

ІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

ОПР МАТЕРІАЛІВ
з основами теорії пружності.
Змістовий модуль 4.
Основи теорії пружності

Методичні рекомендації
до виконання самостійної роботи
та дистанційного навчання
здобувачів другого (магістерського) рівня
вищої освіти спеціальності 192
«Будівництво та цивільна інженерія»
ОП «Промислове і цивільне будівництво»

Київ 2024

УДК 539.3

О-61

Укладачі: Л. О. Григор'єва, канд. фіз.-мат. наук, доцент;

Д. В. Левківський, канд. техн. наук, доцент;

Д. В. Пошивач, старш. викладач

Рецензент О.П. Корбаков, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск О.П. Кошевий, канд. техн. наук,
завідувач кафедри

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів,
протокол № 6 від 3 квітня 2024 року.*

В авторській редакції.

О-61 **Опір** матеріалів з основами теорії пружності. Змістовий модуль 4.

Основи теорії пружності: методичні рекомендації до виконання самостійної роботи та дистанційного навчання / уклад.: Григор'єва Л. О., Левківський Д. В., Пошивач Д.В. – Київ : КНУБА, 2024. – 56 с.

Містять теоретичні відомості, приклади оформлення звітів та завдання до виконання розрахунково-графічної роботи №4.

Призначено для здобувачів вищої освіти спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» ОП «Промислове і цивільне будівництво».

©КНУБА, 2024

ЗМІСТ

Загальні положення.....	4
1. ТЕОРЕТИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МЕХАНІКИ	
ДЕФОРМУВАННЯ ТВЕРДИХ	5
1.1. Напруження . Рівняння рівноваги.....	5
1.2. Тензор напружень.....	8
1.3. Девіатор тензора напружень.....	14
1.4. Деформації. Тензор деформацій. Девіатор тензора деформацій.....	16
1.5. Узагальнений закон Гука.....	19
1.6. Постановка задач теорії пружності.....	20
1.7. Граничний стан. Теорії міцності.....	21
Контрольні запитання.....	25
2. АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ	
ЗА ЗАДАНИМ ТЕНЗОРОМ НАПРУЖЕНЬ.....	26
2.1. Постановка задачі.....	26
2.2. План виконання завдання.....	26
2.3. Приклад.....	26
3. РОЗРАХУНОК ВІСЕСИМЕТРИЧНОГО РЕЗЕРВУАРА.....	41
3.1. Внутрішні зусилля в оболонках.....	41
3.2. Тонкостінний резервуар.....	42
3.3. Умова міцності резервуара.....	43
3.4. Розпірні кільця в оболонках.....	48
3.5. Приклад розрахунку тонкостінного резервуара	48
Контрольні запитання	51
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	52
ДОДАТКИ.....	53

Загальні положення

Методичні рекомендації описують теоретичні співвідношення механіки деформування твердого тіла та порядок виконання розрахунково-графічної роботи «Аналіз просторового напруженого стану». Ця робота входить в загальний цикл робіт з курсу опору матеріалів і теорії пружності для здобувачів вищої освіти спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» ОП «Промислове і цивільне будівництво».

Перед виконанням завдань необхідно опрацювати відповідні розділи теоретичного курсу, які достатньо широко освітлено в п.1 методичних вказівок.

В п.2 наводиться постановка задач, план виконання завдання та числовий приклад. Дані для індивідуальних завдань вибираються з додатків відповідно до шифру, виданого викладачем у вигляді тризначного числа.

Робота виконується на аркушах А4 (297×210 мм), які зшиваються в альбом з лівої сторони. Завдання повинно мати титульний аркуш за формою, наведеною в дод. 1. Розрахунки та пояснення слід писати на одному боці аркуша кульковою ручкою, рисунки дозволяється виконувати олівцем. Виконуючи кожен етап розрахунку, спочатку наводиться розрахункова формула, підставляються числові дані, а потім записується кінцевий результат з одиницею виміру отриманої величини.

Під час здачі роботи студент повинен захистити основні її положення, відповісти на теоретичні питання і вміти розв'язувати задачі в обсязі відповідного розділу курсу.

1. ТЕОРЕТИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ МЕХАНІКИ ДЕФОРМУВАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА

1.1. Напруження. Рівняння рівноваги

Тверді тіла знаходяться під впливом зовнішніх сил. Зовнішні сили бувають поверхневі, які прикладені до поверхні тіла, і об'ємні, або масові, які діють у внутрішніх точках тіла. При навантаженні зовнішніми силами тіло деформується. При деформуванні твердого тіла в ньому виникають внутрішні сили. Для їх аналізу користуються методом перерізів та аксіомою отвердіння і аксіомою звільнення від в'язей. Мірою внутрішніх сил в малому околі точки M на елементарній площадці площею dA із зовнішньою нормаллю \mathbf{n} є напруження $\boldsymbol{\sigma}_n$, яке дорівнює граничному значенню відношення сили \mathbf{F}_n , що діє на цю площадку, до її площі dA , коли остання прямує до нуля

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_n}{dA}. \quad (1.1)$$

Напруження вимірюються в паскалях ($Pa = \frac{H}{m^2}$).

