

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук

О.І. Гуляр, д-р техн. наук

І.І.Солодей, д-р техн. наук

## НАПІВНАЛІТИЧНИЙ КІЛЬЦЕВИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ АРМОВАНИХ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ

В представленій роботі для чисельного моделювання процесу руйнування залізобетонних конструкцій [1] розглянуто кільцевий скінченний елемент із меридіональним перерізом у вигляді випуклого чотирикутника, в межах якого використано полілінійний закон апроксимації переміщень на основі поліномів Лагранжа. Вздовж кільцевої координати невідомі представлені у вигляді рядів Фур'є. Для побудови рівнянь застосовується моментна схема скінченного елемента.

Для тіл обертання при невісесиметричному навантаженні за глобальну систему координат  $z^i$  використовується циліндрична (рис. 1).

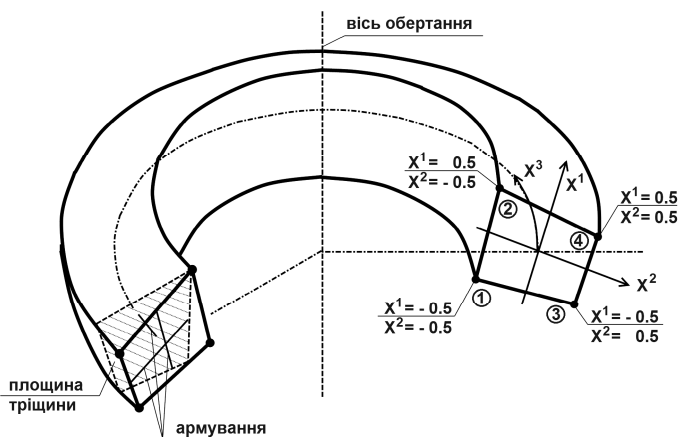


Рис. 1. Кільцевий напіваналітичний армований СЕ з тріщинами

Вісь  $z^1$  - збігається з віссю обертання досліджуваного об'єкта, вісь  $z^2$  спрямована по радіусу, а вісь  $z^3$  є окружною координатою в площині, що перпендикулярна  $z^1$ , причому  $z^3 = \pi t$  - площина симетрії системи

зовнішніх навантажень. Координатні лінії  $x^1$  і  $x^2$  локальної криволінійної системи координат  $x^i$  розташовані в площині  $z^1 z^2$ , а  $x^3 = z^3$ .

Вираз для компонент лінійного тензора деформацій  $\epsilon_{ij}$ , як симетричної частини градієнта переміщень  $\nabla_i u_j$  [3], запишемо з урахуванням відмінних від нуля символів Кристофеля циліндричної системи координат:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (z'_{\beta\gamma} u_{\gamma,\alpha} + z'_{\alpha\gamma} u_{\gamma,\beta}); \\ \epsilon_{\alpha 3} &= \epsilon_{3\alpha} = \frac{1}{2} (u_{3,\alpha} + z'_{\alpha\gamma} u_{\gamma,3} - \frac{2}{z^2} z'_{\alpha} u_3); \\ \epsilon_{33} &= u_{3,3} + z^2 u_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Дискретизація досліджуваного тіла обертання здійснюється за допомогою ізопараметричних кільцевих СЕ, меридіональним перерізом яких є довільні випуклі чотирикутники (рис. 1). В межах меридіонального перерізу СЕ приймається полілінійний закон апроксимації переміщень  $u_k$ , у вигляді:

$$u_k = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 U_{k(s)} \left( 1 + \frac{x^1}{x^1(s)} \right) \left( 1 + \frac{x^2}{x^2(s)} \right), \quad (3)$$

