

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

**ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
В ТЕОРІЇ ІГОР**

Методичні вказівки та завдання
для самостійної роботи з вищої математики
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти за спеціальностями D3 «Менеджмент»,
C1 «Економіка та міжнародні економічні
відносини (за спеціальностями)», D1 «Облік і оподаткування»,
G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Київ 2026

УДК 519.83

Л59

Укладачі: Ю. П. Філонов, канд. фіз.-мат. наук; доцент;
А. А. Кириченко, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Б. О. Літвінов, студент

Рецензент: О. В. Забарило, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри
вищої математики КНУБА

Відповідальний за випуск Н. В. Бондаренко, канд. фіз.-мат.
наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики

*Затверджено на засіданні кафедри вищої математики,
протокол № 7 від 17 березня 2026 року.*

В авторській редакції.

Лінійна алгебра та аналітична геометрія в теорії ігор [електронний
Л59 ресурс] : методичні вказівки та завдання до самостійної роботи з вищої
математики /уклад.: Ю. П. Філонов; А. А. Кириченко, Б. О. Літвінов. –
Київ : КНУБА, 2026. – 33 с.

Містить матеріал, що доповнює курс вищої математики
змістовними задачами з теорії ігор, розв'язування яких ґрунтується на
використанні методів лінійної алгебри, аналітичної геометрії та
математичного аналізу.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти за спеціальностями D3 «Менеджмент», C1 «Економіка
та міжнародні економічні відносини (за спеціальностями)», D1 «Облік
і оподаткування», G19 «Будівництво та цивільна інженерія».

© КНУБА, 2026

Загальні положення

Теорія ігор – це розділ прикладної математики, який вивчає моделі прийняття рішень у конфліктних або конкурентних ситуаціях, де результати дій одного учасника залежать від дій інших. Типові задачі доповнено системою індивідуальних завдань, кожне з яких містить 32 варіанти, що забезпечує ефективну організацію як самостійної, так і аудиторної роботи студентів у навчальних групах.

У практикумі розглядаються основні поняття теорії ігор, зокрема матричні моделі та пов'язані з ними терміни. Вводяться принципи максимуму і мінімуму, а також критерії максимуму та мінімуму. Значну увагу приділено аналізу систем лінійних рівнянь і нерівностей. Їх розв'язки інтерпретуються як оптимальні змішані стратегії учасників або коаліцій. Водночас елементи матриць і лінійних просторів розглядаються як функції поведінки – стратегії учасників у відповідних ситуаціях. Окремі задачі розв'язуються із застосуванням методів аналітичної геометрії, зокрема через дослідження прямих на площині та гіперплощин у багатовимірних просторах. Також використовуються методи функцій багатьох змінних для розв'язування екстремальних задач і дослідження геометричних об'єктів. Отримані результати узагальнюються в межах задач лінійного програмування, що забезпечує їх практичне застосування.

Практикум може бути використаний як у межах обов'язкових дисциплін, так і під час факультативних занять і роботи наукових гуртків.

Метою навчального видання є формування у здобувачів вищої освіти системного розуміння методів вищої математики та набуття практичних навичок їх застосування до розв'язування прикладних задач, зокрема в термінах теорії ігор.

Видання спрямоване на розвиток аналітичного мислення, уміння будувати математичні моделі реальних процесів, приймати обґрунтовані рішення в умовах ризику та невизначеності, а також інтерпретувати отримані результати в контексті професійної діяльності. Окрему увагу приділено формуванню навичок роботи з задачами оптимізації, аналізу стратегічної поведінки учасників та використанню методів лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей і математичної статистики.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Теорія ігор – розділ математики, в якому досліджуються питання поведінки і випрацьовуються оптимальні правила (стратегії) поведінки для кожного з учасників конфліктної ситуації. Розв'язання протиріччя за допомогою теорії ігор можливе лише після проведення математичного моделювання ситуацій у вигляді гри, але для їх розв'язку виявилось недостатнім апарат класичного математичного аналізу знаходження екстремумів функцій, і з'явилась необхідність розвитку нових математичних методів знаходження оптимальних мінімакських розв'язків, притаманних теорії ігор.

Дослідження ігрових ситуацій проводилось багатьма вченими, основну увагу яких було спрямовано на створення понять оптимальної поведінки гравців і на методи відшукування кращих стратегій. В 30-ті роки XX ст. Дж. фон Нейман формулює основні ідеї і результати сучасної теорії ігор, наводить доведення основної теореми матричних ігор.

Цікавим використанням економіко-математичних методів є застосування теорії ігор у економічних дослідженнях та у випрацюванні планових та управлінських рішень. У теорії ігор розглядаються процеси, зокрема, економічного характеру, у яких вимагається знайти найкраще рішення для поведінки учасників під час зіткнення інтересів різних груп. Тому теорія ігор останнім часом стала ширше проникати в економічні дослідження.

1. Характерні риси явищ, які вивчаються в теорії ігор

По-перше. В цих явищах є *коаліції дій*, наприклад, в економіці – підприємці та їх об'єднання, які діють на ринку; в спорті – гравці, команди; в політиці – партії, громадські об'єднання тощо. Кожна коаліція може вибрати *стратегію* з множини допустимих для неї стратегій, наприклад: у спорті – конкретний план на гру; в економіці – договір про поділ доходів; у військовій справі – час нанесення удару по супротивнику і т. ін. Якщо усі коаліції дій вибрали стратегії, то виникла *ситуація*.

По-друге. Є *коаліції інтересів*, які не завжди співпадають з коаліціями дій, для кожної з яких є своє ставлення до ситуації, свої поняття про переваги одних ситуацій над іншими, що призводить до *конфлікту* інтересів. Існування конфлікту є суттєва риса теорії ігор, тобто завжди є хоча б дві коаліції інтересів.

