

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки та завдання
до виконання контрольної роботи з модуля 1
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти спеціальностей D3 «Менеджмент»,
C1 «Економіка та міжнародні економічні відносини»,
D1 «Облік і оподаткування»

Київ 2026

УДК 511.147+512.64+514.7+517.1
В95

Укладачі: Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
В.Д. Печук, д-р філософії;
З.І. Наголкіна, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Л.М. Блажко, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент Ю.П. Філонов, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики

*Затверджено на засіданні кафедри вищої математики,
протокол № 8 від 21 квітня 2026 року.*

В авторській редакції.

Вища математика [електронний ресурс] : методичні вказівки
В95 та завдання до виконання контрольної роботи з модуля 1 / уклад.:
Н.В. Бондаренко та ін. – Київ: КНУБА, 2026. – 76 с.

Містить необхідний навчально-методичний матеріал для організації самостійної роботи студентів під час виконання індивідуальної контрольної роботи з модуля 1 дисципліни «Вища математика».

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей: D3 «Менеджмент», С1 «Економіка та міжнародні економічні відносини», D1 «Облік і оподаткування».

© Н.В. Бондаренко,
В.Д. Печук
З.І. Наголкіна,
Л.М. Блажко, 2026
© КНУБА, 2026

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Матеріали методичної розробки спрямовані на систематизацію теоретичних знань, формування практичних умінь і навичок розв'язування задач, а також забезпечення ефективної організації самостійної навчальної діяльності студентів під час виконання контрольної роботи.

Методична розробка включає методичні вказівки до виконання завдань, приклади розв'язання типових задач та 30 варіантів завдань індивідуальної контрольної роботи. Індивідуальна контрольна робота охоплює такі розділи курсу вищої математики: комплексні числа, елементи лінійної та векторної алгебри, елементи аналітичної геометрії на площині та у просторі, вступ до математичного аналізу (границі функцій, диференціальне числення функцій однієї змінної, застосування похідної до дослідження функцій). Методичні вказівки подано у доступній та логічно структурованій формі, що сприяє ефективному опрацюванню навчального матеріалу та виконанню індивідуальної контрольної роботи.

Метою навчального видання є формування у студентів базових математичних знань, умінь і навичок, необхідних для подальшого вивчення загальнотеоретичних, професійно орієнтованих і спеціальних дисциплін. Виконання індивідуальної контрольної роботи сприяє закріпленню теоретичного матеріалу, розвитку логічного мислення, формуванню навичок самостійної роботи та підвищенню рівня математичної підготовки здобувачів освіти.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Вказівки. Комплексні числа

Алгебраїчна форма запису комплексного числа має вигляд $z = a + bi$, де i – уявна одиниця така, що $i^2 = -1$, a і b – дійсні числа. У множині комплексних чисел визначені операції додавання, віднімання, множення та ділення:

$$1) (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$2) (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$3) (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

$$4) \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i, \text{ якщо } c + di \neq 0.$$

Зазначимо, що дії додавання, віднімання та множення над комплексними числами можна виконувати, як звичайні алгебраїчні дії над лінійними двочленами, вважаючи, що $i^2 = -1$.

Комплексне число в **тригонометричній формі** має вигляд

$$z = r(\cos \varphi + \sin \varphi),$$

де $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$, а φ – це головне значення аргументу комплексного числа, $\varphi \in [0; 2\pi)$ або $\varphi \in [-\pi; \pi)$ (рис. 1).

Якщо $\varphi \in (-\pi; \pi]$, то

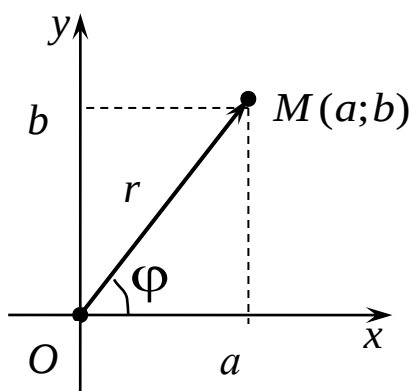


Рис. 1

$$\varphi = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & \text{якщо } a > 0, b \neq 0, \\ \arctg \frac{b}{a} + \pi, & \text{якщо } a < 0, b > 0, \\ \arctg \frac{b}{a} - \pi, & \text{якщо } a < 0, b < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0, b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0, b < 0, \\ 0, & \text{якщо } a > 0, b = 0, \\ \pi, & \text{якщо } a < 0, b = 0. \end{cases}$$

Якщо $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то для $n \in \mathbf{Z}$ степінь комплексного числа обчислюється за **формулою Муавра**

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Завдання 1. Знайдіть алгебраїчну форму комплексних чисел:

$$\text{а) } \frac{(5-4i)(3+2i)}{2-3i} - i^3(6-7i); \quad \text{б) } (\sqrt{2}i - \sqrt{6})^{48}.$$

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{(5-i)(3+5i)}{2-3i} - i^3(6-7i) &= \frac{15+25i-3i-5i^2}{2-3i} - (-i)(6-7i) = \\ &= \frac{20+22i}{2-3i} + i(6-7i) = \frac{(20+22i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} + 6i+7 = \\ &= \frac{40+60i+44i-66}{13} + 6i+7 = \frac{-26+104i}{13} + 7+6i = \\ &= -2+8i+7+6i = 5+14i. \end{aligned}$$

б) Запишемо комплексне число $z = \sqrt{2}i - \sqrt{6}$ у вигляді $z = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ та знайдемо його тригонометричну форму. Дійсна частина комплексного числа $a = -\sqrt{6}$, уявна частина $b = \sqrt{2}$. Модуль комплексного числа

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Комплексне число z лежить в другій чверті координатної площини (рис. 2).

Тому

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \pi = \\ &= -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

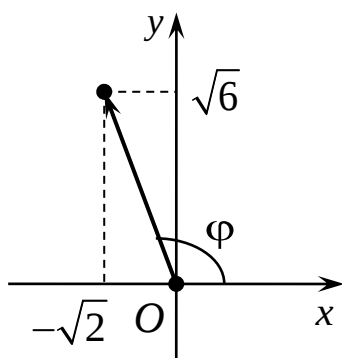


Рис. 2

Звідси тригонометрична форма комплексного числа має вигляд

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

За формулою Муавра отримуємо

$$z^{48} = (2\sqrt{2})^{48} \left(\cos \frac{5\pi}{6} \cdot 48 + i \sin \frac{5\pi}{6} \cdot 48 \right) = \\ = 2^{72} (\cos 40\pi + i \sin 40\pi) = 2^{72}.$$

Корені з комплексних чисел

Число ξ є коренем n -го степеня ($n \in \mathbf{N}$) з комплексного числа z , якщо $\xi^n = z$.

Теорема 1. Кожне ненульове комплексне число $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ має рівно n коренів n -го степеня, які визначають за формулою

$$\xi_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1)$$

Завдання 2. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - 3 + 3i = 0.$$

Розв'язання

Запишемо число $z_1 = 3 - 3i$ у тригонометричній формі.

Маємо $a = 3$, $b = -3$. Тоді $r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$.

Зобразимо комплексне число z_1 на комплексній площині (рис. 3). z_1 знаходиться у четвертій чверті. Знайдемо аргумент комплексного числа z_1

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тобто комплексне число z_1 у тригонометричній формі має вигляд

$$3 - 3i = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$$

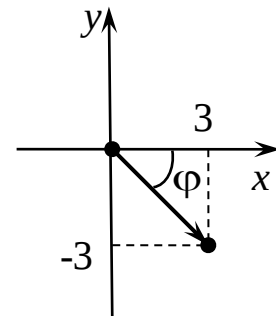


Рис. 3

Три корені рівняння $z^3 = 3 - 3i$ знаходяться за формулою (1) для $n = 3$, $k = 0, 1, 2$.

Якщо $k = 0$, то

$$\xi_0 = \sqrt[6]{18} \left(\cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot 0}{3} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot 0}{3} \right) = \sqrt[6]{18} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right),$$

якщо $k=1$, то

$$\xi_1 = \sqrt[6]{18} \left(\cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot 1}{3} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot 1}{3} \right) = \sqrt[6]{18} \left(\cos \frac{15\pi}{12} + i \sin \frac{15\pi}{12} \right),$$

якщо $k=2$, то

$$\xi_2 = \sqrt[6]{18} \left(\cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot 2}{3} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot 2}{3} \right) = \sqrt[6]{18} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right).$$

Вказівки. Матриці. Визначники і системи лінійних рівнянь

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця (m рядків, n стовпчиків), елементами якої можуть бути дійсні або комплексні числа.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де $a_{ij} \in \mathbf{R} (\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{C}, \dots)$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.

Якщо кількість рядків матриці A дорівнює кількості стовпчиків, тобто $m = n$, то матриця A називається **квадратною матрицею порядку n** . Короткий запис матриці: $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Елементарними перетвореннями першого, другого та третього типу над рядками (стовпчиками) матриці A називаються:

1. Перестановка двох рядків (стовпчиків).
2. Множення деякого рядка (стовпчика) матриці на ненульове число.
3. Додавання до деякого рядка (стовпчика) матриці іншого рядка (стовпчика) помноженого на число.

Дві матриці A і B однакового розміру $m \times n$ називаються **рядково (стовпчиково) еквівалентними**, якщо одна матриця отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень над рядками (стовпчиками). Еквівалентність матриць A і B позначають $A \sim B$. Якщо $A \sim B$, то і $B \sim A$.

Операції над матрицями

1. Сумою матриць $A = (a_{ij})_{m \times n}$ і $B = (b_{ij})_{m \times n}$ однакового розміру називається матриця $C = (c_{ij})_{m \times n}$ така, що

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{і} \quad j = 1, \dots, n.$$

2. Добутком матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на число $\lambda \in \mathbf{R}$ називається матриця $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}$.

3. Добутком матриць $A = (a_{ik})_{m \times s}$ та $B = (b_{kj})_{s \times n}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m \times n}$ така, що

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{і} \quad j = 1, \dots, n.$$

Множення матриць виконують за правилом «**рядок на стовпчик**». Для того щоб отримати елемент c_{ij} матриці $A \cdot B$ потрібно i -й рядок матриці A «накласти» на j -й стовпчик матриці B , відповідні елементи перемножити і додати отримані добутки.

Добуток матриць визначений, якщо кількість стовпчиків s першої матриці дорівнює кількості рядків s другої матриці, інакше добуток матриць є невизначеним.

Множення матриць не є комутативною операцією, тобто, взагалі кажучи, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Добуток квадратних матриць однакового порядку визначений завжди. Проте і для квадратних матриць, взагалі кажучи, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Матриці A і B називаються **комутативними** або **переставними**, якщо $A \cdot B = B \cdot A$. Наприклад, одинична матриця E є комутативною з будь-якою квадратною матрицею відповідного порядку.

Визначники

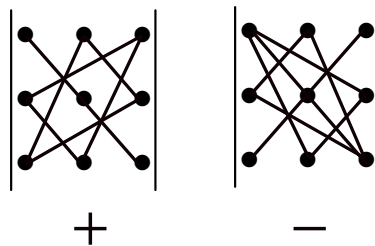
Визначником другого порядку квадратної матриці

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число, що визначається за формулою

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Визначником третього порядку квадратної матриці A порядку три називається число, що визначається за формулою

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$
$$= a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - (a_3 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_3 + a_1 b_3 c_2). \quad (2)$$



Для матриць $A = (a_{ij})_{n \times n}$ четвертого порядку і вище визначник можна обчислити за індукцією за допомогою формули розкладу по i -му рядку

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

або по j -му стовпчику

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}.$$

В останніх рівностях A_{ij} – алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} матриці A , що визначається як $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} – доповнюючий мінор до елемента a_{ij} , тобто визначник порядку $n-1$, складений з елементів вихідної матриці A , з якої викреслений i -тий рядок та j -тий стовпчик.

Зауваження. Визначник третього порядку можна знайти й іншим способом, який полягає у зниженні порядку розкладом за рядком або за стовпчиком. Розклад визначника третього порядку за першим рядком має вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Властивості визначників:

1. У разі транспонування квадратної матриці її визначник не змінюється, тобто $\det A^T = \det A$.

2. Якщо у квадратній матриці A поміняти місцями два рядки (стовпчики), залишивши інші на своїх місцях, то $\det A$ змінить знак на протилежний.

3. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпчика) квадратної матриці A помножити на число λ , то $\det A$ також помножиться на λ .

4. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів одного з її рядків (стовпчиків) додати відповідні елементи другого рядка (стовпчика) помножені на деяке число.

5. Якщо квадратна матриця має два однакові рядки (стовпчики), то її визначник дорівнює нулю.

Завдання 3. Знайти значення многочлена $f(x) = x^2 - 2x + 3$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо многочлен від матриці $f(A) = A^2 - 2A + 3E$, де E – одинична матриця порядку такого ж, як і матриця A .

