

УДК 593.9

Гревцев О.К.

## РІШЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ АКсіАЛЬНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

В статтях [1,2] був наведений метод розв'язання диференціальних рівнянь осесиметричної задачі теорії пружності для нерівномірно нагрітих обертових аксіальних тіл змінної товщини, зокрема дисків, симетричних відносно площин  $z=0$  і  $r=0$ . При цьому було розглянуто одне з часних рішень системи диференціальних рівнянь у переміщеннях:

$$\Delta u_1 - \frac{u_1}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} e_{,1} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \theta_{,1} + \frac{1}{G} \rho \omega^2 r = 0; \quad (1)$$

$$\Delta u_3 + \frac{1}{1-2\nu} e_{,3} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \theta_{,3} = 0,$$

в яких індекс після коми означає часткову похідну за відповідною координатою  $r$  або  $z$ ;  $u_1$  і  $u_3$  - відповідно компоненти радіального і осьового переміщень;  $\Delta u_i$  - оператор Лапласа від переміщень  $u_i$  ( $i=1,3$ );  $\alpha$  і  $\nu$  - коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона;  $e = e_{11} + e_{22} + e_{33} = u_{1,1} + \frac{1}{r} u_1 + u_{3,3}$  - об'ємне розширення;  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  - модуль зсуву;  $E$  - модуль пружності;  $\rho$  - маса одиниці об'єму;  $\omega$  - кутова швидкість;  $\theta = \theta(r, z)$  - температурне поле.

Знайдені радіальні  $u_1(r, z)$  і осьові  $u_3(r, z)$  переміщення, які перетворювали систему (1) на тотожність, мали такий вигляд:

$$u_1(r, z) = u(r) - \frac{z^2}{2} \left[ (1+\nu) \alpha \theta_{,1} + \frac{\nu}{2G} \rho \omega^2 r \right];$$

$$u_3(r, z) = -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{z}{r} (ru)_{,1} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{z^3}{6} [(1+\nu) \alpha \Delta_1 \theta_1 +$$

$$+ \frac{\nu}{G} \rho \omega^2] + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \int_0^z \theta(r, z) dz$$

У переміщеннях (2):  $u(r)$  - радіальне переміщення точок площини  $z=0$

$$u(r) = -\frac{1-\nu}{2G} \rho \omega^2 \frac{r^3}{8} + (1+\nu) \alpha [B_1 \frac{r^3}{16} + B_2 (\frac{r}{2} \ln r - \frac{r}{4})] + A_1 \frac{r}{2} + A_2 \frac{1}{r}, \quad (3)$$

$\theta_1 = \theta_1(r)$  - температурне поле у радіальному напрямку.

$$\theta_1(r) = B_1 \frac{r^2}{4} + B_2 \ln r + B_3. \quad (4)$$

У виразах (3) і (4):  $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3$  - довільні сталі інтегрування.

За знайденими переміщеннями (2) з урахуванням виразів (3) та (4) у відповідності до закону Гука було визначено напруження, причому осові  $\sigma_{33}$  та дотичні  $\sigma_{13}$  дорівнювали нулю [1,2].

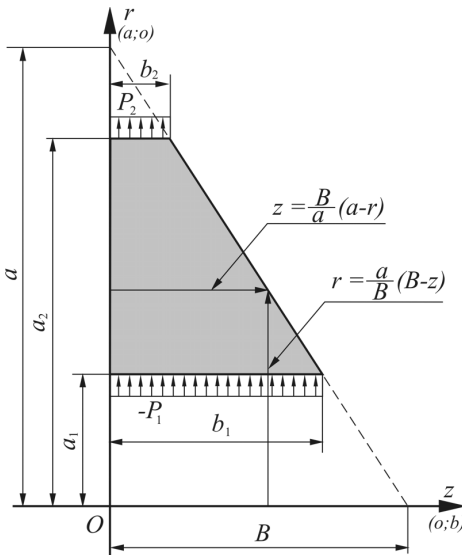


Рис. 1

У цій статті розглядається інше часткове рішення системи рівнянь (1), після розв'язання якого та після відомих перетворень, напруження  $\sigma_{13}$  та  $\sigma_{33}$  вже не дорівнюють нулю.

Розглянемо нерівномірно нагріте аксіальне тіло обертання, чверть якого показана на рис. 1. Температурне поле  $\theta(r, z)$  приймаємо у вигляді  $\theta(r, z) = \theta_1(r) + \theta_2(r, z)$  [3].

