=T.



# 2. Найпростіші рухи твердого тіла. Визначення кінематичних характеристик обертового руху

## *2.1. Короткі відомості з теорії*

***Поступальним*** називається такий рух твердого тіла, за якого довільна пряма, що незмінно пов'язана з тілом, увесь час залишається паралельною своєму початковому положенню (або паралельною самій собі), а всі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями та прискореннями.

Для визначення кінематичних характеристик поступального руху твердого тіла достатньо визначити характеристики руху однієї будь-якої точки даного тіла. Зазвичай за цю точку приймають центр ваги тіла - т. С.

Рівняння поступального руху визначається залежністю координат центра ваги тіла від часу:

$$x_c = x_c(t), y_c = y_c(t), z_c = z_c(t) \tag{2.1}$$

***Обертовим*** називається такий рух твердого тіла навколо нерухомої осі, за якого будь-які дві точки тіла залишаються нерухомими, а всі інші описують траєкторії кола. Пряма, що проходить через дві нерухомі точки, називається віссю обертання.

Положення тіла під час обертання визначається кутом повороту φ між нерухомою площиною $\Pi$ і площиною $\Pi_1$, жорстко пов'язаної із тілом.

Рівняння поступального руху визначається залежністю кута повороту від часу:

$$\varphi = \varphi(t) \tag{2.2}$$

Величина, що характеризує напрямок і швидкість зміни кута повороту, називається кутовою швидкістю. Кутова швидкість дорівнює похідній від кута повороту за часом:

$$\overline{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\overline{k} \tag{2.3}$$

Кутове прискорення характеризує швидкість зміни кутової швидкості і дорівнює похідній від кутової швидкості за часом:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}\overline{k} \tag{2.4}$$

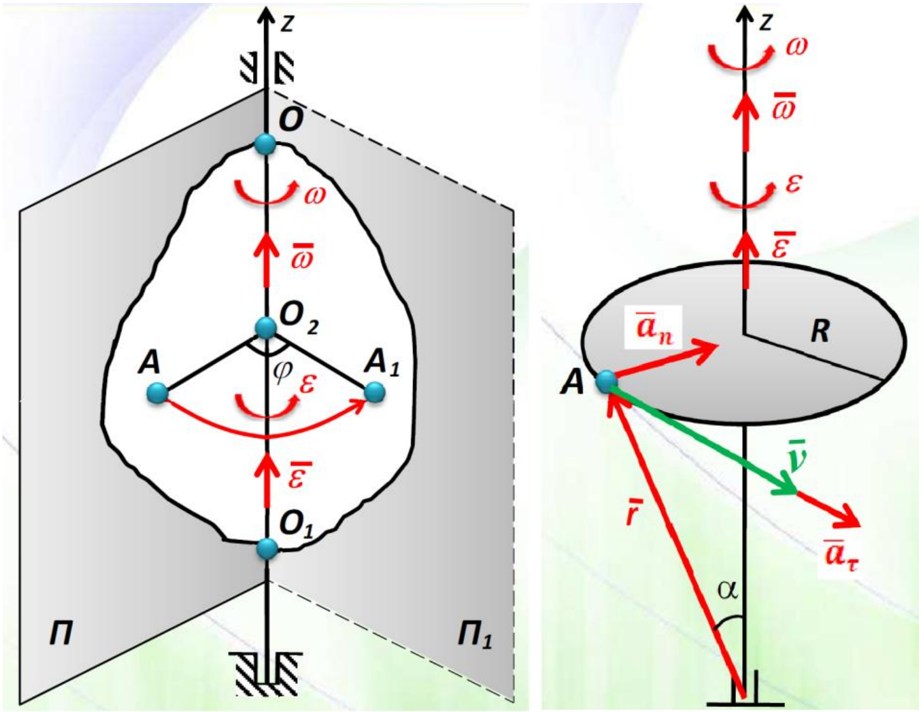



Рис. 2.1.

Вектори кутової швидкості і кутового прискорення спрямовані вдовж осі обертання. Напрямки $\overline{\omega}$ і $\overline{\varepsilon}$ збігаються, якщо збігаються знаки першої та другої похідних від кута повороту за часом (рис. 2.1). Всі точки обертового руху тіла описують траєкторію кола з радіусом $R$, що дорівнює найкоротшій відстані від точок до осі обертання. Рух точки по колу визначається виразом:

$$s = s(t) = R \cdot \varphi(t) \tag{2.5}$$

Швидкість точки тіла визначається за формулою Ейлера:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{r}, v = \frac{ds}{dt} = R\omega = \omega r sin\left(\widehat{\overline{r},\overline{\omega}}\right) \tag{2.6}$$

Прискорення точки тіла під час обертального руху дорівнює:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{r} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r}) = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n \tag{2.7}$$

де $\overline{a}_\tau = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$, $a_\tau = \varepsilon r sin\left(\widehat{\overline{r},\overline{k}}\right) = \varepsilon R$ – дотичне (тангенціальне) прискорення; $\overline{a}_n = \overline{\omega} \times \overline{v} = \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r})$, $a_n = \omega^2 R$ – нормальне прискорення.

Величина повного прискорення визначається за формулою:

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{2.8}$$

### *2.2. Умова і приклад виконання задачі*

Кривошип $O_1A$ (рис. 2.2) кривошипно-кулісного механізму $OO_1AB$ з одним ступенем вільності обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega_{O1A}$. Визначити закон руху, кутову швидкість і кутове прискорення куліси *OB,* а також кінематичні характеристики її точки *B*, якщо:

$\omega_{O1A}=\frac{\pi}{2}$рад/с, $O_1A=b$, $OO_1=2b$, $OB=4b$, $b=15$см

Дано:

$O_1A = d, OO_1 = 2d,$

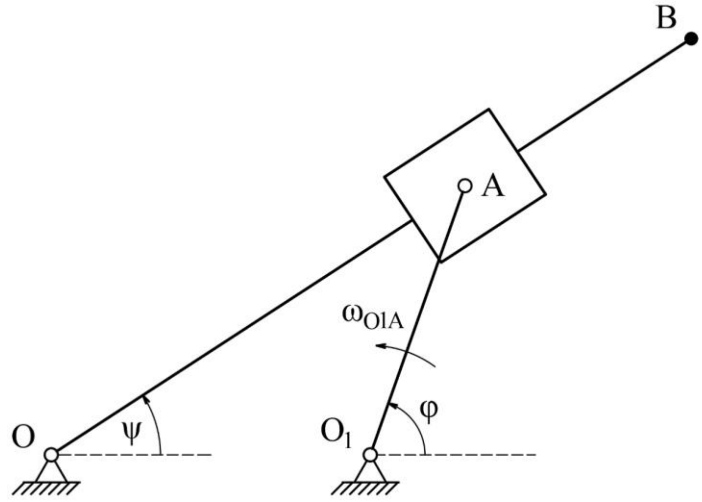
$OB = 4d, d = 10см,$

$\omega_{O_1A} = \frac{\pi}{2}\frac{рад}{с},$

$\varphi(t) = \omega_{O_1A}t$

$\omega$ -?; $\varepsilon$ -?;

$V_B$,?; $a_B$-?