2. Приклади

2.1. Банк (коаліція дій) збирається інвестувати 100 млн грн трьома фірмам (коаліції інтересів). Спростуючи справу, вважаємо, що стратегія (вона ж є тут і ситуація, оскільки інших коаліцій дій нема) являє собою поділ $x_{1-3} \geq 0$ суми $100 = x_1 + x_2 + x_3$ на частини x_i , які більш-менш задовольняють інтереси фірм, наприклад такі: $x_1 \geq 30$ – інтерес першої фірми; $x_2 \geq x_1$ – інтерес другої фірми; $x_3 \geq 0,7x_2$ – інтерес третьої фірми. Величини x_{1-3} самі теж викликають інтерес: для будь-яких двох поділів один більш задовольняє конкретну фірму ніж другий. У той час як для іншої фірми ставлення до цих поділів є протилежне ще й тому, що переходячи до другого поділу сума, яку одержує одна фірма, збільшується, а сума, яку одержує – зменшується. Маємо конфлікт інтересів.

2.2. Групи (їх номери $i = 1, 2, 3$) вміють виконувати завдання (їхні номери $j = 1, 2, 3$) з оцінками a_{ij} :

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 5. & 4 & 3. \\ 4 & 5. & 2. \\ 4 & 1. & 3. \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \uparrow \end{matrix}$$

(зміст інших позначок, крім цифр – далі).

Командир Р, зацікавлений у хорошій оцінці, має послати одну з груп для виконання завдання, але номер завдання пропонує контролер Q, який не бажає успіху командиру. Вибір групи (i) та завдання (j) командиром Р та контролером Q робляться незалежно один від одного. В цьому прикладі коаліції дій (вони ж коаліції інтересів) співпадають з Р і Q. Стратегії Р – у виборі групи (i), стратегії Q – у виборі завдання (j). У кожного є по три стратегії. Результат вибору (i, j) – ситуація, усього $3 \times 3 = 9$ ситуацій. Відношення Р та Q до оцінки a_{ij} ситуацій (i, j) – протилежне (конфлікт інтересів).

3. Задача теорії ігор

У теорії ігор ставиться задача визначення (побудови) прийнятних тією чи іншою мірою стратегій окремо та ситуацій в цьому для зацікавлених сторін. Прийнятність формалізується в поняттях: *оптимальна стратегія*, *розв'язок гри*, *оптимальний розв'язок* тощо. Отже, задачею теорії ігор є вивчення розумної поведінки в умовах конфлікту.

4. Час виникнення теорії ігор та місце серед інших наук

Теорія ігор як наука почала формуватися в другій чверті ХХ сторіччя, і зараз належить до наук, пов'язаних із прийняттям оптимальних рішень,

відомої під назвою *дослідження операцій*. Теорія ігор пов'язана з різними частинами математики та інформатики.

Оскільки явища, які вивчаються є досить складними, тому достатньо повні та ефективні моделі існують в обмеженій кількості. Матеріал, викладений в цих методичних вказівках, знайомить з найрозповсюдженими з них.

5. Розв'язки в теорії ігор

У теорії ігор явище, яке вивчається, називається грою, учасники коаліцій – гравцями. Це зазвичай люди або групи людей, але можливі й такі гравці, як погода, з приписаними їй людськими якостями (цілеспрямованою поведінкою, свободою вибору тощо) ... Розумною стратегією часто вважають ту, яка дає найкращий результат (найбільший *виграш* – найменший *програш*) у найгіршому випадку. Математично це часто приводить до понять *максиміну* та *мінімаксу*.

Ситуаціями-розв'язками часто вибирають *ситуації рівноваги*, в яких, за означенням, самовільна індивідуальна зміна стратегії будь-яким гравцем не покращує ситуації для нього самого. Як окремий випадок ситуації рівноваги для двох гравців розглядається *сідлова точка*.

6. Приклад розв'язку

У прикладі 2.2 найгірші для Р для кожної групи ситуації відмічені у відповідних рядках *матриці гри* (a_{ij}) штрихом (') біля елемента a_{ij} , а найгірші для Q для кожного завдання у відповідних стовпчиках – крапкою (.). Оптимальна стратегія для Р – вибір першої групи (помітка ← першого рядка матриці), тому що найгірша оцінка для цієї групи краща, ніж найгірші оцінки інших груп, тобто:

$$\underline{u} = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Оптимальна стратегія для Q – вибрати третє завдання (помітка стовпчика ↑), тому що тоді група, вибрана командиром Р, більше оцінки «3» одержати не може, тобто:

$$\bar{u} = \min_i \max_j a_{ij}.$$

Ситуація (1, 3) є ситуацією рівноваги: для Р намір направити іншу групу міг призвести до незадовільної оцінки, а для Q намір дати інше завдання міг привести до одержання оцінки «5», що є не в інтересах Q. Ситуація (1,3) – *сідлова точка, розв'язок матричної гри двох осіб у чистих стратегіях* (див. п.9-10).

7. Розв'язки для множин задач

Більшість математичних моделей враховують «масовість» таких явищ, як повторювання їх у часі i (або) вар'ювання (за параметрами) в межах деякого класу. Розумна поведінка, яка це враховує, передбачає *оптимізацію у середньому*, яка, як правило, пов'язана з ймовірнісними характеристиками. Прийнятними, з розрахунку на «масовість», інколи вважають ситуації, які задовольняють деяким *принципам справедливості*: оскільки гравець може опинитися в становищі іншого гравця, або в інших умовах, то розв'язки гри мають задовольняти деяким вимогам інваріантності розв'язків відносно ряду операцій з іграми у просторах ігор. *Оптимальна змішана стратегія та вектор Шеплі* є найбільш поширеними математичними виразами розумної поведінки в умовах масовості.