Таким чином в довільній точці M тіла кожному одиничному вектору нормалі \mathbf{n} , що визначає орієнтацію нескінченно малої площадки, ставиться у відповідність вектор напружень $\boldsymbol{\sigma}_n$. Сукупність всіх пар векторів $\boldsymbol{\sigma}_n$ та \mathbf{n} в точці M визначає напружений стан в цій точці. Для опису напруженого стану в точці достатньо задати вектори напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках з одиничними векторами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, які є ортами декартових прямокутних координатних вісей x, y, z з правосторонньою орієнтацією. На цих площадках будуть діяти вектори напружень $\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z$ з компонентами $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}; \sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}; \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$ (перший індекс вказує номер площадки, другий індекс – номер осі, вздовж якої направлена складова вектора). Напруження $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ називаються нормальними, а $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$ – дотичними напруженнями. На рис. 1.1 показані додатні напрямки напружень.

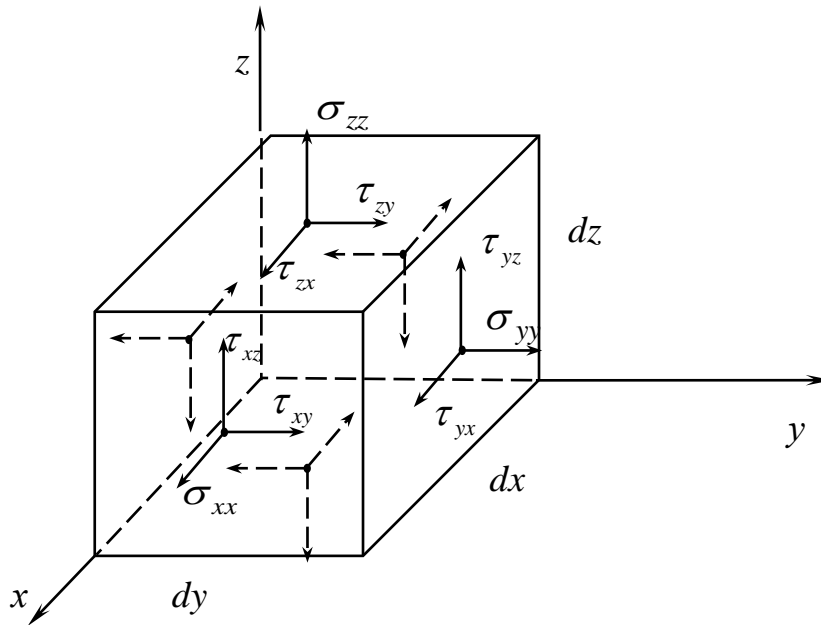


Рис. 1.1. Напруження на гранях елементарного паралелепіпеда

На довільній елементарній площадці з одиничною нормаллю \mathbf{n} , напрямні косинуси якої n_1, n_2, n_3 , діє вектор напружень $\boldsymbol{\sigma}_n$. Його компоненти $\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz}$ (проекції на координатні осі x, y, z) (рис. 1.2) визначаються за формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{nx} &= \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z, \\ \sigma_{ny} &= \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z, \\ \sigma_{nz} &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z\end{aligned}\quad (1.2)$$

через напруження на площадках, перпендикулярних координатним осям x, y, z .

Ці формули одержані з умов рівноваги трикутної призми (рис. 1.2), яку утворено шляхом зміщення похилої елементарної площадки з нормаллю \mathbf{n} на $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ з точки O , через яку вона проходить.

Знаючи компоненти $\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz}$ вектора $\boldsymbol{\sigma}_n$, знаходимо його модуль

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2}\quad (1.3)$$

Проекція σ_{nn} вектора повного напруження $\boldsymbol{\sigma}_n$ на одиничну нормаль \mathbf{n} дорівнює

$$\sigma_{nn} = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \sigma_{nn} = \sigma_{nx} \cdot n_x + \sigma_{ny} \cdot n_y + \sigma_{nz} \cdot n_z\quad (1.4)$$

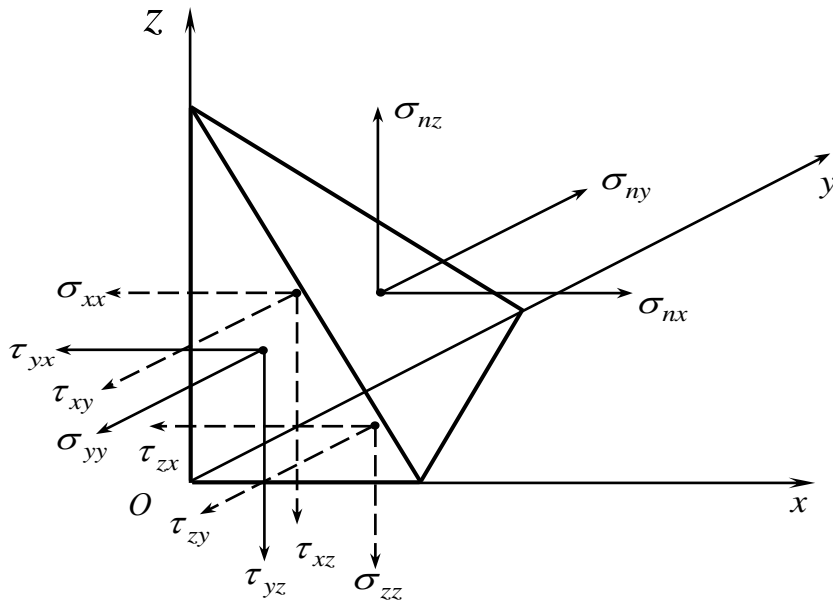


Рис. 1.2. Рівновага елементарного тетраедра

Векторна різниця

$$\boldsymbol{\sigma}_n - \sigma_{nn} \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_{ns} \quad (1.5)$$