де  $U_{k's}$  - глобальні переміщення  $s$ -го вузла СЕ з місцевими координатами  $x_s^\alpha$ . У зв'язку з тим, що розглядаються системи навантажень, що мають принаймні одну площину симетрії ( $z^3 = n\pi$ ) та враховуючи сталість геометричних параметрів кільцевого СЕ в окружному напрямку, доволі ефективно апроксимувати закон зміни вузлових переміщень  $U_{k's} = U_{k's}(x^3)$  відрізками ряду Фур'є [4]:

$$U_{\alpha's} = \frac{1}{2} U_{\alpha's}^0 + \sum_{l=1}^L U_{\alpha's}^l \cos lx^3; \quad U_{3's} = \frac{1}{2} U_{3's}^0 + \sum_{l=1}^L U_{3's}^l \sin lx^3. \quad (4)$$

Амплітудні значення вузлових переміщень  $U_{k's}^l$  пов'язані з координатними  $U_{k's}$  наступними співвідношеннями [2]:

$$U_{\alpha's}^l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_{\alpha's} \cos lx^3 dx^3; \quad U_{3's}^l = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_{3's} \sin lx^3 dx^3; \quad l=1,2,\dots,L. \quad (5)$$

Вирази елементарної роботи внутрішніх сил  $\delta' A_m^i$  для  $m$ -го СЕ запишемо, використовуючи місцеві фізичні компоненти варіації тензора деформацій  $\delta\tilde{\epsilon}_{pq}$  і тензора напружень  $\tilde{\sigma}^{pq}$ . Як передбачено моментною схемою скінченних елементів, представимо їх у межах меридіонального перетину СЕ відрізком ряду Маклорена в місцевій системі координат  $x^1$  і  $x^2$ , залишаючи кількість членів ряду відповідно до порядку апроксимації переміщень (3):

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\epsilon}_{pq} &= (h_p h_q \delta\epsilon_{pq})_0 + \left[ (h_p h_q)_{,\alpha} \delta\epsilon_{pq} \right]_0 x^\alpha + (h_p h_q \delta\epsilon_{pq,\alpha})_0 x^\alpha; \\ \tilde{\sigma}^{pq} &= \left\{ (h_u h_v \sigma_{uv})_0 + \left[ (h_u h_v)_{,\alpha} \sigma_{uv} \right]_0 x^\alpha + (h_u h_v \sigma'_{uv,\alpha})_0 x^\alpha \right\} \tilde{g}^{pu} \tilde{g}^{qv}. \end{aligned} \quad (6)$$

Проінтегрувавши вираз  $\delta' A_m^1$  по  $x^1$  і  $x^2$ , одержимо:

$$\begin{aligned} \delta' A_m^1 &= -\tilde{G}_0^{pquv} \sqrt{(g_m)_0} \int_{-0.5}^{0.5} \left\{ (h_p h_q \sigma_{pq})_0 (h_u h_v \delta\epsilon_{uv})_0 + \frac{1}{12} \bar{\delta}_p^\beta \bar{\delta}_q^\beta \bar{\delta}_u^\beta \bar{\delta}_v^\beta \times \right. \\ &\quad \times \left[ (h_p h_q)_{,\beta} \sigma_{pq} (h_u h_v)_{,\beta} \delta\epsilon_{uv} + h_p h_q \sigma_{pq,\beta} (h_u h_v)_{,\beta} \delta\epsilon_{uv} + \right. \\ &\quad \left. \left. + (h_p h_q)_{,\beta} \sigma_{pq} h_u h_v \delta\epsilon_{uv,\beta} + h_p h_q \sigma_{pq,\beta} h_u h_v \delta\epsilon_{uv,\beta} \right] \right\} dx^3. \end{aligned} \quad (7)$$