Рішення рівнянь рівноваги у переміщеннях (1) шукаємо у вигляді раніше отриманого (2) з додаванням функції  $\Psi(r, z)$ , яку слід визначити, тобто:

$$u_1(r, z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \Psi_{,1}(r, z) + u(r) - \frac{z^2}{2} \left[ (1+\nu) \alpha \theta_{1,1} + \frac{\nu}{2G} \rho \omega^2 r \right]; \quad (5)$$

$$u_3(r, z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \Psi_{,3}(r, z) - \frac{\nu}{1-\nu} z \frac{1}{r} (nr)_{,1} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{z^3}{6} \left[ (1+\nu) \alpha \Delta_1 \theta_1 + \frac{\nu}{G} \rho \omega^2 \right] + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \int_0^z \theta_1 dz.$$

Знайдені функції  $u_1(r, z)$  є рішенням рівнянь (5).

Далі знаходимо значення об'ємного розширення  $e = e_{11} + e_{22} + e_{33} = u_{1,1} + \frac{1}{r}u_1 + u_{3,3}$  і після зведення подібних членів, маємо:

$$e = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{1}{r}(ur)_{,1} - \frac{z^2}{2} \left[ (1+\nu)\alpha\Delta_1\theta_1 + \frac{\nu}{2G}\rho\omega^2 \right] \right\} + \frac{1+\nu}{1-\nu}(\Delta\Psi + \alpha\theta_1). \quad (6)$$

Підставляючи переміщення (5) у перше рівняння системи (1), з врахуванням (6) маємо:

$$(\Delta\Psi - \alpha\theta_2)_{,1} = 0, \quad (7)$$

де  $\Psi = \Psi(r, z)$  і  $\theta_2 = \theta_2(r, z)$ .

Аналогічно для другого рівня системи (1), маємо

$$(\Delta\Psi - \alpha\theta_2)_{,3} = 0, \quad (8)$$

де  $\Psi = \Psi(r, z)$  і  $\theta_2 = \theta_2(r, z)$ .

Звідси виходить, що

$$\Delta\Psi - \alpha\theta_2 = C, \quad (9)$$

де  $C = \text{const}$ .

З (9) одержимо:

$$\theta_2(r, z) = \frac{1}{\alpha}\Delta\Psi = \frac{1}{\alpha} \left( \Psi_{,11} + \frac{1}{r}\Psi_{,1} + \Psi_{,33} \right). \quad (10)$$

Для температурного розподілу  $\theta = \theta(r, z)$  з урахуванням (4) та (10), маємо:

$$\theta(r, z) = B_1 \frac{r^2}{4} + B_2 \ell nr + B_3 + \frac{1}{\alpha} \left( \Psi_{,11} + \frac{1}{r}\Psi_{,1} + \Psi_{,33} \right). \quad (11)$$

Диференціальні рівняння рівноваги в циліндричних координатах для напружень мають вигляд [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{13,1} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} + \rho\omega^2 r &= 0; \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} + \frac{1}{r}\sigma_{13} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$  - відповідно компоненти напружень радіальної дії окружного осевого і дотичного напружень.

Закон Гука записуємо у вигляді [5]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2G \left[ e_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha\theta \right]; \\ \sigma_{22} &= 2G \left[ e_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha\theta \right]; \\ \sigma_{33} &= 2G \left[ e_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha\theta \right]; \\ \sigma_{13} &= 2G e_{13}.\end{aligned}\tag{13}$$

Підставляючи переміщення (5) у четверте рівняння системи знаходимо дотичне напруження  $\sigma_{13}$ :

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1-\nu} \Psi_{,13}.\tag{14}$$

За аналогією з третім рівнянням системи (13) для  $\sigma_{33}$  маємо:

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r} (r\Psi_{,1})_{,1}.\tag{15}$$

Граничні умови на поверхні аксіального тіла обертання, що розглядається, будуть такими [6]:

$$\begin{aligned}P_r &= \sigma_{11} \cos(r, n) + \sigma_{13} \cos(z, n); \\ P_z &= \sigma_{13} \cos(r, n) + \sigma_{33} \cos(z, n),\end{aligned}\tag{16}$$

де  $P_r$  і  $P_z$  - проекції інтенсивності поверхневих навантажень на напрямки  $r$  і  $z$ ;  $n$  - нормаль до поверхні тіла обертання;  $(r, n)$  і  $(z, n)$  - кути між нормаллю і напрямками координатних осей.