Знайдемо матрицю $A^2 = A \cdot A$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 9 & 3 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 9 & 3 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 \\ -2 & 9 & 3 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 4 & -10 & -6 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -8 & -9 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Завдання 4. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок. Для обчислення заданого визначника четвертого порядку використаємо метод зниження порядку визначника за допомогою розкладу його за рядком чи стовпчиком. Для спрощення обрахунку визначника за допомогою елементарних перетворень рядків визначника зробимо у першому стовпчику всі елементи нульові, крім одного.

Другий рядок визначника помножимо на три і додамо до першого рядка. Далі другий рядок помножимо на два і додамо до третього рядка. Після цього другий рядок додамо до четвертого рядка.

Отримаємо в першому стовпчику один ненульовий елемент. Визначник розкладемо за першим стовпчиком. Визначник третього порядку обчислимо за формулою (2):

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 9 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 128 + 192 + 189 - 112 - 144 - 288 = -35.$$

Завдання 5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

1) за правилом Крамера; 2) методом Гаусса, 3) матричним методом, або переконатись у її несумісності.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -2; \\ -9x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -1; \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язок.

Вказівки. Система лінійних рівнянь називається:

- 1) **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок;
- 2) **несумісною**, якщо вона не має жодного розв'язку;
- 3) **визначеною**, якщо вона має точно один розв'язок;
- 4) **невизначеною**, якщо вона має безліч розв'язків.

Квадратна система лінійних рівнянь визначена тоді і лише тоді, коли визначник основної матриці системи не дорівнює нулю.

Знайдемо визначник основної матриці запропонованої системи лінійних рівнянь за формулою (2):

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -9 & -5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 6 + (-9) \cdot 4 \cdot 1 -$$

$$-(1 \cdot (-5) \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-9) \cdot 1) =$$

$$= -15 + 24 - 36 - (-30 + 24 - 18) = -27 + 24 = -3 \neq 0.$$

Отже, система лінійних рівнянь визначена.

1) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь методом Крамера.

Визначник $\Delta = \det A = -3$.

Обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, які отримані з основної матриці A заміною відповідно першого, другого та третього стовпчика на стовпчик вільних членів системи лінійних рівнянь.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 15, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -9 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -24,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -9 & -5 & -1 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 9.$$

За формулами Крамера отримуємо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{-3} = -5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-24}{-3} = 8, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{9}{-3} = -3.$$

2) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь методом Гаусса. Запишемо розширену матрицю системи лінійних рівнянь

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -2 \\ -9 & -5 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Метод Гаусса розв'язку систем лінійних рівнянь полягає у зведенні розширеної матриці системи за допомогою елементарних перетворень рядків матриці до «ступінчатої» матриці. У випадку визначеної квадратної системи лінійних рівнянь, як у нашому завданні, основна матриця зведеться до одиничної матриці. При цьому в стовпчику справа від риски отримаємо розв'язок системи лінійних рівнянь.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -2 \\ -9 & -5 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

У першому перетворенні розширеної матриці ми помножили елементи першого рядка на три і додали до відповідних елементів другого рядка, а також помножили елементи першого рядка на (-2) і додали до відповідних елементів третього рядка. Ми отримали нульові елементи матриці під головною діагоналлю.

Далі потрібно зробити нульові елементи над головною діагоналлю. Тому в другому перетворенні розширеної матриці ми додали елементи третього рядка до відповідних елементів першого рядка, а також помножили елементи третього рядка на п'ять і додали до відповідних елементів другого рядка.

У третьому перетворенні розширеної матриці ми помножили елементи другого рядка на (-2) і додали до відповідних елементів першого рядка.

У четвертому перетворенні розширеної матриці ми помножили перший рядок на $\frac{1}{3}$. Таким чином, зліва від риски ми отримали одиничну матрицю.

Випишемо розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = -3.$$

в) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь матричним методом.

Запишемо систему лінійних рівнянь у матричному вигляді $A \cdot x = b$, тобто

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -9 & -5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -9 & -5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Якщо $\det A \neq 0$, то розв'язок системи має вигляд $x = A^{-1} \cdot b$.

У нашому випадку $\det A = -3 \neq 0$. Знайдемо обернену матрицю до матриці A .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ – алгебраїчні доповнення до елементів матриці a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$.

$$\det A = -3.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 8 = -13, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -9 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -(-9 - 12) = 21,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -9 & -5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -36 + 30 = -6,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 4) = 2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (3 - 6) = -3,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(12 - 12) = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 5 = 9, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} = -(6 + 9) = -15,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 18 = 3.$$

$$\text{Отже, } A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 9 \\ 21 & -3 & -15 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 9 \\ 21 & -3 & -15 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 \\ -24 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Звідси $x_1 = -5$, $x_2 = 8$, $x_3 = -3$.

Завдання 6. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ -2x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 + 2x_5 = 0; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Випишемо розширену матрицю однорідної системи лінійних рівнянь та зведемо її за допомогою елементарних перетворень рядків матриці до ступінчатого вигляду.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -10 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 10 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -5 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

З останньої матриці визначаємо, що пов'язаними невідомими системи лінійних рівнянь є x_1 та x_2 , а вільними невідомими – x_3, x_4, x_5 . Кількість пов'язаних невідомих рівна кількості ненульових рядків після зведення матриці до «ступінчатого» виду або що те ж

саме рангу основної матриці системи $\text{rank } A$. Пов'язані невідомі вибирають довільно, але так, щоб вектор-стовпчики, яким вони відповідають, були лінійно незалежними. Вільні невідомі – це невідомі, які можуть приймати довільні дійсні значення. Пов'язані невідомі визначаються через вільні.

Випишемо загальний розв'язок системи лінійних рівнянь за спрощеною матрицею, залишивши пов'язані невідомі x_1, x_2 у лівій частині рівностей, а вільні невідомі x_3, x_4, x_5 – у правій частині.

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 - 7x_4 + 3x_5; \\ x_2 = -7x_3 + 10x_4 - 4x_5; \\ x_3 = c_3, \\ x_4 = c_4, \\ x_5 = c_5, \end{cases} \quad , \text{ де } c_3, c_4, c_5 \in \mathbf{R}.$$

Вказівки. Відомо, що множина всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює лінійний підпростір U арифметичного простору $\mathbf{R}^n$, де n – кількість невідомих системи. Розмірність цього підпростору дорівнює кількості вільних невідомих однорідної системи лінійних рівнянь, тобто $d = \dim U = n - \text{rank } A$. Базис простору U розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь називається *фундаментальною системою розв'язків* (ΦCP). Зазначимо, що лінійний підпростір U ізоморфний лінійному арифметичному простору $\mathbf{R}^d$.

Задана система лінійних однорідних рівнянь має три вільні невідомі x_3, x_4, x_5 . Тому фундаментальна система розв'язків містить три вектори v_1, v_2, v_3 . Оскільки підпростір розв'язків однорідної системи ізоморфний простору $\mathbf{R}^3$, то замість вільних невідомих x_3, x_4, x_5 можна взяти стандартний базис $\{(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)\}$ простору $\mathbf{R}^3$ (або будь-який інший базис $\mathbf{R}^3$ – три лінійно незалежні вектори $\mathbf{R}^3$). Обчисливши відповідні пов'язані невідомі x_1, x_2 через вибрані вільні невідомі, отримаємо базис простору розв'язків

однорідної системи лінійних рівнянь, тобто фундаментальну систему розв'язків:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи, записаний через фундаментальну систему розв'язків, має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}.$$

Завдання 7. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (7; -3; 2)$, $\vec{a}_2 = (2; -4; 5)$, $\vec{a}_3 = (-9; -1; 4)$ утворюють базис лінійного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (5; 5; -7)$ у цьому базисі.

Розв'язок. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис лінійного простору $\mathbf{R}^3$, розмірність якого дорівнює три, тоді і тільки тоді, коли вони лінійно незалежні. Для цього достатньо показати, що $\text{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = 3$. Знайдемо визначник матриці, стовпчиками якої є вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-9) \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(-16 + 5) - 2(-12 + 2) - 9(-15 + 8) = 6 \neq 0$$

Отже, $\text{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = 3$ і система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворює базис простору $\mathbf{R}^3$.

Оскільки вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbf{R}^3$, то існують єдині коефіцієнти $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ такі, що

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b}. \quad (4)$$

Коефіцієнти x_1, x_2, x_3 називаються координатами вектора $\vec{b}$ у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Щоб знайти x_1, x_2, x_3 запишемо рівність (4) у векторному вигляді

$$x_1 \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Або } \begin{pmatrix} 7x_1 + 2x_2 - 9x_3 \\ -3x_1 - 4x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 5, \\ -3x_1 - 4x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -7. \end{cases}$$

Отже, задача знаходження координат вектора $\vec{b}$ у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ звелась до знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь методом Крамера. Визначники $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ обчислимо за формулою (3):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-9) \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(-16 + 5) - 2(-12 + 2) - 9(-15 + 8) = 6,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -9 \\ 5 & -4 & -1 \\ -7 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} + (-9) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5(-16 + 5) - 2(20 - 7) - 9(25 - 28) = -54,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & -9 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -7 & 4 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-9) \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(20 - 7) - 5(-12 + 2) - 9(21 - 10) = 42,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ -3 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(28 - 25) - 2(21 - 10) + 5(-15 + 8) = -36.$$

$$\text{Отримуємо: } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -9, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -6.$$

Отже, координати вектора $\vec{b}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ мають вигляд $\vec{b} = (-9; 7; -6)$.

Векторна алгебра. Вказівки

Нехай задано вектори $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ простору $\mathbf{R}^3$.

Сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – це вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

Добуток вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \in \mathbf{R}$ – це вектор

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1).$$

Модуль або довжина вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ визначається формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \quad (5)$$

Скалярним добутком ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (6)$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Тоді кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається формулою

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (7)$$

Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ визначається формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (8)$$

Якщо початок вектора знаходиться у точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець у точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\vec{AB}$ має координати

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Векторним добутком ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ такий, що

$$1) \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \text{ і } \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b};$$

2) трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ права (якщо дивитись з кінця вектора $\vec{a} \times \vec{b}$, то обертання від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ здійснюється проти годинникової стрілки);

$$3) |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi, \text{ де } \varphi - \text{кут між векторами } \vec{a} \text{ і } \vec{b}.$$

Модуль векторного добутку $|\vec{a} \times \vec{b}|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $S_{\text{трик}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

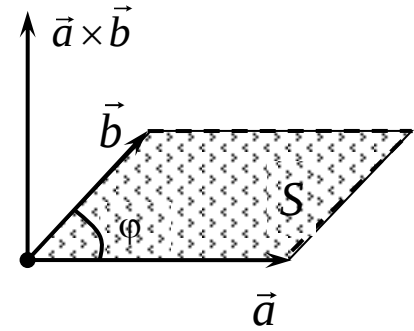


Рис. 4

Векторний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ визначається формулою

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(y_1 z_2 - y_2 z_1) + \vec{j}(x_2 z_1 - x_1 z_2) + \vec{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned}$$

Мішаним добутком $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$ називається скалярний добуток векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та вектора $\vec{c}$, тобто

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Справедлива рівність

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Мішаний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$ визначається формулою

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Модуль мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Якщо мішаний добуток дорівнює нулю, вектори компланарні і паралелепіпед не утворюється.

Завдання 8. Задано вектори

$$\vec{a} = (-3; 5; 2), \vec{b} = (-3; 7; 3), \vec{c} = (3; 4; 1).$$

Знайдіть:

- а) координати та модуль вектора $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$;
- б) скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
- в) кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- г) векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ та площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- д) мішаний добуток $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ та об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } \vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b} &= 4(-3; 5; 2) - 3(-3; 7; 3) = \\ &= (-12; 20; 8) - (-9; 21; 9) = (-3; -1; -1). \end{aligned}$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$$

$$\text{б) } \vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = -15 + 35 + 6 = 26.$$

$$\text{в) } \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{26}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 2^2}} = \frac{26}{\sqrt{38}};$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= (15 - 14)\vec{i} - (-9 + 6)\vec{j} + (-21 + 15)\vec{k} = \vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}. \end{aligned}$$

$$S_{\text{нар}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1 + 9 + 36} = \sqrt{41}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -3 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= -3(7 - 12) - 5(-3 - 9) + 2(-12 - 21) = 15 + 60 - 66 = 9. \end{aligned}$$

$$V_{\text{паралелепіпеда}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = 9 \text{ куб. од.}$$

Завдання 9. Дано вершини трикутника ABC : $A(5; -4)$, $B(9; -1)$, $C(-1; -2)$ (рис. 4). Знайдіть: а) рівняння сторін трикутника; б) косинус кута при вершині A ; с) рівняння медіани та висоти, проведеної з вершини B .

Розв'язання.