Для визначення закону руху куліси, що гойдається, її кутової швидкості і кутового прискорення запишемо рівняння геометричних зв’язків:

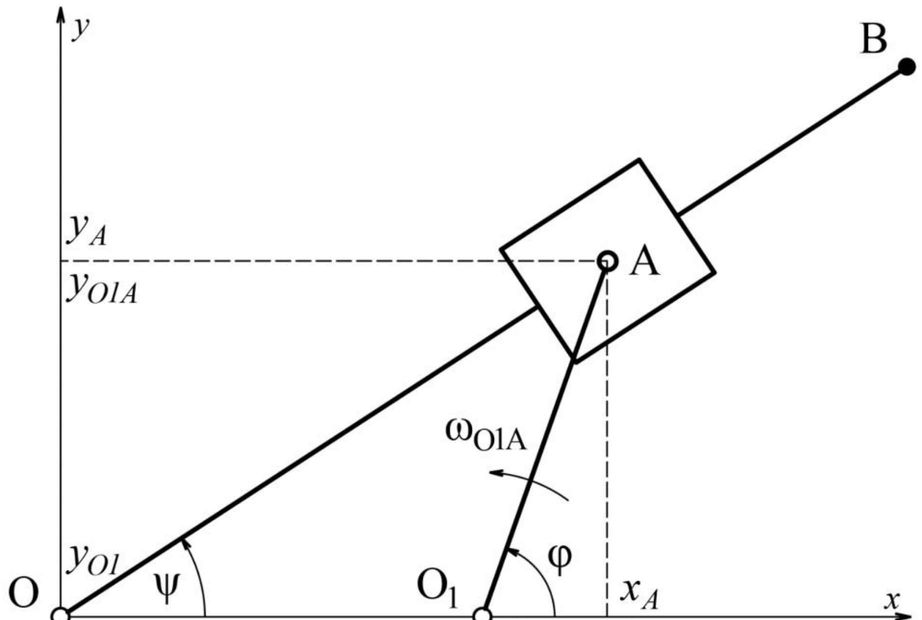



Рис. 2.2. Розрахункова схема кривошипно-кулісного механізму

$$\overline{OA} = \overline{OO_1} + \overline{OA} \quad \text{або} \quad \overline{R}_A = \overline{R}_{O1} + \overline{R}_{O1_A},$$

Це рівняння задає в довільний момент часу положення т. $A$, траєкторією руху якої є окружність, радіусом $O_1A$.

Враховуючі, що т. А цього механізму належить як кривошипу $O_1A$, так і кулісі $OB$, то позначимо її координати в декартовій системі Oxy, які належать кривошипу $A(x_{O1A}, y_{O1A})$, а куліси – $A(x_A, y_A)$.

Положення векторів $\overline{R}_{O_1}$і $\overline{R}_{O_{1_A}}$ визначаються відповідними проекціями на координатні осі:

$$x_{O_1} = OO_1, \qquad y_{O_1} = 0,$$
$$x_{O_1} = O_1A\,cos(\varphi), \qquad y_{O_{1_A}} = O_1A\,sin(\varphi)$$

Вектор $\overline{R}_A$ визначимо його довжиною $OA$ і кутом ψ, який відкладаємо від додатного напрямку осі $Ox$ проти ходу годинникової стрілки.

Тоді рівняння геометричних зв’язків можливо записати у вигляді:

$$OA\,cos(\psi) = x_A = O_1O + O_1A\,cos(\varphi),$$
$$OA\,sin(\psi) = y_A = O_1A\,sin(\varphi)$$

Закон обертального руху куліси $OB$ задається кутом ψ. Його можна визначити виразом:

$$\psi(t) = arctg\left(\frac{y_A}{x_A}\right) = arctg\,\frac{O_1A\,sin(\varphi)}{O_1O + O_1A\,cos(\varphi)}$$

або

$$\psi(t) = arctg\left(\frac{10\,sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{10co\,s\left(\frac{\pi t}{2}\right)+20}\right),$$

Визначимо кутову швидкість ω куліси $OB$:

$$\omega(t) = \frac{d\psi}{dt}, \qquad \omega(t) = \frac{\dfrac{5\pi\,cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{10\,cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+20} + \dfrac{50\pi\,sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}{\left(10\,cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+20\right)^2}}{\dfrac{100\,sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}{\left(10\,cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+20\right)^2}+1}$$

В момент часу t=*T*:

$$\omega(T) = \frac{\pi}{10}\ , \qquad \omega(T) = 0{,}314\ \frac{рад}{с}$$

Визначимо кутове прискорення ε куліси *OB*:

$$\varepsilon(t) = \frac{d^2\psi}{dt^2},$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\dfrac{500\pi^2 sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)^3}{\left(10\,cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+20\right)^3} - \dfrac{5\pi^2 sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}{20\,cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+40} + \dfrac{75\pi^2 cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\left(10\,cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+20\right)^2}}{\dfrac{100\,sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}{\left(10\,cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+20\right)^2}+1} -$$

Якщо t=*T*:

$$\varepsilon(T) = \frac{3\pi^2}{50}\ , \qquad \varepsilon(T) = 0{,}592\ \frac{рад}{с^2}$$

Визначаємо величину швидкості т.*B* куліси в момент часу t=*T*:

$$V_B = \omega \cdot OB\ , \qquad V_B = 0{,}314\ \cdot 60 = 12{,}566\ \frac{м}{с}$$

Знаходимо величини складових повного прискорення т. *B* при t=*T*.