вектора повного напруження $\boldsymbol{\sigma}_n$ і вектора нормального напруження $\sigma_{nn} \mathbf{n}$ є вектором дотичного напруження $\boldsymbol{\tau}_{ns}$, який лежить в площині, перпендикулярній до нормалі \mathbf{n} . Векторна нормальна складова σ_{nn} вектора повного напруження $\boldsymbol{\sigma}_n$ повністю характеризується її проекцією σ_{nn} на зовнішню одиничну нормаль \mathbf{n} ; для векторної дотичної складової $\boldsymbol{\tau}_{ns}$ такої можливості немає до тих пір, поки не буде введена плоска система одиничних взаємноперпендикулярних векторів $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ на елементарній площадці (вектори $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{n}$ повинні утворювати праву трійку). Модуль τ_{ns} вектора дотичного напруження знаходиться за теоремою Піфагора

$$\tau_{ns} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}_n^2 - \sigma_{nn}^2}. \quad (1.6)$$

З умов рівноваги нескінченно малого паралелепіпеда (рис.1.3), а саме рівності нулеві головного моменту і головного вектора сил, що діють на нього, знаходяться співвідношення

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad (1.7)$$

які називаються *правилом парності дотичних напружень*, і диференціальні рівняння рівноваги в частинних похідних

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.8}$$

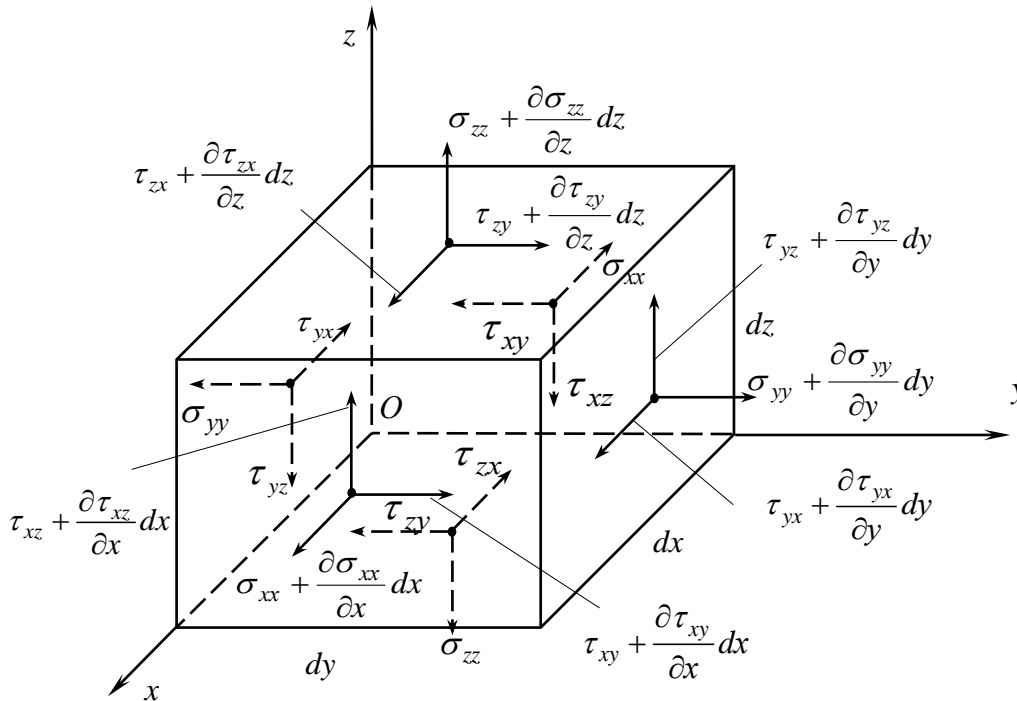


Рис. 1.3. Напруження на гранях елементарного паралелепіпеда

Масові сили F_x, F_y, F_z на одиницю об'єму мають розмірність $\frac{H}{M^3}$.

1.2. Тензор напружень

Сукупність напружень на трьох взаємно перпендикулярних площадках, які проходять через вибрану точку тіла, утворюють симетричний тензор напружень другого рангу і записуються в вигляді матриці

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}
\tag{1.9}$$

Тензор – це сукупність величин, які при переході від системи координат x, y, z до іншої системи координат x', y', z' перетворюються по закону

$$\sigma_{i'j'} = \lambda_{i'm} \lambda_{j'n} \sigma_{mn} \quad , \quad (1.10)$$

де

$$\lambda_{i'm} = \cos(x'_i, x_m) \quad (1.11)$$

– направляючі косинуси осей x'_i відносно осей x_m .