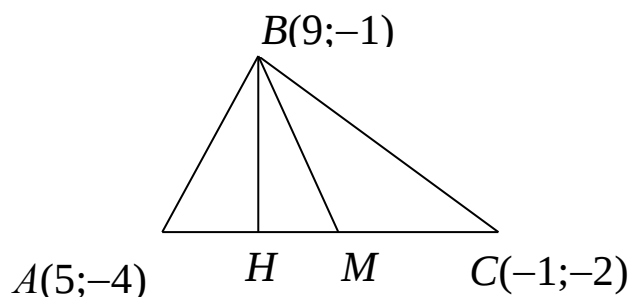


Рис. 4

а) Щоб записати рівняння сторони AB , запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки A та B .

$$AB: \frac{x-5}{9-5} = \frac{y-(-4)}{-1-(-4)}; \quad \frac{x-5}{4} = \frac{y+4}{3}; \quad 3 \cdot (x-5) = 4 \cdot (y+4).$$

Звідси маємо рівняння прямої AB : $3x - 4y - 31 = 0$.

Аналогічно знайдемо рівняння прямих, що проходять через сторони BC та AC .

$$BC: \frac{x-(-1)}{9-(-1)} = \frac{y-(-2)}{-1-(-2)}; \quad \frac{x+1}{10} = \frac{y+2}{1}; \quad x - 10y - 19 = 0.$$

$$AC: \frac{x-(-1)}{5-(-1)} = \frac{y-(-2)}{-4-(-2)}; \quad \frac{x+1}{6} = \frac{y+2}{-2}; \quad x + 3y + 7 = 0.$$

b) Косинус кута при вершині A рівний косинусу кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (9-5; -1-(-4)) = (4; 3), \quad \overrightarrow{AC} = (-1-5; -2-(-4)) = (-6; 2).$$

Тоді

$$\cos \angle A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{4 \cdot (-6) + 3 \cdot 2}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 2^2}} = \frac{-18}{10\sqrt{10}} = \frac{-9}{5\sqrt{10}}.$$

с) Для того, щоб знайти рівняння прямої, що проходить через медіану BM , знайдемо координати точки M , як середини відрізка AC .

$$M \left(\frac{5+(-1)}{2}; \frac{-4+(-2)}{2} \right) \text{ або } M(2; -3).$$

Запишемо рівняння медіани BM , як прямої, що проходить через дві точки B та M .

$$BM: \frac{x-2}{9-2} = \frac{y-(-3)}{-1-3}; \quad \frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{-4}; \quad 4x + 7y + 13 = 0.$$

Для того, щоб записати рівняння висоти BH , знайдемо вектор нормалі (довільний перпендикулярний вектор до BH). Таким вектором буде вектор $\overrightarrow{AC} = (-6; 2)$, оскільки висота BH перпендикулярна до сторони AC трикутника ABC . Запишемо рівняння прямої BH , як прямої, що проходить через точку B перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{AC} = (-6; 2)$.

$$BH: (-6) \cdot (x-9) + 2 \cdot (y+1) = 0; \quad 3x - y - 28 = 0.$$

Завдання 10. Дано координати вершин тетраедра: $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$, $D(-4;6;-3)$ (рис. 5). Знайти:

- рівняння та довжину ребра AB ;
- рівняння площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
- об'єм тетраедра $ABCD$;
- проекцію H вершини D на площину ABC .

Розв'язок.

а) Запишемо рівняння прямої, що проходить через ребро AB , як рівняння прямої, що проходить через дві точки A і B

$$AB: \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{2-3} = \frac{z-6}{1-6};$$

$$AB: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-6}{-5}.$$

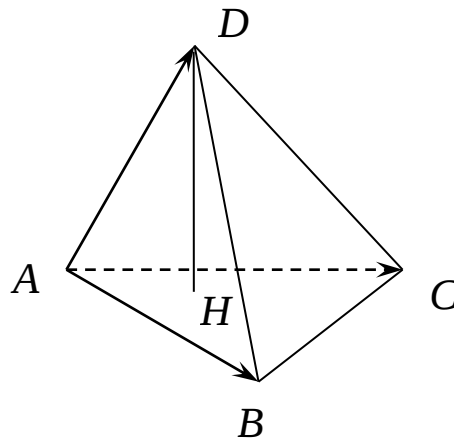


Рис. 5

Довжину ребра AB знайдемо за формулою відстані між точками:

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-3)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

б) Рівняння площини ABC запишемо, як рівняння площини, що проходить через три точки A , B , C

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 2-1 & 2-3 & 1-6 \\ -1-1 & 0-3 & 1-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1) \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} - (y-3) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + (z-6) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-10(x-1) + 15(y-3) - 5(z-6) = 0.$$

Звідси маємо рівняння площини ABC у загальному вигляді

$$2x - 3y + z + 1 = 0.$$

Зауважимо, що вектор нормалі до площини ABC має вигляд $\vec{N} = (2; -3; 1)$.

с) Площа грані ABC – це площа трикутника $\triangle ABC$. Площу $\triangle ABC$ знайдемо за формулою

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Запишемо координати векторів $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; -3; -5)$. Векторний добуток $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ знайдемо за формулою:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= -10\vec{i} + 15\vec{j} - 5\vec{k}. \end{aligned}$$

$$\text{Звідси } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(-10)^2 + 15^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{14}}{2} \text{ (кв. од).}$$

d) Кут нахилу ребра AD до площини ABC – це кут між прямою AD та площиною. Напрямний вектор прямої AD – вектор $\overrightarrow{AD} = (-5; 3; -9)$. Вектор нормалі до площини ABC дорівнює $\vec{N} = (2; -3; 1)$. Кут між прямою та площиною знайдемо за формулою

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\vec{N}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-5 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + (-9) \cdot (-1)}{\sqrt{4+9+1} \cdot \sqrt{25+9+81}} = \frac{28}{\sqrt{115} \sqrt{14}}.$$

e) Щоб записати рівняння прямої, що проходить через висоту DH , використаємо формулу запису рівняння прямої через точку $D(-4; 6; -3)$ та напрямний вектор до прямої. Напрямним вектором до прямої DH є вектор нормалі $\vec{N} = (2; -3; 1)$ до площини ABC , оскільки пряма DH перпендикулярна до площини ABC .

$$DH: \frac{x - (-4)}{2} = \frac{y - 6}{-3} = \frac{z - (-3)}{1}; \quad \frac{x + 4}{2} = \frac{y - 6}{-3} = \frac{z + 3}{1}.$$

Довжину d висоти DH знайдемо за формулою відстані від точки D до площини ABC ($2x - 3y + z + 1 = 0$).

$$d = \frac{|2 \cdot (-4) - 3 \cdot 6 + 1 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}.$$

f) Об'єм тетраедра $ABCD$ обчислимо за формулою:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \frac{80}{6} = \frac{40}{3} \text{ (куб. од.)}$$

g) Для того, щоб знайти проекцію H вершини D на площину ABC , знайдемо точку перетину прямої DH і площини ABC . Для цього рівняння прямої $DH: \frac{x + 4}{2} = \frac{y - 6}{-3} = \frac{z + 3}{1}$ запишемо в параметричному вигляді

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z+3}{1} = t, \begin{cases} x+4=2t, \\ y-6=-3t, \\ z+3=t. \end{cases} \begin{cases} x=-4+2t, \\ y=6-3t, \\ z=-3+t. \end{cases} \quad (10)$$

Підставимо x, y, z з рівнянь (10) в рівняння площини $ABC: 2x - 3y + z + 1 = 0$ та знайдемо значення параметра t , за якого точка H належить площині ABC і прямій DH .

$$2(-4+2t) - 3(6-3t) - 3 + t + 1 = 0, \quad 14t - 28 = 0.$$

Звідси $t = 2$. Підставляючи це значення параметра t у рівняння (10), отримаємо координати точки H :

$$x = -4 + 2 \cdot 2 = 0, \quad y = 6 - 3 \cdot 2 = 0, \quad z = -3 + 2 = -1,$$

або $H(0;0;-1)$.

Завдання 11. Обчислити границю функцій.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^4 + x^3 + 9}{9x^4 - 5x^2 - 2}.$$

Безпосередня підстановка у цей вираз граничного значення аргументу приводить до невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$. Перетворимо вираз

$$\frac{18x^4 + x^3 + 9}{9x^4 - 5x^2 - 2}, \text{ поділивши чисельник і знаменник на найвищу степінь}$$

аргумента в знаменнику, тобто на x^4 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(18x^4 + x^3 + 9) \cdot \frac{1}{x^4}}{(9x^4 - 5x^2 - 2) \cdot \frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18 + \frac{1}{x} + \frac{9}{x^4}}{9 - \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^4}} = \frac{18}{9} = 2.$$

Ми врахували, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0$, коли $k > 0$.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{3x-3}}.$$

Безпосередня підстановка у цей вираз граничного значення аргументу приводить до невизначеності виду $\frac{0}{0}$. Щоб позбутися цієї невизначеності, помножимо чисельник і знаменник на вираз, який

буде спряженим до знаменника, а саме на $(\sqrt{3x} + 3)$ (під спряженістю розуміємо утворення формули різниці квадратів $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$).

Дістанемо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{3x}-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{(\sqrt{3x}-3)(\sqrt{3x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{(\sqrt{3x}-3)(\sqrt{3x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{(3x-9)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{3(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{3x}+3)}{3} = 2.\end{aligned}$$

Вказівки. Границі функцій

Границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ називають **першою важливою**

границею. Наслідки з першої важливої границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = k, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin kx}{x} = k,$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} kx}{x} = k, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ або $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ називають

другою важливою границею. Наслідки з другої важливої границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k.$$

Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ ($\alpha(x) \rightarrow 0$, $\beta(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow x_0$) називають **еквівалентними**. Позначення $\alpha(x) \sim \beta(x)$,

якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

При обчисленні границь функцій часто використовують властивість нескінченно малих функцій: якщо $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, коли $x \rightarrow x_0$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \quad (11)$$

З першою та другою «важливими» границями пов'язані такі еквівалентності:

$$\begin{aligned} x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x), \\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad a^x - 1 \sim x \ln a, \quad (1+x)^k - 1 \sim kx, \\ \log_a(1+x) \sim x \log_a, \quad \text{якщо } x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Розв'язок.

$$\text{с) } \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 1) \operatorname{ctg} 3x.$$

Використовуючи властивість $\operatorname{ctg} 3x = \frac{1}{\operatorname{tg} 3x}$, запишемо умову

$$\text{завдання у вигляді } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)}{\operatorname{tg} 3x}.$$

Безпосередня підстановка у цей вираз граничного значення аргументу приводить до невизначеності виду $\frac{0}{0}$. Запропоноване завдання можна розв'язати двома способами.

1 спосіб. Використовуючи наслідки першої та другої важливих границь, а саме границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ та $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)}{x} = 1$, та властивість границь, за якою $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ (вважається, що $f(x), g(x)$ мають скінченні границі в точці a), отримуємо вирази:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{2}{3}.$$

2 спосіб. Замінімо чисельник і знаменник за властивістю (11) відповідними еквівалентними функціями з (12):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)}{\operatorname{tg} 3x} = \left[\begin{array}{l} e^{2x} - 1 \sim 2x, \quad x \rightarrow 0 \\ \operatorname{tg} 3x \sim 3x, \quad x \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-7}{2x+3} \right)^{7x-1}.$$

Безпосередня підстановка у цей вираз граничного значення аргументу приводить до невизначеності виду 1^∞ . Для розкриття такої невизначеності слід застосувати другу важливу границю

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$, а також властивість границі показниково-степеневі функції:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}.$$

Виконаємо тотожні перетворення:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-7}{2x+3} \right)^{7x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3-3-7}{2x+3} \right)^{7x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-10}{2x+3} \right)^{7x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x+3}{-10}} \right)^{7x-1} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x+3}{-10}} \right)^{\frac{2x+3}{-10}} \right]^{\frac{(7x-1)(-10)}{2x+3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-70x+10}{2x+3} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-70x+10}{2x+3}} = e^{-35}. \end{aligned}$$

Вказівки. Похідна функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(a; b)$. Візьмемо будь-яке значення $x \in (a; b)$ і надамо йому приросту Δx . Різницю $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ називають **приростом функції** в точці x .

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називають скінченну границю (якщо вона існує) відношення приросту функції

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ до приросту аргументу Δx , коли Δx прямує до нуля, тобто

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Функцію, яка має скінченну похідну в точці x , називають **диференційовною** в цій точці.

Позначення похідної: $y'(x)$, $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. $(C)' = 0$,	11. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbf{R}$,	12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,	13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
4. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$,	14. $(\arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$,
5. $(e^x)' = e^x$,	15. $(\text{arcctgx})' = -\frac{1}{1+x^2}$,
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$,	16. $(shx)' = chx$,
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,	17. $(chx)' = shx$,
8. $(\sin x)' = \cos x$,	18. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$,
9. $(\cos x)' = -\sin x$,	19. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$.
10. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,	

$$\text{Функції } shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad thx = \frac{shx}{chx}, \quad cthx = \frac{chx}{shx}$$

називаються гіперболічними функціями.

