

АФІННІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДИСКРЕТНО ПОДАНИХ ПОВЕРХОНЬ (ДПП) З УРАХУВАННЯМ ОБ'ЄМУ, ЩО ПЕРЕКРИВАЄТЬСЯ

Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

У публікації розглянуто відомі властивості змін об'ємів геометричних фігур при афінних перетвореннях [1], які дозволяють використовувати їх для управління формою поверхонь криволінійних покриттів в архітектурному проектуванні, якщо задано об'єм, що перекривається.

Постановка проблеми. При проектуванні просторових архітектурних покриттів задачі, які пов'язано з опаленням, вентиляцією та кондиціонуванням підоболонкового простору, напрямку можна пов'язати з об'ємом, що перекривається. При цьому виникає проблема управління формою поверхні покриття при заданому об'ємі, що перекривається. Ця проблема ускладнюється, якщо покриття є безмоментним і не може бути описано аналітичним рівнянням. Такі поверхні формуються в дискретному вигляді статико-геометричним методом [2].

Аналіз останніх досліджень. В роботах [3, 4] показано, що результатом афінного перетворення врівноваженої сітки, яку сформовано статико-геометричним методом, є інша врівноважена сітка, що формується під дією зовнішніх зусиль, перетворених у тому самому афінному перетворенні.

В роботі [3] розглянуто афінні перетворення врівноважених сіток, якщо задано подвійну площину перетворення і пару відповідних точок. Подвійна площина перетворення при цьому може займати довільне положення і напрям перетворення може бути також довільним. При цьому утворюється нова сітка, яка також є врівноваженою, але зусилля зовнішнього навантаження на вузли в загальному випадку не можуть моделювати власну вагу покриття, оскільки вектори зусиль зовнішнього навантаження не будуть вертикальними.

В роботі немає аналізу обмежень, які потрібно накласти на параметри афінного перетворення для того, щоб вектори зусиль зовнішнього навантаження залишалися вертикальними.

В проаналізованій літературі не розглядалось питань, які пов'язано з афінним перетворенням сіток, що перекривають заданий об'єм.

Основна частина. Відомо, що загальний випадок афінного перетворення в просторі можна розглядати як ланцюг трьох перспективно-афінних перетворень відносно заданих подвійних площин, які утворюють тригранний кут і ізометричного перетворення (або довільного повороту у просторі [5]).

На рис. 1 показано ланцюг перспективно-афінних перетворень відносно подвійних площин Γ, Λ, Σ з коефіцієнтом перетворення відповідно k', k'', k''' і перенесення (a) у просторі.

