

УДК 539.3:624.071:624.01

Цихановський В.К., д-р техн. наук,
Прусов Д.Е., канд. техн. наук

МЕТОДИКА МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ПОКРИТТІВ У ВЗАЄМОДІЇ З НЕОДНОРІДНИМ ҐРУНТОВИМ ПІВПРОСТОРОМ

Запропонована методика моделювання півпростору покриття, штучної і ґрунтової основи з використанням моментної схеми скінченних елементів та оболонкового просторового скінченного елемента у нелінійній постановці для дослідження НДС та розрахунку елементів покриттів у взаємодії з неоднорідним ґрунтовим півпростором.

Вступ. Активна зона ґрунтової основи дорожніх та аеродромних покриттів може досягати шести метрів і більше в залежності від властивостей ґрунтових нашарувань. Прикладом неоднорідної ґрунтової основи є лесовидні ґрунти, відмінна особливість яких полягає у тому, що в напруженому стані, під дією колісного навантаження чи власної ваги покриттів і ґрунту при замочуванні вони дають додаткові осідання, та можуть знижувати свою структурну міцність [1, 2, 3]. При проектуванні дорожніх та аеродромних покриттів, що знаходяться на ділянках з ґрунтовими умовами другого типу по просіданню для запобігання замочування ґрунту, передбачається влаштування гідроізоляційного шару під дорожнім або аеродромним одягом. Але ці заходи на практиці часто бувають малоефективними.

Для розв'язання цієї проблеми та вдосконалення розрахунку, особливо нежорстких або полегшених жорстких аеродромних покриттів при наявності у ґрунтовій активній товщі вищезгаданих включень і взагалі при неоднорідності ґрунтової основи пропонується моделювання ґрунтової основи дискретним неоднорідним півпростором при урахуванні для дискретно-локальних зон рівнянь стану для анізотропного матеріалу, еквівалентного реальному лесовому ґрунту. Для розв'язку задач взаємодії конструкцій з ґрунтовими основами є багато різних підходів протилежних точок зору. З існуючих моделей ґрунтових основ можна виділити чотири основні групи: ті, що базуються на гіпотезах прямої пропорційності (Вінклера); ті, що використовують теорію лінійно-деформованого тіла для пружного ґрунтового півпростору; комбінації перших двох; ті, що побудовані з урахуванням зсувних (пластичних) деформацій на основі класичної механіки ґрунтів. Аналіз існуючих модифікацій механічних моделей для зазначених підходів дослідження ґрунтового півпростору підтверджує відоме протиріччя між вимогою до

простоти моделі і прагненням повніше описати деформаційні властивості ґрунтів.

Постановка задачі. У рамках існуючих нормативних документів з урахуванням сучасного стану відповідних наукових доробок можна розглядати контактну задачу взаємодії твердих деформівних тіл з неоднорідним ґрунтовим півпростором з використанням функцій перемінного коефіцієнта постелі [4, 5]. Такий підхід узгоджується з розв'язанням задачі дослідження жорстких аеродромних покриттів, які в основному працюють на згин і розподіляють навантаження на достатньо велику площину ґрунтового півпростору. Ці покриття доцільно розглядати як тонкі плити (пластинки) з використанням розрахункових дискретних моделей за методом скінченних елементів.

Нежорсткі покриття при порівнянні з жорсткими більш слабше підпадають опору на згин, тому що матеріал в їх шарах в основному працює на вертикальний тиск і зсув. При наявності слабких прошарків в ґрунтовій основі нежорстких покриттів більш адекватна для опису напружено-деформованого стану ґрунтового півпростору при наявності включень з елементів конструкцій покриття буде модель нелінійно-деформівного тіла з урахуванням розвитку пластичних деформацій.