Криволінійна бічна поверхня диска змінної товщини вільна від навантажень ( $P_r = P_z = 0$ ) (рис. 1). Тоді із другого рівняння (16) маємо:

$$[\sigma_{13} \cos(r, n) + \sigma_{33} \cos(z, n)]_f = 0.\tag{17}$$

Якщо  $f(r, z) \equiv 0$  - неявне рівняння лінії профілю граничної поверхні тіла обертання, то у явній формі маємо:

$$r^2 = e^2(z) \text{ та } z^2 = \frac{h^2(r)}{4}.$$

Довжина вектора нормалі до лінії профілю диска дорівнює:

$$|\bar{n}| = \sqrt{f_{,1}^2 + f_{,3}^2},$$

де  $f_{,1} = |\bar{n}| \cos(r, n)$  і  $f_{,3} = |\bar{n}| \cos(z, n)$ . Звідси:

$$\cos(r, n) = \frac{f_{,1}}{|\bar{n}|}; \cos(z, n) = \frac{f_{,3}}{|\bar{n}|}.$$

Тоді умова (17) набирає вигляду:

$$\left[ \sigma_{13} \frac{f_{,1}}{|\bar{n}|} + \sigma_{33} \frac{f_{,3}}{|\bar{n}|} \right]_f = 0.$$

Але  $f(r, z) \equiv z^2 - \frac{h^2(r)}{4}$ . Тоді  $f_{,1} = \left( -\frac{h^2}{4} \right)_{,1}$  і  $f_{,3} = 2z$ . Звідси:

$$\left[ \sigma_{13} \left( -\frac{h^2}{4} \right)_{,1} + \sigma_{33} 2z \right]_{z^2 = \frac{h^2(r)}{4}} = 0. \quad (18)$$

Далі задаємо напруження  $\sigma_{13}$  та  $\sigma_{33}$  через нову функцію таким чином, щоб задовольнити граничні умови (18). Наприклад, задамо:

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1-\nu} \Psi_{,13} = \frac{E}{1-\nu} z \varphi_{,1}. \quad (19)$$

Тоді

$$\Psi_{,13} = z \varphi_{,1} \quad [\Psi = \Psi(r, z); \varphi = \varphi(r)]. \quad (20)$$

Значення  $\sigma_{13}$  повинно задовольняти не тільки рівнянню (18), а й граничним умовам:  $\sigma_{13} = 0$ , при  $r = a_1$  і  $\sigma_{13} = 0$ , при  $r = a_2$  (див. рис. 1), тобто:

$$\varphi_{,1}(a_1) = 0; \varphi_{,1}(a_2) = 0. \quad (21)$$

Крім того,  $u_3 = 0$  при  $z = 0$ , дає:

$$\Psi_{,3}(r, z) = 0. \quad (22)$$

Інтегруючи (20) маємо:

$$\Psi(r, z) = \int \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{4} \right) \varphi_{,1} dr + f(z). \quad (23)$$

Далі знаходимо  $\Psi_{,3}(r, z)$ :

$$\Psi_{,3}(r, z) = z\varphi(r) + f_{,3}(z).$$

З рівняння (22) при  $z=0$  маємо:

$$f_{,3}(z) = 0. \quad (24)$$

Знаходимо  $\sigma_{33}$  із (14), враховуючи (23):

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r} (r\Psi_{,1})_{,1} = -\frac{E}{1-\nu} \left[ \left( -\frac{h^2}{8} \right)_{,1} \varphi_{,1} + \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \frac{1}{r} (r\varphi_{,1})_{,1} \right]. \quad (25)$$

Підставляючи отримані функції  $\sigma_{13}$  і  $\sigma_{33}$  з (19) та (25) у граничні умови (18), одержуємо:

$$\varphi_{,1}(r) \left( -\frac{h^2}{4} \right)_{,1} - \varphi_{,1}(r) \left( -\frac{h^2}{4} \right)_{,1} \equiv 0.$$