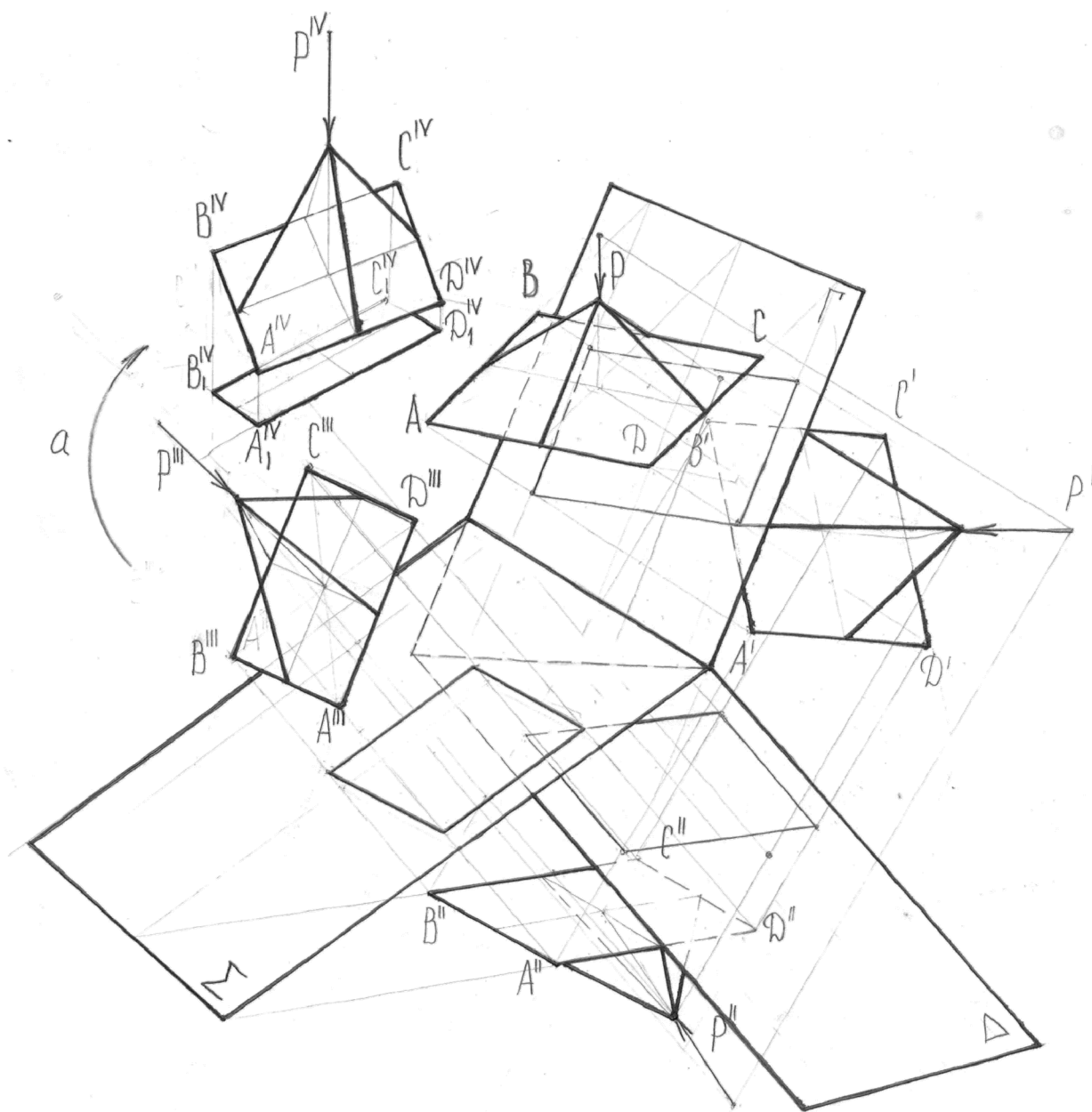


Рис. 1. Ланцюг перспективно – афінних перетворень та поворот у просторі

Оскільки, маємо справу з рівноважними сітками, які утворюються під дією власної ваги P , переміщення (a) повинно бути таким, щоб вектор $\vec{P}^{IV}$ був також вертикальним. Слід також зазначити, що в результаті ланцюга перспективно – афінних перетворень та повороту у просторі, об'єм V^{IV} є об'ємом, що перекривається поверхнею не на горизонтальному плані, а на паралелограмі $A^{IV}B^{IV}C^{IV}D^{IV}$ у площині загального положення.

Практика архітектурного проектування не потребує використання загального апарату перетворення, що показано на рис. 1. Як правило, площина плану вихідної поверхні залишається незмінною, а подвійні площини ланцюга афінних перетворень є координатними площинами у прямокутній Декартовій системі координат (рис. 2). У такому разі вертикальні зусилля зовнішнього навантаження залишаються вертикальними і поворот (а) стає непотрібним.

