

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Гуляр О.І., д-р техн. наук,
Піскунов С.О., канд. техн. наук,
Андрієвський В.П.

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОСТІ ПРИЗМАТИЧНИХ ТІЛ З УРАХУВАННЯМ ПОШКОДЖЕНОСТІ

Розроблено алгоритм з екстраполяцією переміщень для розв'язання просторових задач термов'язкопружності призматичних тіл з урахуванням пошкодженості матеріалу на основі напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) і проведено дослідження його достовірності і ефективності на тестових прикладах.

Вступ. В роботі [2] були отримані розв'язувальні співвідношення напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) для обчислення матриці жорсткості та вектора вузлових реакцій косокутного призматичного скінченного елемента з урахуванням змінності компонент метричного тензора в площині його поперечного перерізу. Розв'язання просторових задач термов'язкопружності вимагає застосування ефективних алгоритмів розв'язання систем нелінійних рівнянь [4]. При цьому, при формуванні вектора вузлових реакцій необхідним є обчислення напружень не лише із врахуванням деформацій пластичності, повзучості та накопичення пошкодженості, а також із врахуванням величин температурних деформацій.

Алгоритм розв'язання просторових задач термов'язкопружності. Розв'язання просторових задач термов'язкопружності потребує застосування ефективних алгоритмів, які орієнтовані на моделювання тривалих за часом процесів деформування матеріалу, є інваріантними щодо використовуваних форм рівнянь повзучості та надають можливість урахування змін фізико-механічних властивостей матеріалу залежно від параметрів напружено-деформованого стану і температури.

Процес нелінійного деформування може бути поданий у вигляді сукупності дискретних кроків за параметрами зовнішнього навантаження і часом. Таким чином, для розв'язання задачі необхідним є використання покрокового алгоритму. В свою чергу, на кожному кроці для розв'язання систем нелінійних рівнянь МСЕ використовуються ітераційні алгоритми.

Вибір величини кроку за параметром (Δt за часом і Δp за навантаженням) здійснюється виходячи з необхідності дотримання умов

збіжності, як ітераційного процесу розв'язання систем нелінійних рівнянь, так і отримуваних результатів. При цьому значення Δt і Δp суттєво залежать від механічних характеристик матеріалу (параметрів кривих пружнопластичного деформування і повзучості) та характеру змінення зовнішнього навантаження. Правильний вибір кроку за часом і навантаженням суттєво впливає на точність отримуваних результатів, тому проведення відповідних досліджень збіжності є важливим етапом розв'язання задачі.

Для урахування змін фізико-механічних властивостей матеріалу залежно від температури і зовнішнього навантаження на початку кожного кроку розв'язання задачі передбачено можливість їх коригування. В межах кроку фізико-механічні характеристики передбачаються незмінними.

На кожній ітерації n кроку m вектор невідомих переміщень $\{u\}_n^m$ системи нелінійних рівнянь МСЕ може бути поданий у вигляді:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K]^{-1} (\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m), \quad (1)$$

де $\{Q\}_n^m$ – вектор вузлових навантажень на кроці m ; $\{R\}_n^m$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n , обчислений за величинами напружень σ_{ij} , змінення яких відбуваються внаслідок прирощення зовнішнього навантаження або часу і відповідного нелінійного деформування матеріалу.

Формула (1) описує ітераційний алгоритм для розв'язання систем нелінійних рівнянь МСЕ. Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$(\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m) \leq \zeta \|\{Q\}_n^m\|, \quad (2)$$

де $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$ – параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності отримуваного розв'язку.

При використанні НМСЕ та відповідному поданні переміщень і зовнішніх навантажень у вигляді розкладання за системою базисних функцій Ψ^l

$$u_{k^*} = \sum_{l=0}^L U_{k^*,l} \Psi^l, \quad \{Q_l\}_n^m = \int_{-1}^1 Q_m \Psi^l \sqrt{g} \, dx^3, \quad (3)$$

