УДК 539.3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КРУГЛИХ ТОВСТИХ ПЛИТ ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНІЙ ДЕФОРМАЦІЇ

О.К. Гревцев[1],
старший науковий співробітник

Н.Ю. Селіванова[2],
старший викладач

[1] *Державне підприємство*
«Державний дорожній науково-дослідний інститут імені М. П. Шульгіна»

[2] *Національний транспортний університет*

Отримано точний розв'язок рівнянь теорії пружності для круглих плит з осесиметричним навантаженням.

Розглянута задача згину круглих плит, які перебувають під дією нормально доданих сил до будь-якого закону навантаження і з будь-якими типами їх опирання.

Показано, що згин круглої плити під дією осесиметричного навантаження веде до зміни температурного поля.

Ключові слова: теорія пружності, осесиметрична задача, функція переміщень, температурна змінна, термодинамічно обернений процес, згин круглої плити.

Вступ. Відомо [1], що точний розв'язок задачі теорії пружності розглянуто лише для суцільної круглої плити при дії рівномірно розподіленого тиску постійної інтенсивності. При цьому закон навантаження може бути довільного виду і тип опирання плити – будь-який.

Диференціальні рівняння рівноваги в циліндричних координатах мають вигляд [1]

$$\Delta u_1 - \frac{u_1}{r^2} + \frac{e_{,1}}{1-2\nu} - 2\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha\theta_{,1} = 0;\ \Delta u_3 + \frac{e_{,3}}{1-2\nu} - 2\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha\theta_{,3} = 0; \quad (1)$$

і в напруженнях

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,1} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} = 0; \quad \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} + \frac{1}{r}\sigma_{13} = 0. \quad (2)$$

В рівняннях (1) і (2) індекс після коми означає частинну похідну за відповідною координатою r або z; u_1 і u_3 – відповідно компоненти радіального і осьового переміщень; Δu – оператор Лапласа від переміщень $u_i\,(i = 1,3)$; σ_{11}, σ_{12}, σ_{13} – відповідно компоненти радіального, окружного, осьового і дотичного напружень; θ - температурна змінна.

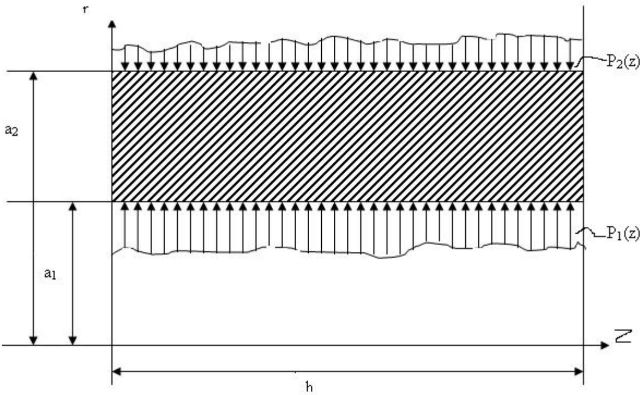

Рис. 1. Плита під дією рівномірно розподіленого навантаження

Компоненти напружень визначаються за законом Гука [2]

$$\sigma_{ij} = 2G\left(e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}e\delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\theta\delta_{ij}\right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{3}$$

з урахуванням відомих залежностей між деформаціями і переміщеннями

$$e_{11} = u_{1,1};\ e_{22} = \frac{1}{r}u_1;\ e_{33} = u_{3,1};\ 2e_{13} = u_{1,3} + u_{3,1}. \tag{4}$$

Тут δ_{ij} – символ Кронекера; α і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона; $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ – об'ємне розширення; $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву; E – модуль пружності.

Для замикання системи рівнянь рівноваги (1) необхідно додати рівняння теплопровідності [2]

$$\Delta\theta + \frac{1}{\lambda}W = 0. \tag{5}$$

Тут W - кількість тепла, яке утворюється або поглинається одиницею об'єму тіла при його деформації; λ – коефіцієнт теплопровідності; $\Delta\theta = \theta,_{11} + \frac{1}{r}\theta,_{11} + \theta,_{33}$.

Розв'язання задачі згину круглих плит під дією довільного осесиметричного навантаження інтенсивністю $P(r)_x$ потребує задання нормального осьового напруження σ_{33}. Для його визначення скористаємося запропонованим одним з авторів методом, заснованим на поступальних наближеннях розв'язання даної задачі.