Основні правила диференціювання

Нехай $u(x), v(x)$ – диференційовні в точці x функції, C – довільна стала.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;	3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
2. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$;	4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v \neq 0).$

Похідна складеної функції

Якщо функція $u = g(x)$ диференційовна в точці x , а функція $y = f(u)$ диференційовна в точці $u = g(x)$, то складена функція $y = f(g(x))$ диференційовна в точці x , причому

$$y' = f'(u) \cdot g'(x) \text{ або } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Завдання 12. Знайти похідні функцій.

a) $y = 14x^6 + \arccos 8x \cdot \ln 7x.$

Застосуємо формулу для знаходження похідної від добутку двох диференційованих в точці x функцій $u(x)$ та $v(x)$, а саме:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x). \quad (13)$$

$$\begin{aligned} y' &= 14 \cdot 6x^5 + (\arccos 8x)' \ln 7x + \arccos 8x (\ln 7x)' = \\ &= 84x^5 + \left(-\frac{8}{\sqrt{1-64x^2}}\right) \cdot \ln 7x + \arccos 8x \cdot \frac{7}{7x} = \\ &= 84x^5 - \frac{8 \ln 7x}{\sqrt{1-64x^2}} + \frac{1}{x} \cdot \arccos 8x. \end{aligned}$$

b) $y = \sin^7(\sin 7x).$

У запропонованому завданні потрібно обчислити похідну від складеної функції. Нехай $y = f(\varphi(x))$ складена функція, тобто

$y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. Тоді, якщо для відповідних значень x та u існують похідні $f'(u)$ та $u' = \varphi'(x)$, то існує похідна функції y по x та виконується рівність

$$y' = f'(u) \cdot u'(x) \quad (y'_x = y'_u \cdot u'_x). \quad (14)$$

Таким чином, отримуємо:

$$\begin{aligned} y' &= 7 \sin^6(\sin 7x) \cdot \cos(\sin 7x) \cdot \cos 7x \cdot 7 = \\ &= 49 \cdot \sin^6(\sin 7x) \cdot \cos(\sin 7x) \cdot \cos 7x. \end{aligned}$$

с) $y = \frac{\cos^2 5x}{2x - 5}.$

У запропонованому завданні потрібно обчислити похідну від дробової функції. Застосуємо формулу похідної від дробової функції двох диференційованих в точці x функцій $u(x), v(x)$, $v(x) \neq 0$, а саме:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}. \quad (15)$$

Таким чином, отримуємо:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos^2 5x)'(2x - 5) - (2x - 5)' \cos^2 5x}{(2x - 5)^2} = \\ &= \frac{2 \cos 5x \cdot (-\sin 5x) \cdot 5 \cdot (2x - 5) - 2 \cos^2 5x}{(2x - 5)^2} = \\ &= \frac{-10 \cos 5x \sin 5x (2x - 5) - 2 \cos^2 5x}{(2x - 5)^2} = \frac{-5 \sin 10x \cdot (2x - 5) - 2 \cos^2 5x}{(2x - 5)^2}. \end{aligned}$$

д) $y = (\operatorname{arctg} 3x)^{\sqrt{x}}.$

У запропонованому завданні функція y є показниково-степенною функцією. Для обчислення похідної такої функції спочатку треба прологарифмувати обидві частини виразу, а потім застосувати формулу для знаходження похідної добутку функцій і похідної складеної функції.

$$(\ln y) = \ln(\operatorname{arctg} 3x)^{\sqrt{x}};$$

$$\ln y = \sqrt{x} \cdot \ln \operatorname{arctg} 3x; (\ln y)' = (\sqrt{x} \cdot \ln \operatorname{arctg} 3x)';$$

$$\frac{y'}{y} = (\sqrt{x})' \cdot (\ln \operatorname{arctg} 3x) + \sqrt{x} (\ln \operatorname{arctg} 3x)' =$$

$$= \frac{\ln \operatorname{arctg} 3x}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} 3x \cdot (1+9x^2)};$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{\ln \operatorname{arctg} 3x}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} 3x \cdot (1+9x^2)} \right);$$

$$y' = (\operatorname{arctg} 3x)^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln \operatorname{arctg} 3x}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{\operatorname{arctg} 3x \cdot (1+9x^2)} \right).$$

Завдання 13. Знайти границі функцій за правилом Лопіталю.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}, \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$$

Вказівки. При розкритті невизначеностей виду $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

використовують правило Лопіталю, яке полягає в тому, що границя відношення двох функцій дорівнює границі відношення похідних у випадку їх існування.

Правило Лопіталю. Нехай функції $f(x)$, $g(x)$:

а) нескінченно малі, або нескінченно великі, коли $x \rightarrow a$,

б) диференційовані в околі точки $x = a$ за винятком можливо самої точки a ,

в) $g'(x) \neq 0$ в околі точки $x = a$, за винятком можливо самої точки $x = a$,

г) існує скінченна або нескінченна границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Тоді границя відношення функцій $f(x)$, $g(x)$ дорівнює границі відношення їх похідних, тобто

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Це правило справедливе і для випадку, коли $x \rightarrow \infty$.

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2 \sin 2x} = \\ &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(2 \sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{4 \cos 2x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sin 5\pi x)'}{(\sin 2\pi x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5\pi \cos 5\pi x}{2\pi \cos 2\pi x} = -\frac{5}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \sin 2x)'}{(\ln \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin 2x} 2 \cos 2x}{\frac{1}{\sin x} \cos x} = \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \cos kx = 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{\sin 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \sin x)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x}{2 \cos 2x} = 1. \end{aligned}$$

Завдання 14.

а) Провести повне дослідження функції $y = x^4 - 4x^2 + 3$ та побудувати її графік.

Розв'язок.

1. *Область визначення функції.* Функція визначена всюди на числовій осі $(-\infty, \infty)$.

2. *Парність, непарність функції.* Функція парна, якщо $f(-x) = f(x)$ і непарна, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Для заданої функції

$$y(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 + 3 = x^4 - 4x^2 + 3 = y(x).$$

Тому функція $y = x^4 - 4x^2 + 3$ є парною. Графік функції буде симетричним відносно осі Oy .

3. *Періодичність функції.* Функція періодична, якщо $y(x) = y(x + T)$, $T > 0$. Задана функція неперіодична.

4. *Нулі функції.* Коли $x = 0$, отримуємо $y = 3$. Отже, вісь Oy графік функції перетинає в точці $y = 3$.

Коли $y = 0$, потрібно розв'язати рівняння $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$. Це бікватратне рівняння. Зробимо заміну $x^2 = t$ і отримаємо квадратне рівняння $t^2 - 4t + 3 = 0$. За теоремою Вієта знаходимо корені $t_1 = 1$, $t_2 = 3$. Звідси корені рівняння $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ будуть мати вигляд

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3}. \quad (16)$$

Отже, вісь Ox графік функції перетинає в точках (16).

5. *Інтервали монотонності. Точки локального екстремуму.*

Знайдемо похідну заданої функції $y = x^4 - 4x^2 + 3$ та прирівняємо її до нуля, щоб знайти критичні точки

$$y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0.$$

Звідси маємо корені рівняння $x = 0$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, які є критичними точками заданої функції.

Далі знайдемо знак похідної $y' = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ на кожному з інтервалів $(-\infty; -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; 0)$, $(0; \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; +\infty)$. Для цього використаємо відомий з курсу шкільної математики метод інтервалів (рис. 6). Тобто візьмемо довільні числові значення x_i з інтервалів і знайдемо $y'(x_i) > 0$ чи $y'(x_i) < 0$. Такий знак матиме похідна на відповідному інтервалі. Обчислимо:

$$y'(-2) = -16 < 0, y'(-1) = 4 > 0, y'(1) = -4 < 0, y'(2) = 16 > 0.$$

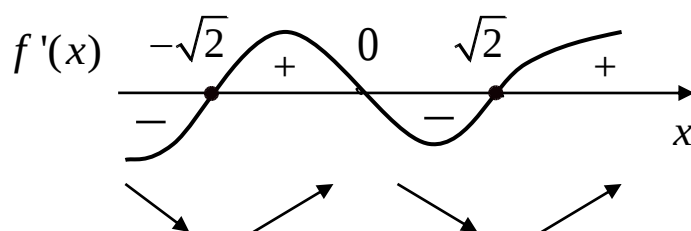


Рис. 6

Отже, функція зростає, якщо $x \in (-\sqrt{2}; 0) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$. Функція спадає, якщо $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (0; \sqrt{2})$.

За теоремою про достатні умови локального екстремуму маємо, що $x_1 = -\sqrt{2}$ та $x_2 = \sqrt{2}$ є точками локального мінімуму функції, а точка $x_3 = 0$ є точкою локального максимуму функції.

Локальний мінімум функції в точках $x_1 = -\sqrt{2}$ та $x_2 = \sqrt{2}$ відповідно буде дорівнювати:

$$y_{\min 1} = y(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 4(-\sqrt{2})^2 + 3 = -1;$$

$$y_{\min 2} = y(\sqrt{2}) = -1.$$

Локальний максимум функції в точці $x_3 = 0$ дорівнює

$$y_{\max} = y(0) = 3.$$

6. *Інтервали випуклості вгору, вниз та точки перегину.*

Знайдемо другу похідну функції $y = x^4 - 4x^2 + 3$ та прирівняємо її до нуля, щоб знайти точки підозрілі на перегин.

$$y'' = (4x^3 - 8x)' = 12x^2 - 8 = 12(x^2 - \frac{2}{3}) = 12(x - \sqrt{\frac{2}{3}})(x + \sqrt{\frac{2}{3}}) = 0.$$

Звідси знаходимо $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ – точки підозрілі на перегин.

Знайдемо знак другої похідної на інтервалах $(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}})$, $(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}})$, $(\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty)$ (рис. 7). Отримуємо:

$$y''(-1) = 4 > 0, \quad y''(0) = -8 < 0, \quad y''(1) > 0.$$

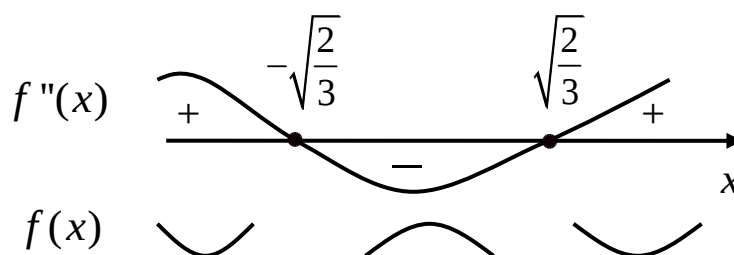


Рис. 7

Отже, задана функція випукла вниз на інтервалах $(-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}})$, $(\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty)$. Функція випукла вгору на інтервалі $(-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}})$. Точки $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -0,8$, $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,8$ є точками перегину графіка функції.

6. Враховуючи зроблені вище дослідження, побудуємо графік функції.

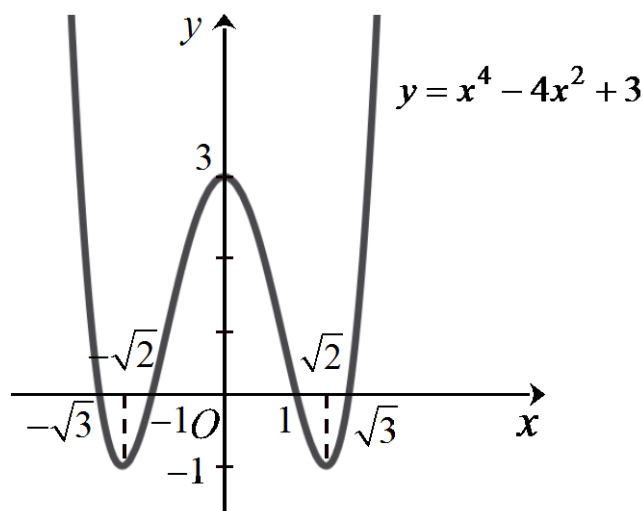


Рис. 8

б) Провести повне дослідження функції $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ та побудувати її графік.

1. Область визначення функції.

Функція визначена всюди на числовій осі, крім точок $x = \pm 1$. Тобто $x \in (-\infty, -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Парність, непарність функції. Функція парна, якщо $f(-x) = f(x)$ і непарна, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Для заданої функції

$$y(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -y(x).$$

Отже, функція $y(x)$ є непарною. Графік функції буде симетричним відносно точки $O(0;0)$.

3. *Періодичність функції.* Функція періодична, якщо $y(x) = y(x + T)$, $T > 0$. Задана функція неперіодична.

4. *Нулі функції.* Коли $x = 0$, отримуємо $y = 0$. Таким чином, графік функції проходить через початок прямокутної декартової системи координат – точку $O(0;0)$.