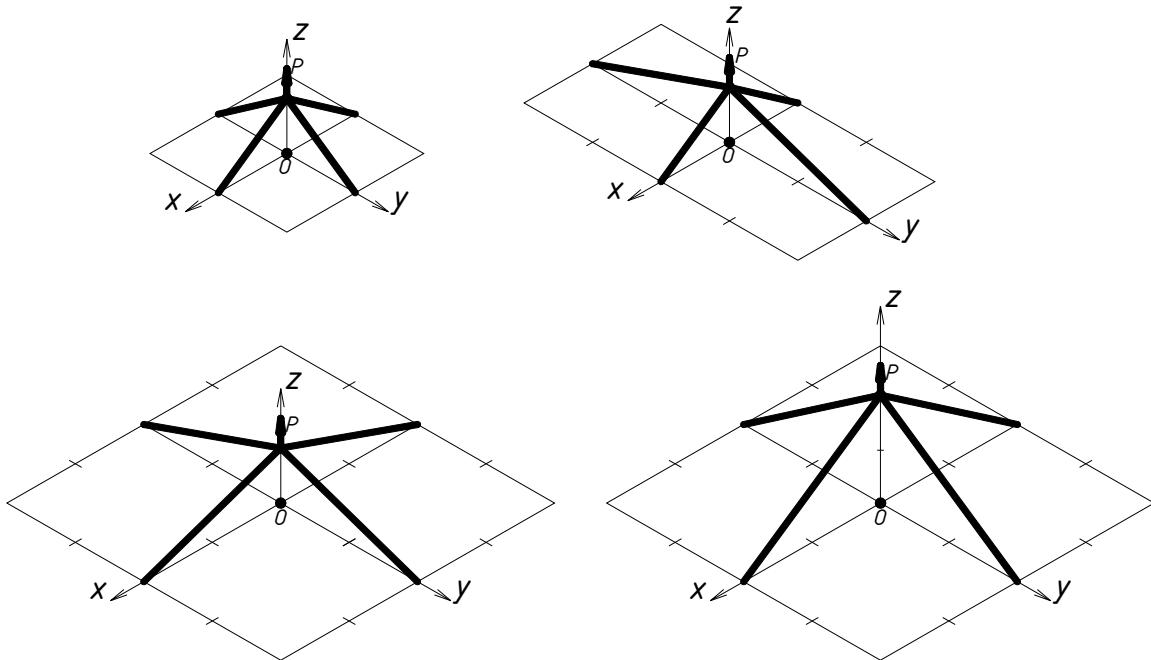


Рис.2. Афінне перетворення ДПП вздовж трьох координатних площин

Перше перспективно-афінне перетворення має подвійну площину XOZ і напрям Oy з коефіцієнтом k_y :

$$y' = k_y y. \quad (1)$$

Друге перетворення має подвійну площину YOZ , напрям Ox і коефіцієнт k_x :

$$x' = k_x x. \quad (2)$$

Подвійною площиною третього перетворення є координатна площина XOY , напрям OZ і коефіцієнт k_z :

$$z' = k_z z. \quad (3)$$

При цьому об'єм V , що перекривається вихідною поверхнею, перетворюється на об'єм V' :

$$V' = V \cdot k_x \cdot k_y \cdot k_z, \quad (4)$$

де k_x, k_y, k_z – параметри управління формою поверхні.

Кожний з коефіцієнтів k_x, k_y, k_z може дорівнювати одиниці. В такому випадку відповідне афінне перетворення стає тотожним

перетворенням (виключається з ланцюга афінних перетворень), параметрами управління формою поверхні залишаються коефіцієнти, які не дорівнюють одиниці.

Приклад 1 (рис. 3).

Статико-геометричним методом сформовано дискретну сітку на квадратному плані з одиничним кроком 6×6 (рис. 3а). Задано аплікату центрального вузла сітки $Z_{33} = 6$. Опорний контур задано у вигляді ламаної лінії з восьми відрізків.

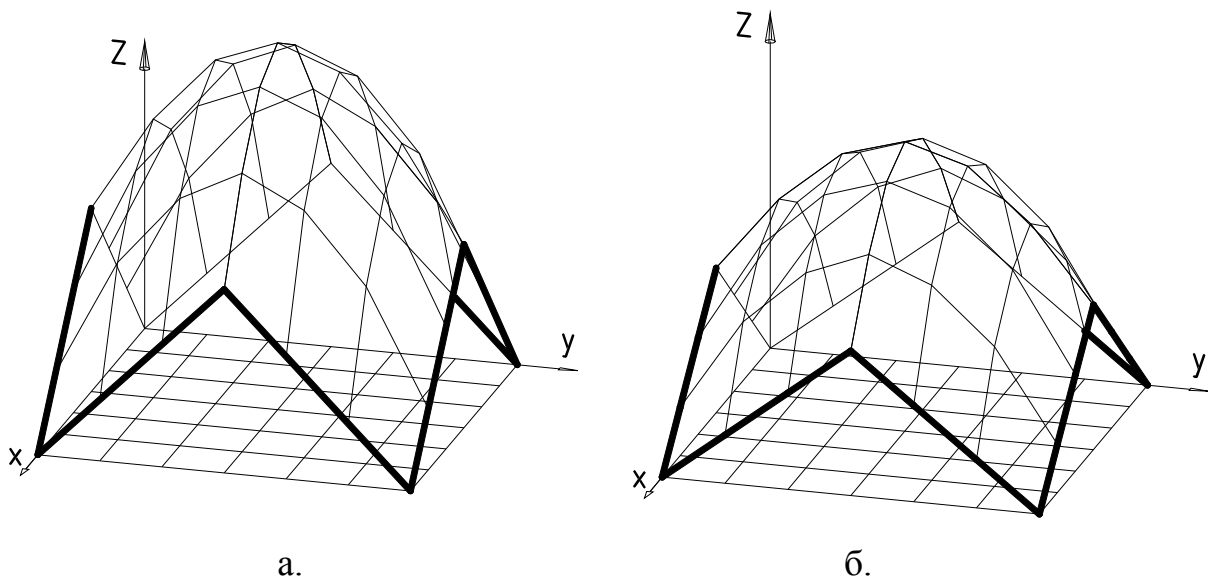


Рис. 3. Дискретно визначена поверхня до афінного перетворення та після

В таблиці 1 наведено всі аплікати вузлів вихідної дискретно визначеної поверхні (ДВП), при чому задані вузли виділено товстою лінією.