Після математичних перетворень отримаємо значення σ_{33}

$$\sigma_{33} = -P(r)\frac{12}{h^3}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} - \frac{h^3}{24}\right), \qquad (6)$$

яке задовольняє умови

$$\sigma_{33} = -P(r) \text{ при } z = -\frac{h}{2} \text{ і } \sigma_{33} = 0 \text{ при } z = \frac{h^2}{2}, \qquad (7)$$

де h – товщина круглої плити.

Знаючи напруження (6) і використовуючи функцію $\phi_{(r,z)}$, переходимо до розв'язання задачі згину товстих плит. Для отримання точного розв'язку цієї задачі треба розглянути політропний, тобто не ізотермічний і не адіабатичний, термодинамічний процес. Зв'язок функції $\psi_{(r,z)}$ з термопружним потенціалом переміщень представлений формулою [2]

$$\phi_{(r,z)} = \frac{1+v}{1-x}\psi(r,z). \qquad (8)$$

В цьому випадку переміщення подаємо у такому вигляді

$$u_1(r,z) = \frac{1+v}{1-v}\psi_{,1}\,;\, u_3(r,z) = \frac{1+v}{1-v}\psi_{,3}. \qquad (9)$$

Об'ємне розширення e знаходимо з виразу (4) з урахуванням (9)

$$e = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \frac{1+v}{1-v}\left[\psi_{,11} + \frac{1}{r}\psi_{,1} + \psi_{,33}\right] = \frac{1+v}{1-v}\Delta\psi. \qquad (10)$$

Підставляючи переміщення (9) і об'ємне розширення (10) в систему рівнянь (1) отримаємо

$$\begin{aligned} &\frac{2(1+v)}{1-v}(\Delta\psi)_{,1} - \frac{2(1+v)}{1-v}2\theta_{,1} = 0, \\ &\frac{2(1+v)}{1-v}(\Delta\psi)_{,3} - \frac{2(1+v)}{1-v}2\theta_{,3} = 0. \end{aligned} \qquad (11)$$

Інтегруючи перше рівняння за r, а друге за z, отримаємо формулу визначення температурної змінної

$$2\theta = \Delta\psi. \qquad (12)$$

Компоненти напружень знаходимо за законом Гука (3), де температурна змінна θ визначається за допомогою рівняння (12).

Тоді маємо

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = -\frac{E}{1-v}\left(\frac{1}{r}\psi_{,1} + \psi_{,3}\right), \quad \sigma_{22} = -\frac{E}{1-v}\left(\psi_{,11} + \psi_{,33}\right), \\ &\sigma_{13} = \frac{E}{1-v}\psi_{,13}, \quad \sigma_{33} = -\frac{E}{1-v}\frac{1}{r}\left(r\psi_{,1}\right)_{,1}. \end{aligned} \qquad (13)$$

Для розв'язання рівнянь теорії пружності необхідно вибрати таку функцію переміщень $\psi(r,z)$, яка б задовольняла граничним умовам конкретної задачі.

Розглянемо у точній постановці задачі теорії пружності згин круглих плит, які знаходяться під дією нормально доданих сил $P(r)$ до будь-якого закону навантаження симетрично відносно осі обертання z та при будь-яких типах їх опирання.

Використовуючи напруження σ_{33} з рівняння (6), яке задовольняє умови (7) і порівнюючи його з напруженням σ_{33} з рівняння (13), отримаємо диференціальне рівняння для визначення функції $\psi(r,z)$:

$$\left(r\psi_{,1}\right)_{,1} = \frac{1-\nu}{E}\frac{12}{h^3}\left(\frac{z^3}{6}-\frac{zh^2}{8}+\frac{h^3}{24}\right)rP(r). \tag{14}$$

Інтегруючи це рівняння за r в границях від a_1 до r, отримаємо:

$$\psi_{,1} = \frac{1-\nu}{E}\frac{12}{h^3}\left(\frac{z^3}{6}-\frac{zh^2}{8}+\frac{h^3}{24}\right)\frac{1}{r}\int_{a_1}^{r} rP(r)\,dr + \frac{1}{r}f_1(z), \tag{15}$$

де $f_1(z)$ - довільна функція інтегрування; a_1 - радіус центрального отвору плити.