У формулі (1.10) і далі застосовується тензорне правило сумування по “німих” індексах $a_j b_j = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, $j = x, y, z$.

Формули перетворення (1.10) виводяться на основі залежностей (1.2), записаних у вигляді

$$\sigma_{i'n} = \sigma_{mn} \lambda_{i'm} \quad (1.12)$$

та формул проектування векторів $\sigma_{i'}$ на осі x'_1, x'_2, x'_3

$$\sigma_{i'j'} = \sigma_{i'n} \lambda_{j'n}, \quad (1.13)$$

почергове застосування яких $\sigma_{i'j'} = \lambda_{i'm} \lambda_{j'n} \sigma_{mn}$ приводить до правила (1.10) перетворень компонент тензора напружень.

У науковій літературі для напружень частіше вживаються позначення

$$\sigma_{11} = \sigma_x, \quad \sigma_{22} = \sigma_y, \quad \sigma_{33} = \sigma_z,$$

$$\sigma_{12} = \tau_{xy}, \quad \sigma_{13} = \tau_{xz}, \quad \sigma_{23} = \tau_{yz}$$

в системі координат $x_1 \approx x, x_2 \approx y, x_3 \approx z$.

У кожній точці тіла існують три взаємно перпендикулярні площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулеві. Ці площадки називаються *головними*; нормальні напруження на цих площадках називаються *головними нормальними напруженнями*. Головні нормальні напруження і одиничні вектори головних площадок визначаються з системи трьох однорідних рівнянь

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma) n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= 0, \\ \tau_{yx} n_x + (\sigma_{yy} - \sigma) n_y + \tau_{yz} n_z &= 0, \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + (\sigma_{zz} - \sigma) n_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

за умови $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. З умови існування ненульового (нетривіального) розв'язку (1.14) одержимо кубічне рівняння для визначення головних напружень

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0. \quad (1.15)$$

Коефіцієнти цього рівняння

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \\ I_2 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_3 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

називаються *інваріантами*, так як вони не залежать від напрямку координатних осей. Головні напруження (корені рівняння (1.15)) будемо позначати, дотримуючись умови $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Для кожного σ_i по розв'язку системи (1.14) знаходяться одиничні вектори $\mathbf{n}^{(i)}$ головних площадок, дотримуючись умови

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (1.17)$$

і правосторонньої їх орієнтації, тобто

$$\mathbf{n}^{(1)} \times \mathbf{n}^{(2)} = \mathbf{n}^{(3)}. \quad (1.18)$$

Для визначення коренів кубічного рівняння (1.15) (головних напружень $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) треба скористатися стандартною програмою (MatLab, MathCad або ін.) знаходження коренів алгебраїчних рівнянь.

Для визначення головних напружень і головних площадок можна також скористатися стандартною програмою сучасних обчислювальних комплексів для визначення власних значень і власних векторів симетричної матриці з дійсними компонентами

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Тензору напружень можна поставити в відповідність деякий геометричний об'єкт, тобто надати тензору *геометричну інтерпретацію*.

Позначимо головні осі тензора напружень як x_1, x_2, x_3 . В такому разі для напружень на довільній площадці з напрямними косинусами n_1, n_2, n_3 (відносно головних осей) нормалі \mathbf{n} до неї з формул (1.2) одержимо

$$\sigma_{n1} = \sigma_1 n_1, \quad \sigma_{n2} = \sigma_2 n_2, \quad \sigma_{n3} = \sigma_3 n_3. \quad (1.19)$$

Оскільки

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (1.20)$$

то прийнявши в (1.19) $x_1 = \sigma_{n1}$, $x_2 = \sigma_{n2}$, $x_3 = \sigma_{n3}$, побудуємо еліпсоїд

$$\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{x_3^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad (1.21)$$

Еліпсоїд (1.21) називається *еліпсоїдом Ламе* (рис. 1.4); він дає просторове геометричне зображення тензора напружень.

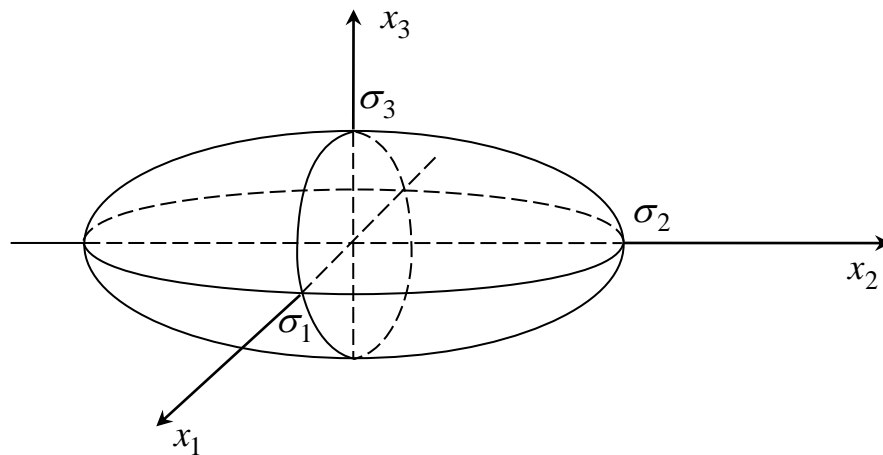


Рис. 1.4. Еліпсоїд Ламе

Координати кожної точки на поверхні еліпсоїда Ламе визначають напруження σ_{n1} , σ_{n2} , σ_{n3} (1.19) на площадці з заданою нормаллю (n_1, n_2, n_3) .