Особливе положення займають покриття із гнучких плит (мембранних пластинок), або композитних м'яких оболонок, при цьому співвідношення товщини до розрахункового прогону мають межі $1/100 - 1/300$ і величини очікуваного прогину сягають товщини пластинки або перевищують її. За характером роботи такі мобільні покриття, що застосовуються при улаштуванні військових або тимчасових аеродромів, наближаються до нежорстких за фізико-механічними властивостями штучних основ з низьким опором на згин. Такі конструкції покриттів треба розглядати як гнучкі (м'які) оболонки-пластинки на пружній основі за моделлю Проктора [4] з урахуванням окремих пружно податливих в'язів, що моделюють анкерні пристрої у вигляді гвинтових паль. У такій постановці задача розв'язується з урахуванням геометричної і фізичної нелінійності (якщо оболонка із композитного полімерного матеріалу) з використанням методу скінченних елементів [6].

Вихідна математична модель задачі. Метод скінченних елементів відноситься до енергетичних методів, тому для постановки задачі як теоретична основа використовується теорія нелінійної механіки ґрунтів на базі механіки суцільного середовища із застосуванням співвідношень в приростах переміщень, деформацій і напружень [6, 7]. З урахуванням співвідношень нелінійної теорії пружності [7] перший принцип віртуальної роботи для статичних задач в актуальній конфігурації тривимірного нелінійно деформівного тіла можна записати у вигляді.

$$\int_V (\sigma'^{ij} + C_{(e,p)}^{ijkl} \gamma_{kl}) \delta \gamma_{ij} dv - \int_V p^{i'} \delta u_{i'} dv - \int_S q^{i'} \delta u_{i'} dS = 0, \quad (1)$$

де σ'^{ij} – компоненти тензора початкових напружень; $C_{(e,p)}^{ijkl}$ – компонент тензора пружностей твердого тіла з урахуванням розвитку пружно-пластичних деформацій; $\delta \gamma_{ij}$ – варіації коваріантних компонент тензора приростів скінченних деформацій Коші-Грина у місцевій системі координат x^i (див. рис.1), $p^{i'}, q^{i'}$ – компоненти узагальнених векторів об'ємних і поверхневих сил у глобальній системі координат $OZ^1Z^2Z^3$, що діють на тіло в актуальній конфігурації і віднесені до відлікової конфігурації; $\delta u_{i'}$ – варіації компонент вектора приростів переміщень у глобальній декартовій системі координат.

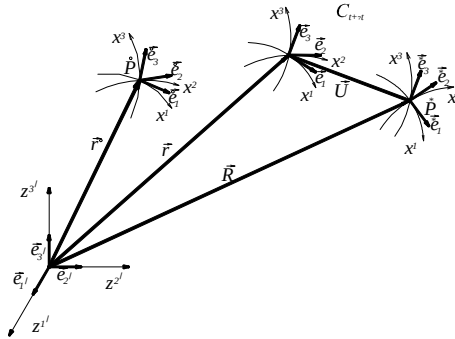


Рис. 1. Системи координат

Варіаційне рівняння (1) відповідно до енергетичних методів описує рівновагу елементарного об'єму будь-якого суцільного середовища, незалежно від його фізичних властивостей. Це представлення реалізує практичний вихід варіаційних задач теорії пружності і теорії граничного напруженого стану, де розв'язки пов'язані з відокремленням зон зсувних (для ґрунтів) пластичних деформацій. Таким чином розглядається детермінована задача статички ґрунтового суцільного півпростору і у кожній точці (вузлах дискретної моделі і границях між ними) виконуються умови граничного напруженого стану.

Щодо властивостей ґрунтового середовища, розглядається неоднорідний півпростір, який моделюється дискретним відображенням у вигляді набору скінченних елементів, кожний з яких є однорідним твердим тілом з різними фізико-механічними характеристиками ізотропного або ортотропного тіла, але на границях скінченних елементів виконуються умови сумісності деформацій, тобто маємо справу із

сумісними СЕ із забезпеченням нерівномірної сіткової області для апроксимації з певною мірою точності зон концентрацій напружень і розвитку зсувних деформацій, завдяки застосуванню тензора скінченних деформацій, який точно описує переміщення і повороти СЕ як жорсткого цілого.

Щодо граничних умов і параметрів граничних умов, в запропонованій методиці використовуються природні граничні умови (жорсткі), які реалізуються накладанням жорстких в'язів на границях дискретної розрахункової моделі, а також спеціальні граничні умови при взаємодії з анкерними пристроями із введенням рівнянь геометричних кінематичних умов з реалізацією розв'язків варіаційної задачі методом невизначених множників Лагранжа, коли варіаційне рівняння дискретної моделі (1) доповнюється рівнянням умов деформування цієї моделі через систему геометричних зв'язків [7].