Представимо варіації деформацій  $(\delta\epsilon_{pq})_0$ ,  $(\delta\epsilon_{pq,\beta})_0$  і напруження  $(\sigma_{uv})_0$ ,  $(\sigma'_{uv,\beta})_0$  у вигляді розкладу в ряд Фур'є по окружній координаті  $x^3$ , причому число утримуваних членів ряду прийемо рівним тому, яке прийнято для апроксимації переміщень:

$$\begin{aligned} (\delta\epsilon_{pq})_0 &= \frac{1}{2} (\delta\bar{\epsilon}_{pq})_0^0 + \sum_{l=1}^L \left[ (\delta\bar{\epsilon}_{pq})_0^l \cos lx^3 + (\delta\bar{\epsilon}_{pq})_0^l \sin lx^3 \right]; \\ (\delta\epsilon_{pq,\beta})_0 &= \frac{1}{2} (\delta\bar{\epsilon}_{pq,\beta})_0^0 + \sum_{l=1}^L \left[ (\delta\bar{\epsilon}_{pq,\beta})_0^l \cos lx^3 + (\delta\bar{\epsilon}_{pq,\beta})_0^l \sin lx^3 \right]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{uv})_0 &= \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{uv})_0^0 + \sum_{l=1}^L \left[ (\bar{\sigma}_{uv})_0^l \cos lx^3 + (\bar{\sigma}_{uv})_0^l \sin lx^3 \right]; \\ (\sigma_{uv,\beta})_0 &= \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{uv,\beta})_0^0 + \sum_{l=1}^L \left[ (\bar{\sigma}_{uv,\beta})_0^l \cos lx^3 + (\bar{\sigma}_{uv,\beta})_0^l \sin lx^3 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Підставивши вираз (8) і (9) в (7) і виконавши інтегрування по  $x^3$  з

урахуванням сталості тензорів  $\tilde{g}^{pu}$  і  $\tilde{g}^{qv}$ , що характеризують метричні властивості меридіональних перерізів кільцевого СЕ, і ортогональності базисних тригонометричних функцій, можна виділити вирази:

$$\int_0^{2\pi} \cos lx^3 \cos nx^3 dx^3 = \delta_n^l \pi; \quad \int_0^{2\pi} \cos lx^3 \sin lx^3 dx^3 = 0; \\ \int_0^{2\pi} \sin lx^3 \sin nx^3 dx^3 = \delta_n^l \pi; \quad \int_0^{2\pi} dx^3 = 2\pi; \quad l, n=1, 2, \dots, L. \quad (10)$$

Представимо відмінні від нуля коефіцієнти розкладу варіацій деформацій  $(\delta \bar{\epsilon}_{pq})_0^l$ ,  $(\delta \bar{\epsilon}_{pq})_0^l$ , їх похідних  $(\delta \bar{\epsilon}_{pq,\beta})_0^l$ ,  $(\delta \bar{\epsilon}_{pq,\beta})_0^l$  та відповідні їм коефіцієнти розкладу напружень  $(\bar{\sigma}_{uv})_0^l$ ,  $(\bar{\sigma}_{uv})_0^l$ ,  $(\bar{\sigma}_{uv,\beta})_0^l$ ,  $(\bar{\sigma}_{uv,\beta})_0^l$  в матричній формі:

$$\begin{aligned} (\delta \epsilon_1^l)^T &= \left\{ (\delta \bar{\epsilon}_{11})_0^l (2\delta \bar{\epsilon}_{12})_0^l (\delta \bar{\epsilon}_{22})_0^l (\delta \bar{\epsilon}_{33})_0^l \right\}; \quad (\delta \epsilon_2^l)^T = \left\{ (2\delta \bar{\epsilon}_{13})_0^l (2\delta \bar{\epsilon}_{23})_0^l \right\}; \\ (\sigma_1^l)^T &= \left\{ (\bar{\sigma}_{11})_0^l (\bar{\sigma}_{12})_0^l (\bar{\sigma}_{22})_0^l (\bar{\sigma}_{33})_0^l \right\}; \quad (\sigma_2^l)^T = \left\{ (\bar{\sigma}_{13})_0^l (\bar{\sigma}_{23})_0^l \right\}; \\ (\delta \epsilon_{1,1}^l)^T &= \left\{ (\delta \bar{\epsilon}_{22,1})_0^l (\delta \bar{\epsilon}_{33,1})_0^l \right\}; \quad (\delta \epsilon_{1,2}^l)^T = \left\{ (\delta \bar{\epsilon}_{11,2})_0^l (\delta \bar{\epsilon}_{33,2})_0^l \right\}; \\ (\delta \epsilon_{2,1}^l)^T &= \left\{ (2\delta \bar{\epsilon}_{23,1})_0^l \right\}; \quad (\delta \epsilon_{2,2}^l)^T = \left\{ (2\delta \bar{\epsilon}_{13,2})_0^l \right\}; \\ (\sigma_{1,1}^l)^T &= \left\{ (\bar{\sigma}_{22,1})_0^l (\bar{\sigma}_{33,1})_0^l \right\}; \quad (\sigma_{1,2}^l)^T = \left\{ (\bar{\sigma}_{11,2})_0^l (\bar{\sigma}_{33,2})_0^l \right\}; \\ (\sigma_{2,1}^l)^T &= \left\{ (\bar{\sigma}_{23,1})_0^l \right\}; \quad (\sigma_{2,2}^l)^T = \left\{ (\bar{\sigma}_{13,2})_0^l \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

З урахуванням (11) результат інтегрування (7) запишемо у вигляді:

$$\delta A_m^i = -\pi \sqrt{(g_m)} \sum_{l=0}^L \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha^l \left\{ \left\{ \sigma_\alpha^{lh} \right\}_0^T \left[ \tilde{G}_\alpha \right]_0 \left\{ \delta \epsilon_\alpha^l \right\}_0 + \frac{1}{12} \sum_{\beta=1}^2 \left[ \left\{ \sigma_{\alpha,\beta}^{lh} \right\}_0^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \delta \epsilon_{\alpha,\beta}^{lh} \right\}_0 + \left\{ \sigma_{\alpha,\beta}^{lh} \right\}_0^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \delta \epsilon_\alpha^\beta \right\}_0 + \left\{ \sigma_\alpha^\beta \right\}_0^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \delta \epsilon_{\alpha,\beta}^{lh} \right\}_0 + \left\{ \sigma_\alpha^\beta \right\}_0^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \delta \epsilon_\alpha^\beta \right\}_0 \right\} \right\}, \quad (12)$$

де верхній індекс  $h$  означає те, що елементи відповідної матриці стовпця виду (11) або (12) помножені на коефіцієнти  $(h_p h_q)_0$ , а верхній індекс  $\beta$  -

на коефіцієнти  $\left[ (h_p h_q)_{,\beta} \right]_0$ . Компоненти матриць  $[\tilde{G}_\alpha]$  і  $[\tilde{G}_{\alpha\beta}]$  обчислюються у такий спосіб:

$$\tilde{G}^{pucv} = \tilde{g}^{pu} \tilde{g}^{qv}, \quad (14)$$

причому, індекси  $p, q$  відповідають номеру рядка, а  $u, v$  - стовпця. Для компактності запису у вираз (13) введені коефіцієнти:

$$k_1^l = 1 - \frac{1}{2} \delta_0^l; \quad k_2^l = 1 - \delta_0^l \quad (15)$$

або

$$k_\alpha^l = 1 - \frac{\alpha}{2} \delta_0^l. \quad (16)$$

Беручи до уваги змінність фізико-механічних характеристик матеріалу по окружній координаті, наприклад завдяки появі локальних зон пластичності або тріщиноутворення, коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є напружень  $(\bar{\sigma}_{ij})_0^l$ ,  $(\bar{\sigma}_{ij})_0^l$ ,  $(\bar{\sigma}_{ij,\alpha})_0^l$  і  $(\bar{\sigma}_{ij,\alpha})_0^l$  у формулі (9) не можуть бути виражені через відповідні коефіцієнти розкладу деформацій  $(\bar{\epsilon}_{ij})_0^l$ ,  $(\bar{\epsilon}_{ij})_0^l$ ,  $(\bar{\epsilon}_{ij,\alpha})_0^l$ ,  $(\bar{\epsilon}_{ij,\alpha})_0^l$  з (8). Тому виникає необхідність обчислення їх шляхом чисельного інтегрування функцій  $(\sigma_{ij})_0$  і  $(\sigma_{ij,\alpha})_0$  по окружній координаті  $x^3$ , використовуючи, наприклад, квадратурну формулу трапецій [5]:

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}_{ij,\alpha})_0^l &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} (\sigma_{ij,\alpha})_0^n \cos l \frac{n\pi}{N}; \quad (\bar{\sigma}_{ij,\alpha})_0^l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} (\sigma_{ij,\alpha})_0^n \sin l \frac{n\pi}{N}; \\ (\bar{\sigma}_{ij})_0^l &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} (\sigma_{ij})_0^n \cos l \frac{n\pi}{N}; \quad (\bar{\sigma}_{ij})_0^l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} (\sigma_{ij})_0^n \sin l \frac{n\pi}{N}, \end{aligned} \quad (17)$$

де  $(\sigma_{ij})_0^n$  й  $(\sigma_{ij,\alpha})_0^n$  координатні значення напружень і їх "похідних" в  $n$ -й точці чисельного інтегрування по окружній координаті  $x^3$ :

$$x_n^3 = \frac{n\pi}{N}; \quad n=0,1,2,\dots,(2N-1). \quad (18)$$

Виразимо амплітуди варіацій деформацій  $(\delta\epsilon_\alpha^l)$  і їх похідних  $(\delta\epsilon_{\alpha,\beta}^l)$  для центрів меридіональних перетинів СЕ в (13) через амплітуди варіацій переміщень вузлів відповідних меридіональних перетинів СЕ. Для цього на підставі (2) і (3) виведемо співвідношення:

$$\{\delta\epsilon\} = [B]\{\delta U\}. \quad (19)$$

Запишемо компоненти координатної матриці  $[B]$ , яка поєднує варіації координатних вузлових переміщень  $\{\delta U\}$  із варіаціями координатних деформацій  $\{\delta\epsilon\}$  для деякого меридіонального перерізу кільцевого СЕ,

розбивши матрицю-стовпець  $\{\delta\epsilon\}$  на два за аналогією з (11):

$$\{\delta\epsilon\} = [B_\alpha] \{\delta U\}, \quad (20)$$

де матриці  $[B_\alpha]$  складаються із блоків  $[B_{s\alpha}]$ , які є результатом диференціювання матриць  $N_s[E]$ .

Аналогічно (12) запишемо:

$$\{\delta\epsilon_{\alpha,\beta}\} = [B_{\alpha,\beta}] \{\delta U\}, \quad (21)$$

де підматриці  $[B_{s\alpha,\beta}]$  - складові матриці  $[B_{\alpha,\beta}]$ , отримані шляхом повторного диференціювання матриць  $[B_{s\alpha}]$ .

Подамо деформації, їх похідні і вузлові переміщення відрізками ряду Фур'є:

$$\{\epsilon_{1j}\} = \frac{1}{2} \{\epsilon_1^0\} + \sum_{l=1}^L \{\epsilon_1^l\} \cos lx^3 = [B_1] \{U\}; \quad (22)$$

$$[B_{S1}] \{U_S\} = [B_{S1}] \left\{ \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} U_{S1}^0 \\ U_{S2}^0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{l=1}^L \begin{Bmatrix} U_{S1}^0 \cos lx^3 \\ U_{S2}^0 \cos lx^3 \\ U_{S3}^0 \cos lx^3 \end{Bmatrix} \right\} = \sum_{l=0}^L k_1^l [B_{S1}^l] \{U_S^1\} \cos lx^3; \quad (23)$$

$$\{\epsilon_{2j}\} = \sum_{l=1}^L \{\epsilon_2^l\} \sin lx^3 = [B_2] \{U\}; \quad (24)$$

$$[B_{S2}] \{U_S\} = [B_{S2}] \sum_{l=1}^L \begin{Bmatrix} U_{S1}^0 \cos lx^3 \\ U_{S2}^0 \cos lx^3 \\ U_{S3}^0 \cos lx^3 \end{Bmatrix} = \sum_{l=0}^L k_2^l [B_{S2}^l] \{U_S^1\} \sin lx^3. \quad (25)$$