По еліпсоїду Ламе безпосередньо видно, що головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (півосі еліпсоїда Ламе) приймають *екстремальні значення*.

Якщо задана нормаль (n_1, n_2, n_3) , то напруження $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}$, а значить і відповідна точка на еліпсоїді, визначаються за формулами (1.19); якщо ж задана точка на еліпсоїді, тобто відомі напруження $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}$, то по формулах (1.19) можна знайти нормаль (n_1, n_2, n_3) до площадки, на якій ці напруження діють.

Плоске зображення тензора напружень дає *кругова діаграма Мора*. Якщо координати x, y, z співпадають з головними осями тензора напружень, то для проекції

$$\sigma_{nn} = \sigma_{n1}n_1 + \sigma_{n2}n_2 + \sigma_{n3}n_3$$

вектора напружень σ_n на нормаль до площадки з (1.19) матимемо

$$\sigma_{nn} = \sigma_1n_1^2 + \sigma_2n_2^2 + \sigma_3n_3^2. \quad (1.22)$$

Для квадрату модуля повного напруження σ_n по (1.19) одержимо

$$\sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2. \quad (1.23)$$

Оскільки по (1.5) або (1.6)

$$\sigma_n^2 = \sigma_{nn}^2 + \sigma_{ns}^2, \quad (1.24)$$

де σ_{nn} – проекція на нормаль \mathbf{n} повного напруження (нормальне напруження), σ_{ns} – проекція на площадку з нормаллю \mathbf{n} повного напруження (дотичне напруження), то за формулами (1.22), (1.23), (1.24) можна визначити лише модуль дотичного напруження

$$\sigma_{ns} = \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2}. \quad (1.25)$$

Побудуємо в координатах σ_{nn} , σ_{ns} круги з радіусами

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad (1.26)$$

як показано на рис. 1.5.

Кожна пара напружень σ_{nn} , σ_{ns} , що визначаються за формулами (1.22), (1.25), лежать в заштрихованій області на рис. 1.5.

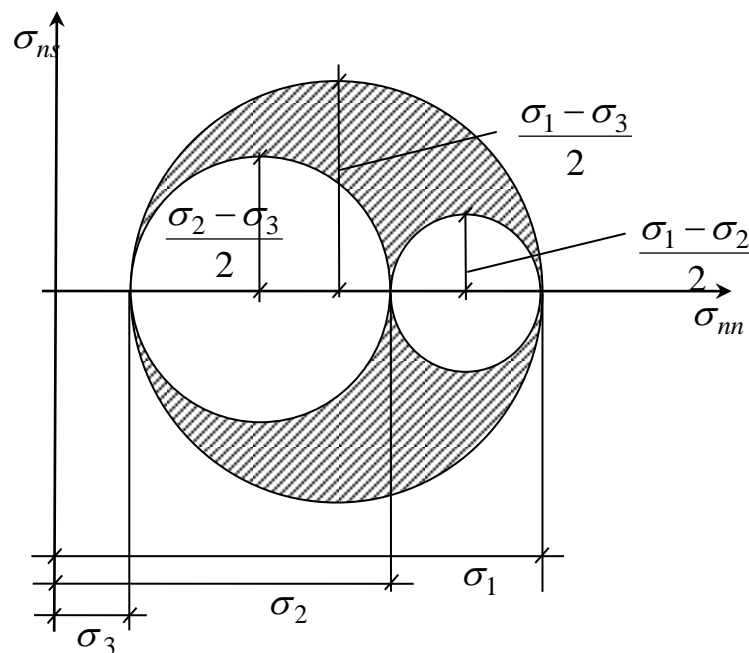


Рис. 1.5. Кругова діаграма Мора

Оскільки знак дотичного напруження за формулою (1.25) не визначається, то прийнято показувати тільки верхню половину (рис.1.6) симетричної діаграми з рис. 1.5.

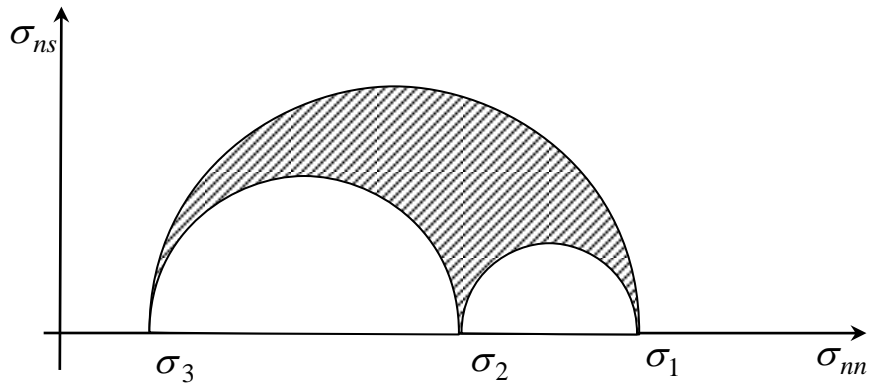


Рис. 1.6. Кругова діаграма Мора

Якщо задано нормаль n_1, n_2, n_3 до площадки, то по формулах (1.22), (1.25) знайдемо координати точки на діаграмі Мора, яка відповідає нормальному і дотичному (з точністю до знаку) напруженням на цій площадці.