Таким чином, граничні умови (18) задовільнено. Напруження  $\sigma_{11}$  знаходимо з першого рівняння системи (13), враховуючи вирази (6), а також (3) і (11), в яких задаємо  $B_2 = 0$ . Після наведення подібних членів з врахуванням виразу (23), знаходимо:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \frac{E}{1-\nu} \left\{ -\left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \frac{1}{r} \varphi_{,1}(r) - \varphi(r) - f_{,33}(z) - \right. \\ & \left. - \left[ (1-\nu) \alpha \frac{B_1}{16} + \frac{1-\nu}{2G} \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{\rho\omega^2}{8} \right] \times \right. \\ & \left. \times r^2 - \alpha B_3 + A_1 \frac{1}{2} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{r^2} A_2 - \frac{z^2}{2} \left( \frac{1+\nu}{2} \alpha B_1 + \frac{\nu}{2G} \rho\omega^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

Граничні умови на циліндричних поверхнях даного тіла обертання (див. рис. 1) будуть такими:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = P_2 \text{ при } r = a_2; \sigma_{11} = -P_1 \text{ при } r = a_1; \sigma_{13} = 0 \text{ при } r = a_2 \text{ і} \\ \sigma_{13} = 0 \text{ при } r = a_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Задовольняючи граничним умовам (27) для  $\sigma_{11}$  і враховуючи вираз (21) знаходимо  $A_1; A_2$  і  $f_{,33}$ . Підставляючи знайдені функції у (26), одержимо:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \frac{P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{(P_1 + P_2) a_1^2 a_2^2}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} + \frac{E}{1-\nu} \left\{ -\left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right) \frac{1}{r} \varphi_{,1}(r) - \right. \\ \left. - \varphi(r) + \frac{a_2^2 \varphi(a_2) - a_1^2 \varphi(a_1)}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{[\varphi(a_2) - \varphi(a_1)] a_1^2 a_2^2}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} + (a_2^2 + \right. \\ \left. + a_1 - \frac{a_2^2 a_1^2}{r^2} - r^2) \times \left[ (1-\nu) \alpha \frac{B_1}{16} + \frac{1-\nu}{2G} \frac{\rho \omega^2}{8} \frac{3+\nu}{1+\nu} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

За аналогією з вищесказаним отримуємо для окружної напруги  $\sigma_{22}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = \frac{P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{(P_1 + P_2) a_1^2 a_2^2}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} + \frac{E}{1-\nu} \left\{ \left(\frac{h^2}{8}\right) \varphi_{,1}(r) - \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8}\right) \varphi_{,11}(r) - \varphi(r) + \right. \\ \left. + \frac{a_2^2 \varphi(a_2) - a_1^2 \varphi(a_1)}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{[\varphi(a_2) - \varphi(a_1)] a_1^2 a_2^2}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} - \left[ (1-\nu) \alpha \frac{3B_1}{16} + \frac{1-\nu}{2G} \frac{\rho \omega^2}{8} \frac{1+3\nu}{1+\nu} \right] r^2 + \right. \\ \left. + \left( a_2^2 + a_1^2 + \frac{a_2^2 a_1^2}{r^2} \right) \left[ (1-\nu) \alpha \frac{B_1}{16} + \frac{1-\nu}{2G} \frac{\rho \omega^2}{8} \frac{3+\nu}{1+\nu} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Далі розглянемо перше рівняння граничних умов (16). У випадку, коли  $z^2 = \frac{h^2}{4}$ , маємо:

$$\left[ \sigma_{11} \frac{f_{,1}}{|n|} + \sigma_{13} \frac{f_{,3}}{|n|} \right]_f = 0.$$

Оскільки  $f(r, z) \equiv z^2 - \frac{h^2(r)}{4} = 0$  і  $f_{,1} = \left( -\frac{h^2}{4} \right)_1$ ;  $f_{13} = 2z$ , тоді:

$$\left[ \sigma_{11} \left( -\frac{h^2}{4} \right)_{,1} + \sigma_{13} 2z \right]_{z^2 = \frac{h^2(r)}{4}} = 0. \quad (30)$$

Підставляючи функції  $\sigma_{11}$  та  $\sigma_{13}$  у (30) з (28) і (19), отримуємо:

$$\left\{ [Q(r) - \varphi(r)] \left( -\frac{h^2}{4} \right)_{,1} + 2z^2 \varphi_{,1}(r) \right\}_{z^2 = \frac{h^2(r)}{4}} = 0, \quad (31)$$