Дотичне прискорення т. *B* :

$$a_B^\tau = \varepsilon \cdot OB\ , \qquad a_B^\tau = 0{,}592\ \cdot 40 = 23{,}687\ \frac{м}{с^2}$$

Нормальне прискорення т. *B* :

$$a_B^n = \omega^2 \cdot OB\ , \qquad a_B^n = 0{,}314^2\ \cdot 40 = 3{,}948\ \frac{м}{с^2}$$

Величина повного прискорення т.*B* в момент часу t=*T*:

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{(23{,}687)^2 + (3{,}948)^2} = 24{,}014\ \frac{м}{с^2}.$$

Наведемо розв’язок поставленої задачі, її етапи виконання, результати розрахунку і графіки, зображені на моніторі комп’ютера у програмному середовищі *Mathcad*:

$d := 10 \qquad O1A := d \qquad OO1 := 2 \cdot d \qquad OB := 4 \cdot d$

$T := 3 \qquad \omega O1A := \frac{\pi}{2} \qquad \phi(t) := \omega O1A \cdot t$

Визнаяення закону обертального руху куліси

$$\psi(t) := \operatorname{atan}\left(\frac{O1A \cdot \sin(\phi(t))}{OO1 + O1A \cdot \cos(\phi(t))}\right) \qquad \psi(t) \to \operatorname{atan}\left(\frac{10 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right)}{10 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right) + 20}\right)$$

$$\psi(T) \cdot deg^{-1} = -26.565$$

Визнаяення  кутового прискорення куліси

$$\omega(t) := \frac{d}{dt}\psi(t)$$

$$\omega(t) \to \frac{\dfrac{5 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right)}{10 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right) + 20} + \dfrac{50 \cdot \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right)^2}{\left(10 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right) + 20\right)^2}}{\dfrac{100 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right)^2}{\left(10 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right) + 20\right)^2} + 1} \qquad \omega(T) \to \frac{\pi}{10}$$

$$\omega(T) = 0.314$$

Визначення кутового прискорення куліси $\varepsilon(t) := \frac{d^2}{dt^2}\psi(t)$

$$\varepsilon(t) \rightarrow \frac{\frac{500\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)^3}{\left(10\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)+20\right)^3} - \frac{5\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)}{20\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)+40} + \frac{75\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)}{\left(10\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)+20\right)^2}}{\frac{100\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)^2}{\left(10\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)+20\right)^2}+1} -$$

$$-\frac{\left[\frac{1000\cdot\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)^3}{\left(10\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)+20\right)^3} + \frac{100\cdot\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)}{\left(10\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)+20\right)^2}\right]\cdot\left[\frac{5\cdot\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)}{10\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)+20} + \frac{50\cdot\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)^2}{\left(10\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)+20\right)^2}\right]}{\left[\frac{100\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)^2}{\left(10\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)+20\right)^2}+1\right]^2}$$

$$\varepsilon(T) \rightarrow \frac{\frac{125\cdot\pi^2}{2\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}+20\right)^3} - \frac{5\cdot\pi^2}{20\cdot\sqrt{3}+80} + \frac{75\cdot\sqrt{3}\cdot\pi^2}{4\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}+20\right)^2}}{\frac{25}{\left(5\cdot\sqrt{3}+20\right)^2}+1} -$$

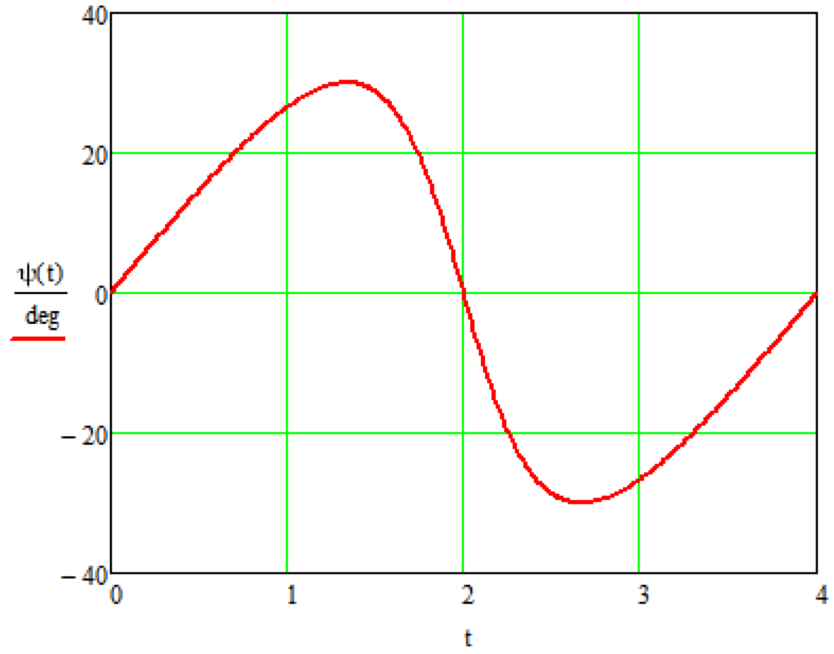
$$-\frac{\left[\frac{125\cdot\pi}{\left(5\cdot\sqrt{3}+20\right)^3} + \frac{25\cdot\pi\cdot\sqrt{3}}{\left(5\cdot\sqrt{3}+20\right)^2}\right]\cdot\left[\frac{25\cdot\pi}{2\cdot\left(5\cdot\sqrt{3}+20\right)^2} + \frac{5\cdot\pi\cdot\sqrt{3}}{10\cdot\sqrt{3}+40}\right]}{\left[\frac{25}{\left(5\cdot\sqrt{3}+20\right)^2}+1\right]^2}$$

$$\varepsilon(T) \rightarrow \frac{3\cdot\pi^2}{50} \qquad \varepsilon(T) = 0.592$$

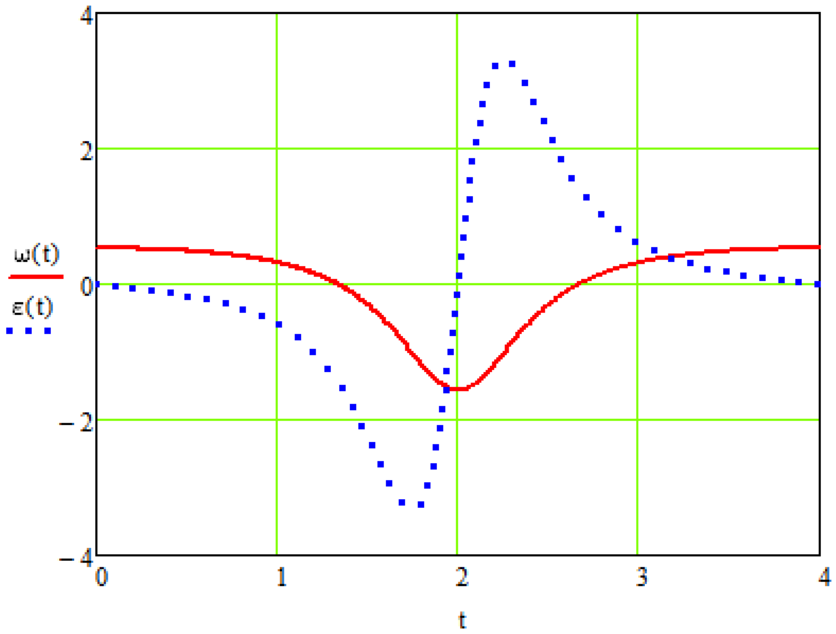
Побудуємо графіки закону руху ψ(t), кутової швидкості ω(t)/ω0 і кутового прискорення ε(t)/ω0^2