З діаграми Мора безпосередньо видно, що екстремальні дотичні напруження, які ще називаються *головними*, дорівнюють

$$\tau^{(23)} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau^{(12)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau^{(13)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1.27)$$

Вони діють на площадках, які ділять навпіл кути між головними напруженнями (знаходяться під кутом 45° до головних площадок).

На цих площадках нормальні напруження не рівні нулеві і, як випливає з діаграми 1.5, дорівнюють

$$\sigma^{(23)} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \sigma^{(12)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \sigma^{(13)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (1.28).$$

Найбільше дотичне напруження

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad (1.29)$$

оскільки приймається, що $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Діаграми Мора для різних напружених станів вважаються подібними, якщо вони мають однакові *параметри Лоде* (або Надаї–Лоде [2]), який визначається через головні напруження $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, або точніше через головні дотичні напруження, за формулою [2]

$$X_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \Rightarrow X_\sigma = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (1.30)$$

Для одноосного розтягування ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) параметр Лоде $X_\sigma = -1$, для одноосного стискування ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$) $X_\sigma = 1$, для чистого зсуву ($\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$) $X_\sigma = 0$.

1.3. Девіатор тензора напружень

Тензор напружень

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

можна розкласти на сферичну і девіаторну складові

$$\begin{aligned} T_\sigma &= T_{\sigma_0} + D_\sigma, \\ T_{\sigma_0} &= \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}, \\ D_\sigma &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

де $\sigma_0 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$ – напруження гідростатичного тиску.

Завдяки такому вибору σ_0 перший інваріант девіатора напружень дорівнює нулеві, тобто інваріанти девіатора напружень будуть такими

$$\begin{aligned} I_1(D_\sigma) &= 0, \\ I_2(D_\sigma) &= s_{11}s_{22} + s_{22}s_{33} + s_{11}s_{33} - s_{12}^2 - s_{23}^2 - s_{31}^2, \\ I_3(D_\sigma) &= \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Доцільність розкладу (1.32) обумовлена дослідними даними, з яких випливає, що при всебічному розтягуванні або стискуванні в матеріалах не виникають пластичні деформації.

Другий інваріант $I_2(D_\sigma)$ через компоненти тензора T_σ виражається так:

$$I_2(D_\sigma) = -\frac{1}{6} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \quad (1.34)$$

Якщо ввести інтенсивність нормальних напружень

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (1.35)$$

то тоді

$$\sigma_i = \sqrt{-3I_2(D_\sigma)}. \quad (1.36)$$

Головні напруження девіатора напружень D_σ визначаються з неповного кубічного рівняння

$$s^3 + I_2(D_\sigma)s - I_3(D_\sigma) = 0. \quad (1.37)$$

Розв'язок цього рівняння можна подати [2] в тригонометричній формі

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{3} \sigma_i \cos \psi_\sigma, & s_2 &= \frac{2}{3} \sigma_i \cos(\psi_\sigma + \frac{4\pi}{3}), \\ s_3 &= \frac{2}{3} \sigma_i \cos(\psi_\sigma + \frac{2\pi}{3}). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Кут ψ_σ , який прийнято називати кутом подібності девіатора напружень або кутом вигляду напруженого стану, визначається через другий і третій інваріанти девіатора напружень за формулою

$$\cos 3\psi_\sigma = \frac{27 I_3(D_\sigma)}{2 \sigma_i^3} \Rightarrow \cos 3\psi_\sigma = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3(D_\sigma)}{\sqrt{-I_2^3(D_\sigma)}}, \quad (1.39)$$

яку можна отримати з рівності

$$I_3(D_\sigma) \equiv s_1 s_2 s_3 = \frac{8}{27} \sigma_i^3 \cos \psi_\sigma \cos(\psi_\sigma + \frac{2\pi}{3}) \cos(\psi_\sigma + \frac{4\pi}{3}).$$

Якщо підставити значення (1.38) головних напружень $\sigma_i = s_i + \sigma_0$ в формулу (1.30) для параметра Лоде (параметра Надаї–Лоде, [2]), то одержимо зв'язок між кутом ψ_σ і параметром Лоде

$$X_\sigma = -\sqrt{3} \operatorname{ctg}(\psi_\sigma + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow X_\sigma = \sqrt{3} \operatorname{tg}(\psi_\sigma - \frac{\pi}{6}) \quad (1.40)$$

Зауважимо, що формули (1.38) записуються в різних виглядах [2, 4, 7], які відрізняються один від одного різним вибором кута ψ_σ .

Оскільки параметр Лоде змінюється в межах $-1 \leq X_\sigma \leq +1$, то кут подібності девіаторів ψ_σ , як це випливає з (1.40), змінюється в межах $0 \leq \psi_\sigma \leq \frac{\pi}{3}$.