Приврівнюючи коефіцієнти при однакових базисних функціях у відрізках рядів Фур'є (22) і (24), маємо:

$$\{\epsilon_\alpha^l\} = [B_\alpha^l] \{U^l\}. \quad (26)$$

Аналогічні співвідношення виконуються і для амплітуд похідних деформацій:

$$\{\epsilon_{\alpha,\beta}^l\} = [B_{\alpha,\beta}^l] \{U^l\}. \quad (27)$$

Запишемо компоненти амплітудних матриць  $[B_{s\alpha}^l]$  і  $[B_{s\alpha,\beta}^l]$ , наприклад при  $x^1 = x^2 = 0$ :

$$[B_{S1}^l] = \begin{bmatrix} \frac{1}{16x_S^1} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^1}{x_t^1} & \frac{1}{16x_S^1} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^{2'}}{x_t^1} & 0 \\ \frac{1}{16} \sum_{t=1}^4 Z_t^1 \left( \frac{1}{x_t^1 x_S^2} + \frac{1}{x_S^1 x_t^2} \right) & \frac{1}{16x_S^1} \sum_{t=1}^4 Z_t^{2'} \left( \frac{1}{x_t^1 x_S^2} + \frac{1}{x_S^1 x_t^2} \right) & 0 \\ \frac{1}{16x_S^2} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^1}{x_t^2} & \frac{1}{16x_S^2} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^{2'}}{x_t^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \sum_{t=1}^4 Z_t^{2'} & \frac{1}{4} l \end{bmatrix};$$

$$[B_{S2}^l] = \begin{bmatrix} -\frac{l}{16} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^1}{x_t^1} & -\frac{l}{16} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^{2'}}{x_t^1} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2x_S^1} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^{2'}}{x_t^1} \Big/ \sum_{t=1}^4 Z_t^{2'} \right) \\ -\frac{l}{16} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^1}{x_t^2} & -\frac{l}{16} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^{2'}}{x_t^2} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2x_S^2} \sum_{t=1}^4 \frac{Z_t^{2'}}{x_t^2} \Big/ \sum_{t=1}^4 Z_t^{2'} \right) \end{bmatrix}.$$

При обчисленні в (13) матриць-стовпців:

$$\{\delta \varepsilon_{\alpha}^{lh}\} = [B_{\alpha}^{lh}] \{U^l\}; \{\delta \varepsilon_{\alpha}^{l\beta}\} = [B_{\alpha}^{l\beta}] \{U^l\}; \{\delta \varepsilon_{\alpha,\beta}^{lh}\} = [B_{\alpha,\beta}^{lh}] \{U^l\}. \quad (28)$$

необхідні матриці  $[B_{\alpha}^{lh}]$ ,  $[B_{\alpha}^{l\beta}]$  і  $[B_{\alpha,\beta}^{lh}]$  виходять із амплітудних матриць  $[B_{S\alpha}^l]$  і  $[B_{S\alpha,\beta}^l]$  шляхом множення  $i$ -го рядка на відповідний коефіцієнт  $t_i$ .