де

$$Q(r) = \frac{1-\nu}{E} \left[ \frac{P_2 a_2^2 (r^2 - a_1^2) - P_1 a_1^2 (a_2^2 - r^2)}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} \right] + \frac{a_2^2 (r^2 - a_1^2) \varphi(a_2) + a_1^2 (a_2^2 - r^2) \varphi(a_1)}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} + \\ + (a_2^2 + a_1^2 - \frac{a_1^2 a_2^2}{r^2} - r^2) \left[ (1-\nu) \alpha \frac{B_1}{16} + \frac{1-\nu}{2G} \frac{\rho \omega^2}{8} \frac{3+\nu}{1+\nu} \right]. \quad (32)$$

З виразу (31) знаходимо:

$$\varphi_{,1}(r) = -\frac{h_{,1}(r)}{n(r)} [\varphi(r) - Q(r)], \text{ при } z = \frac{h}{2}. \quad (33)$$

Згідно з умовами (21), маємо:

$$\varphi_{,1}(a_1) = -\frac{\left( \frac{h}{2} \right)_{,1}}{\frac{h}{2}} \Big|_{r^2=a_1^2} [\varphi(a_1) - Q(a_1)].$$

Але  $Q(a_1)$  з (32) дорівнює:

$$Q(a_1) = -P_1 \frac{1-\nu}{E} + \varphi(a_1).$$

Тоді:

$$\varphi_{,1}(a_1) = -\frac{\left( \frac{h}{2} \right)_{,1}}{\frac{h}{2}} \Big|_{r^2=a_1^2} P_1 \frac{1-\nu}{E}.$$

Звідси:



$$z_r^1 \Big|_{r^2=a_1^2} = \left(\frac{h}{2}\right) \Big|_{r^2=a_1^2} = 0 \text{ і } \varphi_{,1}(a_1) = 0.$$

Аналогічно  $z_r^1 \Big|_{r^2=a_2^2} = \left(\frac{h}{2}\right) \Big|_{r^2=a_2^2} = 0 \text{ і } \varphi_{,1}(a_2) = 0.$

Рішення рівняння (33) дає для функції  $\varphi(r)$ :

$$\varphi(r) = \frac{1}{h(r)} \left[ \int_{a_1}^r Q(r) h_{,1}(r) dr + C \right]. \quad (34)$$

При  $r = a_1$ ,  $\varphi_{,1}(a_1) = 0$  і  $Q(r) = -P_1 \frac{1-\nu}{E} + \varphi(a_1)$ . Тоді із (33) враховуючи (34) маємо:

$$0 = -\frac{h_{,1}(a_1)}{h(a_1)} \left\{ \frac{1}{h(a_1)} C + P_1 \frac{1-\nu}{E} - \varphi(a_1) \right\}.$$

Але із (34):

$$\varphi(a_1) = \frac{1}{h(a_1)} C.$$

Тоді:

$$-\frac{h_{,1}(a_1)}{h(a_1)} P_1 \frac{1-\nu}{E} = 0,$$

але  $P_1 \neq 0$  і  $\frac{h_{,1}(a_1)}{2} = 0$ .

При  $r = a_2$ ,  $\varphi_{,1}(a_2) = 0$  і  $Q(r) = P_2 \frac{1-\nu}{E} + \varphi(a_2)$ . Тоді із (33), враховуючи (34), маємо:

$$0 = -\frac{h_{,1}(a_2)}{h(a_2)} \left\{ \frac{1}{h(a_2)} \left[ \int_{a_1}^{a_2} Q(r) h_{,1}(r) dr + C \right] - Q(a_2) \right\}.$$

Але:

$$\varphi(a_2) = \frac{1}{h(a_2)} \left[ \int_{a_1}^{a_2} Q(r) h_{,1}(r) dr + C \right].$$

Тоді:

$$\frac{h_{,1}(a_2)}{h(a_2)} P_2 \frac{1-\nu}{E} = 0,$$

але  $P_2 \neq 0$  і  $\frac{h_{,1}(a_2)}{2} = 0$ .

Як бачимо, граничні умови (30) виконано. Для знаходження функції  $\varphi(r)$  обов'язково треба знати вид лінії профілю поверхні нерівномірно нагрітого обертового аксіального тіла. Наприклад, для нерівномірно нагрітого обертового диска змінної товщини з центральним отвором, зовнішня і внутрішня циліндричні поверхні якого завантажені рівномірно розподіленим навантаженням  $P_2$  і  $P_1$ , а бокова поверхня обмежена прямою  $z = \frac{b}{a}(a-r)$ . Четверть даного тіла обертання (через осьову симетрію) показана на рис.1. Рівняння лінії профілю бічної поверхні диска є таким:

$$\begin{aligned} f(r, z) &\equiv z^2 - \frac{h^2}{4} = \left( z - \frac{h}{2} \right) \left( z + \frac{h}{2} \right) = \\ &= \left[ z - \frac{b}{a}(a-r) \right] \left[ z + \frac{b}{a}(a-r) \right] = z^2 - \frac{b^2}{a^2}(a-r)^2 \equiv 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Звідси:

$$\frac{h^2}{4} = \frac{b^2}{a^2}(a-r)^2; \quad \frac{h}{2} = \frac{b}{a}(a-r),_{,1} = -\frac{b}{a}; \quad \frac{h_{,1}}{h} = -\frac{1}{a-r}. \quad (36)$$