Якщо плита суцільна ($a_1 = 0$), то $f_1(z)$ необхідно вважати рівною нулю для переміщень $u(r)$.

Знову інтегруючи (15) за r в границях від a_1 до r, знайдемо:

$$\psi_{(r,z)} = \frac{1-\nu}{E}\frac{12}{h^3}\left(\frac{z^3}{6}-\frac{zh^2}{8}+\frac{h^3}{24}\right)\times\int_{a_1}^{r}\frac{1}{r}\int_{a_1}^{r} rP(r)\,dr dr + f_1(z)\ln\frac{r}{a} + f_2(z), \tag{16}$$

де $f_2(z)$ - довільна функція інтегрування.

Для полегшення розрахунків розглянемо суцільну циліндричну плиту ($a_1 = 0$; $f_1(z) = 0$). Тоді

$$\psi_{(r,z)} = \frac{1-\nu}{E}\frac{12}{h^3}\left(\frac{z^3}{6}-\frac{zh^2}{8}+\frac{h^3}{24}\right)\int_{0}^{r}\frac{1}{r}\int_{0}^{r} rP(r)\,dr dr + f_2(z). \tag{17}$$

Диференціюючи функцію (17) за r і z, отримаємо

$$\psi_{,13} = \frac{1-\nu}{E}\frac{12}{h^3}\left(\frac{z^2}{6}-\frac{h^2}{8}\right)\frac{1}{r}\int_{0}^{r} rP(r)\,dr. \tag{18}$$

Підстановка $\psi_{,13}$ у вираз для напружень σ_{13} з рівнянь (13), дає

$$\sigma_{13} = \frac{6}{h^3}\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)\frac{1}{r}\int_{0}^{r} rP(r)\,dr. \tag{19}$$

Граничні умови для дотичних напружень (19) виконуються інтегрально на краю круглої плити, тобто при $r = a$ виконання граничних умов у середньому вимагає, щоб напруження σ_{13} на краю плити зводились до опорної реакції

$$A=\left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{13}dz\right]_{r=a}=-\frac{1}{a}\int_0^a rP(r)dr. \qquad (20)$$

Таким чином, дотичні напруження (19) точно задовольняють граничним умовам при $z=\pm\frac{h}{2}$ і інтегрально на краю циліндричної поверхні.

Підставляючи функцію переміщень (17) в формулу (13) для нормальних радіальних напружень σ_{11} і знаходячи функцію $f_2(z)$ з граничних умов $\sigma_{11}=0$ при $r=a$, отримаємо

$$\sigma_{11}=\frac{12}{h^3}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{z^3}{6}-\frac{zh^2}{8}+\frac{h^3}{24}\right)\left[\frac{1}{r^2}\int_0^r rP(r)dr-\frac{1}{a^2}\int_0^a rP(r)dr\right]+\\ +Z\left[\int_0^r\frac{1}{r}\int_0^r rP(r)drdr-\int_0^a\frac{1}{r}\int_0^a rP(r)drdr\right]\end{array}\right\}. \qquad (21)$$

Для окружних напружень σ_{22} з рівнянь (13) отримаємо:

$$\sigma_{22}=-\frac{12}{h^3}\left\{\left(\frac{z^3}{6}-\frac{zh^2}{8}+\frac{h^3}{24}\right)\times\left[P(r)-\left(\frac{1}{r^2}\int_0^r rP(r)dr-\frac{1}{a^2}\int_0^a rP(r)dr\right)\right]+\right.$$

$$\left.+z\left[\int_0^r\frac{1}{r}\int_0^r rP(r)drdr-\int_0^a\frac{1}{r}\int_0^a rP(r)drdr\right]\right\}. \qquad (22)$$

Отримані напруження задовольняють рівнянням рівноваги (2) та граничним умовам: $\sigma_{33}=-P(r)$ при $z=-\frac{h}{2}$; $\sigma_{33}=0$ при $z=\frac{h}{2}$; $\sigma_{13}=0$ при $z=\pm\frac{h}{2}$; і інтегрально - на краю плити: $\sigma_{11}=0$ при $r=a$.

Представлене розв’язання задачі згину товстої плити отримано вперше. Умови опирання плити дають змогу визначити точні значення переміщень за формулою (8), використовуючи функцію (17).