У даній роботі критерій стійкості, або текучості ґрунтового півпростору для окремої локальної однорідної ізотропної області, пропонується у найбільш універсальній формі на основі розширеного критерію Мізеса (за рахунок включення в нього залежності від гідростатичних напружень) [3] з використанням поверхні навантаження за законом Кулона-Мора [4,8,9] і з урахуванням третього інваріанта тензор-девіатора функції напружень через інваріант Лоде-Надаї. Враховуючи, що інваріанти тензора напружень визначаються через компоненти шарової і девіаторної частини функції напружень і допущення про однорідність і ізотропність локального околу півпростору робить їх незалежними від напрямлення нормалей октаедричних площин, розширений модифікований критерій текучості Мізеса можна навести у наступній формі:

$$f(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{(p)}, \alpha, \varphi, c) = \frac{2}{3} I_1(\boldsymbol{\epsilon}^2) \times \left(\cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha \sin \varphi \right)^2 - \left[\frac{1}{\sqrt{3}} I_1(\boldsymbol{\epsilon}) \sin \varphi - \sqrt{3} c \cos \varphi \right]^2 = 0, \quad (2)$$

де $\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{(p)}$ — тензори відповідно загальних напружень, напружень девіаторної частини і пластичних деформацій; α, φ, c — відповідно інваріант тензор-девіатора напружень – кут Лоде-Надаї, кут внутрішнього тертя ґрунту і питоме зчеплення ґрунту.

Співвідношення моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) для просторового оболонкового скінченного елемента. Дискретизація тонких оболонок-плит на пружній основі (механічна модель жорсткого

покриття), а також багатошарового неоднорідного півпростору (модель нежорсткого покриття, штучної і ґрунтової основи) реалізована у запропонованій методиці з використанням універсального оболонкового скінченного елемента (СЕ) з 24-ма ступенями вільності (вісім вузлів з 3-ма незалежними переміщеннями, або чотири вузли – при заміні перемінних – з 6-ма узагальненими переміщеннями) [7]. У першому випадку лінійно-пружна ґрунтова основа моделюється “вінклерівською” з перемінним коефіцієнтом постелі, тобто реакція основи у вузлі СЕ – моделі оболонки–плити визначається за формулою [8]:

$$Q_{(0)}^{i'} = -C_{(N)} F_{(N)} n_{(N)}^{i'} n_{(M)}^{k'} U_{(M)}^{k'}; \quad C_{(N)} = \frac{E_{(0)}^N}{h_{(N)}}, \quad (5)$$

де $C_{(N)}$ – значення коефіцієнта постелі у вузлі СЕ-моделі; $n_{(N)}^{i'}$ – компоненти вектора одиничної нормалі до поверхні оболонки у вузлі N ; $F_{(N)}$ – окіл площі серединної поверхні оболонки у вузлі N ; $E_{(0)}^N$ – модуль загальної деформації ґрунту у околі вузла N ; $h_{(N)}$ – товщина стискуваної товщі ґрунтової основи аеродромного покриття.

У другому випадку моделювання півпростору покриття, штучної і ґрунтової основи просторовий елемент працює у плоско-деформованому стані за рахунок накладених в'язів у першому напрямленні глобальної системи координат за нормаллю до півпростору, при цьому відповідно до задачі плоскої деформації перераховується модуль пружності і коефіцієнт Пуассона:

$$E_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (6)$$

Дискретна СЕ-модель тонкої плити на пружній основі, або СЕ-модель плоско-деформівного півпростору у процесі деформування під дією зовнішніх сил розглядаються у трьох станах: натуральному (дійсна конфігурація C^0), початковому (відлікова конфігурація C^c) і деформованому (актуальна конфігурація $C^{t+\Delta t}$). В кожному СЕ введений місцевий косокутний базис у центрі СЕ модулі масштабних векторів $\bar{e}_i$ дорівнюють розмірам СЕ по середнім лініям його поверхні і товщині (або плоско-деформованої моделі півпростору) у центрі СЕ (див. рис 1).