вектори $\{u\}_n^m, \{Q\}_n^m, \{R\}_n^m$ і матриця жорсткості $[K]$ набувають блочної структури:

$$\{u\}_n^m = \begin{Bmatrix} \{u_1\}_n^m \\ \dots \\ \{u_l\}_n^m \\ \dots \\ \{u_L\}_n^m \end{Bmatrix}, \quad \{Q\}_n^m = \begin{Bmatrix} \{Q_1\}_n^m \\ \dots \\ \{Q_l\}_n^m \\ \dots \\ \{Q_L\}_n^m \end{Bmatrix}, \quad \{R\}_n^m = \begin{Bmatrix} \{R_1\}_n^m \\ \dots \\ \{R_l\}_n^m \\ \dots \\ \{R_L\}_n^m \end{Bmatrix}; \quad (4)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \dots & [K_{1l}] & \dots & [K_{1L}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{l1}] & \dots & [K_{ll}] & \dots & [K_{lL}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{L1}] & \dots & [K_{Ll}] & \dots & [K_{LL}] \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Зважаючи на зазначену особливість матриці жорсткості, для розв'язання отриманої системи рівнянь раціональним є використання блочно-ітераційних алгоритмів [1].

На кожній ітерації n розв'язання нелінійної задачі за алгоритмом (1) проводиться внутрішній ітераційний процес розв'язання лінійної задачі. Зважаючи на це, а також враховуючи вирази (3) – (5), для розв'язання лінійної задачі застосовується алгоритм:

$$\{U_l\}_{n\ k}^m = \{U_l\}_{n\ k-1}^m + \beta [K_{ll}]^{-1} \left(\{P_l\}_n^m - \{S_l\}_{n\ k-1}^m \right), \quad (6)$$

де β – параметр релаксації, $1 < \beta < 2$; $\{P_l\}_n^m = (\{Q_l\}_n^m - \{R_l\}_n^m)$ – вектор навантаження на ітерації n кроку m , отриманий за величинами дійсних значень напружень, обчислених з урахуванням наявності нелінійних

деформацій; $\{S_l\}_{n\ k}^m = \sum_{l=0}^{l^*-1} [K_{ln}] \{u_l\}_{n\ k+1}^m + \sum_{l=l^*}^L [K_{ln}] \{u_l\}_{n\ k}^m$ – вектор непогодженості, який, внаслідок недіагональної структури матриці $[K_{ln}]$, враховує неточність отриманого на ітерації k розв'язку системи лінійних рівнянь.

Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L \left(\{ \Delta u \}_l^n \right)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L \left(\{ u \}_l^n \right)^2. \quad (7)$$

Таким чином, запропонований алгоритм передбачає реалізацію двох ітераційних циклів: внутрішнього, пов'язаного з розв'язанням системи лінійних рівнянь на кожній ітерації нелінійного циклу, та зовнішнього, обумовленого розв'язанням саме системи нелінійних рівнянь. Загальна кількість ітерацій дорівнюватиме добутку кількості ітерацій цих двох циклів, що суттєво перевищує кількість ітерацій, необхідних для розв'язання нелінійної задачі за МСЕ.

Зменшити загальну кількість ітерацій дозволяє підхід, що ґрунтується на суміщенні внутрішнього ітераційного процесу розв'язання лінійної задачі й ітераційного процесу розв'язання нелінійної задачі. Тоді алгоритм (6) набуває вигляду [4]

$$\{ u_l \}_{n+1}^m = \{ u_l \}_n^m + \beta [K_{ll}]^{-1} \left(\{ Q_l \}_n^m - \{ R_l \}_n^m \right). \quad (8)$$

Матриця жорсткості $[K_{ll}]$ обчислюється за формулами наведеними в роботі [2], а при обчисленні вектора вузлових реакцій $[R_l]$, крім пружних деформацій, враховуються температурні деформації, деформації пластичності та повзучості.

Формула (8) описує метод блочних ітерацій із послідовною верхньою релаксацією для розв'язання систем нелінійних рівнянь, використання якого обмежено простим навантаженням в межах кроку m . Як свідчать наведені в роботі [1] результати розв'язання тестових прикладів, зазначений алгоритм дозволяє суттєво зменшити кількість ітерацій розв'язання нелінійної задачі на основі НМСЕ.