Переміщення u_1 і u_2 приймаємо у такому вигляді

$$u_1(r,z)=\frac{1+V}{1-V}\left[\psi_{,1}+\frac{1}{r}(A_5z-A_3)\right]+r\left(A_4z+A_6\frac{1}{2}\right),$$

$$u_3(r,z)=\frac{1+V}{1-V}\left[\psi_{,3}+A_5\ln r\right]-A_4\left(\frac{V}{1-V}z^2+\frac{r^2}{2}\right)-\frac{V}{1-V}zA_6+A_7, \qquad (23)$$

де A_i - довільні сталі інтегрування.

З рівнянь переміщень (23) знаходимо напруження

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-V}\left[-\frac{1}{r}\psi_{,1} - \psi_{,33} - \frac{1}{r^2}\left(A_5 z - A_3\right) + A_4 z + A_6\frac{1}{2}\right],$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-V}\left[-\psi_{,11} - \psi_{,33} + \frac{1}{r^2}\left(A_5 z - A_3\right) + A_4 z + A_6\frac{1}{2}\right],$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1-V}\psi_{,13}, \quad \sigma_{33} = -\frac{E}{1-V}\frac{1}{r}\left(r\psi_{,1}\right)_{,1}. \tag{24}$$

Вирази (23) і (24) є точним розв’язком рівнянь рівноваги (1) і (2), оскільки після підстановки перетворюють останні на тотожності. Функція $\psi(r,z)$ повинна задовольнити рівняння (12), за допомогою якого визначається температурна змінна $\theta(r,z)$, яка характеризує зміну температурного поля в плиті від дії зовнішніх навантажень і залежить від граничних умов.

Для ілюстрації пружної і термодинамічної зворотності вище наведених задач теорії пружності для осесиметричної деформації плит, спрощуємо рішення, припускаючи $P(r) = P_0 = \text{const}$ (рис. 1).

Тоді функція переміщень (17) має вигляд

$$\psi\left(r,z\right) = \frac{1-V}{E}\frac{12}{h^3}P_0\left(\frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} + \frac{h^3}{24}\right)\frac{r^2}{4} + f_2\left(z\right). \tag{25}$$

Для дотичного напруження (19), обираємо

$$\sigma_{13} = \frac{3}{h^3}P_0\left(z^3 - \frac{h^2}{4}\right)r. \tag{26}$$

Величина опорної реакції на краю плити дорівнює

$$A = -\frac{a}{2}P_0. \tag{27}$$

Радіальні (21) та окружні (22) напруженя співпадають і мають вигляд

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{3z}{h^3}P_0\left(a^2 - r^2\right). \tag{28}$$

Функція $f_2(z)$ подається формулою

$$f_2\left(z\right) = \frac{1-V}{E}\frac{6}{h^3}P_0\left(\frac{z^5}{120} - \frac{z^3h^2}{48} + \frac{z^2h^3}{48} + \frac{z^3a}{12}\right) + C_1 z + C_2, \tag{29}$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі інтегрування.

Знаходимо радіальні і нормальні переміщення (9)

$$u_1(r,z)=\frac{1+V}{1-V}\psi_{,1}=\frac{1+V}{E}\frac{12}{h^3}P_0\left(\frac{z^3}{6}-\frac{z^8h^2}{8}+\frac{h^3}{24}\right)\frac{r}{2}, \tag{30}$$

$$u_3(r,z)=\frac{1+V}{1-V}\psi_{,3}=$$

$$=\frac{1+V}{E}\frac{3}{2h^3}P_0\times\left[r^2\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)-\left(\frac{z^4}{6}-\frac{h^2z^2}{4}+\frac{zh^3}{6}+z^2a^2\right)\right]+\frac{1+V}{1-V}C_1. \tag{31}$$

Радіальне переміщення (30) робить опір плити таким, що допускає переміщення плити у напрямку осі обертання. Нормальне переміщення (31) дозволяє по різному закріпляти точки краю плити від їх вертикального зміщення.