На основі формули (1.40) робимо висновок, що для одноосного розтягування ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) кут подібності девіатора $\psi_\sigma = 0$ (параметр Лоде $X_\sigma = -1$), для одноосного стискування ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 \neq 0$) кут подібності девіатора $\psi_\sigma = \frac{\pi}{3}$ (параметр Лоде $X_\sigma = 1$), для чистого зсуву ($\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$) кут подібності девіатора $\psi_\sigma = \frac{\pi}{6}$ (параметр Лоде $X_\sigma = 0$).

Трьох рівнянь рівноваги (1.8) недостатньо для визначення шести напружень. Для повної математичної постановки задачі треба до трьох рівнянь (1.8) відносно шести невідомих функцій σ_{ik} приєднати шість формул Коші для деформацій і шість залежностей між напруженнями і деформаціями.

1.4. Деформації.

При деформуванні твердого тіла змінюються його об'єм і форма. Характеристиками цієї зміни є деформації. Формули Коші

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \varepsilon_z = \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{yx} &= 2\varepsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.41)$$

виражають деформації через компоненти вектора переміщень $\mathbf{u}(x, y, z) = (u, v, w)$ матеріальної точки.

Деформації $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ називаються *лінійними* деформаціями, $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – *деформаціями зсуву*, $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{yz}$ – *кутовими* деформаціями.

Деформації (1.41) також утворюють симетричний тензор деформацій

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

що можна показати шляхом перетворення величин ε_{ij} в системі координат x, y, z до їх значень $\varepsilon_{i'j'}$ в системі координат x', y', z' .

В літературі для деформацій вживаються також позначення

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_y, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_z, \\ 2\varepsilon_{23} = \gamma_{yz}, \quad 2\varepsilon_{31} = \gamma_{zx}, \quad 2\varepsilon_{12} = \gamma_{xy} \end{aligned}$$

в координатах $x_1 \approx x, x_2 \approx y, x_3 \approx z$.

Тензор деформацій T_ε і тензор напружень T_σ мають подібні властивості.

Головні деформації і головні напрямки визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon)n_x + \varepsilon_{xy}n_y + \varepsilon_{xz}n_z = 0, \\ \varepsilon_{yx}n_x + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon)n_y + \varepsilon_{yz}n_z = 0, \\ \varepsilon_{zx}n_x + \varepsilon_{zy}n_y + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon)n_z = 0 \end{cases} \quad (1.46)$$

при умові $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Для визначення головних деформацій з (1.46) одержимо кубічне рівняння

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 + I_2\varepsilon - I_3 = 0, \quad (1.47)$$

коефіцієнти якого є інваріантами тензора деформацій

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \\ I_2 &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2, \\ I_3 &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx} - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{yy}\varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xy}^2. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Екстремальні зсувні деформації

$$\varepsilon^{(23)} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2}, \quad \varepsilon^{(12)} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}, \quad \varepsilon^{(13)} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \quad (1.49)$$

виникають на площадках, що ділять пополам прямі кути між площинами головних деформацій.

Тензор деформацій (1.42) можна розкласти на сферичну і девіаторну складові

$$T_\varepsilon = T_{\varepsilon 0} + D_\varepsilon,$$

$$T_{\varepsilon 0} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}, \quad D_\varepsilon = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.50)$$

де $3\varepsilon_0 = \Theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$, Θ – об’ємна деформація, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0$.

Головні деформації девіатора деформацій D_ε визначаються з неповного кубічного рівняння

$$e^3 + I_2(D_\varepsilon)e - I_3(D_\varepsilon) = 0. \quad (1.51)$$

Інваріанти девіатора деформацій дорівнюють

$$I_1(D_\varepsilon) = 0,$$

$$I_2(D_\varepsilon) = e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{11}e_{33} - e_{12}^2 - e_{23}^2 - e_{31}^2,$$

$$I_3(D_\varepsilon) = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.52)$$

Другий інваріант девіатора деформацій через компоненти тензора деформацій T_ε знаходиться за формулою

$$I_2(D_\varepsilon) = -\frac{1}{6} \left[(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) \right]$$

Інтенсивність нормальних деформацій

$$\varepsilon_i = \sqrt{-\frac{4}{3}I_2(D_\varepsilon)}, \quad (1.53)$$

тобто

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)}. \quad (1.54)$$

1.5. Узагальнений закон Гука

Лінійні матеріальні залежності між напруженнями і деформаціями (узагальнений закон Гука) для ізотропного пружного тіла записується в прямій формі

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)); \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad (1.55)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)); \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},$$

або в оберненій формі

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z; & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}; \\ \sigma_x &= \lambda\varepsilon_x + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}; \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z; & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Пружні сталі Ламе λ, μ пов'язані з технічними пружними сталими (модулем пружності першого роду (модулем Юнга) E , модулем пружності другого роду (модулем зсуву) G , коефіцієнтом Пуассона ν) формулами

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G. \quad (1.57)$$

Для ізотропного пружного тіла з трьох технічних сталей E, G, ν незалежними є дві, оскільки між ними існує співвідношення

$$2(1 + \nu)G = E. \quad (1.58)$$

Скориставшись компонентами сферичних тензорів та девіаторів напружень σ_0, s_{ij} та деформацій ε_0, e_{ij} матеріальні залежності можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 3K\varepsilon_0, \\ \frac{e_{11}}{s_{11}} &= \frac{e_{22}}{s_{22}} = \frac{e_{33}}{s_{33}} = \frac{e_{12}}{s_{12}} = \frac{e_{13}}{s_{13}} = \frac{e_{23}}{s_{23}} = \frac{1}{2\mu}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