8. Основна класифікація ігор

8.1. Кілька слів про *нестратегічні ігри*. Типова формалізація в теорії ігор така: I – множина гравців, а коаліції дій та інтересів – підмножини в I . Якщо коаліція дії одна (наприклад, банк в п.2.1), то про стратегії різних коаліцій мова йти не може. Питання зразу ж ставиться про ситуацію, яка тотожно співпадає зі стратегією. Тільки тому такі ігри називаються нестратегічними.

8.2. До нестратегічних ігор належать *кооперативні ігри*, (приклад 2.1). Ситуаціями там будуть поділи $X = (x_i)$ загальної суми

$$u(I) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

між гравцями, а коаліціями (*інтересів*) будуть підмножини $K \subset I$.

8.3. Якщо кожен гравець діє індивідуально, тобто ніяких коаліцій дій та інтересів, крім самих гравців немає (наприклад, P та Q в прикладі 2.2.), то такі ігри називаються *безкоаліційними*. Класи цих ігор розглядаються в п.9-18.

8.4. Розумна поведінка може будуватися як процес у часі залежно від інформаційних потоків у грі. Існують ігри з неперервним часом (*диференціальні, типу дуелей* тощо), з дискретним часом – *багатокрокові ігри*, наприклад, *позиційні ігри*, в яких позиціями є фазові стани процесу гри на кожному кроці. За структурою просторів та методами виділяють *нескінченні ігри*, тобто ігри з нескінченними множинами чистих стратегій.

У подальших пунктах розглядаються деякі конкретні типи ігор відповідно до загальної картини цієї науки, окресленої вище. Основні математичні факти викладено без доведень. Доведення та додаткові відомості можна знайти в літературі [1-3].

МАТРИЧНІ ІГРИ

9. Матричні ігри двох гравців з нульовою сумою

Матричні ігри двох гравців з нульовою сумою задаються однією матрицею гри:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де m – кількість стратегій першого гравця; n – кількість стратегій другого гравця; a_{ij} – *виграш* першого гравця в ситуації (i, j) ; $(-a_{ij})$ – виграш другого гравця в цій ситуації (з рівності $a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$ і походять слова «з нульовою сумою» в назві гри). Стратегії i, j будемо інколи уточнено називати *чистими*, оскільки в п.11.2 буде розглянуто поняття змішаної стратегії.

10. Ігри в чистих стратегіях

Приклад такої гри та метод її розв'язання був продемонстрований в п.2.2, п.6. Розглянемо загальну ситуацію.

10.1. Гра складається з вибору стратегії (i) (рядки матриці) першим гравцем, який може гарантувати виграш не менший ніж

$$\underline{u} = \max_i \min_j a_{ij},$$

незалежно від того, яку стратегію вибрав другий гравець, та з вибору стратегії (j) другим гравцем і гарантувати він собі може, якнайменше, виграш $-\bar{u}$, де

$$\bar{u} = \min_j \max_i a_{ij},$$

незалежно від вибору першого гравця.

Величини $\underline{u}$ та $\bar{u}$ називаються *нижньою та верхньою цінами гри*.

Рядок i_0 , в якому знаходиться елемент a_{ij} , який дорівнює

$$\max_i \min_j a_{ij},$$

визначає найкращу стратегію першого гравця. Аналогічно стовпчик j_0 , в якому досягається

$$\min_j \max_i a_{ij},$$

визначає найкращу стратегію другого гравця. Приклад, в якому $\underline{u} = \bar{u}$ розглядався в п. 2.2. та п.6.

Розглянемо ще один приклад. Матриця гри:

$$i_0 \rightarrow \begin{matrix} & j_0 \\ & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0' & 3. & 5. \\ 7. & -2' & 3 \\ -1' & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Для неї

$$\underline{u} = 0, \bar{u} = 3, i_0 = 1, j_0 = 2,$$

та $\underline{u} < \bar{u}$.

У загальному випадку завжди $\underline{u} \leq \bar{u}$.

10.2. Якщо $\underline{u} = \bar{u}$, то кажуть, що гра має розв'язок у чистих стратегіях (з ціною $u = \underline{u} = \bar{u}$). Це буде лише за умови, коли існує сідлова точка (i_0, j_0) функції a_{ij} :

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j}, \text{ для усіх } i, j$$

Стратегії i_0, j_0 будуть *оптимальними* («найкращими») стратегіями гравців. Далі побачимо (п.16.), що ситуація (i_0, j_0) , яка дає розв'язок, є ситуацією рівноваги. Запишемо розв'язок гри:

i_0 – оптимальна чиста стратегія першого гравця;

j_0 – оптимальна чиста стратегія другого гравця;

u – ціна гри .

11. Гра в змішаних стратегіях

11.1. Розглянемо гру з матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = 0 \neq \bar{u} = 1.$$

Граючи в цю гру багато разів, перший гравець, змінюючи випадково стратегію (наприклад, кидаючи монету) несподівано для другого гравця з частотою, що наближається до 50% (як це впливає з теорії ймовірностей) буде вигравати «1» незалежно від дій другого гравця. Таким чином, середній виграш на одну гру буде наближатись до значення

$$0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 0,5.$$

Тобто використовуючи випадкові, «змішані» («то перша, то друга») стратегії, перший гравець за багато ігор гарантує собі виграш на одну гру $\approx 0,5 > \underline{u} = 0$.

Отже, корисно вивчити та застосовувати змішані стратегії.

11.2 Означення. Рядок $x = (x_1, \dots, x_m)$ ймовірностей вибору стратегій першим гравцем називається *змішаною стратегією* першого гравця. Аналогічно $y = (y_1, \dots, y_n)$ є змішаною стратегією другого гравця.