Як приклад, розглянемо шарнірне закріплення точок контуру плити у серединній площині, тобто за

$$u_3=0;\ \ r=a;\ \ z=0.$$

Задовольняючи ці граничні умови для переміщення (31), отримаємо рівняння для довільної сталої інтегрування C_1

$$\frac{1+V}{1-V}C_1=\frac{1+V}{E}\frac{3}{2h^3}P_0\frac{a^2h^2}{4}. \tag{32}$$

Після підстановки цієї величини у (31), отримаємо

$$u_3(r,z)=\frac{1+V}{E}\frac{3}{2h^3}P_0\times\left[r^2\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)+\frac{a^2h^2}{4}-\left(\frac{z^4}{6}-\frac{z^2h^2}{4}+\frac{zh^3}{6}+a^2z^2\right)\right]. \tag{33}$$

Напруження, що відповідають переміщенням (30) і (33), мають вигляд

$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\frac{3}{h^3}P_0\left(a^2-r^2\right)z,\ \ \sigma_{13}=\frac{3}{h^3}P_0\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right)r,$$

$$\sigma_{33}=-\frac{6}{h^3}P_0\left(\frac{z^3}{3}-\frac{h^2z}{4}+\frac{h^3}{12}\right). \tag{34}$$

Функція переміщень (25) з урахуванням (29) буде такою

$$\psi(r,z)=\frac{1-V}{E}\frac{6}{h^3}P_0\times\left[\left(\frac{z^3}{6}-\frac{zh^2}{8}+\frac{h^3}{24}\right)\frac{r^2}{4}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{z^5}{120}-\frac{z^3h^2}{48}+\frac{z^2h^3}{48}+\frac{a^2z^2}{12}\right)+\frac{a^2z^2}{16}z\right]+C_2, \tag{35}$$

де C_2 - довільна стала інтегрування.

Знаходимо температурну змінну $\theta(r,z)$ для циліндричної круглої плити, яка характеризує зміну температурного поля плити при дії зовнішнього навантаження P_0.

$$\alpha\theta = \Delta\psi = \psi_{,11} + \frac{1}{r}\psi_{,1} + \psi_{,33}. \qquad (36)$$

Підставляючи функцію (35) у (36), знаходимо

$$\theta(r,z) = \frac{(1-V)}{E\alpha}\frac{6}{h^3}P_0\left[\frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} + \frac{h^3}{24} - \left(a^2 - r^2\right)\frac{z}{2}\right]. \qquad (37)$$

Відомо, що зовнішнє навантаження (поверхневе, об'ємне) викликає деформацію тіла і водночас спричиняє зміну температурного поля в ньому [3]. Зміна температури становить $\theta = T - T_0$, де T - абсолютна температура точки тіла, T_0 - температура ненапруженого тіла при $t = 0$.

Отже, при взаємодії пружного неізольованого тіла з навколишнім середовищем під час його деформації змінюється температура точок тіла і відбувається поглинання або виділення тепла [4]. Цю зміну температурного поля для зігнутої круглої плити від дії навантаження P_0 характеризує температурна змінна у виразі (37).

Якщо зняти навантаження $P_0 = 0$, напруження (34) і температурна змінна (37) дорівнюють нулю і плита повертається у початковий ненапружений недеформований стан. При цьому процес деформування відбувається дуже повільно, тобто він є термодинамічно оберненим [5].

Дослідимо деформацію плити та зміну температурного поля в ній від дії зовнішнього навантаження. Підставляючи в осьове переміщення (33) $z = -h/2$, отримаємо стискання верхніх шарів плити в основному напрямку

$$u_3\left(r_1 - \frac{h}{2}\right) = \frac{1+V}{E}\frac{3h}{64}P_0 > 0. \qquad (38)$$

Для нижньої поверхні плити при $z = +\frac{h}{2}$ отримаємо

$$u_3\left(r_1\,\frac{h}{2}\right) = -\frac{1+V}{E}\frac{3h}{64}P_0 < 0\,, \qquad (39)$$

тобто маємо розтягнену зону. Це відомий фізичний факт з теорії згину конструкцій.

Оцінимо температурну змінну з формули (37) для стиснутої зони плити

$$\theta\left(r_1 - \frac{h}{2}\right) = \frac{1-V}{E\alpha}\frac{3}{h^2}P_0\left(\frac{h^2}{3} + a^2 - r^2\right) \ge 0,$$

або

$$T\left(r_1 - \frac{h}{2}\right) = T_0 + \frac{1-V}{E\alpha}\frac{3}{h^2}P_0\left(\frac{h^2}{3} + a^2 - r^2\right), \; r \le a. \qquad (40)$$

Для розтягнутої зони плити отримаємо

$$\theta\left(r_1\,\frac{h}{2}\right) = -\frac{1-V}{E\alpha}\frac{3}{h^2}P_0\left(a^2 - r^2\right) \le 0,$$