Знаходимо функції  $\varphi(r); \varphi(a_1); \varphi(a_2) Q(r)$  та їх похідні, тобто  $\varphi_{,1}(r); \varphi_{,11}(r); Q_{,1}(r)$  за вищенаведеними залежностями і з врахуванням (35). Підставляючи знайдені функції у формули (19); (25); (28) і (29) отримаємо напруження  $\sigma_{13}; \sigma_{33}; \sigma_{11}; \sigma_{22}$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= -\frac{z}{(a-r)^2} \left\{ \frac{a-a_1}{a_2^2-a_1^2} (P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2) - \frac{a_1 a_2^2 (r^2 + aa_1 - 2ra_1)}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} (P_1 + P_2) - \right. \\ &- \frac{a_2^2 (ar^2 - 2r^2 a_1 + 2ra_1^2 - aa_1^2)}{r^2 (aa_2 + aa_1 - 2a_1 a_2)} \times \left[ \frac{P_1 a_1^2 + P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{(P_1 + P_2) a_1 a_2}{a_2^2 - a_1^2} + \right. \\ &+ (a_2^2 + a_1^2 - a_1 a_2 - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3a_2 - 3a_1}) \times \left( \frac{\alpha E B_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \left. \right] + \\ &+ [(a-a_1)(a_2^2 + a_1^2) - (a-r)r^2 - \frac{a_1 a_2^2 (r^2 - 2ra_1 + aa_1)}{r^2} - \frac{r^3 - a_1^3}{3}] \times \left( \frac{\alpha E B_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} = & -\left[\frac{b^2}{2a^2r} - \frac{z(a+r)}{2r(a-r)^3}\right] \left\{ \frac{a-a_1}{a_2^2-a_1^2} (P_1a_1^2 + P_2a_2^2) - \frac{a_1a_2^2(r^2-2ra_1+aa_1)}{r^2(a_2^2-a_1^2)} (P_1+P_2) + \right. \\
& + \frac{a_2^2(2r^2a_1-2ra_1^2-ar^2+aa_1)}{r^2(aa_2+aa_1-2a_1a)} \left[ \frac{P_1a_1^2+P_2a_2^2}{a_2^2-a_1^2} - \frac{(P_1+P_2)a_1a_2}{a_2^2-a_1^2} + (a_2^2+a_1^2-a_1a_2 - \frac{a_2^2-a_1^2}{3a_2-3a_1}) \times \right. \\
& \times \left. \left( \frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right] + [(a-a_1)(a_2^2+a_1^2) - (a-r)r^2 - \frac{a_1a_2^2(r^2-2ra_1+aa_1)}{r^2} - \frac{r^3-a_1^3}{3} \dots \quad (38) \\
& \times \left. \left( \frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right\} - \left[ \frac{b^2}{a^2} (a-r) - \frac{z^2}{a-r} \right] \left\{ \frac{a_1^2a_2^2}{r^3(a_2^2-a_1^2)} (P_1+P_2) - \frac{a_1^2a_2^2}{r^3(aa_2+aa_1-2a_1a_2)} \times \right. \\
& \times \left[ \frac{P_1a_1^2+P_2a_2^2}{a_2^2-a_1^2} - \frac{(P_1+P_2)a_1a_2}{a_2^2-a_1^2} + (a_2^2+a_1^2-a_1a_2 - \frac{a_2^3-a_1^3}{3a_2-3a_1}) \times \left( \frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right] - \\
& - \left( r - \frac{a_1^2a_2^2}{r^3} \right) \times \left( \frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \} \\
\sigma_{11} = & \frac{P_2a_2^2(r^2-a_1) - P_1a_1^2(a_2^2-r^2)}{r^2(a_2^2-a_1^2)} + (a_2^2+a_1^2 - \frac{a_2^2a_1^2}{r^2} - r^2) \left( \frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) - \\
& - \left[ \frac{b^2}{2a^2r} - \frac{z^2}{2r(a-r)^2} \right] \times \left\{ \frac{P_2a_2^2+P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2} (a-a_1) - \frac{(P_1+P_2)a_1a_2^2}{a_2^2-a_1^2} \cdot \frac{r^2-2ra_1+aa_1}{r^2} - \right. \\
& - \frac{a_2^2(r^2a-a_1^2a) + 2ra_1^2 - 2r^2a_1}{r^2(aa_2+aa_1-2a_1a_2)} \times \left[ \frac{P_2a_2^2+P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2} - \frac{(P_1+P_2)a_1a_2}{a_2^2-a_1^2} + (a_2^2+a_1^2-a_1a_2 - \right. \\
& - \frac{a_2^3-a_1^3}{3a_2-3a_1}) \times \left( \frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right] + [(a-a_1)(a_2^2+a_1^2) - (a-r)r^2 - \frac{r^3-a_1^3}{3} \dots \quad (39) \\