Величина $A(x, y) = \sum a_{ij} x_i y_j$ (математичне сподівання виграшу на одну гру) називається *виграшем в змішаних стратегіях*.

Основна Теорема

Для гри з довільною матрицею A існує ситуація рівноваги (сідлова точка функції $A(x, y)$ в змішаних стратегіях:

$$A(x, y^0) \leq A(x^0, y^0) \leq A(x^0, y).$$

Розв'язок гри записується так:

$x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ – оптимальна змішана стратегія першого гравця,

$y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$ – оптимальна змішана стратегія другого гравця,

$u^0 = A(x^0, y^0)$ – ціна гри (в змішаних стратегіях).

Отже, гра в змішаних стратегіях завжди має розв'язок на відміну від гри в чистих стратегіях.

Наслідки основної теореми (x^0, y^0, u^0 - розв'язок гри):

$$11.3 \quad \sum a_{ij} y_j^0 < u^0 \Rightarrow x_i^0 = 0, \text{ тобто } x_i^0 > 0 \Rightarrow \sum a_{ij} y_j^0 = u^0,$$

$$\sum a_{ij} x_i^0 > u^0 \Rightarrow y_j^0 = 0, \text{ тобто } y_j^0 > 0 \Rightarrow \sum a_{ij} x_i^0 = u^0,$$

$$11.4 \quad \underline{u} \leq u^0 \leq \bar{u}$$

$$11.5 \quad u^0 = \max_x \min_y A(x, y) = \min_y \max_x A(x, y).$$

Наслідок основної теореми дозволяє розв'язувати такі матричні ігри алгебраїчним методом. Приведемо приклад, в якому спочатку розглянемо Є матричну гру в чистих стратегіях, а потім перейдемо до змішаних стратегій відповідно до наслідків основної теореми.

Приклад. Є матрична гра 2×2 двох гравців з нульовою сумою з матрицею виграшів першого гравця

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

Тобто: перший гравець вибирає рядок, другий гравець вибирає стовпчик /чисті стратегії гравців/. Для великої кількості таких ігор з цією матрицею є змішані стратегії:

$X = (x_1; x_2) = (x, 1 - x)$ - першого та $Y = (y_1; y_2) = (y, 1 - y)$ - другого гравців, x_1, x_2 та y_1, y_2 це ймовірності вибору чистих стратегій гравцями, ціна гри u дає очікуваний виграш першого гравця на одну таку гру.

Перший гравець діє за принципом максиміна. Оптимальна чиста стратегія першого гравця /забезпечує кращий гарантований виграш / є перша, вона гарантує виграш мінімум 2, тому що друга стратегія може дати виграш мінус 4. Тобто гарантований виграш /максимін /дорівнює 2, це

нижня чиста ціна гри. У нас гра з нульовою сумою. Тобто виграш першого – це програш другого. Другий гравець діє за принципом мінімакса, тому найкраща стратегія другого гравця буде коли максимальний елемент в стовпчику матриці гри, тобто максимальний можливий виграш першого гравця буде мінімальним. Для нашої гри оптимальна стратегія другого гравця є другою. максимальний виграш першого гравця 4, тоді як у першій стратегії другого гравця перший може виграти 10. Мінімакс дорівнює чотирьом і це буде верхня чиста ціна гри. Оскільки у нас не співпадають чисті верхня та нижня ціни, то вузлової точки матричної гри в чистих стратегіях нема. І розв'язку гри в чистих стратегіях нема. За основною теоремою тоді є розв'язок гри в змішаних стратегіях. Відповідно до наслідків основної теореми, оскільки відсутній розв'язок в чистих стратегіях, то мають виконуватись рівності:

$$\begin{cases} 2x + 4(1 - x) = u \\ 10x - 4(1 - x) = u \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} 2y + 10(1 - y) = u \\ 4y - 4(1 - y) = u \end{cases}.$$

Розв'язуючи ці системи знаходимо оптимальні змішані стратегії першого та другого гравців та ціну гри u :

$$X_0 = (0,5; ,0,5), Y_0 = \left(\frac{7}{8}; \frac{1}{8}\right), u = 3.$$

Як ми бачимо, чиста нижня ціна 2 менше ціни гри 3, яка менше чистої верхньої ціни 4. Зауважимо, що точка $\in X_0, Y_0$ вузловою точкою поверхні другого порядку.

До речі:

$z = XAY^t$ /гіперболічний параболоїд в матричній формі/.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати матричну гру двох гравців з нульовою сумою з вказаною матрицею в змішаних стратегіях алгебраїчним методом по варіантам і), $i=1,...,32$. Знайти оптимальні чисті стратегії першого та другого гравця, нижню чисту ціну гри, верхню чисту ціну гри, визначити сідлові точки і чисту ціну гри, якщо вони існують. Якщо розв'язку в чистих стратегіях не існує – сідлової точки в чистих стратегіях не існує – то знайти розв'язок гри у змішаних стратегіях – знайти оптимальні змішані стратегії першого та другого гравця та ціну гри у змішаних стратегіях.

1) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$	2) $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	3) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	5) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$	6) $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$
7) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$	8) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$	9) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$
10) $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	11) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$	12) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$
13) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$	14) $\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	15) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$

16) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$	17) $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$	18) $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
19) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$	20) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	21) $\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$
22) $\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	23) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$	24) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$
25) $\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$	26) $\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	27) $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$
28) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	29) $\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$	30) $\begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
1) $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$	32) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$	

12. Методи лінійного програмування (ЛП) розв'язання ігор у змішаних стратегіях

Розв'язок задачі в змішаних стратегіях можна знайти як розв'язок задачі 12.1 лінійного програмування про сумісність умов, тобто з нульовою цільовою функцією (матричний запис):

$$12.1. \quad xA \geq u; Ay^t \leq u, \sum x_i = \sum y_j = 1$$

((.)^t – позначка транспонування).