$t := 0, 0.01 .. 4$

Графік закону руху ψ(t)



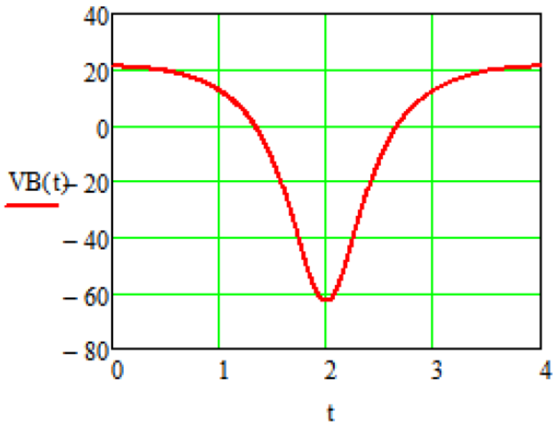

Графіки кутової швидкості ω(t)/ω і кутового прискорення ε(t)/ω0^2



Побудуємо графікі залажностей знайдених величин кінематичних характеристик

$t := 0, 0.01 .. 4$

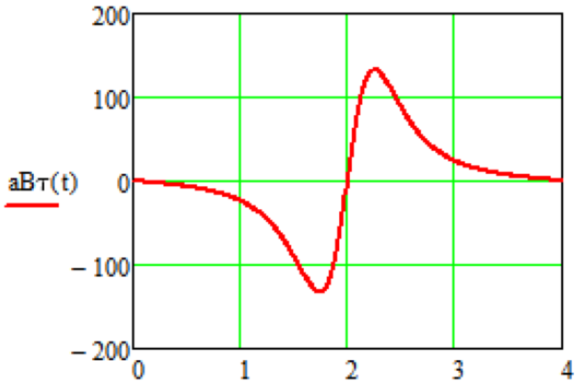
$VB(t) := \omega(t) \cdot OB$



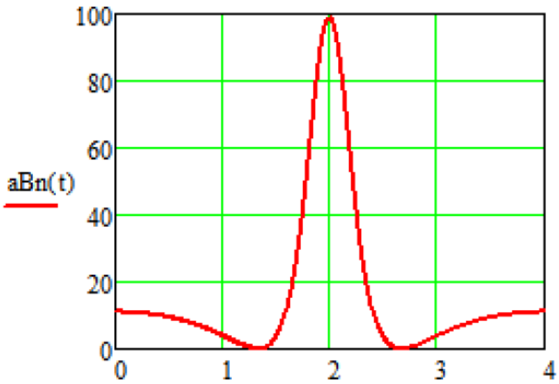

$VB(T) = 12.566$

Дотичне і нормальне прискорення точки В

$aB\tau(t) := \varepsilon(t) \cdot OB$

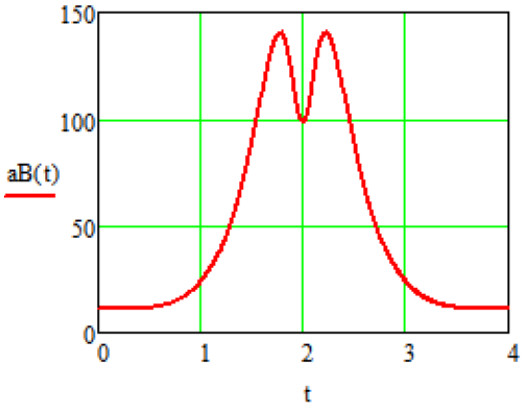


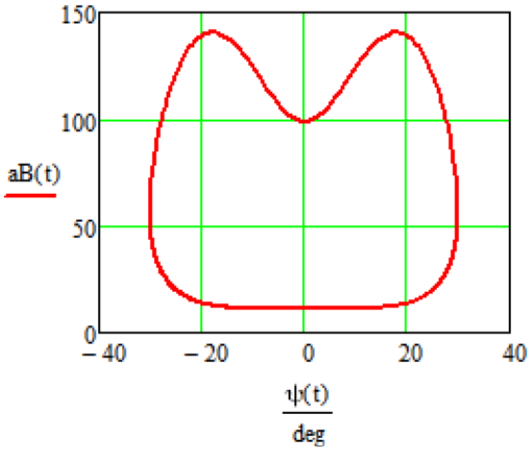

$aBn(t) := \omega(t)^2 \cdot OB$




$aBn(T) = 3.948$

$$aB(t) := \sqrt{aB\tau(t)^2 + aBn(t)^2} \qquad aB(T) = 24.014$$




### *3. Кінематика плоскопаралельного руху твердого тіла*

#### *3.1. Короткі відомості з теорії*

**Плоскопаралельним** називається такий рух твердого тіла, за якого всі його точки рухаються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині. За такого руху, для того, щоб охарактеризувати рух всього твердого тіла, достатньо розглянути рух однієї із таких паралельних площин в межах тіла (плоскої фігури). Плоскопаралельний рух тіла повністю визначається рухом перетину *S* (плоскої фігури). Тобто задача визначення кінематики тіла зводиться від тривимірної до двомірної. А кінетичні рівняння такого руху мають вигляд:

$$x_A = x(t), y_A = y(t), \varphi = \varphi(t), \tag{3.1}$$

де $X_{\text{A}}; Y_{\text{A}}$ – координати точки *A* – *полюса.* $\varphi$ – кут повороту навколо полюса. За полюс приймається точка, що лежить на твердому тілі, швидкість і прискорення якої відомі, або можуть бути легко обчислені.

Характерним прикладом такого руху може бути рух шатуна у кривошипно-шатунному механізмі, рух колеса, що котиться по прямолінійній ділянці шляху, та ін.

Плоскопаралельний рух твердого тіла можна розглядати як суму двох рухів, а саме: поступального разом з полюсом і обертального навколо осі, яка проходить через полюс перпендикулярно площині руху.

Кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху твердого тіла є швидкість $V_{\text{A}}$ і прискорення$a_{\text{A}}$ полюса та кутова швидкість $\omega$ і кутове прискорення тіла $\varepsilon$ навколо полюса.