При реалізації даного алгоритму традиційно в якості першого наближення розв'язку на першій ітерації кроку m використовують розв'язок, що відповідає не завантаженому стану тіла ($\{ u_l \}_1^m = 0$, $\{ R_l \}_1^m = 0$). Але, при покроковому розв'язанні задачі, зважаючи на необхідність виконання умов збіжності за кроками по навантаженню, відмінності розподілення параметрів напружено-деформованого стану при відносно невеликому співвідношенні приросту навантаження до його абсолютних значень є несуттєвими. Тому для підвищення ефективності запропонованого алгоритму та, відповідно, зменшення обсягу обчислювальних витрат, було реалізовано підхід, що базується на застосуванні екстраполяції переміщень $\{ \bar{u}_l \}_1^m$ за їх величинами,

отриманими на попередньому кроці $\{u_l\}^{m-1}$ та відношенням величин навантаження даного $\{Q_l\}^m$ та попереднього $\{Q_l\}^{m-1}$ кроків:

$$\{u_l\}_1^m = \{u_l\}^{m-1} \frac{\{Q_l\}^m}{\{Q_l\}^{m-1}}. \quad (9)$$

За величиною отриманих переміщень обчислюються вузлові реакції $\{R_l\}_1^m$, які в подальшому використовуються в ітераційному процесі.

Визначення напружень при температурному навантаженні. В загальному випадку на кожному кроці розв'язання задачі на першому етапі проводиться визначення напружено-деформованого стану при термопружному деформуванні.

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій [2] визначаються за формулою:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \quad (10)$$

де $\alpha_T = \alpha_T(z^{k'}, T)$ – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, $\Delta T = T - T_0$ – приріст температури в досліджуваній точці тіла відносно його вихідного стану при $T = T_0$, g_{ij} – компоненти метричного тензора.

При розв'язанні просторових задач застосовують базисну декартову та місцеву системи координат. Зв'язок між місцевою та базисною системами координат здійснюється на основі компонентів тензора перетворення $z_{,j}^{i'}$.

При дослідженні призматичних тіл для базисної декартової системи координат компоненти метричного тензора мають наступні значення:

$$g_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{i'} z_{,\beta}^{j'}, \quad g_{33} = (z_{,3}^{i'})^2. \quad (11)$$

Будемо вважати, що визначник матриці, що складена з компонент метричного тензору g_{ij} , а також коефіцієнт лінійного розширення α_T дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перетину СЕ:

$$g = \overset{\circ}{g} = g|_{x^\alpha=0}; \quad \alpha_T = \overset{\circ}{\alpha}_T = \alpha_T|_{x^\alpha=0}. \quad (12)$$

Розподілення температури у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (13)$$

де $T_{(S_1 S_2)}$ – вузлові значення температури, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елементу в місцевій системі координат x^i .

Визначимо похідні від температури в центрі поперечного перетину СЕ виходячи з прийнятого закону їх розподілення (13):

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)}; \quad \overset{\circ}{T}_{,\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} S_{\alpha}. \quad (14)$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє найбільш просто і ефективно формувати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь [1].

Фізичні компоненти тензора температурних деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\mathfrak{E}_{ij}^T = \frac{\varepsilon_{ij}^T}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}. \quad (15)$$

У відповідності до моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [6] компоненти тензору температурних деформацій в поперечному перетині, що відповідає точці інтегрування, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{\alpha(\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\mathfrak{E}}_{\alpha(\alpha)}^T + \overset{\circ}{\mathfrak{E}}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}^T x^{(3-\alpha)}; \\ \mathfrak{E}_{12}^T &= \overset{\circ}{\mathfrak{E}}_{12}^T; \\ \mathfrak{E}_{\alpha 3}^T &= 0; \\ \mathfrak{E}_{33}^T &= \overset{\circ}{\mathfrak{E}}_{33}^T + \overset{\circ}{\mathfrak{E}}_{33,\beta}^T x^{\beta}. \end{aligned} \quad (16)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних температурних деформацій в ряд Маклорена з урахуванням подання

фізичних компонент температурних деформацій в місцевій системі координат з врахуванням (16) та з підстановкою (10):

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T; \\ \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha)}^T}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{\partial(\overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T)}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta \overset{\circ}{T}_{,(3-\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12}^T &= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}}} \overset{\circ}{\epsilon}_{12}^T = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \frac{\overset{\circ}{g}_{12}}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}}}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33}^T &= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\epsilon}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T; \\ \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\beta}^T &= \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33}^T}{\partial x^\beta} = \frac{\partial(\overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T)}{\partial x^\beta} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta \overset{\circ}{T}_{,\beta};\end{aligned}\tag{17}$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\epsilon}_{ij}^T = \overset{\circ}{\epsilon}_{ij}^T \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\epsilon}_{ij,\beta}^T = \frac{\partial \overset{\circ}{\epsilon}_{ij}^T}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

Коефіцієнтом розкладення $\frac{\partial^2 \overset{\circ}{\epsilon}_{33}^T}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^\alpha=0}$ нехтуємо, як величиною більш високого порядку малості.