Розв'язок x^0, y^0, u^0 цієї задачі буде розв'язком гри. Окремо x^0, u^0 та y^0, u^0 можна знайти як розв'язок задач лінійного програмування 12.2 та 12.3.

$$12.2. \quad xA \geq u, x \geq 0, \sum x_i = 1 \quad u \rightarrow \max$$

$$12.3 \quad Ay^t \leq u, y \geq 0, \sum y_j = 1 \quad u \rightarrow \min.$$

Задачі 12.2, 12.3 легко зводяться до пари двоїстих задач ЛП. Про відповідні методи ЛП див. [4].

13. Задачі з матрицями порядку $2 \times n$ та $m \times 2$

Ці задачі можна розв'язувати графічним методом ЛП

Приклад. Розв'язати задачу теорії ігор з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 8 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

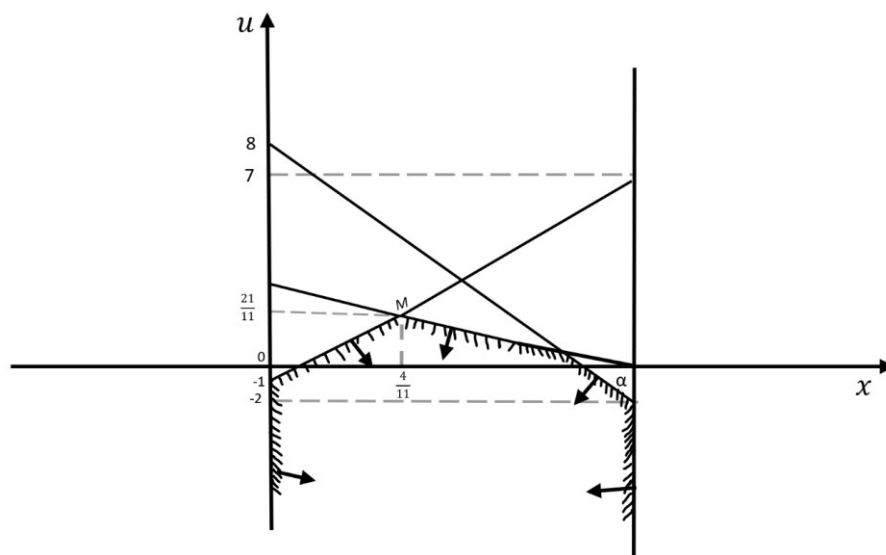
Розв'язання. Позначимо $(x, 1 - x)$ – змішана стратегія першого гравця. Тоді задачу 12.2 запишемо так:

$$\begin{cases} -2x + 8(1 - x) \geq u, \\ 7x - (1 - x) \geq u, \\ 0x + 3(1 - x) \geq u, \\ 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad u \rightarrow \max.$$

Це двовимірна задача ЛП, що розв'язується стандартним графічним методом ЛП: малюємо багатокутник розв'язків і у напрямі градієнта функції цілі (в цих задачах це напрямок осі u) знаходимо крайню точку M , яка відповідає розв'язку (оптимальному):

$$M : \begin{cases} 7x - (1 - x) = u \\ 0x + 3(1 - x) = u \end{cases} \quad M\left(\frac{4}{11}, \frac{21}{11}\right).$$

Таким чином, оптимальна стратегія першого гравця є $(x, 1 - x) = \left(\frac{4}{11}; \frac{7}{11}\right)$, а ціна гри $u = \frac{21}{11}$.



Під час пошуку розв'язку гри корисно використовувати наслідок п. 11.3. В нашому прикладі, оскільки $x_1^0 = \frac{4}{11} > 0$ і $x_2^0 = \frac{7}{11} > 0$, то можна написати такі рівняння для знаходження оптимальної стратегії другого гравця:

$$\begin{cases} -2y_1 + 7y_2 + y_3 = \frac{21}{11} \\ 8y_1 - y_2 + 3y_3 = \frac{21}{11} \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{cases}$$

Додатково можна одразу вказати, що $y_1 = 0$ теж за наслідком п.11.3, оскільки $-2x_1^0 + 8x_2^0 = -2 \cdot \frac{4}{11} + 8 \cdot \frac{7}{11} = \frac{48}{11} > u^0$. В загальному випадку для матриці розміру $2 \cdot n$, якщо точка М є перетином рівно двох прямих, тільки два відповідних значення y_j можуть не дорівнювати нулю.

З рівнянь для y_j знаходимо: $y_2 = \frac{3}{11}, y_3 = \frac{8}{11}$. Розв'язок гри запишемо так:

$(\frac{4}{11}; \frac{7}{11})$ - оптимальна змішана стратегія першого гравця;

$(0; \frac{3}{11}; \frac{8}{11})$ - оптимальна змішана стратегія другого гравця;

$\frac{21}{11}$ - ціна гри.

У випадку гри з матрицею розмірами $m \times 2$ треба позначити $(y, 1 - y)$ – стратегію другого гравця і, аналогічно попередньому, розв'язувати графічним методом задачу ЛП 12.3 (замість задачі 12.2)

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати матричні ігри двох гравців з нульовою сумою в змішаних стратегіях графічним методом.