& - \frac{a_1a_2^2(r^2-2ra_1+aa_1)}{r^2} \left. \right] \times \left( \frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \} + \frac{r-a_1}{a-r} \times \left\{ \frac{P_2a_2^2+P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2} - \frac{(P_1+P_2)a_1a_2^2}{r(a_2^2-a_1^2)} + \right. \\
& + (a_2^2+a_1^2 - \frac{a_1a_2^2}{r} - \frac{r^3-a_1^3}{3r-3a_1}) \left( \frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \} - \frac{a_2^2(ar^2-aa_1^2+2ra_1^2-2r^2a_1)}{r^2(a-r)(aa_2+aa_1-2a_1a_2)} \left\{ \frac{P_2a_2^2+P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2} \right. \\
& - \left. \frac{(P_1+P_2)a_1a_2}{a_2^2-a_1^2} + (a_2^2+a_1^2-a_1a_2 - \frac{a_2^3-a_1^3}{3a_2-3a_1}) \times \left( \frac{\alpha EB_1}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22} = & \frac{P_2 a_2^2 (r^2 + a_1^2) + P_1 a_1^2 (a_2^2 + r^2)}{r^2 (a_2^2 - a_1^2)} + (a_2^2 + a_1^2 + \frac{a_2^2 a_1^2}{r^2} - 3r^2) \frac{\alpha E B}{16} + (a_2^2 + a_1^2 + \frac{a_1^2 a_2^2}{r^2} - \\
& - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2) \times \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 + \frac{z^2}{(a-r)^3} \left\{ \frac{P_2 a_2^2 + P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} (a - a_1) - \frac{(P_1 + P_2) a_1 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} \cdot \frac{r^2 - 2r a_1 + a a_1}{r^2} - \right. \\
& - \frac{a_2^2 (a r^2 - a a_1^2 + 2r a_1^2 - 2r^2 a_1)}{r^2 (a a_2 + a a_1 - 2a_1 a_2)} \times \left[ \frac{P_2 a_2^2 + P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{(P_1 + P_2) a_1 a_2}{a_2^2 - a_1^2} + (a_2^2 + a_1^2 - a_1 a_2 - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3a_2 - 3a_1}) \times \right. \\
& \times \left. \left. \left( \frac{\alpha E B}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right] + \left[ (a - a_1) (a_2^2 + a_1^2) - (a - r) r^2 - \frac{r^3 - a_1^3}{3} - \frac{a_1 a_2^2 (r^2 - 2r a_1 + a a_1)}{r^2} \right] \right\}; \quad (40) \\
& \left( \frac{\alpha E B}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) - \left[ \frac{b^2}{a^2} (a - r) - \frac{z^2}{a - r} \right] \left\{ \frac{(P_1 + P_2) a_1^2 a_2^2}{r^3 (a_2^2 - a_1^2)} - \frac{a_1^2 a_2^2}{r^3 (a a_2 + a a_1 - 2a_1 a_2)} \left[ \frac{P_2 a_2 + P_1 a_1}{a_2^2 - a_1^2} - \right. \right. \\
& - \frac{(P_1 + P_2) a_1 a_2}{a_2^2 - a_1^2} + (a_2^2 + a_1^2 - a_1 a_2 - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3a_2 - 3a_1}) \left( \frac{\alpha E B}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right] - \left( r - \frac{a_1^2 a_2^2}{r^3} \right) \left( \frac{\alpha E B}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right\} \\
& + \frac{r - a_1}{a - r} \left\{ \frac{P_2 a_2^2 + P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{(P_1 + P_2) a_1 a_2^2}{r (a_2^2 - a_1^2)} + (a_2^2 + a_1^2 - \frac{a_1 a_2^2}{r} - \frac{r^3 - a_1^3}{3r - 3a_1}) \left( \frac{\alpha E B}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) - \right. \\
& - \frac{a_2^2 (a r^2 + a a_1 - 2r^2 a_1)}{r^2 (a - r) (a a_2 + a a_1 - 2a_1 a_2)} \left\{ \frac{P_2 a_2^2 + P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{(P_1 + P_2) a_1 a_2}{a_2^2 - a_1^2} - (a_2^2 + a_1^2 - a_1 a_2 - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3a_2 - 3a_1}) \times \right. \\
& \left. \left. \left( \frac{\alpha E B}{16} + \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \right) \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