5. *Інтервали монотонності. Точки локального екстремуму.*

Знайдемо похідну функції $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ та прирівняємо її до нуля, щоб знайти критичні точки та інтервали монотонності.

$$y' = \frac{(x^2 - 1) - (2x)x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0.$$

Отже, $y' < 0$ для всіх значень x з області визначення досліджуваної функції. Звідси маємо, що функція спадає на всій області визначення $x \in (-\infty, -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

6. *Інтервали випуклості вгору, вниз та точки перегину.*

Знайдемо другу похідну функції $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ та прирівняємо її до нуля, щоб знайти точки підозрілі на перегин та інтервали випуклості вгору та вниз.

$$\begin{aligned} y'' = (y')' &= \left(-\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \right)' = -\frac{2x(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= -\frac{(x^2 - 1)(2x(x^2 - 1) - 4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} = -\frac{2x^3 - 2x - 4x^3 - 4x}{(x^2 - 1)^3} = \\ &= -\frac{-2x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0. \end{aligned}$$

Звідси $x = 0$ – точка підозріла на перегин.

Позначимо на дійсній осі точку $x = 0$, в якій друга похідна y'' дорівнює нулю та точки, в яких y'' не існує. Знайдемо знак другої похідної на кожному з отриманих інтервалів (рис. 9).

Отримуємо: $y''(-10) < 0$, $y''(-0,5) > 0$, $y''(0,5) < 0$, $y''(10) > 0$.

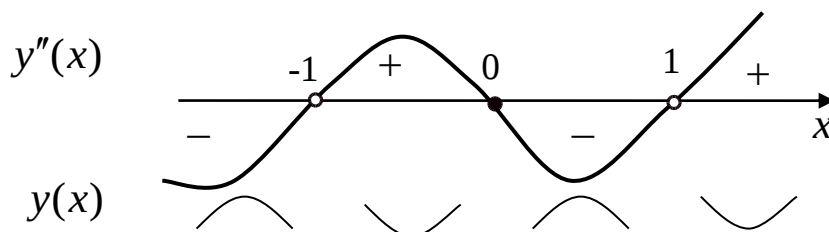


Рис. 9

На інтервалах $(-\infty; -1)$ та $(0; 1)$ – функція випукла вгору. На інтервалах $(-1; 0)$ та $(1; +\infty)$ – функція випукла вниз. Точка $x = 0$ є точкою перегину графіка функції.

6. Асимптоти графіка функції.

Знайдемо горизонтальні асимптоти $y = b$ графіка функції.

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Звідси маємо, що $y = 0$ – горизонтальна асимптота.

Знайдемо вертикальні асимптоти $x = a$ графіка функції. Їх зазвичай шукають у точках, де функція невизначена. Тобто в нашому випадку в точках $x = \pm 1$.

Знаходимо, що $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{x}{x^2 - 1} = \infty$. Це означає, що $x = \pm 1$ – вертикальні асимптоти.

Знайдемо поведінку кривої графіка функції вздовж асимптот.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = +\infty.$$

Знайдемо похилу асимптоту $y = kx + b$ графіка функції, де

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ а } b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Отримуємо:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x^2 - 1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x^2 - 1)} = 0.$$

Оскільки $k = 0$, то похилих асимптот функція немає.

7. Враховуючи зроблені вище дослідження побудуємо графік функції (рис. 10).

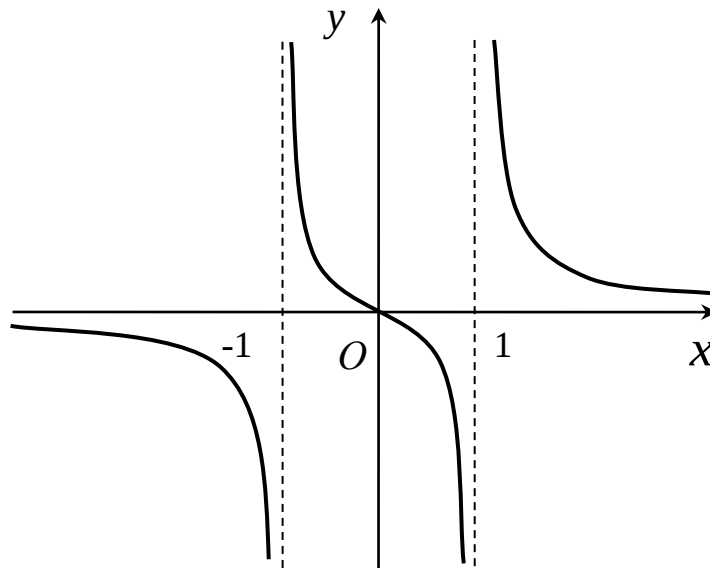


Рис. 10

ЗАВДАННЯ ДО ВАРІАНТІВ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №1

Частина 1

1. Знайдіть алгебраїчну форму комплексних чисел.
2. Знайдіть всі комплексні корені рівняння.
3. Знайдіть значення многочлена від матриці.
4. Обчисліть визначник четвертого порядку.
5. а) Розв'яжіть систему лінійних рівнянь: 1) за правилом Крамера; 2) методом Гаусса, 3) матричним методом, або переконайтесь у її несумісності.
6. Знайдіть фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь.
7. Доведіть, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис лінійного простору $\mathbf{R}^3$, і знайдіть координати вектора $\vec{b}$ в цьому базисі.
8. Знайдіть:
 - а) координати та модуль вектора $\vec{d}$;
 - б) скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$;
 - в) кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
 - г) векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ та площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
 - д) мішаний добуток $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ та об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
9. Дано вершини трикутника ABC . Знайдіть:
 - а) рівняння сторін трикутника;
 - б) косинус кута при вершині A ;
 - в) рівняння медіани та висоти, проведеної з вершини B ;
 - г) координати точки перетину медіан.

10. Дано координати вершин тетраедра $ABCD$. Знайдіть:
- a) рівняння та довжину ребра AB ;
 - b) рівняння площини ABC ;
 - c) площу грані ABC ;
 - d) кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
 - e) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC ;
 - f) об'єм тетраедра $ABCD$;
 - g) проекцію H вершини D на площину ABC .

Частина 2

- 11. Обчисліть границі функцій.
- 12. Знайдіть похідну y' функцій.
- 13. Знайдіть границі функцій за правилами Лопіталя.
- 14. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

Варіант №1

Частина 1	
1. а) $\frac{(1-2i)(3+i)}{2+i} - i(5+3i)$, б) $(-\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^{42}$.	2. $z^3 - 2 + 2i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.	4. $\begin{vmatrix} -2 & 6 & -3 & -6 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 - 14x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (1; 2; -1)$, $\vec{a}_2 = (2; 0; -3)$, $\vec{a}_3 = (-1; 3; 2)$, $\vec{b} = (3, 12, -2)$.	
8. $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (2; 0; -3)$, $\vec{c} = (-1; 3; 2)$, $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(5; -4)$, $B(8; 8)$, $C(13; 0)$.	
10. Тетраєдр $ABCD$: $A(-3; 2; 1)$, $B(0; -3; -1)$, $C(2; 0; -2)$, $D(2; -1; 5)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^2 - 25}{8x^2 - 6x + 8}$, б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{3}}{x+2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - 1}{x^2 - 2x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+2} \right)^{x-4}$.	
12. а) $y = x^4 - \sqrt{x} + \sin 3x \cdot 2^x$, б) $y = (\ln^2 8x + \sqrt{x})^3$, в) $y = \frac{\cos 2x}{\sqrt{3x-1}} + \sin^2 x$, г) $y = (\operatorname{tg} 3x)^{2x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3x)}{2^x}$.	
14. а) $y = x^3 - 3x^2 + 2$; б) $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.	

Варіант №2

Частина 1	
1. а) $\frac{2-7i}{3-i} - (5+3i)(1-i)$, б) $(3\sqrt{3}-3i)^{36}$.	2. $2z^3 - \sqrt{15} + \sqrt{5}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 2x + 5$.	4. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -11. \end{cases}$	6. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 - 10x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (1; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; -3)$, $\vec{a}_3 = (2; 0; -4)$, $\vec{b} = (6; 1; -4)$.	
8. $\vec{a} = (1; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 2; -3)$, $\vec{c} = (2; 0; -4)$, $\vec{d} = 2\vec{b} + 2\vec{c} - \vec{a}$.	
9. $ABC: A(-1; 2), B(2; 14), C(9; 6)$.	
10. Тетраедр $ABCD: A(1; -2; 3), B(2; 0; 5), C(-1; 3; 4), D(-2; 1; -2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+7)^2 - 31}{5x^2 + 8x - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{\sin 3x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-10}{3x+2} \right)^{x-3}$.	
12. а) $y = 3x^6 + 5^x + \operatorname{tg} 8x \cdot \ln x$, б) $y = \arccos \sqrt{1 - e^{2x}}$, в) $y = \frac{1 + \sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$, г) $y = (1 - \ln x)^{4x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3}$.	
14. а) $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$; б) $y = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2$.	

Варіант №3

Частина 1	
1. а) $\frac{4+i}{6-2i} + (2-i)^2$, б) $(-2+2i)^{44}$.	2. $z^3 + 5 + 5\sqrt{3}i = 0$
3. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$.	4. $\begin{vmatrix} 6 & 6 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 = -10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (2; -1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; -2)$, $\vec{a}_3 = (-1; 3; -5)$, $\vec{b} = (0; 4; -3)$.	
8. $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (-1; 1; -2)$, $\vec{c} = (-1; 3; -5)$, $\vec{d} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(3; -3)$, $B(6; 9)$, $C(11; 1)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 3; 5)$, $C(2; 0; 4)$, $D(3; -1; 2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 3x - 35}{30x^3 - 9x^2 + 7}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^3 - 1}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 4x}}{\operatorname{tg} x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+1}{6x} \right)^{2x-3}$.	
12. а) $y = 4x^{10} - \sqrt[3]{x} + \operatorname{arctg} 7x \cdot 3^x$, б) $y = \cos^2(x\sqrt{1-x})$, в) $y = \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\arccos^2 x}$, г) $y = (\cos x)^{x^3}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(3x^2 + e^x)}{x^2}$.	
14. а) $y = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$; б) $y = \frac{4}{3+2x-x^2}$.	

Варіант №4

Частина 1	
1. а) $\frac{5-4i}{3+i} + (2-i)(1+i)$, б) $(2-2i)^{84}$.	2. $z^3 + 27i = 0$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 6x - 4$.	4. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$
5. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - x_3 = -4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (2; -1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; -2)$, $\vec{a}_3 = (-1; 3; -5)$, $\vec{b} = (0; 4; -3)$.	
8. $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (-1; 1; -2)$, $\vec{c} = (-1; 3; -5)$, $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{c}$.	
9. Трикутник ABC : $A(2; -1)$, $B(5; 11)$, $C(10; 3)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-2; 0; 3)$, $B(-1; 5; 2)$, $C(2; 1; 4)$, $D(3; -1; -2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 - 5}{2x^4 - x + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{1+3x} - 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{-x} - 1}{\arctg x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+2}{7x-1} \right)^{5x-1}$.	
12. а) $y = 2x^{12} - \sin 6x + \arcsin 9x \cdot \ln x$, б) $y = \sin^3(\ln \sqrt{3x+5})$, в) $y = \frac{3x^4 - 1}{\sqrt{2x-1}}$, г) $y = (3 - x^3)^{\ln x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tg x}{\cos 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ctg x}$.	
14. а) $y = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$; б) $y = \frac{x^2}{2-2x}$.	

Варіант №5

Частина 1	
1. а) $\frac{4-3i}{1+4i} + i(2-3i)$, б) $(\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^{60}$.	2. $2z^3 - 3 + 3\sqrt{3}i = 0$
3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.	4. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 & -5 \\ 6 & 6 & -5 & -3 \\ 5 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$
5. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_3 = -4, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 = 8. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 8x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (1; -4; -1)$, $\vec{a}_2 = (2; 1; 3)$, $\vec{a}_3 = (3; 6; 5)$ $\vec{b} = (-4; 7; 1)$.	
8. $\vec{a} = (1; -4; -1)$, $\vec{b} = (2; 1; 3)$, $\vec{c} = (3; 6; 5)$, $\vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(-2; 0)$, $B(1; 12)$, $C(6, -4)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-2; 0; 3)$, $B(-1; 5; 2)$, $C(2; 1; 4)$, $D(3; -1; -2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 5)^2}{5x^4 - x^3 + 7x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - x^2}}{x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{\ln^2(1 + 2x)}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 7}{2x + 1} \right)^{3x+2}$.	
12. а) $y = 3x^{13} - \cos 2x + \ln 10x \cdot \operatorname{tg} 5x$, б) $y = \arcsin \sqrt{e^{2x} - \cos 2x}$, в) $y = \frac{\cos^2(5x + 3)}{4^x - 5}$, г) $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{tg} x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 5x)}$.	
14. а) $y = \frac{x^4}{4} - 8x^2$, б) $y = \frac{x - 4}{2x + 4}$.	