№ варіанта	матричні ігри а) та б)
1	а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 9 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 6 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$
2	а) $A = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 6 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
3	а) $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
4	а) $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
5	а) $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 9 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 6 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
6	а) $A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 0 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

7	$a) A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 9 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
8	$a) A = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 0 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 4 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
9	$a) A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 9 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
10	$a) A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$
11	$a) A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 6 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
12	$a) A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 6 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$
13	$a) A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 6 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

14	$a) A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
15	$a) A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 6 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$
16	$a) A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 4 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$
17	$a) A = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 0 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
18	$a) A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 6 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
19	$a) A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 0 \\ 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 6 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
20	$a) A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 4 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

21	$a) A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 4 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
22	$a) A = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
23	$a) A = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 0 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 4 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
24	$a) A = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 4 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
25	$a) A = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 4 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$
26	$a) A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 6 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
27	$a) A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 6 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

28	$a) A = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad б) A = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
29	$a) A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad б) A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
30	$a) A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad б) A = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 4 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
31	$a) A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad б) A = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 4 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$
32	$a) A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 9 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad б) A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

14. Домінування

Це явище відбувається, коли елементи одного рядка (стовпчика) матриці A не перевищують відповідних елементів іншого рядка (стовпчика) цієї матриці. Тоді, за змістом гри, не треба першому гравцю вибирати стратегію, яка відповідає меншому рядку, а другому гравцю не треба вибирати стратегію, яка відповідає більшому стовпцю, тобто для відповідних i та j $x_i = 0, y_j = 0$. Іншими словами, можна розглядати матрицю менших розмірів.

Так, можна розглядати матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ замість } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ чи } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Задачі з матрицею невеликих розмірів

Задачі з матрицею невеликих розмірів (реально не більше ніж 4×4 , 3×5 тощо, далі кількість обчислень швидко зростає) можна розглядати перебором базисних розв'язків задачі ЛП 12.1 використовуючи наслідок 11.3, як це було раніше в п.13.

Приклад 1. Розв'язати гру з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 7 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо задачу 12.1:

$$15.1 \begin{cases} 7x_2 + 3x_3 \geq u \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq u \\ 5x_1 + 3x_2 \geq u \\ x_{1-3} \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y_2 + 5y_3 \leq u \\ 7y_1 - 2y_2 + 3y_3 \leq u \\ 3y_1 + 6y_2 \leq u \\ y_{1-3} \geq 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

Першу базисну точку візьмемо за умови $x_i, y_j \neq 0, i, j = 1, 2, 3$, розв'язок у цій точці за наслідком 11.3 має бути визначений із системи, яку одержимо із системи 15.1 заміною нерівностей з u на рівняння. Звичайні методи розв'язування системи рівнянь дають розв'язок гри: $x_1 = \frac{13}{32}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{11}{32}$ – оптимальна змішана стратегія першого гравця; $u = \frac{103}{39}$ – ціна гри.

Отже $\frac{103}{39} > 0 = \underline{u}$ – тобто виграш на одну гру першого гравця для оптимальної змішаної стратегії буде більше того виграшу, який гарантується найкращою чистою стратегією першого гравця в одній грі.

Приклад 2. Розв'язати гру з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 \\ -2 & 8 & 4 \\ 6 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Щоб продемонструвати загальний підхід, розглянемо детальний спосіб розв'язання цього прикладу (без врахування домінування).

Розв'язання. Запишемо задачу 12.1:

$$15.2 \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq u \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 \geq u \\ 12x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geq u \\ x_{1-3} \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 \leq u \\ -2y_1 + 8y_2 + 4y_3 \leq u \\ 6y_1 - 4y_2 + 8y_3 \leq u \\ y_{1-3} \geq 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

Перша базисна точка, знайдена при умові $x_i, y_j \neq 0$ ($i, j = 1, 2, 3$) подібно до попереднього прикладу не відповідає умові невід'ємності значень x_i, y_j (перевірте рівняння для y , якщо $y_1 = 1, y_2 = 0.5, y_3 = -0.5, u = 0$).

Припустимо тепер, що розв'язок є базисною точкою з умовою $x_1 = 0$. Запишемо задачу 12.2:

$$\begin{cases} -2x_2 + 6x_3 \geq u \\ 8x_2 - 4x_3 \geq u \\ 4x_2 + 8x_3 \geq u \\ x_{2,3} \geq 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad u \rightarrow \max.$$

Графічно розв'язуючи цю задачу осі змінних $x = x_2 = 1 - x_3$ та u), одержимо:

$$x_2 = x_3 = 0.5; u = 2.$$

Оскільки $x_2, x_3 > 0$ та $4x_2 + 8x_3 = 6 > u = 2$, тоді з наслідку 11.3 буде $y_3 = 0$ та

$$\begin{cases} -2y_1 + 8y_2 = 2 \\ 6y_1 - 4y_2 = 2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

Система для y_j несумісна.

Таким же чином треба розглянути припущення, що розв'язок є базисною точкою з умовою $x_2 = 0$. Якщо і в цьому випадку розв'язок не одержимо, тоді треба буде перейти до випадку $x_3 = 0$.

Розглядати подібним чином випадки $y_j = 0$ не потрібно, бо з умов $x_i \neq 0$ за наслідком 11.3 впливає система для знаходження y_j , яка була розв'язана ($y_1 = 1, y_2 = 0.5, y_3 = -0.5$) і не підходила (хоча у відповіді є нульове значення y_j).

Отже, розглядаємо випадок $x_2 = 0$ (подібно до випадку $x_1 = 0$):

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_3 \geq u \\ 4x_1 - 4x_3 \geq u \\ 12x_1 + 8x_3 \geq u \\ x_{1,3} \geq 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases} \quad u \rightarrow \max \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 0 \\ u = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = 0 \\ 4y_1 + 4y_2 = 4 \\ -2y_1 + 8y_2 \leq 4 \\ 6y_1 - 4y_2 \leq 4 \\ y_{1,2} \geq 0 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

Зауважимо, що $y_3 = 0$, та $4y_1 + 4y_2 + 12y_3 = u$ як з наслідку 11.3

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} \leq y_1 \leq \frac{4}{5} \\ y_2 = 1 - y_1 \end{cases}$$

Маємо усі розв'язки гри:

$(1, 0, 0)$ – оптимальна змішана стратегія першого гравця (вона чиста);

$(v, 1 - v, 0)$, де $v \in \left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right]$ – оптимальні змішані стратегії другого гравця;

$u = 4$ – ціна гри.