### ***Визначення швидкостей точок тіла в разі плоскопаралельного руху тіла***

Існує два способи визначення швидкості точок при плоскопаралельному русі тіла:

– векторний (з графічним і аналітичним варіантами);

– використання миттєвого центра швидкостей;

Під час першого способу швидкість будь-якої точки тіла визначається геометричною (векторною) сумою:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \tag{3.2}$$

де

$\vec{V}_B$– визначаєма швидкість т. В;

$\vec{V}_A$– швидкість полюса (т. А);

$\vec{V}_{BA}$– швидкість т. В в разі обертового руху плоскої фігури навколо полюса.

Швидкість будь-якої точки тіла в разі плоскопаралельного руху можна зобразити як геометричну суму швидкості полюса та лінійної швидкості точки в разі обертового руху плоскої фігури навколо полюса.

Спроєктувавши векторне рівняння (3.2) на дві перпендикулярні осі і визначивши величину $V_{BA} = \omega \cdot BA$ , знаходимо значення швидкості $V_B$ через проекції $V_{Bx}$, $V_{By}$за теоремою Піфагора $V_B = \sqrt{V_{Bx} + V_{By}}$.

Аналітичний варіант векторного способу ґрунтується на теоремі про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, яка формулюється так: проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що сполучає точки, рівні між собою.

$$V_A \cdot cos\,\alpha = V_B \cdot cos\,\beta;$$

$$V_B = \frac{V_A \cdot cos\,\alpha}{cos\,\beta},$$

де $V_A$ – відома швидкість т. А;

$V_B$– визначаєма швидкість т. В;

$\alpha$ і $\beta$ – відповідні кути між векторами швидкостей точок А і В та прямою, що сполучає ці точки.

Даний варіант векторного способу рекомендується використовувати у разі відомих напрямків векторів швидкостей та у разі відомої величини однієї із швидкостей точок.

Другий спосіб визначення швидкості точки у разі плоскопаралельного руху тіла використовує поняття «миттєвого центра швидкостей». *МЦШ* – це точка рухомої плоскої фігури, швидкість якої у дану мить дорівнює нулю і навколо якої відбувається обертання тіла. *МЦШ* позначається буквою *Р*.

Швидкість будь-якої точки тіла за цим способом визначається:

$$V_A = \omega \cdot PA,$$
$$V_B = \omega \cdot PB \qquad (3.3)$$
і т. д.,

де ω – кутова швидкість тіла;

$PA$ , $PB$ – найкоротші відстані (перпендикуляри) від векторів $\vec{V}_A$ та $\vec{V}_B$до *МЦШ*.

Із рівності (3.3) можна записати:

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB} = \dots = \omega,$$
$$V_B = \omega \cdot PB. \qquad (3.4)$$

Отже, швидкості точок тіла, пропорційні їх відстанням до миттєвого центра швидкостей.

Під час обертального руху положення *МЦШ* є постійним і збігається з центром обертання. У разі поступального руху – *МЦШ* прямує до нескінченності. А у разі плоскопаралельного руху існують способи визначення *МЦШ*.

### *Способи визначення миттєвого центра швидкостей*

В загальному випадку *МЦШ* знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених від векторів швидкостей точок.

У окремих випадках:

- якщо вектори швидкостей двох точок паралельні $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$ та модулі їх рівні між собою, то МЦШ віддаляється на нескінченну велику відстань. У цьому випадку відбувається миттєво-поступальний рух;
- якщо вектори швидкостей двох точок направлені в один бік і перпендикулярні до відрізка, що їх з'єднує, а модулі швидкостей не рівні між собою, то *МЦШ* лежить у точці перетину зазначеної перпендикулярної прямої з іншою прямою, яка з'єднує кінці векторів швидкостей точок;
- якщо вектори швидкостей двох точок направлені в різні боки і перпендикулярні до відрізка, що їх з'єднує, то *МЦШ* лежить у точці перетину прямої, яка з'єднує кінці векторів швидкостей, з наведеним вище відрізком;
- у випадку кочення (без ковзання) тіла по нерухомій поверхні *МЦШ* знаходиться в точці контакту тіла і поверхні.

Іншою важливою кінематичною характеристикою плоскопаралельного руху твердого тіла є прискорення.

### *Визначення прискорень точок тіла*

Найбільш поширені два способи визначення прискорення точок у поскопаралельному русі тіла:

- векторний;
- з використанням миттєвого центра прискорень (МЦП).

Векторний спосіб визначення прискорень точок тіла ґрунтується на векторній формулі розподілу прискорень точок плоскої фігури:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau(\varepsilon)} + \vec{a}_{BA}^{n(\omega)}, \tag{3.5}$$

Прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення точки, яку обрано за полюс, та обертового (дотичного) $\vec{a}_{BA}^{\tau(\varepsilon)}$ і прискорення доцентрового (нормального) $\vec{a}_{BA}^{n(\omega)}$ цієї точки в разі обертового руху плоскої фігури навколо полюса.

Оскільки в разі абсолютного руху т. $B$ складові її прискорення $\vec{a}_{BA}^{n(\omega)}$ і$\vec{a}_{BA}^{\tau(\varepsilon)}$ зовсім не спрямовані по головній нормалі та дотичній до абсолютної траєкторії т. $B$, у теоретичній механіці ці складові частіше називають обертовим і доцентровим прискореннями.

Де $\vec{a}_B$ – визначаєме прискорення точки;

$\vec{a}_A$ – прискорення полюсу;

$\vec{a}_{BA}^{\tau(\varepsilon)}$ – обертове прискорення т. $B$ в обертовому русі разом з тілом навколо полюса $A$.

$\vec{a}_{BA}^{n(\omega)}$ – доцентрове прискорення т. $B$ в обертовому русі разом з тілом навколо полюса $A$.

Величини обертового та доцентрового прискорення розраховується так:

$$a_{BA}^{\tau(\varepsilon)} = \varepsilon \cdot AB;$$
$$a_{BA}^{n(\omega)} = \omega^2 \cdot AB,$$

де $\varepsilon$– кутове прискорення тіла;

$\omega$– кутова швидкість тіла.

Для визначення величини шуканого прискорення $\vec{a}_B$необхідно спроєктувати всі вектори, що записані в формулі (3.5), на осі декартової системи координат та розв’язати рівняння.

Миттєвий центр прискорень (*МЦП*) – це точка рухомої плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю. *МЦП* позначається буквою $Q$ і знаходиться на промені, проведоному з т. $A$ під кутом $\mu$ (3.8) відкладеного за напрямом кутового прискорення $\varepsilon$.