Варіант №6

Частина 1	
1. а) $\frac{6-5i}{1+i} - 5i(6-2i)$, б) $(-\sqrt{3}-3i)^{66}$.	2. $z^3 + 8 - 8\sqrt{3}i = 0$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.	4. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 3 \\ -5 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (-3; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (-8; 9; 3)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 0)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$.	
8. $\vec{a} = (-3; 3; 1)$, $\vec{b} = (-8; 9; 3)$, $\vec{c} = (1; -1; 0)$, $\vec{d} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(0;3)$, $B(3;-4)$, $C(8,7)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(2;2;-1)$, $B(-3;1;0)$, $C(1;2;1)$, $D(2;0;-3)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + x + 4}{x^4 - 2x + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-4x}}{5x^2 + x}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 2} \right)^{4x}$.	
12. а) $y = 6x^9 - \operatorname{arctg} x + \cos 4x \cdot \operatorname{ctg} 5x$, б) $y = \ln^2 \left(\frac{x^4}{x-1} \right)$, в) $y = \frac{\sin(1-3x)}{\operatorname{tg}^3 2x}$, г) $y = (x)^{\operatorname{arctg} 2x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1-x)}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^2 - 4x + 2}$.	
14. а) $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x$, б) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x}$.	

Варіант №7

Частина 1	
1. а) $\frac{(2-5i)}{6+i} - i^5(3+4i)$, б) $(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^{72}$.	2. $z^3 + 9 - 9i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.	4. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 & -6 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ -5 & -6 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ -5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$	6. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (1; 5; -1)$, $\vec{a}_2 = (0; -2; 1)$, $\vec{a}_3 = (-1; -1; 0)$, $\vec{b} = (4; 0; 3)$.	
8. $\vec{a} = (1; 5; -1)$, $\vec{b} = (0; -2; 1)$, $\vec{c} = (-1; -1; 0)$, $\vec{d} = 4\vec{a} + 3\vec{c}$.	
9. Трикутник ABC : $A(1; 2)$, $B(5; -7)$, $C(11; 6)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(3; 2; 1)$, $B(-1; 0; -2)$, $C(2; 1; 3)$, $D(3; -1; -2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^5 + x^3 - 1}{6x^5 - 12x + 5}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3x^2} - 1}{x^3 + 2x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-8}{x+2} \right)^{2x-1}$.	
12. а) $y = 2x^7 + \sqrt{x} - \sin 2x + \ln 9x \cdot \operatorname{ctg} 3x$, б) $y = \operatorname{tg}^2(\sqrt[3]{x} + e^{3x})$, в) $y = \frac{\ln^2(1-x)}{(2x+3)^3}$, г) $y = (2x)^{\arcsin 2x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln(e^x - e^5)}{\ln(x-5)}$.	
14. а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$, б) $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$.	

Варіант №8

Частина 1	
1. а) $\frac{7-6i}{2+i} - (3+i)^2$, б) $(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^{88}$.	2. $z^3 + 9 - 3\sqrt{3}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.	4. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & -1 \\ -3 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (1; 3; 2)$, $\vec{a}_2 = (-1; -1; 0)$, $\vec{a}_3 = (2; -1; -9)$, $\vec{b} = (1; 4; -3)$.	
8. $\vec{a} = (1; 3; 2)$, $\vec{b} = (-1; -1; 0)$, $\vec{c} = (2; -1; -9)$, $\vec{d} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(-2; 6)$, $B(4; 1)$, $C(-16; 8)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-3; -2; 2)$, $B(-1; -3; 1)$, $C(-2; 0; 1)$, $D(1; -1; 4)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 4x^3 + x^2 + 8}{14x^4 - 9x + 5}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{9 - x^2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 2x$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-6}{3x+4} \right)^{8x+1}$.	
12. а) $y = 9x^8 + e^{2x} + \operatorname{tg} 9x \cdot \sin 5x$, б) $y = \sin^4(\ln 7x + \sqrt{x})$, в) $y = \frac{\arcsin 9x}{\ln^2(2-x)}$, г) $y = (\cos x)^{\sin 2x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{\ln 2x}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x + 3 \ln x}$.	
14. а) $y = -x^3 - 4x^2 - 4x$, б) $y = \frac{1-4x}{1+2x}$.	

Варіант №9

Частина 1	
1. а) $\frac{5-i}{3+2i} + 9 - 3i$, б) $(4\sqrt{3} - 4i)^{30}$.	2. $z^3 - 9\sqrt{3} + 9i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 3x + 6$.	4. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$	6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (2; 1; -4)$, $\vec{a}_2 = (-1; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (2; 0; -1)$, $\vec{b} = (-2; 7; -1)$.	
8. $\vec{a} = (2; 1; -4)$, $\vec{b} = (-1; 3; 1)$, $\vec{c} = (2; 0; -1)$, $\vec{d} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(7; 2)$, $B(-1; 8)$, $C(0; 3)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(0; 3; -1)$, $B(-1; -2; 5)$, $C(1; 0; -4)$, $D(-3; -1; -2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x^4 + 3x^3 + 1}{2x^4 - 9x^2 + 7}$, б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 5x}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \cdot \ln(1+2x)}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x+2}{9x-1} \right)^{3x}$.	
12. а) $y = 7x^{12} - \cos 3x + \arcsin 8x \cdot \ln 4x$, б) $y = \arctg^3(e^{-x} + \sqrt[4]{x})$, в) $y = \frac{2-x^2}{\sqrt{\ln x}}$, г) $y = (\sin 3x)^{\ln 5x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\ln(x-1) - x + 2}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 3\ln x}$.	
14. а) $y = 3x^4 - 4x^3$, б) $y = \frac{x^3}{1-x^2}$.	

Варіант №10

Частина 1	
1. а) $\frac{5-i}{2-3i} - i(3+4i)$, б) $(8-8i)^{32}$.	2. $z^3 + 4\sqrt{3} - 4i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 2x + 7$.	4. $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -5 & 1 \\ -5 & 3 & -3 & -4 \\ 2 & 5 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & -4 & -3 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (2; -1; 1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; 5)$, $\vec{a}_3 = (4; 0; -3)$, $\vec{b} = (1; -1; 11)$.	
8. $\vec{a} = (2; -1; 1)$, $\vec{b} = (-1; 2; 5)$, $\vec{c} = (4; 0; -3)$, $\vec{d} = 4\vec{a} - 5\vec{c}$.	
9. Трикутник ABC : $A(10; -1)$, $B(2; 6)$, $C(2; 5)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-2; 5; 3)$, $B(0; 3; -1)$, $C(2; 2; 4)$, $D(3; 1; -2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^4 - 7x^3 + 4}{3x^4 - 10x^2 - 2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{4x}-4}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 4x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-7}{4x+3} \right)^{4x-2}$.	
12. а) $y = 9x^5 + \sin 4x + e^{7x} \cdot \operatorname{arctg} 3x$, б) $y = \ln^9(\operatorname{tg} 8x)$, в) $y = \frac{\cos 5x + x}{\arcsin \sqrt{2x}}$, г) $y = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\ln(1-x)}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.	
14. а) $y = x^4 - 6x^2 + 8$, б) $y = \frac{x^2}{1+x}$.	

Варіант №11

Частина 1	
1. а) $\frac{4-3i}{5-i} + 2i(9-i)$, б) $(-3\sqrt{3}+3i)^{48}$.	2. $z^3 + 4\sqrt{3} - 4i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 2x + 5$.	4. $\begin{vmatrix} 5 & -4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14, \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (1; 2; -2)$, $\vec{a}_2 = (-2; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; -3)$, $\vec{b} = (-5; 10; 6)$.	
8. $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = (-2; 3; 1)$, $\vec{c} = (1; -1; -3)$, $\vec{d} = -4\vec{a} + 3\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(3; -1)$, $B(-2; 5)$, $C(-5; 7)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(2; -3; -2)$, $B(-1; 3; 0)$, $C(-2; 0; 1)$, $D(4; -1; 3)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 3x^4 + 9x}{24x^4 + 4x^2 - 2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{\sin 3x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-10}{3x+2} \right)^{x-3}$.	
12. а) $y = 5x^7 + 3\sqrt{x} - \arctg 7x \cdot \sin 6x$, б) $y = \sqrt{\arcsin(x^2 + 1)}$, в) $y = \frac{\ln^3 8x}{\sin 7x}$, г) $y = (tg 3x)^{x^4}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - e^{\sin x}}{x}$, б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$.	
14. а) $y = 3 - 2x^2 - x^4$, б) $y = \frac{-8x}{x^2 + 4}$.	

Варіант №12

Частина 1	
1. а) $\frac{9+2i}{1-i} - i^3(7+2i)$, б) $(-6+6i)^{24}$.	2. $z^3 - 27 = 0$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 6x + 3$.	4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$
5. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 8x_3 = -2. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (1; -3; -1)$, $\vec{a}_2 = (-5; 2; 4)$, $\vec{a}_3 = (2; -1; -3)$, $b = (-5; -3; 5)$.	
8. $\vec{a} = (1; -3; -1)$, $\vec{b} = (-5; 2; 4)$, $\vec{c} = (2; -1; -3)$, $\vec{d} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(11; -6)$, $B(4; 8)$, $C(-5; 4)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-3; 1; -2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 1; -3)$, $D(0; -1; -2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^4 - 7x^3 + 8}{5x^4 + 3x^2 - 2}$,	б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+2}}$,
в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - 1}{x^2 - 2x}$,	г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-9}{4x+3} \right)^{x+5}$.
12. а) $y = 6x^9 + \sin 9x + \ln 10x \cdot \arcsin 8x$,	б) $y = \operatorname{tg}^7(\ln \sqrt{4x})$,
в) $y = \frac{\cos^4 5x}{\operatorname{arctg} 8x}$,	г) $y = (\sin 5x)^{\ln 2x}$.
13. а) $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \cdot \ln x$,	б) $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{tg} x \ln x$.
14. а) $y = -x^4 + 18x^2 - 81$, б) $y = -\left(\frac{x}{x+2} \right)^2$.	

Вариант №13

Частина 1	
1. а) $(2-i)^2 + \frac{5+2i}{1-3i}$, б) $(4\sqrt{3}-4i)^{60}$.	2. $z^3 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 3x - 7$.	4. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -5 & -4 \\ 4 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$	6. $\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (-2; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; -7; 1)$, $\vec{a}_3 = (4; -2; 5)$, $\vec{b} = (-5; -4; 1)$.	
8. $\vec{a} = (-2; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; -7; 1)$, $\vec{c} = (4; -2; 5)$, $\vec{d} = 4\vec{b} - 5\vec{a} + 2\vec{c}$.	
9. Трикутник ABC : $A(-4; -2)$, $B(3; -2)$, $C(6; 7)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-1; 3; -1)$, $B(2; 0; 5)$, $C(2; 3; 4)$, $D(5; -1; -2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^6 - 7x^3 + 9}{7x^6 + 5x^2 - 2x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5}}{x^2 - 4}$, в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+1}{7x-6} \right)^{2x+1}$.	
12. а) $y = 5x^{11} - \cos 3x + \arccos 7x \cdot \operatorname{tg} 9x$, б) $y = \ln^7(\sin \sqrt{3x})$, в) $y = \frac{\operatorname{tg}(x^2 + 1)}{(1-4x)^2}$, г) $y = (3-x^2)^{\ln 3x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^x}{x + e^x}$.	
14. а) $y = x^3 - 3x$, б) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.	

Вариант №14

Частина 1	
1. а) $\frac{3-i}{-1+4i} - 2 + 5i$, б) $(\sqrt{15} - \sqrt{5}i)^{45}$.	2. $2z^3 + \sqrt{5} - \sqrt{5}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 3x - 7$.	4. $\begin{vmatrix} 2 & -6 & -3 & -3 \\ -6 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 6 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 + 11x_2 + 6x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 = -1, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_4 = 0, \\ -5x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (3; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-2; 0; 3)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 6)$, $\vec{b} = (0; 4; 3)$.	
8. $\vec{a} = (3; 1; -1)$, $\vec{b} = (-2; 0; 3)$, $\vec{c} = (1; -1; 6)$, $\vec{d} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$.	
9. Трикутник ABC : $A(-5; 6)$, $B(7; -3)$, $C(5; 10)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(3; -2; -1)$, $B(0; 3; 2)$, $C(1; -1; -2)$, $D(3; 2; -5)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^5 + 4x^3 - 7}{2x^5 - 5x^2 + 2}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3x} - 2}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 4x}{\ln(5x+1)}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+3} \right)^{x-1}$.	
12. а) $y = 6x^{10} - \sin 8x + \ln 9x \cdot \sqrt{2x+1}$, б) $y = \arctg^4(\cos(x^3))$, в) $y = \frac{e^{x^2}}{\arccos 2x}$, г) $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$, б) $\lim_{x \rightarrow +1} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}$.	
14. а) $y = -x^3 + 3x^2 + 2$, б) $y = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2$.	