У цьому прикладі $\underline{u} = 4 = u < \bar{u} = 6$.

Зауважимо, що врахування домінування спростило б розв'язання

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати матричну гру двох гравців з нульовою сумою в змішаних стратегіях

1) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	2) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$
3) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 1 & -3 \\ 6 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	4) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
5) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	6) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 & 7 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 & 7 \\ 1 & -2 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	8) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 8 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
11) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 7 \end{pmatrix}$	12) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 6 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$
13) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 6 \\ 7 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	14) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$
15) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 7 & 1 & 1 & -2 \\ 6 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	16) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 7 & 7 \\ 8 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
17) $\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	18) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 & 5 \\ 6 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$
19) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$	20) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & -1 \\ -2 & 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

21) $\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	22) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$
23) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 8 & 5 \\ 6 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$	24) $\begin{pmatrix} -2 & 8 & -3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
25) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	26) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & -2 \\ 6 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
27) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 6 \\ 6 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$	28) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
29) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 7 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & -1 & 7 \end{pmatrix}$	30) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 & 6 \\ 6 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$
31) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$	32) $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & -7 & -1 & 7 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

16. Безкоаліційні ігри n осіб

Означення. Такі ігри є узагальненням розглянутої матричної гри двох осіб (гравців).

Основні поняття:

S_k – скінченна множина чистих стратегій k -го гравця ($k = 1, \dots, n$)

$H_k = H_k(\theta)$ – виграш k -го гравця в ситуації $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $\theta_i \in S_i$.

H_k – функції від θ .

$H_k = H_k(\sigma) = \sum_{\theta} H_k(\theta) \sigma_1(\theta_1) \dots \sigma_n(\theta_n)$ – виграш k -го гравця в ситуації σ в змішаних стратегіях: $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_i = \sigma_i(\theta_i)$ – розподіл ймовірностей на S_i (змішана стратегія i -го гравця), $i = 1, \dots, n$.

$\sigma \parallel \sigma'_i$ – ситуація σ після заміни σ_i на σ'_i (індивідуальна зміна своєї змішаної стратегії i -м гравцем у ситуації σ).

Якщо $H_k(\sigma \parallel \sigma'_i) \leq H_k(\sigma)$, тоді ситуація σ називається *прийнятною* для k -го гравця.

Ситуація прийнятна для кожного гравця називається *ситуацією рівноваги*.

Основна теорема:

Безкоаліційна гра має ситуацію рівноваги (в змішаних стратегіях).

17. Біматрична гра – частинний випадок безкоаліційної гри

Участь беруть два гравці; виграші першого та другого гравців задаються відповідно матрицями $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$.

$$(a_{ij} = H_1(\theta), b_{ij} = H_2(\theta), \theta_1 = i, \theta_2 = j).$$

Ситуація $\sigma = (x, y)$; $x = (x_1, \dots, x_m)$ – змішана стратегія першого гравця, $y = (y_1, \dots, y_n)$ – змішана стратегія другого гравця.

$x A y^t, x B y^t$ – виграші відповідно першого та другого гравців у ситуації (x, y) в матричному записі.

Ситуація рівноваги (x^0, y^0) знаходиться з умов 17.1. Це є запис основної теореми з п.16 для біматричної гри.

17.1. Існує такий розв'язок системи:

$$\begin{aligned} \sum a_{ij} y_j^0 &\leq x^0 A y^{0t}, i = 1, \dots, m \\ \sum b_{ij} x_i^0 &\leq x^0 B y^{0t}, j = 1, \dots, n \\ x_i^0, y_j^0 &\geq 0, \sum x_i^0 = \sum y_j^0 = 1. \end{aligned}$$

Позначимо

$u_1 = x^0 A y^{0t}, u_2 = x^0 B y^{0t}$ – виграші гравців в ситуації рівноваги.

Значення x^0, y^0, u_1, u_2 дають розв'язок гри (прийнятні стратегії та виграші гравців).

17.2. Наслідок системи (17.1) аналогічно записуємо так:

$$\sum_j a_{ij} y_j^0 < u_1 \Rightarrow x_i^0 = 0,$$

$$\text{тобто} \quad x_i^0 > 0 \Rightarrow \sum_j a_{ij} y_j^0 = u_1;$$

$$\sum_i b_{ij} x_i^0 < u_2 \Rightarrow y_j^0 = 0, \text{ тобто } y_j^0 > 0 \Rightarrow \sum_i b_{ij} x_i^0 = u_2.$$

У загальному випадку наслідок 17.2 дозволяє зводити нелінійну систему умов 17.1 до скінченної кількості лінійних умов.

Приклад. Розв'язати гру з матрицями

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -9 & -1 \\ -9 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Нехай $(x, 1-x)$ – стратегія першого гравця з деякого розв'язку гри, (y_1, y_2, y_3) – другого гравця для того ж розв'язку.

Тоді:

а) $x = 0 \Rightarrow y_2 = 1 \Rightarrow x = 1$ – протиріччя;

б) $x = 1 \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow x = 0$ – протиріччя;

в) $y_3 = 1 \Rightarrow$ а).

Розв'язок не містить чистих стратегій.

Залишилось перевірити скінченну кількість варіантів $y_j, y_k \neq 0, j \neq k$.