Так, для матриць  $[B_{S\alpha}^{lh}]$  і  $[B_{S\alpha,\beta}^{lh}]$  коефіцієнти будуть приймати наступні значення:

$$t_1 = (h_1^2)_0; t_2 = (h_1 h_2)_0; t_3 = (h_2^2)_0; \\ t_4 = (h_3^2)_0; t_5 = (h_1 h_3)_0; t_6 = (h_2 h_3)_0. \quad (29)$$

Для матриць  $[B_{\alpha}^{l\beta}]$  слід прийняти:

$$t_1 = \delta_{\beta}^2 [(h_1^2)_{,2}]_0; t_2 = 0; t_3 = \delta_{\beta}^2 [(h_2^2)_{,1}]_0; \\ t_4 = [(h_3^2)_{,\beta}]_0; t_5 = \delta_{\beta}^2 [(h_1 h_3)_{,2}]_0; t_6 = \delta_{\beta}^2 [(h_2 h_3)_{,1}]_0. \quad (30)$$

Підстановка амплітудних матриць  $[B_{\alpha}^{lh}]$ ,  $[B_{\alpha}^{l\beta}]$  і  $[B_{\alpha,\beta}^{lh}]$  в рівняння (13) приводить до виразу:

$$\delta' A_m^i = \pi \sum_{l=0}^L \left\{ \delta U^l \right\}^T \left\{ R_m^l \right\}, \quad (31)$$

де  $\left\{ R_m^l \right\}$  - матриця-стовпець амплітуд вузлових реакцій СЕ, яка обчислюється за формулою:

$$\left\{ R_m^l \right\} = -\sqrt{(g_m)_0} \sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha}^l \left\{ \left[ B_{\alpha}^{lh} \right]_o^T \left[ \tilde{G}_{\alpha} \right]_0 \left\{ \sigma_{\alpha}^{lh} \right\}_0 + \frac{1}{12} \sum_{\beta=1}^2 \left[ \left[ B_{\alpha,\beta}^{lh} \right]_o^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \sigma_{\alpha,\beta}^{lh} \right\}_0 + \left[ B_{\alpha}^{lh} \right]_o^T \left[ \tilde{G}_{\alpha} \right]_0 \left\{ \sigma_{\alpha,\beta}^{lh} \right\}_0 + \left[ B_{\alpha,\beta}^{lh} \right]_o^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \sigma_{\alpha}^{l\beta} \right\}_0 + \left[ B_{\alpha}^{l\beta} \right]_o^T \left[ \tilde{G}_{\alpha\beta} \right]_0 \left\{ \sigma_{\alpha}^{l\beta} \right\}_0 \right\}. \quad (32)$$

Вираз для віртуальної роботи зовнішніх сил для m-го СЕ запишемо у вигляді:

$$\delta' A_m^i = \sum_{l=0}^L \int_0^{2\pi} P_S^{k'} \delta U_{sk'} \sqrt{(g_m)_0} dx^3, \quad (33)$$

де  $P_S^{k'}$  - питомі (тобто віднесені до одиниці об'єму СЕ) координатні вузлові навантаження в меридіональному перетині СЕ, до яких приводяться об'ємні і поверхневі розподілені навантаження в результаті інтегрування по місцевих координатах  $x^1$  і  $x^2$  в площині відповідного меридіонального перерізу  $x^3$ . Аналогічно (33) представимо  $P_S^{k'}$  на основі розкладу рядами Фур'є по окружній координаті:

$$\left\{ P_S \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} P_S^{1'0} \\ P_S^{2'0} \\ 0 \end{array} \right\} + \sum_{l=1}^L \left\{ \begin{array}{c} P_S^{1'l} \cos lx^3 \\ P_S^{2'l} \cos lx^3 \\ P_S^{3'l} \sin lx^3 \end{array} \right\}. \quad (34)$$

Згідно (17) знайдемо коефіцієнти розкладу  $P_S^{k'l}$  шляхом чисельного інтегрування:

$$P_S^{\alpha'l} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} P_S^{\alpha'}(x_n^3) \cos lx_n^3; \quad l=0,1,2,\dots,L;$$

$$P_S^{3'l} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} P_S^{3'}(x_n^3) \sin lx_n^3; \quad l=1,2,\dots,L,$$

де  $x_n^3 = \frac{n\pi}{N}$ .