Вариант №15

1. а) $\frac{9-i}{-4+i} - 7 + 6i$, б) $(6\sqrt{3} - 6i)^{90}$.		2. $z^3 - \sqrt{18} + \sqrt{6}i = 0$.	
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 3x - 5$.		4. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & -4 \\ -6 & -2 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.	
5. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ -x_1 + x_2 = 6. \end{cases}$		6. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$	
7. $\vec{a}_1 = (4; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 0; 1)$, $\vec{a}_3 = (-2; 3; 1)$, $\vec{b} = (9; 0; 1)$.			
8. $\vec{a}_1 = (4; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 0; 1)$, $\vec{a}_3 = (-2; 3; 1)$, $\vec{b} = (9; 0; 1)$.			
9. Трикутник ABC : $A(5; -4)$, $B(8; 8)$, $C(3; 2)$.			
10. Тетраедр $ABCD$: $A(2; 1; -3)$, $B(-1; -3; 2)$, $C(2; 1; 1)$, $D(3; 0; -2)$.			
Частина 2			
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^6 + 3x^4 - 9}{2x^6 - 7x^3 + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{5x^2 + 1}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x-1} \right)^{3x+1}$.			
12. а) $y = 5x^9 - \sqrt[4]{x} + \cos 9x \cdot \ln(2x)$, б) $y = \operatorname{tg}^3(\sin(4x - 1))$, в) $y = \frac{\ln^2(1 - 2x)}{\sin 4x}$, г) $y = (\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} 5x}$.			
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 7x)}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^2 + 5x - 1) \cdot 6^{-x}$.			
14. а) $y = -x^3 - 4x^2 - 4x$, б) $y = \frac{x^3 - 32}{x^2}$.			

Вариант №16

Частина 1	
1. а) $\frac{2+5i}{3-i} - 6 + 7i$, б) $(3 - \sqrt{3}i)^{120}$.	2. $z^3 - \sqrt{18} + \sqrt{6}i = 0$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 3x - 5$.	4. $\begin{vmatrix} -6 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 & -2 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} -2x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 14x_2 - 7x_3 = -9. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (-1; 3; 1)$, $\vec{a}_2 = (3; -2; -1)$, $\vec{a}_3 = (1; 0; 4)$, $\vec{b} = (-3; 3; -7)$.	
8. $\vec{a} = (-1; 3; 1)$, $\vec{b} = (3; -2; -1)$, $\vec{c} = (1; 0; 4)$, $\vec{d} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(3;1)$, $B(15;-9)$, $C(13;5)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(0;-3;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(1;-2;4)$, $D(1;1;-2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^5 - 4x^4 + 5}{3x^5 + 2x^3 - 7}$, б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x} - 1}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 2x)}{\operatorname{ctg}(x^2 + 3x)}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-1} \right)^{2x-3}$.	
12. а) $y = 3x^{15} - \cos 7x + \arcsin 4x \cdot e^{2x}$, б) $y = \ln^4(\cos(x^2 - 1))$, в) $y = \frac{\sin^2(x+4)}{\operatorname{arctg} 5x}$, г) $y = (\sqrt[3]{x})^{\ln x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.	
14. а) $y = 3x^4 - 4x^3$, б) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1}$.	

Вариант №17

Частина 1	
1. а) $i(5-3i) + \frac{5-2i}{2+i}$, б) $(-\sqrt{7} + \sqrt{21}i)^{90}$.	2. $z^3 - 5 + 5i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 3x - 5$.	4. $\begin{vmatrix} -1 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 4 \\ -3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ -3x_1 + x_2 = -1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (-2; 2; -1)$, $\vec{a}_2 = (4; 5; 6)$, $\vec{a}_3 = (-1; -3; -2)$, $\vec{b} = (-8; 7; -5)$.	
8. $\vec{a} = (-2; 2; -1)$, $\vec{b} = (4; 5; 6)$, $\vec{c} = (-1; -3; -2)$, $\vec{d} = 5\vec{a} - \vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(2; 3)$, $B(14; -5)$, $C(12; 9)$.	
10. Тетраєдр $ABCD$: $A(-2; 2; 1)$, $B(-3; -1; 0)$, $C(1; -2; -3)$, $D(2; 0; 3)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2 - 3}{10x^3 - 2x^2 + 7}$, б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3+x} - 1}{\sqrt{6+x} - 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \operatorname{tg} 4x}{\sin^2 6x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-3}{7x+2} \right)^{3x+5}$.	
12. а) $y = 2x^{12} - \cos 2x + \operatorname{ctg} 7x \cdot \arcsin 5x$, б) $y = \ln(1 + \sin x)^3$, в) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{\arcsin 9x}$, г) $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln 5x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2}{3^x}$.	
14. а) $y = 0,25x^4 - x^3$, б) $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$.	

Вариант №18

Частина 1	
1. а) $(2-i)^2 + \frac{6-3i}{3+2i}$; б) $(-7+7i)^{96}$.	2. $2z^3 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 5x - 6$.	4. $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -4 & -5 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 6 & 3 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -4, \\ 2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 3. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (5; -1; 2)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; -4)$, $\vec{a}_3 = (-3; 2; -2)$, $\vec{b} = (-2; 1; 4)$.	
8. $\vec{a} = (5; -1; 2)$, $\vec{b} = (-1; 2; -4)$, $\vec{c} = (-3; 2; -2)$, $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{c}$.	
9. Трикутник ABC : $A(0; -1)$, $B(12; -8)$, $C(10; 5)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-2; 2; 5)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(-3; 3; 1)$, $D(-1; 4; 3)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 5x^2 - 8}{25x^4 - 12x^3 + 31}$, б) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - 2}{x^2 - 2}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{2x + \sqrt{x}}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x+4} \right)^{2x+6}$.	
12. а) $y = 5x^7 - \cos 6x + \ln 7x \cdot \operatorname{arctg} 9x$, б) $y = \sqrt{\operatorname{tg}(\ln(1+x))}$, в) $y = \frac{e^{\cos x}}{\arccos 10x}$, г) $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$.	
14. а) $y = -x^4 - 2x^2 + 3$, б) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.	

Варіант №19

Частина 1	
1. а) $\frac{2-3i}{5+2i} - 9 - 6i$, б) $(\sqrt{5} - \sqrt{5}i)^{32}$.	2. $z^3 + \sqrt{2} - \sqrt{6}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 4x + 1$.	4. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 6 & 3 \\ -1 & -4 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (-1; 0; 4)$, $\vec{a}_2 = (2; -3; -1)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 6)$, $\vec{b} = (3; -8; -1)$.	
8. $\vec{a} = (-1; 0; 4)$, $\vec{b} = (2; -3; -1)$, $\vec{c} = (1; -1; 6)$, $\vec{d} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(-1; 2)$, $B(11; -6)$, $C(9; 8)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-3; 1; 3)$, $B(-4; 2; -1)$, $C(-2; 1; -1)$, $D(-2; 3; 1)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - x^2 + 5}{12x^4 - 7x^3 + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6} - 3}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{x^2 - 2x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-7}{3x+5} \right)^{8x-3}$.	
12. а) $y = 4x^6 - 5^x + \cos 7x \cdot \ln 5x$, б) $y = \operatorname{tg} \sqrt{x^3 - \sin 5x}$, в) $y = \frac{\operatorname{arctg}(3x)}{\ln(3-x)}$, г) $y = (x + x^3)^{\cos x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\operatorname{ctg} \pi x}{\ln(x-1)}$.	
14. а) $y = x^3 - x$, б) $y = \frac{4 - x^3}{x^2}$.	

Вариант №20

Частина 1	
1. а) $(3-i)^2 + \frac{8+i}{3-2i}$, б) $(-\sqrt{15} - \sqrt{5}i)^{90}$.	2. $z^3 - 8 + 8\sqrt{3}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 2x + 8$.	4. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 & 5 \\ -4 & -5 & 1 & -3 \\ -6 & 5 & -2 & -3 \\ 6 & 5 & 3 & -4 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = -8, \\ x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 - 10x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (3; -2; 1)$, $\vec{a}_2 = (-8; 3; -1)$, $\vec{a}_3 = (1; 4; 2)$, $\vec{b} = (-2; -8; 1)$.	
8. $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (-8; 3; -1)$, $\vec{c} = (1; 4; 2)$, $\vec{d} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(-3; 1)$, $B(9; -8)$, $C(7; 5)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(2; 1; 4)$, $B(0; 0; 2)$, $C(1; -1; 6)$, $D(2; -1; 2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^5 - x^3 + 7}{5x^5 - 4x^3 - 8}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{6}}{4 - \sqrt{x+13}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x \cdot \operatorname{tg} 2x}{\sin^2 4x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-7}{6x+4} \right)^{2x-1}$.	
12. а) $y = 7x^5 - \cos 3x + \ln 8x \cdot \arcsin 4x$, б) $y = \sin^4 \ln(\sqrt{x-1})$, в) $y = \frac{1-e^{3x}}{\operatorname{tg}(x^3-3)}$, г) $y = (2x)^{\operatorname{arctg} x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{ctg} x$, б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\ln^2 x}$.	
14. а) $y = -x^4 + 8x^2 - 16$, б) $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$.	

Вариант №21

Частина 1	
1. а) $\frac{4+5i}{-2-i} + i(7-4i)$, б) $(-\sqrt{18} + \sqrt{6}i)^{60}$.	2. $z^3 + \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 3x + 5$.	4. $\begin{vmatrix} 3 & -6 & -5 & -3 \\ -1 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$	6. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (1; -2; -1)$, $\vec{a}_2 = (3; -1; 1)$, $\vec{a}_3 = (-1; -4; 2)$, $\vec{b} = (11; 3; 9)$.	
8. $\vec{a} = (1; -2; -1)$, $\vec{b} = (3; -1; 1)$, $\vec{c} = (-1; -4; 2)$, $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(7; 1)$, $B(-5; -4)$, $C(-9; -1)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(1; 3; 4)$, $B(1; 1; 2)$, $C(-1; 2; 2)$, $D(0; 1; 6)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 - 6}{21x^4 - 4x^2 + 8}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{5} - \sqrt{x+4}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2(4x)}{x^2}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{-x}$.	
12. а) $y = 3x^9 - e^{6x} + \cos 9x \cdot \operatorname{arctg} 5x$, б) $y = \operatorname{tg}^3 \ln(\sqrt{x+3})$, в) $y = \frac{1+e^{-x}}{\arcsin(3x^3)}$, г) $y = \left(\arcsin \frac{1}{x} \right)^{\sin x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(e^x - e^2)}{\ln(x-2)}$.	
14. а) $y = x^4 - 2x^3 - 3$, б) $y = \frac{3x-2}{x^3}$.	

Вариант №22

Частина 1	
1. а) $i(4-3i) + \frac{2+3i}{1-3i}$, б) $(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{40}$.	2. $z^3 + 2\sqrt{3} - 2i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 2x + 8$.	4. $\begin{vmatrix} -6 & -5 & 3 & -5 \\ -1 & -5 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -11, \\ 3x_1 + x_3 = -5. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (2; -1; 1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; 3)$, $\vec{a}_3 = (0; 5; -2)$, $\vec{b} = (10; -1; -4)$.	
8. $\vec{a} = (2; -1; 1)$, $\vec{b} = (-1; 1; 3)$, $\vec{c} = (0; 5; -2)$, $\vec{d} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(4; -2)$, $B(6; 5)$, $C(-2; -4)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(2; 0; 3)$, $B(1; 1; 7)$, $C(0; 1; 3)$, $D(2; -2; 5)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^4 + 12x^3 - 6}{22x^4 + 5x^2 + 8}$, б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{3} - \sqrt{x+4}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{\operatorname{tg}(x^2)}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x+5} \right)^{-3x}$.	
12. а) $y = 4x^{11} - \sin 3x + \ln 8x \cdot \arccos 4x$, б) $y = \operatorname{arctg}^2 \ln(2x-5)$, в) $y = \frac{x^3 - 4}{\sin \sqrt{x}}$, г) $y = (3 - x^2)^{\sin x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$, б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-5) \cdot e^{-x}$.	
14. а) $y = -x^4 - 2x^2 + 3$, б) $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$.	

Вариант №23

Частина 1	
1. а) $\frac{8-3i}{-3+i} - i^3(1-2i)$, б) $(-2\sqrt{3}+2i)^{40}$.	2. $8z^3 - 1 + \sqrt{3}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 3x + 7$.	4. $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -6 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8, \\ -2x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (1; 0; 3)$, $\vec{a}_2 = (-2; 2; -1)$, $\vec{a}_3 = (3; 6; 2)$, $\vec{b} = (-2; -6; 1)$.	
8. $\vec{a} = (1; 0; 3)$, $\vec{b} = (-2; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; 6; 2)$, $\vec{d} = 4\vec{a} - 5\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(4;4)$, $B(7;6)$, $C(10;-8)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-1;-2;-1)$, $B(-3;-2;1)$, $C(-1;0;3)$, $D(-3;1;5)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x^3 - 2x + 6}{8x^4 + 4x^2 - 9}$, б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{6}}{x^2 + x}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 10^{2x}}{\sin 3x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-7}{3x+1} \right)^{-x+1}$.	
12. а) $y = 3x^9 - \cos 5x + \operatorname{ctg} 23x \cdot \arcsin 4x$, б) $y = \ln^4 \cos(\sqrt{x} - 7)$, в) $y = \frac{e^{\sin x} - 1}{\operatorname{tg} 8x}$, г) $y = (\sin x)^{\ln 2x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x - x + 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{\operatorname{ctg} \pi x}{\ln(2-x)}$.	
14. а) $y = x^3 - x$, б) $y = \frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$.	