Таблиця 1

6	0	1	2	3	2	1	0
5	1	2,9	4,0444	4,5556	4,0444	2,9	1
4	2	4,0444	5,2111	5,6222	5,2111	4,0444	2
3	3	4,5556	5,6222	6	5,6222	4,5556	3
2	2	4,0444	5,2111	5,6222	5,2111	4,0444	2
1	1	2,9	4,0444	4,5556	4,0444	2,9	1
0	0	1	2	3	2	1	0
<i>i/j</i>	0	1	2	3	4	5	6

Для визначення аплікат невідомих внутрішніх вузлів сітки складено і розв'язано скорочену систему рівнянь рівноваги вузлів сітки з врахуванням умов симетрії вихідних даних:

$$\begin{aligned}
-4Z_{11} + 2Z_{21} + kP + 2 &= 0; \\
Z_{11} - 4Z_{21} + Z_{22} + Z_{31} + kP + 2 &= 0; \\
2Z_{21} - 4Z_{31} + Z_{32} + kP + 3 &= 0; \\
2Z_{21} - 4Z_{22} + 2Z_{32} + kP &= 0; \\
2Z_{22} + Z_{31} - 4Z_{32} + kP + 6 &= 0; \\
4Z_{32} + kP - 24 &= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

За формулою для підрахунку об'єму в [6], що перекривається ДПП, обчислено об'єм, що перекривається вихідною дискретно визначеною поверхнею:

$$V = 129,5108 \text{ куб.од.}$$

Афінно перетворимо сітку у напрямі осі OZ при незмінному плані ($k_1 = k_2 = k_3$) так, щоб об'єм дорівнював $V' = 100$ куб. од. Для цього визначаємо коефіцієнт афінного перетворення:

$$k_z = \frac{V'}{V} = \frac{100}{129,5108} = 0,7721. \tag{6}$$

Аплікати вузлів перетвореної сітки, що перекриває об'єм $V = 100$ куб. од., отримаємо множенням всіх аплікат вихідної сітки на (6). За результатами обчислень, які наведено в таблиці 2, на рис. 3 б побудовано нову сітку.

Таблиця 2

6	0	0,7721	1,5442	2,3163	1,5442	0,7721	0
5	0,7721	2,2391	3,1227	3,5174	3,1227	2,2391	0,7721
4	1,5442	3,1227	4,0235	4,3409	4,0235	3,1227	1,5442
3	2,3163	3,5174	4,3409	4,6326	4,3409	3,5174	2,3163
2	1,5442	3,1227	4,0235	4,3409	4,0235	3,1227	1,5442
1	0,7721	2,2391	3,1227	3,5174	3,1227	2,2391	0,7721
0	0	0,7721	1,5442	2,3163	1,5442	0,7721	0
i/j	0	1	2	3	4	5	6

Висновки. Апарат афінних перетворень дозволяє керувати формою врівноваженої сітки без порушення рівноваги вузлів, що дозволяє використати зазначений апарат для управління формою сіток, що перекривають задані об'єми.

У перспективі планується видання публікації, в якій досліджено використання апарату суперпозицій для управління формою врівноважених сіток, що перекривають заданий об'єм.

Література

1. Энциклопедия элементарной математики. Книга V. Геометрия. / Гос. изд. технико-теоретической литературы.: М. - Л., 1962. – 458 с.
2. *Ковалёв С.Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций / С.Н. Ковалёв // Дисс. ... докт. техн. наук: 05.01.01. - М.: МАИ, 1986. – 320 с.
3. *Самчук П.В.* Керування формою дискретно заданих поверхонь в задачах проектування оболонок / П.В. Самчук // Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. - К., 1991. - 154с.
4. *Самчук П.В., Пустюльга С.И., Бурчак И.Н.* Формирование дискретных сетей по наперед заданным требованиям // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К.: Будивэльнык, 1991. - Вып. 51. - с. 73-76.
5. Математическая энциклопедия. Т. 1-5. М.: Советская энциклопедия, 1985.
6. *Ковалёв С.Н., Юзефчук Н.М.* Формирование дискретно представленной поверхности, перекрывающей заданный объём / С.Н. Ковалев, Н.М. Юзефчук // Труды Таврической ... Мелитополь, 1997. - Вып. 4. - с. 13-14.

АФИННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С УЧЕТОМ ПЕРЕКРЫВАЕМОГО ОБЪЕМА

А. В. Мостовенко

В публикации рассмотрены известные свойства изменений объемов геометрических фигур при аффинных преобразованиях [1], которые позволяют использовать их для управления формой поверхностей криволинейных покрытий в архитектурном проектировании, если задан перекрываемый объем.

AFFINE TRANSFORMATION DISCRETE SURFACES CONSIDERING THE AMOUNT OF WHICH IS COVERED BY

A. Mostovenko

This publication deals with the known properties of geometric figures volume changes in affine transformations [1], that allow them to control the shape of the curved surface coatings in architectural design, asked if the volume overlapping.