В якості невідомих виступають вузлові переміщення СЕ в глобальній системі координат $OZ^1Z^2Z^3$ (див. рис. 1). Зміна переміщень і координат

точок у межах СЕ визначається полілінійними функціями місцевих координат x^1, x^2, x^3 або x^2, x^3 локальної поверхні півпростору:

$$u^{i'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} u_{S_1 S_2 S_3}^{i'} \prod_{\delta=1}^3 \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right), \quad (7)$$

$-\frac{1}{2} \leq x^{(\delta)} \leq \frac{1}{2}$; $S_{(\delta)} = \begin{Bmatrix} +1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ – умовні Лагранжеві координати, $u_{S_1 S_2 S_3}^{i'}$ – вузлові переміщення СЕ.

Згідно до процедури МССЕ виконується розкладання функцій деформацій і напружень у ряд Макларена у центрі СЕ. Функції деформацій у актуальній конфігурації зводять до функцій тензор-градієнтів вектора переміщень тому маємо [7]:

$$\nabla_i u_j \left(x_{(e)}^{i(j)} \right) = \overset{***}{\xi}_{ij} + \overset{***}{\varphi}_{ij,k} x^k \omega_i^k + \overset{***}{\psi}_{ij,ks} x^k x^s \omega_{(sii)}^{(kks)}; \quad (8)$$

$$\sigma^{ij} = N^{ij} + M_k^{ij} x^k \omega_{(i)}^{(k)} + M_{ks}^{ij} x^k x^s \omega_{(kii)}^{(ks)}, \quad (9)$$

де

$$\omega_{ij\dots}^{ks\dots} = \omega_i^k \omega_j^s \dots; \omega_i^k = \begin{cases} 1 & \text{при } i \neq k; \\ 0 & \text{при } i = k \end{cases};$$

$$N^{ij} = \sigma^{ij} \Big|_{(0)}; M_k^{ij} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^k} \Big|_{(0)}; M_{ks}^{ij} = \frac{\partial^2 \sigma^{ij}}{\partial x^k \partial x^s} \Big|_{(0)}.$$

Враховуючи вирази (7) (9), з використанням варіаційного рівняння (1) для просторового оболонкового елемента після інтегрування одержуємо вираз варіації енергії деформації СЕ:

$$\delta U_{(e)} = \sum_{P_1=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_{P_3=\pm 1} R_{P_1 P_2 P_3}^{t'} \delta u_{P_1 P_2 P_3}^{t'}, \quad (10)$$

де $R_{P_1 P_2 P_3}^{t'}$ – коефіцієнти нелінійної матриці реакцій СЕ:

$$R_{P_1 P_2 P_3}^{t'} = \sqrt{G} \left(\frac{1}{4} N^{ij} Z_{,j}^{t'} P_i + \frac{1}{24} M_k^{ij} Z_{,j}^{t'} P_i P_k + \frac{1}{144} M_{st}^{ij} Z_{,j,s}^{t'} P_i \omega_{(i)}^{(t)} \right), \quad (11)$$

де $\sqrt{G}$ – об'єм СЕ у відліковій конфігурації C^t ;

$$Z_{,j}^{\prime *} = \frac{\partial \left(Z^{\prime} + \frac{1}{2} u^{\prime} \right)}{\partial x^j}; \quad Z_{,s}^{\prime *} = \frac{\partial^2 \left(Z^{\prime} + \frac{1}{2} u^{\prime} \right)}{\partial x^j \partial x^s}.$$

Систему нелінійних рівнянь рівноваги СЕ-моделі одержимо з виразу повної потенціальної енергії [7]:

$$\sum_{N=1}^{N=M} \left(R_N^{\prime} - Q_N^{\prime *} \right) \delta u_N^{\prime} = 0; \quad N = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

де M – число вузлів СЕ-моделі.