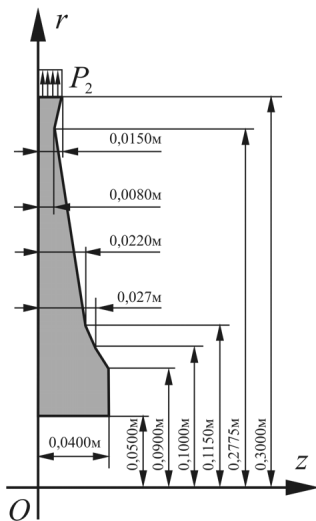


Рис. 2

Знайдені  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{11}$  та  $\sigma_{22}$  є точним розв'язанням системи рівнянь рівноваги (12), тому що після підстановки перетворюють останні на тотожності.

Для прикладу визначення напруженого стану за запропонованим методом розглянемо рівномірно нагрітий обертовий диск змінної товщини з центральним отвором, чверть якого показана на рис. 2. Визначення напружень в даному диску методом скінчених елементів наведена у роботі [7]. Диск, що розглядається, вироблений із сталі марки 45Х14Н14В2М, обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega = 753,6$  рад/с і зазнає дії рівномірно розподіленого по зовнішній поверхні обода навантаження  $P_2 = 173$  МПа. Щільність матеріалу диска





Таблиця 5

$R, \text{ м}$	$\sigma_{11}, \text{ МПа}$ при $z=0$	$\sigma_{11}, \text{ МПа}$ (МСЕ)	Розходження $\sigma_{11}, \%$	$\sigma_{22}, \text{ МПа}$ при $z=0$	$\sigma_{22}, \text{ МПа}$ (МСЕ)	Розходження $\sigma_{22}, \%$
0,3000	173	173	0	238	195	18
0,2970	190	182	4	250	211	16
0,2640	318	342	7	385	304	21
0,1500	208	255	18	273	265	3
0,1070	152	197	23	233	263	11
0,0802	64	133	52	159	263	41
0,0592	32	55	42	201	312	36
0,0500	0	0	0	235	360	35

Отже запропонований в статті метод розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності для нерівномірно нагрітих аксіальних тіл обертання змінної товщини, на думку автора, може бути застосований у турбобудівництві, тому що дозволяє точно визначити напруження в будь-якій точці тіла диска. При цьому, на геометію бічної поверхні диску обмежень не накладається, що допоможе проводити оптимізацію конструктивних розмірів тіла обертання залежно від інженерних вимог.

1. Гревцев А. К., Рябов А. Ф. Решение задачи теории упругости для вращающихся дисков переменной толщины. – Киев, 1989.-19с. Деп.в УкрНИИНТИ 24.04.89, № 11566-Ук89.
2. Гревцев О. К. Про один метод розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності для нерівномірно нагрітого обертового диска змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд. 1998.- Вип.64-с.76-86.
3. Кац А. М. Теория упругости. –М.: Гос. издат. технико - теоретической литературы,1956.-207 с.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.- М.,1979-560 с.
5. Мелан Э. Паркус Г. Термоупругие напряжения вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматиз,1958.-167 с.
6. Тимошенко С. П. Курс теории упругости.- К., 1972.-501 с.
7. Подгорный А. Н. др. Ползучесть элементов машиностроительных конструкций.-Киев: Наукова думка, 1984-264 с.

Матеріал надійшов до редакції 27.07.04.