Для інтегрування виразу (33) по окружній координаті  $x^3$  підставляємо в нього  $P_S^{k'}$  і  $U_S^k$  у вигляді відрізків ряду Фур'є (34) і (23), відповідно, з урахуванням (10) маємо:

$$\delta' A_m^e = \pi \sum_{l=0}^L \{ \delta U^l \}^T \{ Q^l \}, \quad (35)$$

де

$$Q_s^{k'l} = a_k^l \cdot P_s^{k'l} \sqrt{(g_m)_0}; \quad a_k^l = 1 - \frac{1}{2} (1 + \delta_k^{3'}) \delta_o^l.$$

Підставивши (31) і (35) в рівняння рівноваги, склавши по всіх скінченних елементах дискретної моделі та виносячи варіації амплітуд вузлових переміщень за дужки, приходимо до системи рівнянь:

$$\pi \sum_{l=0}^L \{ \delta U^l \}^T \left( \{ R^l \} + \{ Q^l \} \right) = 0, \quad (36)$$

де елементами матриць-стовпців  $\{ \delta U^l \}$ ,  $\{ R^l \}$  і  $\{ Q^l \}$  є відповідно амплітуди переміщень, реакцій і навантажень для всіх вузлів дискретної моделі.

Якщо загальне число вузлів дискретної моделі  $M$ , то розмірність матриць-стовпців, що входять в (36) -  $3M \times 1$ . Для того щоб рівняння (36) виконувалося при довільній варіації амплітуд вузлових переміщень  $\{ \delta U^l \}$  необхідно, щоб напруження в бетони і метали задовольняли системі з  $3M(L+1)$  рівнянь:

$$\{ R^l \} + \{ Q^l \} = 0, \quad (37)$$

яка являє собою систему рівнянь рівноваги в напруженнях.

Таким чином, на основі моментної схеми скінченних елементів розроблено новий тип просторового ізопараметричного скінченного елемента, який дозволяє враховувати фізичну нелінійність і тріщиноутворення в бетони, пластичне деформування стержневої та листової арматури.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуляр О.І., Лізунов П.П., Солодей І.І. Математичні моделі появи та розповсюдження зон руйнування кругових неоднорідних дисперсно-армованих тіл. // Опір матеріалів і теорія споруд. –К.:КНУБА, Вип.90, 2012.-с.94-112
2. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
3. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. -512с.
4. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл / [Баженов В. А., Гуляр О. І., Сахаров О. С., Солодей І. І.]. – К., КНУБА, 2012. – 248с.
5. Хемминг Р.В. Численные методы. М.: Наука, 1972. -400с.

Стаття надійшла до редакції 02.09.2013 р.

Баженов В.А., Гуляр А.И., Солодей И.И.

**ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ КОЛЬЦЕВОЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ**

**МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ  
АРМИРОВАННЫХ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ**

В настоящей работе для численного моделирования процесса разрушения железобетонных конструкций рассмотрен кольцевой конечный элемент с меридиональным сечением в виде выпуклого четырехугольника, в пределах которого использован полилинейный закон аппроксимации перемещений на основе полиномов Лагранжа. Вдоль кольцевой координаты неизвестные представлены в виде рядов Фурье. Для вывода уравнений применяется моментная схема конечного элемента.

*Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Solodei I.I.*

**SEMI-ANALYTICAL CIRCULAR FINITE ELEMENT TO MODEL 3D STRESS STATE  
OF REINFORCED SOLIDS WITH CRACKS**

New semi-analytical circular finite element (FE) to model three-dimensional formulation of reinforced solids with cracks are developed. Meridional section of FE is quadrangle with multilinear function to describe displacements. Fourier series are used to approximate decision variables along the circular direction. In order to build equilibrium equation, the moment scheme of finite element are considered.