Через незалежність варіацій переміщень, що допускається в'язями одержимо остаточно систему нелінійних рівнянь рівноваги СЕ-моделі з просторовим оболонковим скінченим елементом [7]:

$$\sum_{N=1}^M \left(R_N^{\prime} - Q_N^{\prime *} \right) = 0, \quad \text{або} \quad \sum_{N=1}^M h_N^{\prime} = 0, \quad (13)$$

де $h_N^{\prime}$ – вектор нев'язки у вузлі СЕ-моделі.

Для розв'язання системи нелінійних рівнянь (1) достатньо великого порядку використовується спеціальний алгоритм, що побудований на комбінації методів подовження по параметру збурення та Ньютона-Канторовича, також подовженням за розвитком пластичних деформацій. Рекурентну формулу ітераційного процесу розв'язку квазістатичної задачі

$$h(U, t) = 0; \quad t \in [0, 1]$$

на кроці за часом $t + \Delta t$, “ $n + 1$ ” можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} [K_{GL}^{(n)}] \{ \Delta u_{i+1}^{n+1} \}_L &= \{ Q(u_i^n) \}_{(G)} - \{ R(u_i^n) \}_{(G)}; \\ \{ u_{i+1}^{n+1} \} &= \{ u_i^{n+1} \} + \{ \Delta u_{i+1}^{n+1} \}, \end{aligned} \quad (14)$$

де $[K_{GL}^{(n)}]$ – лінеаризована матриця жорсткості СЕ-моделі, що обчислюється формулами наведеними, у [7]. Критерієм завершення ітераційного процесу (14) за „ i ” є зниження норми вектора нев'язки:

$$\{ r(u_{i,t}^{n+1}) \} = \{ Q(u_i^{n+1}) \} - \{ R(u_i^{n+1}) \} \quad (15)$$

до заданої малої величини:

$$(r^{i,k}, r^{i,k}) \leq \varepsilon. \quad (16)$$

Висновки. Розглянута методика математичного моделювання багатопарового півпростору покриття, штучної і ґрунтової основи дозволяє проводити дослідження нежорстких дорожніх та аеродромних покриттів з метою оцінки впливу наявності слабкого прошарку в ґрунтовій основі покриття на прогин покриття, з урахуванням анізотропних властивостей неоднорідного ґрунтового півпростору, а також дослідження жорстких покриттів для оцінки кількісних значень параметрів напружено-деформованого стану за переміщеннями, згинними моментами і реакцією пружної ґрунтової основи.

1. *Гольдштейн М. Н.* Механические свойства грунтов. – М.: Стройиздат, 1973. – 375 с.
2. *Харр М.Е.* Основы теоретической механики грунтов. – М.: Изд-во лит. по стр-ву, 1971.– 320с
3. *Цытович Н. А.* Механика грунтов. – М.: ГИЛСЛи СМ, 1963. – 635 с
4. *Кузнецов В.И.* Упругое основание. Расчёт балок, плит и рам. – М.: ГИЛСА, 1952. – 296 с.
5. *Горбунов-Посадов М.* Расчёт конструкций на упругом основании. – М.: Госстройиздат, 1953.
6. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Прикладная механика. – К.: Ин-т механики НАН Украины. – 2002. – Т.38 (48), №6. – С.24-63.
7. *Баженов В.А., Цыхановський В.К., Кислюк В.М.* Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок. – К.: КНУБА, 2000. – 386с.
8. *Цыхановський В.К., Прусов Д.Е., Коряк О.С.* Основні співвідношення методу скінченних елементів до розв'язання задачі дослідження неоднорідного анізотропного півпростору// Аеропорти та їх інфраструктура // Матеріали VI Міжнародної науково-технічної конференції „Авіа – 2004”, т. 4. – К.: НАУ, 2004, с. 43.20-43.23
9. *Цыхановський В.К., Прусов Д.Е.* Метод скінченних елементів у задачах дослідження неоднорідного півпростору з урахуванням геометричної і фізичної нелінійності // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – Вип.75.– Київ,КНУБА.– 2004.– С.87–98.
10. *Шимановский А.В., Цыхановский В.К.* Теория и расчёт сильно нелинейных конструкций. – Киев: Изд-во „Сталь”, 2005. – 423 с.

Надійшла до редколегії 03.09.2005 р.