Розрахунок прискорення точки за допомогою миттєвого центру прискорень потребує, щоб у вихідних даних (крім прискорення полюсу $\vec{a}_A$)

були відомі кутова швидкість $\omega$ та кутове прискорення $\varepsilon$ плоскої фігури. Визначається прискорення т. $B$ цим способом як геометрична сума прискорень полюса $\vec{a}_A$і прискорення $\vec{a}_{BA}$ (3.6):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \tag{3.6}$$

Вектор $\vec{a}_{BA}$ спрямовується у т. $B$ паралельно вектора $\vec{a}_A$ у протилежну сторону, а його модуль пропорційний віддалі *AB* (2.7):

$$a_{BA} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{3.7}$$

Промінь, на якому знаходиться т. *B*, проводиться з т. *A* під кутом $\mu$ (2.8) так, щоб напрямок повороту вектора $\vec{a}_A$ до цього променя збігався з напрямом $\varepsilon$.

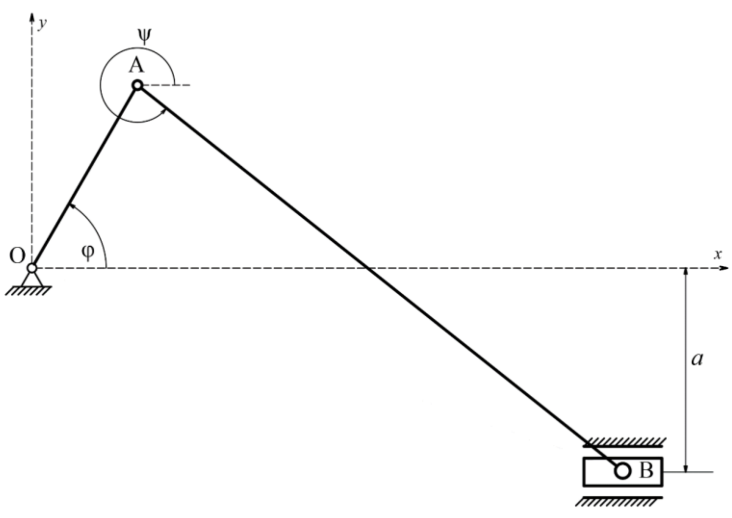
$$\mu = arctg\,\frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \tag{3.8}$$

### *3.2. Умова і приклад виконання задачі*

Плоский кривошипно-шатунний механізм OAB (рис. 3.1) має один ступень вільності і складається із ланок таких: кривошипу OA, шатуну AB і повзуна B, з’єднаних між собою шарнірно. Ланки механізму рухаються в площині аркуша. Кривошип OA механізму обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega_0$. Необхідно визначити закон руху шатуна AB, його кутову швидкість і кутове прискорення, а також кінематичні характеристики точок A і B в момент часу $t=T$, якщо:

Дано:
$OA = r = 1{,}0м,$
$AB = L = 3м,$
$a = 1{,}0м,$
$\omega_O = \pi \frac{рад}{с},$
$\varphi(t) = \omega_O \cdot t,$
$T = \frac{1}{3} с$

$V_A, V_B, V_C$-?;
$\omega_2, \omega_3, \omega_4$-?;
$a_A, a_B, a_C$-?;
$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$-?




У кривошипно-шатунному механізмі OAB кривошип OA здійснює обертальний рух навколо осі Oz, спрямованої перпендикулярно площині руху механізму, повзун рухається поступально вздовж горизонтальної напрямної, а шатун AB здійснює плоскопаралельний рух.

Закон обертального руху кривошипу відомий і визначається виразом:

$$\varphi(t) = \omega_O \cdot t$$

отже, закон руху, швидкість і прискорення будь-якої точки кривошипа, у тому числі й точки A, легко обчислити за формулою Ейлера, і цю точку в подальшому можна обрати як полюс (рис. 3.1).

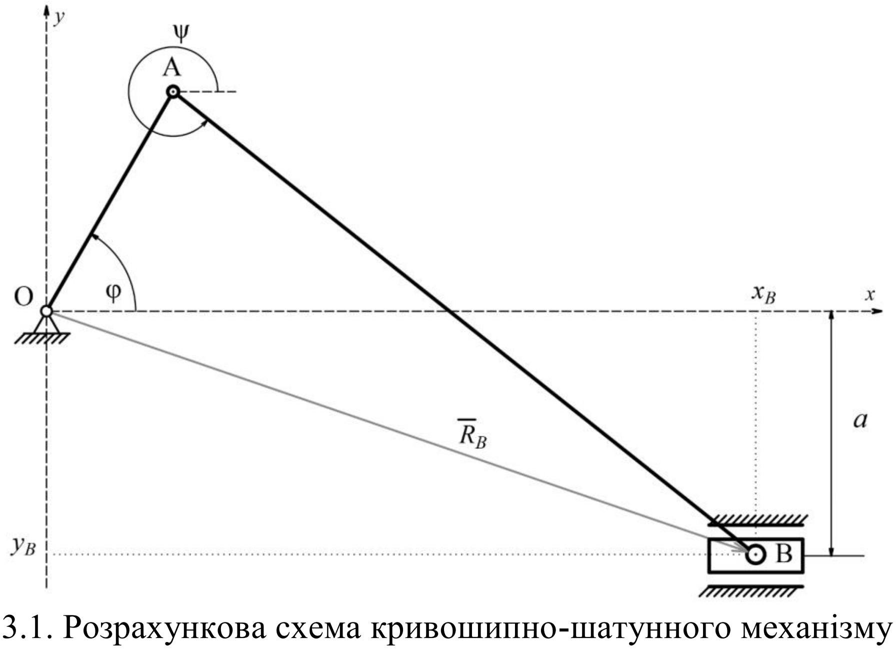



Рис. 3.1. Розрахункова схема кривошипно-шатунного механізму OAB

Для знаходження обертальної складової плоского руху шатуна АВ навколо полюса А запишемо рівняння геометричних зв’язків для точки В шатуна, у якої відома тільки траєкторія руху.