Згідно формули (15) та підставляючи (17) знаходимо:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta \overset{\circ}{T}_{,(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{12}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{12} \sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \overset{\circ}{g}_{12}; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33} \overset{\circ}{g}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \overset{\circ}{g}_{33}; \\ \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\beta}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\epsilon}}_{33,\beta} \overset{\circ}{g}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta \overset{\circ}{T}_{,\beta} \overset{\circ}{g}_{33};\end{aligned}\tag{18}$$

Подано коефіцієнти розкладення компонент деформацій через вузлові температури (14):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} 2S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{12}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{12}; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{33}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33}; \\
\overset{\circ}{\epsilon}_{33,\beta}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33} 2S_\beta.
\end{aligned} \tag{19}$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і температурою, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\epsilon}^T \right\} = \left[\overset{\circ}{B}^T \right] \{ T \}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha}^T \right\} = \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right] \{ T \}, \tag{20}$$

$$\text{де } \{ T \}^T = \{ T_{(-1;-1)} \ T_{(1;-1)} \ T_{(-1;1)} \ T_{(1;1)} \};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\epsilon}^T \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{11}^T \ 2\overset{\circ}{\epsilon}_{12}^T \ \overset{\circ}{\epsilon}_{22}^T \ 2\overset{\circ}{\epsilon}_{23}^T \ 2\overset{\circ}{\epsilon}_{13}^T \ \overset{\circ}{\epsilon}_{33}^T \right\};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha}^T \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}^T \ 2\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)}^T \ \overset{\circ}{\epsilon}_{33,\alpha}^T \right\}.$$

$$\begin{aligned}
\left[\overset{\circ}{B}^T \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;1)} \left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;1)} \right]; \\
\left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right] &= \left[\left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(-1;1)} \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(1;1)} \right].
\end{aligned} \tag{21}$$

Значення компонент підматриць $\left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(S_1, S_2)}$, $\left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(S_1, S_2)}$ у виразі (21)

для неоднорідних призматичних тіл визначаються відповідно до формул (19) з урахуванням обчислених за (11) значеннями компонент метричного тензора для призматичних тіл:

$$\left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{11} \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{12} \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{22} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{33} \end{bmatrix}; \quad (22)$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{\alpha} \overset{\circ}{g}_{33} \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти розкладання прирощень напружень визначаються за величинами повних і температурних деформацій:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left(\left\{ \overset{\circ}{\epsilon} \right\} - \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}^T \right\} \right), \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{\alpha} \right] \left(\left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha} \right\} - \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha}^T \right\} \right), \quad (23)$$

$$\text{де } \left[\overset{\circ}{D} \right] = \left[\overset{\circ}{C}^{ijkl} \right], \quad \left[\overset{\circ}{D}_{\alpha} \right] = \left[\left[\overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[\overset{\circ}{C}^{ij(3-\alpha)3} \right] \left[\overset{\circ}{C}^{ij33} \right] \right], \quad C^{ijkl} -$$

компоненти тензора пружних сталей для ізотропного тіла; $\left\{ \overset{\circ}{\epsilon} \right\}$, $\left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{,\alpha} \right\}$ –

компоненти величин повних деформацій в векторній формі [2].

Обчислення напружень при наявності деформацій пластичності та повзучості. На кожній ітерації n кроку t розв'язання системи нелінійних рівнянь здійснюється із використанням алгоритму (8) [1]. Отримані напруження перевіряються за умовою наявності пластичного деформування $\tau > \tau_s$, де τ_s – поточне значення межі текучості. При

виконанні цієї умови у відповідних точках конструкції проводиться визначення напружено-деформованого стану, яке пов'язано із припущенням миттєвих деформацій пластичності. Після цього з урахуванням припущення часу на кроці проводиться визначення напружено-деформованого стану з урахуванням перебігу процесу повзучості.

На початку кожної ітерації n кроку m компоненти тензора напружень σ_{ij} обчислюються за формулою:

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_{n-1} + (\Delta\sigma_{ij})_n, \quad (24)$$

де $(\Delta\sigma_{ij})_n$ – прирощення напружень, які визначаються згідно з законом Гука за величиною прирощення повних деформацій.