або

$$T\left(r_1\,\frac{h}{2}\right) = T_0 - \frac{1-V}{E\alpha}\frac{3}{h^2}P_0\left(a^2 - r^2\right), \quad r \le a. \qquad (41)$$

Як бачимо, температура стисненої зони плити буде трохи вища за температуру розтягненої зони. Інакше кажучи, стиснута зона виділяє тепло $(T > T_0)$, а розтягнута - його поглинає $(T < T_0)$, тобто має місце обмін тепла плити з зовнішнім середовищем. Аналогічна теорія була розроблена К. Зенером [6] для тонкої пластинки при її згинальних коливаннях і отримала блискуче експериментальне підтвердження.

Підставляючи в рівняння (5) температурну змінну (37), яка відповідає зміні температурного поля, що з’являється при згині круглої плити від дії рівномірно розподіленого навантаження постійної інтенсивності, знаходимо потужність потоку тепла в різних зонах плити

$$W = -\lambda\Delta\theta = -\lambda\frac{(1-V)}{E\alpha}\frac{18z}{h^3}P_0. \qquad (42)$$

В стиснутій зоні плити ($z = -h/2$)

$$W = \lambda\frac{(1-V)}{E\alpha}\frac{9}{h^2}P_0 > 0 \qquad (43)$$

іде виділення тепла.

В розтягнутій зоні плити ($z = h/2$)

$$W = -\lambda\frac{(1-V)}{E\alpha}\frac{9}{h^2}P_0 < 0 \qquad (44)$$

іде поглинання тепла із зовнішнього середовища.

Таким чином, за рахунок теплопровідності плити з’являється тепловий потік від її стиснутої зони до розтягнутої.

Висновки. При розв’язанні задачі теорії пружності для згину осесиметрично навантажених круглих плит, формули напружень і переміщень отримані вперше. Закон навантаження може бути довільного виду і тип опирання – будь-яким. Отриманий розв’язок задачі згину круглої плити свідчить про те, що дія зовнішніх сил призводить до зміни температурного поля в плиті і виникнення теплового потоку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Голденблат И.И.* Нелинейные проблемы теории упругости. – М.: Наука, 1969. – 336 с.
2. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая школа, 1983. – 399 с.
3. *Ландау Л.Д. и Ливщиц Е. М.* Теория упругости. – М.: Наука. 1987. – Т. VII. –246 с.

4. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – М.: Физматгиз, 1958. – 167 с.
5. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
6. *Фен Дж.* Машины, энергия, энтропия. – М.: Мир, 1986. – 336 с.

REFERENCES

1. *Holdenblat I.* Nelineynye problemy teorii upruhosty (Nonlinear problems of the theory of elasticity). - M .: Nauka, 1969. - 336 p.
2. *Germain P.* Kurs mechaniki sploshnyh sred (Course of mechanics of continuous media). - M .: Vycsha Shkola, 1983. - 399 p.
3. *Landau L., Livshits E.* Theoriya upruhosty (Theory of elasticity). - M .: Nauka. 1987. - T. VII. - 246 C.
4. *Melan E., Parkus G.* Termoupruhye napryazhenia, vyzyvaemye statsyonarnymy temperaturnымy polem (Thermoelastic stresses caused by stationary temperature fields). - M.: Fyzmathyz, 1958. - 167 p.
5. *Timoshenko S., Huder J.* Teoria upruhosty (Theory of elasticity). - M .: Nauka, 1979. - 560 p.
6. *Feng J.* Mashiny, energya, entropya (Machines, energy, entropy). - M .: Mir, 1986. - 336 p.

Hrevtsev O., Selivanova N.