У векторній формі рівняння геометричних зв’язків має вигляд:

$$\overline{R}_B \ = \ \overline{OA} + \overline{AB}.$$

Запишемо це рівняння в проекціях на координатні осі OX та OY:

$$x_B \ = \ OA\,cos(\varphi) + AB\,cos(\psi),$$

$$y_B \ = \ OA\,sin(\varphi) - AB\,sin(\psi) = -a$$

Розв’язуючі друге рівняння системи відносно невідомої $\psi$, знайдемо закон обертальної частини плоскопаралельного руху шатуна навколо полюса т. А:

$$\psi \ = -\,arcsin\left[\frac{OA}{AB}sin(\varphi) + \frac{a}{AB}\right]$$

Надалі визначимо кутову швидкість та кутове прискорення шатуна диференціюванням за часом *ψ(t).* Кінематичні характеристики точок знайдемо за допомогою теорем про складання швидкостей та прискорень у разі плоскопаралельного руху.

$$\omega(t) = \frac{d\psi}{dt}, \qquad \omega(t) = -\frac{\pi\,cos(\pi t)}{3\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}sin(\pi t)+\frac{1}{3}\right)^2}}.$$

Для моменту часу *t*=*T* кутова швидкість кривошипу:

$$\omega(T) = -\frac{\pi}{6\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right)^2}} = -0{,}669\ \frac{рад}{c}$$

Задамо вектори кутової швидкості та кутового прискорення ланок кривошипно-шатунного механізму:

$$\omega_{OA}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \quad \omega_{AB}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t) \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{OA}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{AB}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon(t) \end{pmatrix}$$

Визначимо закон руху, а також вектори швидкості та прискорення т. А кривошипу:

$$R_A(t) = \begin{pmatrix} r \cdot cos(\varphi(t)) \\ r \cdot sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_A(t) = \omega_{OA}(t) \times R_A(t)$$

$$a_A(t) = \varepsilon_{OA}(t) \times R_A(t) + \omega_{OA}(t) \times (\omega_{OA}(t) \times R_A(t))$$

Обчислення закону руху і векторів швидкості та прискорення т. В шатуна:

$$AB(t) = \begin{pmatrix} cos(\psi(t)) \\ sin(\psi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L \qquad R_B(t) = R_A(t) + AB(t)$$

$$V_{AB}(t) = \omega_{AB}(t) \times AB(t) \qquad V_B(t) = V_A(t) + V_{AB}(t)$$

$$a_{AB\tau}(t) = \varepsilon_{AB}(t) \times AB(t) \qquad a_{ABn}(t) = \omega_{AB}(t) \times (\omega_{AB}(t) \times AB(t))$$

$$a_{AB}(t) = a_{AB\tau}(t) + a_{ABn}(t) \qquad a_B(t) = a_A(t) + a_{AB}(t)$$

Надалі наведено чисельний розрахунок поставленої задачі у програмному середовищі *Mathcad*, знятий з екрана:

Вихідні дані до розрахунку:

$$r := 1 \qquad L := 3 \qquad a := 1$$

$$T := \frac{1}{3} \qquad \omega0 := \pi \qquad \phi(t) := \omega0 \cdot t$$

Визначення закону руху шатуна АВ кривошипно-шатуного механізму, його кутової швидкості та кутового прискорення

$$\psi(t) := -\mathrm{asin}\left(\frac{r}{L}\cdot\sin(\phi(t)) + \frac{a}{L}\right) \qquad \psi(t) \rightarrow -\mathrm{asin}\left(\frac{1}{3}\cdot\sin(\pi\cdot t) + \frac{1}{3}\right)$$

$$\psi(T)\cdot \deg^{-1} = -38.463$$

Визначення  кутової швидкості шатуна

$$\omega(t) := \frac{d}{dt}\psi(t)$$

$$\omega(t) \rightarrow -\frac{\pi\cdot\cos(\pi\cdot t)}{3\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\cdot\sin(\pi\cdot t)+\frac{1}{3}\right)^2}} \qquad \omega(T) \rightarrow -\frac{\pi}{6\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right)^2}} \qquad \omega(T) = -0.669$$

Вектори кутової швидкості та кутового прискорення ланок механізму

$$\omega OA(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega0 \end{pmatrix} \qquad \omega AB(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t) \end{pmatrix} \qquad \omega AB(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.669 \end{pmatrix}$$

Закон руху, вектор швидкості т.А кривошипу ОА

$$RA(t) := \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\phi(t)) \\ r\cdot\sin(\phi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad RA(T) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$VA(t) := \omega OA(t) \times RA(t) \qquad VA(T) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad VA(T) = \begin{pmatrix} -2.721 \\ 1.571 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Закон руху, вектор швидкості т.В шатуна АВ

$$AB(t) := \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) \\ \sin(\psi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot L \qquad RB(t) := RA(t) + AB(t) \qquad RB(T) = \begin{pmatrix} 2.849 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$VAB(t) := \omega AB(t) \times AB(t)$$

$$VAB(T) = \begin{pmatrix} -1.248 \\ -1.571 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad VB(t) := VA(t) + VAB(t)$$

$$VB(T) \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{2} - \frac{\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)}{6\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right)^2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad VB(T) = \begin{pmatrix} -3.969 \\ 5.085 \times 10^{-14} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Визначення кутового прискорення ланок механізму

$$\varepsilon(t) := \frac{d^2}{dt^2}\psi(t)$$

$$\varepsilon(t) \rightarrow \frac{\pi^2\cdot\sin(\pi\cdot t)}{3\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\cdot\sin(\pi\cdot t)+\frac{1}{3}\right)^2}} - \frac{\pi^2\cdot\cos(\pi\cdot t)^2\cdot\left(\frac{\sin(\pi\cdot t)}{3}+\frac{1}{3}\right)}{9\cdot\left[1-\left(\frac{1}{3}\cdot\sin(\pi\cdot t)+\frac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\varepsilon(T) \rightarrow \frac{\sqrt{3}\cdot\pi^2}{6\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right)^2}} - \frac{\pi^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{3}\right)}{36\cdot\left[1-\left(\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \varepsilon(T) = 3.283$$

Вектори кутового прискорення ланок механізму

$$\varepsilon OA(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon AB(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon(t) \end{pmatrix}$$

Вектори прискорення т.А ,т.В кривошипа OA

$$aA(t) := \varepsilon OA(t) \times RA(t) + \omega OA(t) \times (\omega OA(t) \times RA(t)) \qquad aA(T) = \begin{pmatrix} -4.935 \\ -8.547 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$aAB\tau(t) := \varepsilon AB(t) \times AB(t)$$

$$aAB\tau(T) \rightarrow \begin{bmatrix} -\left[\dfrac{\pi^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{1}{3}\right)}{36\cdot\left[1-\left(\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{\sqrt{3}\cdot\pi^2}{6\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2}}\right]\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right) \\ -3\cdot\left[\dfrac{\pi^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{1}{3}\right)}{36\cdot\left[1-\left(\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{\sqrt{3}\cdot\pi^2}{6\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2}}\right]\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$aAB\tau(T) = \begin{pmatrix} 6.127 \\ 7.713 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$aABn(t) := \omega AB(t) \times (\omega AB(t) \times AB(t))$$

$$aABn(T) \rightarrow \begin{bmatrix} -\dfrac{\pi^2}{12\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2}} \\ -\dfrac{\pi^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)}{36\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{1}{3}\right)^2-36} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad aABn(T) = \begin{pmatrix} -1.05 \\ 0.834 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$aAB(t) := aAB\tau(t) + aABn(t) \qquad aB(t) := aA(t) + aAB(t)$$