Дійсні значення напружень $(\overline{\sigma}_{ij})_n^m$, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій $\{R\}_n^m$, обчислюються за формулою:

$$(\overline{\sigma}_{ij})_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} (\sigma_{ij})_n^m + (\overline{s}^{ij})_n^m = (\sigma_o)_n^m + (\overline{s}^{ij})_n^m, \quad (25)$$

де $(\overline{s}^{ij})_n^m$ – компоненти девіатора напружень, що враховують прирощення нелінійних деформацій пластичності або повзучості.

Визначення компонент девіатора $(\overline{s}^{ij})_n^m$ дійсних напружень, що входять до формули (25), при наявності деформацій пластичності, здійснюється з урахуванням поточних значень межі текучості τ_s [8]:

$$(\overline{s}^{ij})_n^m = (s^{ij})_n^m \frac{\tau_s}{\tau}, \quad (26)$$

де $\tau = \sqrt{s_{ij}s^{ij}}/2$ – поточне значення інтенсивності дотичних напружень.

Напруження, отримані за формулами (24) – (26), використовуються для подальшого обчислення вектора вузлових реакцій і перевіряються за умовою (7), в разі виконання якої ітераційний процес визначення миттєвих деформацій пластичності припиняється. Далі проводиться обчислення дійсних значень прирощень деформацій пластичності $(\Delta\epsilon_{ij}^p)_m$:

$$\left(\varepsilon_{ij}^p\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_{m-1} + \left(\Delta \varepsilon_{ij}^p\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_{m-1} + \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau_i}\right) \left(\overline{s}_{ij}\right)_m / G_1. \quad (27)$$

При наявності деформацій повзучості на початку кожної ітерації n кроку m компоненти тензора напружень σ_{ij} також обчислюються за формулами (24), (25):

$$\left(\overline{s}_{ij}\right)_n^m = \left(s_{ij}\right)_n^m - G_1 \left(\Delta \varepsilon_{ij}^c\right)_n^m, \quad \left(\Delta \varepsilon_{ij}^c\right)_n^m = \left(\xi_{ij}^c\right)_n^m \Delta t_m, \quad (28)$$

де $G_1 = E / (1 - 2\nu)$; $\left(\xi_{ij}^c\right)_n^m = \frac{3}{2} \left[\xi_i^c\right]_m^n \frac{\left(s_{ij}\right)_n^m}{\left(\sigma_i\right)_n^m}$, $\xi_i^c = \frac{d\varepsilon_i^c}{dt} = \xi_i^c(\sigma_i, \nu_c, T, \omega)$; Δt_m –

величина кроку за часом.

Аналогічно до випадку розгляду деформацій пластичності, отримані за формулами (24), (25), (28), напруження перевіряються за умовою (7), після виконання якої проводиться обчислення прирощень деформацій повзучості $\left(\Delta \varepsilon_{ij}^c\right)_m$ і пошкодженості $\left(\Delta \omega\right)_m$ із використанням напружень, отриманих на останній ітерації кроку, і відповідних накопичених величин $\left(\varepsilon_{ij}^c\right)_m$ і ω_m :

$$\left(\varepsilon_{ij}^c\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^c\right)_{m-1} + \left(\Delta \varepsilon_{ij}^c\right)_m = \left(\varepsilon_{ij}^c\right)_{m-1} + \left(\xi_{ij}^c\right)_m \Delta t_m, \quad (29)$$

$$\omega_m = \omega_{m-1} + \left(\Delta \omega\right)_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_m \Delta t_m.$$

Формули (24), (25), (27)–(29) є інваріантними щодо конкретизованого вигляду виразів ξ_i^c і $\frac{d\omega}{dt}$.

У кінці кожного кроку для всіх точок тіла здійснюється перевірка умови локальної втрати несучої здатності матеріалу:

$$\omega > \omega^*, \quad (30)$$

де ω^* – критичне значення параметра пошкодженості, що відповідає моменту руйнування матеріалу.

Теоретично $\omega^* = 1$ [5], але при чисельному розв'язанні задач для ξ_i^c і $\frac{d\omega}{dt}$ приймається $\omega^* = 0,9 - 0,99$ [1].