Розглянемо варіант $y_{1,2} \neq 0$. Тоді (перевірка умов 17.2):

$$u_2 = x - 9(1-x) = -9x + 0(1-x) \Rightarrow x = \frac{9}{19};$$

$$u_2 = \frac{9}{19} - 9 \cdot \frac{10}{19} < -\frac{9}{19} - \frac{10}{19} = -1$$

– не виконується одна з умов 17.2.

Нехай $y_{2,3} \neq 0$. Тоді (перевірка умов 17.2):

$$u_2 = -9x + 0(1-x) = -x - (1-x) \Rightarrow x = \frac{1}{9},$$

$$u_2 = -1 > \frac{1}{9} - 9 \Rightarrow \frac{8}{9} \Rightarrow y_1 = 0.$$

$$u_1 = -2 \cdot 0 + 9y_2 + 0 = 9 \cdot 0 - y_2 + y_3, y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{1}{11}, y_3 = \frac{10}{11}, u_1 = \frac{9}{11}.$$

Таким чином, знайдено розв'язок гри:

$(\frac{1}{9}; \frac{8}{9}), (0; \frac{1}{11}; \frac{10}{11})$ – ситуація рівноваги,

$u_1 = \frac{9}{11}, u_2 = -1$ – виграші гравців у цій ситуації.

Перевірку варіанта $u_{1,3} \neq 0$ опустимо.

Подібним чином розв'язуються біматричні задачі з матрицями порядку $2 \times n$ або $m \times 2$.

Завдання для самостійної роботи

Далі дано варіанти завдань в яких потрібно зробити таке:

а) розв'язати біматричну гру двох гравців з нульовою сумою в змішаних стратегіях графічним методом – знайти ситуацію рівноваги;

б) знайти стратегії другого гравця для яких існує єдина прийнятна стратегія першого гравця;

в) знайти розв'язок біматричної гри для транспонованих матриць виграшів обох гравців;

г) знайти для яких стратегій першого гравця існує єдина прийнятна стратегія другого гравця у випадку біматричної гри з транспонованими матрицями виграшів обох гравців.

№ варіантов	Матриці виграшів 1-го гравця.	Матриці виграшів 2-го гравця.
1	$A = \begin{pmatrix} -11 & 5 \\ 6 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -6 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ 10 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -10 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 7 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -7 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

4	$A = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -6 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 5 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -5 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
6	$A = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 10 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -10 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 12 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -12 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
8	$A = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 13 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -13 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$
9	$A = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 10 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -10 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
10	$A = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 6 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -6 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$
11	$A = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 12 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -12 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
12	$A = \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 6 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

13	$A = \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 10 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -10 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$
14	$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 12 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -12 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
15	$A = \begin{pmatrix} -6 & 13 \\ 10 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -10 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
16	$A = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 7 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
17	$A = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 4 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
18	$A = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 7 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
19	$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ 11 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -11 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
20	$A = \begin{pmatrix} -11 & 10 \\ 10 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$
21	$A = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ 5 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -5 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

22	$A = \begin{pmatrix} -10 & 9 \\ 10 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -10 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$
23	$A = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 5 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -5 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$
24	$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 13 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -13 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$
25	$A = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 7 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -7 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
26	$A = \begin{pmatrix} -5 & 13 \\ 5 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 4 & -13 \\ -5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
27	$A = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ 11 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
28	$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 12 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -12 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$
29	$A = \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 7 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 11 & -9 \\ -7 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
30	$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 8 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$

31	$A = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 5 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$
32	$A = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 12 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -12 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

18. Зауваження

Біматрична задача може мати різні розв'язки (точки рівноваги), які відрізняються не лише стратегіями, а й значеннями виграшів як першого, так і другого гравців. Крім підходу до поняття правильної поведінки в біматричних іграх, зв'язаному з точками рівноваги, бувають правомірними як підхід, де кожен гравець вибирає стратегію, оптимальну для себе в матричній грі зі своєю матрицею виграшів, так і підхід, де кожен гравець вибирає стратегію, оптимальну для себе, як другого гравця, в матричній грі іншого гравця в ролі першого зі своєю матрицею виграшів (тобто «чи грати самому чи не дати грати супернику»). Не виключені інші підходи.

Задачі для індивідуальної та самостійної роботи з курсу теорії ігор є в роботі [5], можна також використовувати приклади з книг [1-3].

Список літератури

1. Крушевський А.В. Теорія ігор: підручник. – Київ : Вища шк. – 1977. – 216 с
2. Binmore K. Game Theory: A Very Short Introduction. – Oxford : Oxford University Press, 2007. – 184 p.
3. Вітлінський В. В. Моделювання економіки : навч. посіб. – Київ : КНЕУ, 2003. – 408 с.
4. Філонов. Ю.П., Багро О.В. Лінійне програмування: методичні вказівки по спецкурсу. – Київ : КНУБА, 2001. – 48 с.
5. Філонов. Ю.П. Індивідуальні завдання з лінійного програмування, теорії ігор, теорії графів: методичні вказівки для студентів будівельних спеціальностей. – Київ : КНУБА, 1999. – 13 с.

Навчально-методичне видання

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ТЕОРІЇ ІГОР

Методичні вказівки та завдання
для самостійної роботи з вищої математики
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти за спеціальностями D3 «Менеджмент»,
C1 «Економіка та міжнародні економічні
відносини (за спеціальностями)», D1 «Облік і оподаткування»,
G19 «Будівництво та цивільна інженерія»

Укладачі: **Філонов** Юрій Петрович,
Кириченко Анатолій Анатолійович,
Літвінов Богдан Олександрович

Комп'ютерне верстання *А. П. Селівестрової*

Ум. друк. арк. 1,86. Обл.-вид. арк. 2,0
Електронний документ. Вид № 56/V-26.

Виконавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури
Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002