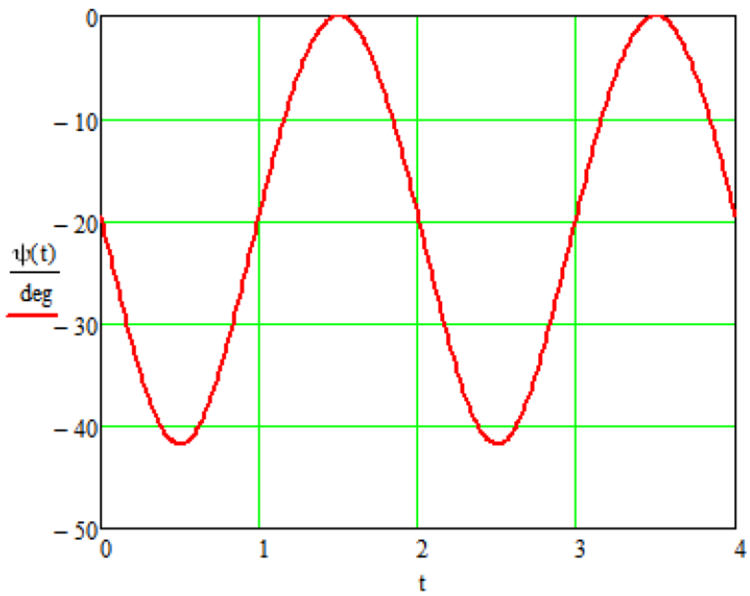
$$aB(T) \rightarrow \begin{bmatrix} -\dfrac{\pi^2}{12\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2}} - \left[\dfrac{\pi^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{1}{3}\right)}{36\cdot\left[1-\left(\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{\sqrt{3}\cdot\pi^2}{6\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2}}\right]\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right) - \dfrac{\pi^2}{2} \\ -3\cdot\left[\dfrac{\pi^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{1}{3}\right)}{36\cdot\left[1-\left(\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{\sqrt{3}\cdot\pi^2}{6\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2}}\right]\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\right)^2} - \dfrac{\sqrt{3}\cdot\pi^2}{2} - \dfrac{\pi^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)}{36\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{1}{3}\right)^2-36} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$aB(T) = \begin{pmatrix} 0.142 \\ 1.281\times 10^{-11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

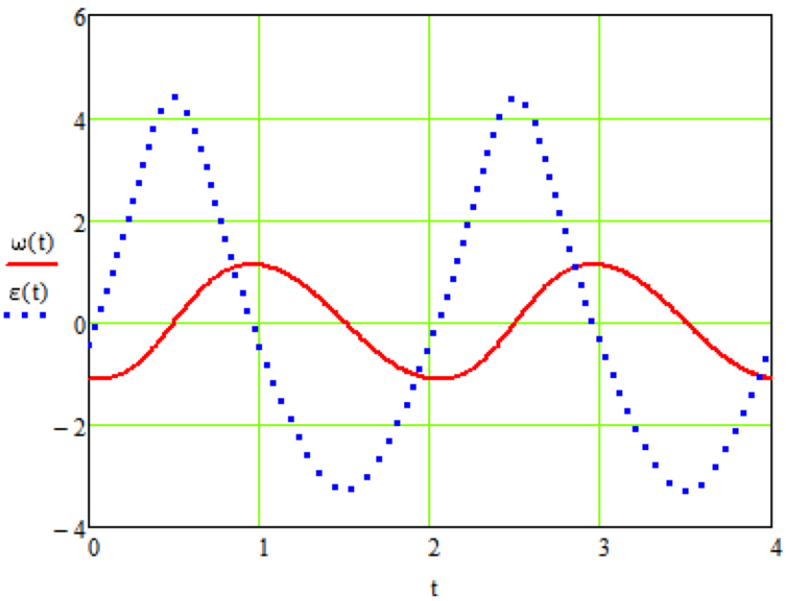
Побудуємо графіки закону руху ψ(t), кутової швидкості ω(t)/ω0 і кутового прискорення ε(t)/ω0^2

$t := 0, 0.01 .. 4$

Графік закону руху ψ(t)




Графіки кутової швидкості ω(t)/ω і кутового прискорення ε(t)/ω0^2



# СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Булгаков В.М.* Теоретична механіка : посібник для практичних занять / В.М. Булгаков, В.В. Бурлака, В.С. Лукач та ін. – Ніжин : Видавництво «Міланік», 2009. − 639 с.
2. *Гайдайчук В.В.* Теоретична механіка. Кінематика : навч. посібник / В.В. Гайдайчук, М.Г. Гонтар, О.О. Лук'янченко, А. В. Кузнецов.– Київ : КНУБА, 2015. – 152 с.
3. *Дзісь В.Г.* Програмування в *Mathcad* : довідник / В.Г. Дзісь, О.В. Левчук, Л.І. Новицька та ін. – Вінниця : Видавничий центр ВНАУ, 2015. – 187 с.
4. *Іскрицький В.М.* Теоретична механіка. Статика і кінематика : навч. посібник / В. М. Іскрицький, С. В. Подлєсний, О. В. Водолазська, Ю. О. Єфорт. – Краматорськ : ДДМА, 2007.– 204 с.
5. *Теоретична механіка.* Кінематика : метод. вказ. та завдання до виконання розрахунково-графічних робіт / К.Е. Котенко, М.В. Лазарева. – Київ : КНУБА, 2019 – 69 с.
6. *Лобас Л.Г.* Теоретична механіка : підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів / Л.Г. Лобас. – Київ : ДЕТУТ, 2008. – 406 с.
7. *Павловський М.А*. Теоретична механіка : підручник. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
8. *Палій О.М.* Теоретична механіка. Кінематика : методичні вказівки та завдання до виконання контрольних робіт/ О.М. Палій, Р.О. Плохута. – Київ : КНУБА, 2019. – 38 с.

Для нотаток

Навчально-методичне видання

# ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.
# КІНЕМАТИКА.
# КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Методичні вказівки
до вивчення курсу
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти спеціальностей
131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»,
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,
192 «Будівництво та цивільна інженерія»
за ОПП «Міське будівництво та господарство»

Укладачі: **Гайдайчук** Віктор Васильович,
**Котенко** Костянтин Едуардович

Випусковий редактор Л. С. Тавлуй
Комп'ютерне верстання К. А. Мавроді

Підписано до друку 02.09.2025. Формат 60 х 841 /16
Ум. друк. арк. 3,25. Обл.-вид. арк. 3,5.
Електронний документ. Вид. № 60/ІІІ-25
Видавець і виготовлювач:
Київський національний університет будівництва і архітектури
Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002