Момент часу t^* , коли хоч в одному із СЕ задовільняється умова (30), фіксується як момент переходу від процесу накопичення пор і несущіностей у матеріалі, що враховуються інтегрально за допомогою параметра пошкодженості, до процесу зародження макроскопічних дефектів. Моделювання їхнього розвитку до утворення початкових тріщин може бути продовжено на основі співвідношень континуальної механіки руйнування.

Ефективність і вірогідність розв'язання задач термов'язкопружнопластичності. Для дослідження ефективності викладеного алгоритму і вірогідності отримуваних результатів при наявності деформацій пластичності розглянуто тестовий приклад про деформування нескінченної товстостінної труби (рис. 1) від впливом внутрішнього тиску, який змінюється від 0 до $p_{\max} = 0.07 \text{ МН} / \text{м}^2$, характеристики матеріалу: $E = 1 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$. Розрахунок проведений до фрагмента труби, обмеженого двома перпендикулярними до її осі поперечними перерізами, дискретна модель якого побудована із використанням косокутних призматичних СЕ.

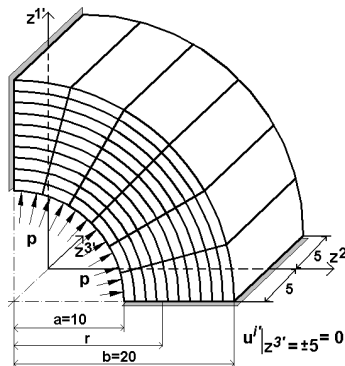


Рис.1. Дискретна модель НМСЕ для товстостінної труби

При поступовому збільшенні навантаження від 0 до $p_{\max} = 0.07 \text{ МН} / \text{м}^2$ зона пластичних деформацій (зона пластичності) поступово розповсюджувалась від внутрішньої поверхні на всю стінку труби.

Розв'язання даного тестового прикладу засвідчило, що кількість ітерацій розв'язання задачі НМСЕ із застосуванням алгоритму з екстраполяцією переміщень дозволяє скоротити обчислювальні витрати більше ніж в два рази (табл.1). При цьому зберігається достатньо висока

точність отриманих результатів (похибка менше 2%) порівняно з еталонний розв'язком отриманим в роботі [7].

Таблиця 1

$P, МН / м^2$	Еталон	Алгоритм без екстраполяції переміщень		Алгоритм з екстраполяцією переміщень (9)	
	Величина кільцевого напруження $\sigma_{\theta'\theta'}$ і загальна кількість ітерацій N				
	$\sigma_{\theta'\theta'}$, МПа	$\sigma_{\theta'\theta'}$, МПа	N	$\sigma_{\theta'\theta'}$, МПа	N
0.037	0.0571	0.0575	9	0.0575	9
0.051	0.0541	0.0531	16	0.0535	14
0.059	0.0462	0.0456	36	0.0453	23
0.064	0.0412	0.0409	73	0.0404	35
0.07	0.0374	0.037	125	0.0367	57

Термопружнопластичний розрахунок нерівномірно нагрітого куба. Розглядаємо термопружнопластичний напружений стан статично визначеного куба розмірами $10 \times 10 \times 10$ мм, що знаходиться в природному стані при температурі $T_0 = 20^\circ \text{C}$, а потім піддається нерівномірному нагріву при відсутності об'ємних і поверхневих сил [3]. Оскільки куб має три площини симетрії, для дослідження була взята восьма частина куба, дискретна модель якої наведена на рис.2.

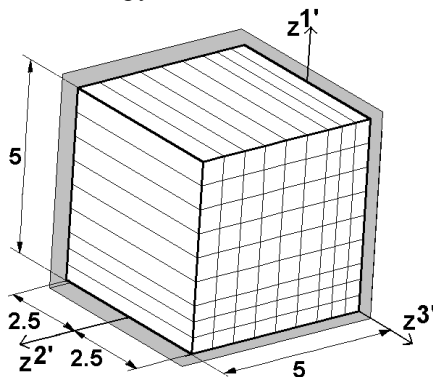


Рис.2. Розрахункова дискретна модель

Температурне поле в кубі характеризується функцією:

$$T = 800 \cos \pi z^1 \cos \pi z^2 \cos \pi(z^3 + 2.5)$$

Механічні характеристики не залежать від температури і мають наступний вигляд: $E = 1.96 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 1/3$, $\alpha_T = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}$.