SOLVING THE PROBLEM OF ELASTICITY FOR ROUND THICK PLATES AT AXIALLY SYMMETRIC STRAIN

Here are considered the problems of the theory of elasticity for bodies of rotation loaded axially symmetrically. The exact solutions of the displacement of the equations of the theory elasticity for round plates loaded axially symmetrically. It is shown that the solution of the problem of bending of circular plates under the action of an arbitrary axisymmetric load of intensity P requires the specification of a normal axial stress. To determine it, we use a method based on translational approximations of the solution of this problem, proposed by one of the authors. The solutions are found in a closed form to determine the stresses at any point of the body under consideration, which is loaded by an asymmetrically uniformly distributed load-pressure. The problem of the bending of circular plates under the action of normally applied forces is considered. The law of loading of round plates, as well as the type of their resistance, can be arbitrary, which means, any. When solving the bending problem of circular plates under the action of an arbitrary axisymmetric load, a function f is used, analogous to the thermoelastic displacement potential. For an exact solution of this problem, a polytropic, namely, non-isothermal and non-adiabatic thermodynamic process is considered. The function f must satisfy the equation for the volumetric expansion, by means of which the temperature change that arises under the action of the load and which depends on the boundary conditions of the resistance is determined. It is shown that during the deformation, the temperature of the body point changes and as a result, there is an absorption or release of heat by an elastic non-insulated body when it interacts with the surrounding medium. In particular, the compressed zone of the plate generates heat, and the stretched zone absorbs it. It is shown that when stress is removed, the stresses and temperature stresses disappear and the plate returns to the unstrained and undeformed state. The deformation process is very slow, that is, it will be thermodynamically reversible. When solving the problem of the theory of elasticity for bending of circular plates loaded asymmetrically, the formulas for stresses and displacements were obtained for the first time, and the possibility of determining the stress-strain state of any point of the rotating body in question is of great practical importance.

Keywords: theory of elasticity, axisymmetric function movement, temperature change, thermodynamically reversible (inverse) process, bending round plate.

Гревцев А.К., Селиванова Н.Ю.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГЛЫХ ТОЛСТЫХ ПЛИТ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Получено точное решение уравнений теории упругости для круглых плит нагруженных осесимметрично. Рассмотрена задача изгиба круглых плит, находящихся под действием нормально приложенных сил к любому закону нагрузки и к любым типам их сопротивления. Показано, что изгиб круглой плиты под действием осесимметричной нагрузки ведет к появлению температурного поля.

Ключевые слова: теория упругости, осесимметричная задача, функция перемещений, температурная изменение, термодинамически оборотный (обратный) процесс, изгиб круглой плиты.

УДК 539.3

Гревцев О.К., Селіванова Н.Ю. **Розв'язання задачі теорії пружності для круглих товстих плит при осесиметричній деформації** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 99. – С. 181 - 192.

Отримано точний розв'язок рівнянь теорії пружності для круглих плит з осесиметричним навантаженням. Розглянута задача згину круглих плит, які перебувають під дією нормально доданих сил до будь-якого закону навантаження і з будь-якими типами їх опирання.

Табл. 0. Іл. 1. Бібліогр. 6 назв.

Hrevtsev O., Selivanova N. **Solving the problem of elasticity for round thick plates at axially symmetric strain** / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2017. - Issue 98. - P. 181 - 192. – Ukr.

An exact solution of the equations of the theory of elasticity for round plates loaded axially symmetrically is obtained. The problem of bending of circular plates under the action of normally applied forces to any law of loading and to any types of their resistance is considered.

Tabl. 0. Fig. 1. Bibliograph. 6 ref.

Гревцев А.К., Селиванова Н.Ю. **Решение задачи теории упругости для круглых толстых плит при осесимметричной деформации** / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2017. - Вып. 98. - С. 181 - 192.

Получено точное решение уравнений теории упругости для круглых плит нагруженных осесимметрично. Рассмотрена задача изгиба круглых плит, находящихся под действием нормально приложенных сил к любому закону нагрузки и к любым типам их сопротивления.

Табл. 0 Ил. 1. Библиогр. 6 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *Старший науковий співробітник Державного підприємства «Державний дорожній науково-дослідний інститут ім. М.П. Шульгіна» ГРЕВЦЕВ Олексій Кімович*
Адреса робоча: *03113, Україна, м. Київ, пр. Перемоги, 57, ГРЕВЦЕВУ Олексію Кімовичу*
Робочий тел.: *+38 044 242 75 96*

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *Старший викладач Національного транспортного університету, СЕЛІВАНОВА Нінель Юріївна*
Адреса робоча: *01010, Україна, м. Київ, вул. Суворова, 1, Національний транспортний університет, СЕЛІВАНОВІЙ Нінель Юріївні*
Робочий тел.: *+38 044 280 38 19*
Мобільний. тел.: *+38 063 315 65 87*
E-mail: nel_s@i.ua