Вариант №24

Частина 1	
1. а) $i^3(1+3i) - \frac{4+i}{1-2i}$, б) $(3-\sqrt{3}i)^{90}$.	2. $8z^3 + 3 + \sqrt{3}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 3x - 7$.	4. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -4 \\ 6 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 5, \\ -3x_1 + 8x_2 - 8x_3 = -6. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (2; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-2; -3; 2)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 4)$, $\vec{b} = (6; -2; 7)$.	
8. $\vec{a} = (2; 1; -1)$, $\vec{b} = (-2; -3; 2)$, $\vec{c} = (1; -1; 4)$, $\vec{d} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(-8; 5)$, $B(4; 4)$, $C(2; 10)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-2; 5; -3)$, $B(2; -3; 1)$, $C(2; -2; -4)$, $D(-3; 1; 2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 14x^2 + 7}{15x^4 + 6x^2 - 8}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+6} - 2\sqrt{2}}{3 - \sqrt{x+7}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{(x^2 - 4x)^2}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-7}{5x+2} \right)^{2x-1}$.	
12. а) $y = 4x^{10} + \sin 9x + \ln 24x \cdot \arccos 5x$, б) $y = \sqrt{\operatorname{arctg}(e^{-2x})}$, в) $y = \frac{\ln(\sqrt{x} + x^2)}{\sqrt{x}}$, г) $y = (\operatorname{tg} x)^{6x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(e^x - e^2)}{\ln(x-2)}$.	
14. а) $y = -x^3 - 4x^2 - 4x$, б) $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{(x-1)^2}$.	

Вариант №25

Частина 1	
1. а) $i^3(6+i) - \frac{8+3i}{1-2i}$, б) $(\sqrt{3} - \sqrt{3}i)^{80}$.	2. $z^3 - 3 + \sqrt{3}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 5x + 2$.	4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ -5 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 6 & -4 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 13, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (1; -2; 3)$, $\vec{a}_2 = (0; 4; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 1; -2)$, $\vec{b} = (4; -7; -5)$.	
8. $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (0; 4; 1)$, $\vec{c} = (1; 1; -2)$, $\vec{d} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(4; 9)$, $B(5; 0)$, $C(6; -5)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(1; 3; 0)$, $B(-2; 1; 4)$, $C(2; 0; 1)$, $D(4; -1; 5)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^4 - 11x^2 + 9}{6x^4 + 7x - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{4 - \sqrt{x+13}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2(x^2 - x)}{\ln(1 - x^2)}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{4x-1}$.	
12. а) $y = 2x^9 - 3\sqrt{x} + \sin 25x \cdot \arctg 3x$, б) $y = e^{\arctg \sqrt{x}}$, в) $y = \frac{1 - \ln^3(5x)}{\sqrt{\cos x}}$, г) $y = (2x^3 + 8)^{3x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}$, б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{e^x + x^2}$.	
14. а) $y = x^4 - 5x^2 + 4$, б) $y = \frac{2x^3 + 1}{x^2}$.	

Варіант №26

Частина 1	
1. а) $\frac{4-7i}{2-i} - i^3(3+2i)$, б) $(\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^{90}$.	2. $z^4 - 16 = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 5x - 6$.	4. $\begin{vmatrix} -5 & 2 & -6 & -3 \\ 3 & -6 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -5, \\ 3x_1 - 10x_2 = -4, \\ -2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 8. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 10x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (4; -1; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; 3; 2)$, $\vec{a}_3 = (-2; -1; -5)$, $\vec{b} = (2; 8; -7)$.	
8. $\vec{a} = (4; -1; 0)$, $\vec{b} = (1; 3; 2)$, $\vec{c} = (-2; -1; -5)$, $\vec{d} = 6\vec{a} - 2\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(9;1)$, $B(1;7)$, $C(-1;3)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-1;5;-2)$, $B(1;2;2)$, $C(2;4;-3)$, $D(0;1;-2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + 10x^2 - 9}{4x^4 - 9x^3 + 5}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 2x)}{x^2 - 2x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{5x-1}$.	
12. а) $y = 5x^{10} - \cos 2x + \ln 26x \cdot \arcsin 8x$, б) $y = \arcsin^2(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})$, в) $y = \frac{\ln(6x) + x}{\sqrt{\lg 7x}}$, г) $y = (\sin 6x)^{5x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 2x}{e^{3x} - \cos 3x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 3x}{\ln \cos 2x}$.	
14. а) $y = x^3 - 3x^2 + 2$, б) $y = \frac{1-2x^3}{x^2}$.	

Вариант №27

Частина 1	
1. а) $\frac{8+3i}{3-i} - i^4(5+i)$, б) $(3\sqrt{3}-3i)^{72}$.	2. $z^3 + 6 - 2\sqrt{3}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 4x - 6$.	4. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ -5 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3, \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ -2x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (-6; 4; 1)$, $\vec{a}_3 = (5; -1; 4)$, $\vec{b} = (-1; -3; 2)$.	
8. $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-6; 4; 1)$, $\vec{c} = (5; -1; 4)$, $\vec{d} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$.	
9. Трикутник ABC : $A(6; -2)$, $B(5; 4)$, $C(2; -4)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-1; 2; 0)$, $B(2; 1; 5)$, $C(3; 3; -4)$, $D(3; -1; -2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 8x^2 - 9}{14x^4 - 3x^3 + 15}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{6}}{2 - \sqrt{2x-2}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x^2 + x)}{x^2 + 2x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x-1}{8x+7} \right)^{3x}$.	
12. а) $y = 6x^5 - \sin 8x + \operatorname{tg} 5x \cdot \arccos 2x$, б) $y = (x - \sqrt{1+x^2})^3$, в) $y = \frac{\ln(8x)}{x - e^{4x}}$, г) $y = (\operatorname{ctg} 4x)^{\operatorname{tg} x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\operatorname{tg} x}$, б) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$.	
14. а) $y = x^4 - 6x^2 + 5$, б) $y = \frac{x^2}{3-x}$.	

Вариант №28

Частина 1	
1. а) $(3-i)^2 + \frac{7-i}{6+4i}$, б) $(-\sqrt{21}-\sqrt{7}i)^{54}$.	2. $z^3 + 4\sqrt{3} + 12i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 3x - 7$.	4. $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 10x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (-6; 4; 1)$, $\vec{a}_3 = (5; -1; 4)$, $\vec{b} = (-1; -3; 2)$.	
8. $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-6; 4; 1)$, $\vec{c} = (5; -1; 4)$, $\vec{d} = 3\vec{a} - 7\vec{c}$.	
9. Трикутник ABC : $A(7; -3)$, $B(-3; 4)$, $C(3; 1)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(-3; 0; -1)$, $B(0; 3; 2)$, $C(-1; 1; -2)$, $D(3; 2; -4)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 2x^2 + 7}{3x^4 + 4x^3 - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{x+2}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2 + 4x)}{x^2 - 4x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+5} \right)^{2x-1}$.	
12. а) $y = 4x^{11} - 2\sin 4x + \ln 8x \cdot \operatorname{arctg} 3x$, б) $y = \operatorname{arctg}^3(\sqrt{x^2 + 3})$, в) $y = \frac{\cos(x^2)}{3^x + \sqrt{x}}$, г) $y = (\ln x)^{\sin^2 x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\operatorname{tg} x}$, б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x + 2\ln x}$.	
14. а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, б) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2}$.	

Варіант №29

Частина 1	
1. а) $\frac{3-7i}{5+i} - (4+2i) \cdot i^7$, б) $(-\sqrt{7} + \sqrt{21}i)^{120}$.	2. $z^3 + 8 + 8i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 4x + 8$.	4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & -3 & -2 \\ 1 & 5 & -4 & -5 \\ -6 & -3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 10x_3 = -4. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - 10x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (2; 1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-3; 4; -6)$, $\vec{a}_3 = (2; -1; 1)$, $\vec{b} = (2; 6; -6)$.	
8. $\vec{a} = (2; 1; 3)$, $\vec{b} = (-3; 4; -6)$, $\vec{c} = (2; -1; 1)$, $\vec{d} = 3\vec{b} - 5\vec{c}$.	
9. Трикутник ABC : $A(4; -3)$, $B(-4; 4)$, $C(-2; -1)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(2; 1; 0)$, $B(-1; 3; 2)$, $C(2; -3; 1)$, $D(-3; 0; -2)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x^2 - 4}{4x^3 + 2x - 1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{10}}{4 - \sqrt{x+14}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 5x)}{x \cdot (4^{3x} - 1)}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+2} \right)^{-x+3}$.	
12. а) $y = 2x^{12} - 8^x + \sin 29x \cdot \arcsin 4x$, б) $y = \operatorname{arctg}^3(\sqrt{x^2 + 3})$, в) $y = \frac{1 - \operatorname{tg}(x^2)}{\sqrt{\sin 3x}}$, г) $y = (\sin x)^{\arcsin x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{1 - \cos x}$, б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2}{e^x + x}$.	
14. а) $y = x^4 - 5x^2 + 6$, б) $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$.	

Варіант №30

Частина 1	
1. а) $\frac{6-3i}{4+i} - i(3+5i)$, б) $(-\sqrt{5} + \sqrt{15}i)^{66}$.	2. $z^3 + \sqrt{7} - \sqrt{21}i = 0$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 4x - 1$.	4. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ -5 & 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.
5. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 = -1. \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 10x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
7. $\vec{a}_1 = (3; 1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-1; 2; -5)$, $\vec{a}_3 = (-3; 1; -1)$, $\vec{b} = (-7; 8; -3)$.	
8. $\vec{a} = (3; 1; 3)$, $\vec{b} = (-1; 2; -5)$, $\vec{c} = (-3; 1; -1)$, $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$.	
9. Трикутник ABC : $A(7;1)$, $B(-5;-4)$, $C(-9;-1)$.	
10. Тетраедр $ABCD$: $A(5;-3;2)$, $B(3;2;-1)$, $C(4;-2;1)$, $D(3;1;0)$.	
Частина 2	
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 - 2x^2 + 9}{8x^3 + 3x - 6}$, б) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x+90} - 10}{7 - \sqrt{x+39}}$, в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot \sin 5x}$, г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+7} \right)^{-2x+3}$.	
12. а) $y = 2x^9 - \sqrt[3]{x} + \cos 30x \cdot \ln 4x$, б) $y = \ln^3(x - \operatorname{tg}^2 x)$, в) $y = \frac{\cos^2 x}{\arcsin 5x}$, г) $y = (\ln 3x)^{\operatorname{arctg} x}$.	
13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \operatorname{tg} x}{x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}$.	
14. а) $y = x^3 + x^2 - 12x$, б) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$.	

Список літератури

1. *Бондаренко Н.В.* Лінійна алгебра: навчальний посібник / Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська. – Київ: КНУБА, 2023. – 180 с.
2. *Бондаренко Н.В.* Аналітична геометрія: конспект лекцій/ Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська. – Київ: КНУБА, 2022. – 80 с.
3. *Бондаренко Н.В.* Аналітична геометрія в просторі: методичні вказівки, самостійні та контрольні роботи з вищої математики/ Н.В. Бондаренко, О.О. Килимник, В.В. Отрашевська, М.С. Пастухова. – Київ: КНУБА, 2013. – 40 с.
4. *Дубовик В.П.* Вища математика: навчальний посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ: Вища школа, 1993. – 648 с.
5. *Дубовик В.П.* Вища математика: збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ: «А.С.К.», 2005. – 480 с.
6. *Овчинников П.П.* Вища математика: підручник. У 2 ч. / пер. з рос. П.М. Юрченка, 3-тє вид., випр./ П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. – Київ: Техніка, 2007. – 600 с.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки та завдання
до виконання контрольної роботи з модуля 1
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти спеціальностей D3 «Менеджмент»,
C1 «Економіка та міжнародні економічні відносини»,
D1 «Облік і оподаткування»

Укладачі: **Бондаренко** Наталія В'ячеславівна;
Печук Василь Дмитрович;
Наголкіна Зоя Іванівна;
Блажко Людмила Миколаївна

Випусковий редактор *Ю.М. Долгополова*
Комп'ютерне верстання *Ю.М. Долгополової*

Ум. друк. арк. 4,42. Обл.-вид. арк. 4,75
Електронний документ. Вид № 84/V-26.

Виконавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури
Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002