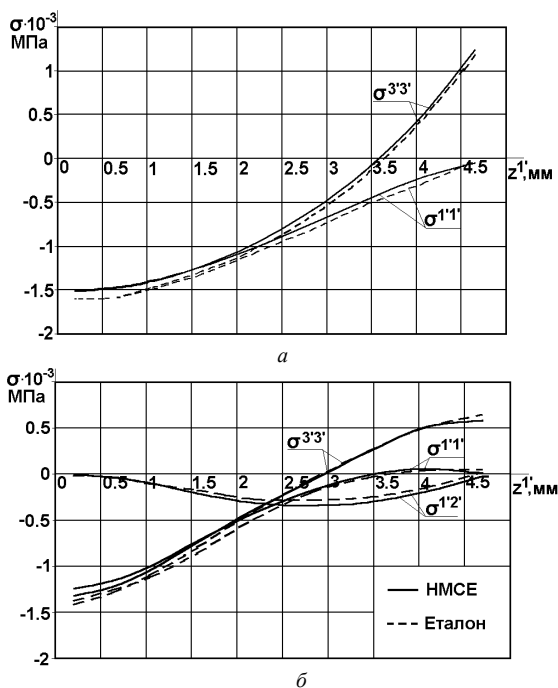


Рис. 3. Змінення напружень в поперечному перерізі куба

На рис.3 показана зміна компонентів напружень в залежності від координати z^1 : при пружному деформуванні куба (рис. 3,а) при $z^{2'} = 0.625 \text{ мм}$, $z^{3'} = -1.875 \text{ мм}$; при пружнопластичному деформуванні (рис. 3,б) при $z^{3'} = -1.875 \text{ мм}$, $z^{1'} = z^{2'}$.

Порівняння параметрів напруженого стану куба результатів при пружному і пружнопластичному деформуванні отриманих за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів з результатами наведеними в роботі [3] показало, що в зоні максимальних значень напружень їх розбіжність складає менше 5%.

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок, що нормальні напруження досягають своїх максимальних значень в центрі куба і навколо його поверхні. Причому, в центрі куба реалізується

напружений стан близький до всебічного стиску, а зниження рівня напружень за рахунок виникнення пластичних деформацій досягає 34%.

В даній задачі застосування алгоритму з екстраполяцією переміщень (9) дозволяє зменшити загальну кількість ітерацій більш ніж в два рази порівняно з розв'язком за алгоритмом, що не враховує екстраполяцію переміщень.

Висновки. В даній роботі описаний покроковий алгоритм розв'язання просторової задачі термов'язкопружнопластичності призматичних тіл. Відмінність пропонованого алгоритму полягає у використанні екстраполяції переміщень поточного кроку на основі відомих величин переміщень попереднього кроку та даних про змінення параметрів зовнішнього навантаження. Отримані вирази для визначення величин температурних деформацій та обчислення напружень за наявності деформацій пластичності та повзучості. Достовірність отримуваних результатів розв'язання задач та ефективність застосування алгоритму доведена на тестових прикладах. Застосування алгоритму з екстраполяцією переміщень дозволяє зменшити обсяг обчислювальних витрат 1,5–3 рази в залежності від розглядуваної задачі.

Таким чином, отримані в роботі [2] розв'язувальні співвідношення НМСЕ для косокутного СЕ та приведений вище алгоритм складають методику розв'язання задач термов'язкопружнопластичності для призматичних тіл складної форми.

1. *Баженів В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
2. *Баженів В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченного елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності нмсе. // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2005. – вип. 76. – с. 3–26.
3. *Павлычко В.М.* Решение трехмерных задач термопластичности при простых процессах нагружения. // Проблемы прочности. –1986. – №1. –с. 77-81.
4. *Пискунов С.О.* Ефективність ітераційних алгоритмів розв'язання задач в'язкопружно-пластичності в межах напіваналітичного методу скінченних елементів. // Науковий вісник Національного технічного університету України „КПІ”. № 46, 2005 г.
5. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. – 732 с.
6. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учётом жестких смещений. // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып. 24. – с. 147-156.
7. *Соколовский В.Н.* Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969.– 214 с.
8. *Уилкинс М.Л.* Расчет упруго-пластических течений. – В кн.: Вычислительные методы в гидротехнике. – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.