тобто в теорії пружності ізотропних тіл компоненти девіатора деформацій пропорційні компонентам девіатора напружень. Якщо скористатися (1.59), то з (1.35) та (1.54) одержимо

$$\frac{1}{2\mu} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}. \quad (1.60)$$

Гіпотеза пропорційності компонент девіаторів

$$\frac{e_{11}}{s_{11}} = \frac{e_{22}}{s_{22}} = \frac{e_{33}}{s_{33}} = \frac{e_{12}}{s_{12}} = \frac{e_{13}}{s_{13}} = \frac{e_{23}}{s_{23}} = \psi \quad (1.61)$$

у різних її варіаціях є основною гіпотезою деформування твердих тіл у теоріях пластичності і повзучості.

1.6. Постановка задач теорії пружності

Сукупність диференціальних (1.8) і (1.41) та алгебраїчних (1.55) або (1.56) рівнянь є системою п'ятнадцяти рівнянь відносно п'ятнадцяти невідомих: шести напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$, шести деформацій $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}$, трьох переміщень u, v, w . Вони повинні виконуватися в усіх внутрішніх точках пружного тіла. Система п'ятнадцяти рівнянь може бути спрощена до системи трьох рівнянь відносно трьох переміщень (рівняння Ламе) або до системи шести рівнянь відносно шести напружень (рівняння Бельтрамі–Мітчелла). Для цих рівнянь необхідно сформулювати граничні умови на поверхні тіла. Таких умов повинно бути в кожній точці тіла три, вони вибираються по одній з трьох альтернативних пар

$$\begin{aligned} u|_S = U^0 \quad \text{або} \quad \sigma_{nx}|_S = p_x^0, \\ v|_S = V^0 \quad \text{або} \quad \sigma_{ny}|_S = p_y^0, \\ w|_S = W^0 \quad \text{або} \quad \sigma_{nz}|_S = p_z^0. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Функції U, V, W, p_x, p_y, p_z є відомими функціями точок поверхні

тіла.

Так сформульовані крайові задачі теорії пружності мають єдиний розв'язок (з точністю до переміщення абсолютно твердого тіла).

1.7. Граничний напружений стан. Теорії міцності

Після розв'язання математичної задачі теорії пружності (п. 1.6) треба встановити, чи забезпечує знайдений напружено–деформований стан (НДС) жорсткість та міцність тіла.

Умови жорсткості накладають обмеження на переміщення тіла, а умови міцності накладають обмеження на напружений стан тіла.

Деформативні властивості і міцність матеріалів досліджуються експериментально. Основним експериментом є експеримент на розтягування стандартних зразків. На основі цих досліджень розвиваються теоретичні співвідношення деформування і міцності.

Теорія міцності є однією із складних проблем механіки деформування твердих тіл. Ряд критеріїв міцності можна сформулювати, виходячи з того, що в просторі напружень існує деяка поверхня, при досягненні сукупністю напружень якої матеріал руйнується. Виходячи з цього можна сформулювати критерії міцності. В опорі матеріалів застосовуються декілька варіантів таких критеріїв (теорій міцності).

Якщо для напруженого стану виконується умова граничного стану, то матеріал починає руйнуватися. Для забезпечення міцності вводиться допустиме напруження

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{n_u}.$$

Коефіцієнт запасу міцності n_u завжди більший одиниці, і його раціональний вибір зумовлюється технічними умовами експлуатації тіла.

За *першою теорією міцності* (критерій найбільших нормальних напружень, критерій Галілея або Ранкіна) граничний стан настає при досягненні максимальним нормальним напруженням свого граничного значення. Визначивши головні нормальні напруження $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, рівняння граничного стану можна записати у вигляді

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) = \sigma_u.$$

Ця теорія застосовується переважно для крихких матеріалів, що руйнуються переважно шляхом відриву (крихке руйнування). Граничне напруження σ_u приймається рівним границі тимчасового опору σ_e , тобто $\sigma_u = \sigma_e$.

Таким чином, допустимий напружений стан для крихких матеріалів з однаковими межами граничних напружень при розтягуванні та стискуванні визначається з умови

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) \leq \sigma_{adm}. \quad (1.63)$$

II теорія міцності (критерій найбільших лінійних деформацій, теорія Маріотта): вважаємо, що порушення міцності настає тоді, коли найбільша лінійна деформація ε_{\max} досягає свого небезпечного значення ε_u , що визначається з експерименту на розтяг (стиск). Умова руйнування

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_u.$$

Умова міцності

$$|\varepsilon_{\max}| \leq \varepsilon_{adm} = \frac{\varepsilon_u}{n}.$$

Використовуючи узагальнений закон Гука, виразимо умову міцності через напруження:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) \leq \varepsilon_{adm} = \frac{\sigma_u}{En} = \frac{\sigma_{adm}}{E},$$

або

$$\sigma_{екв}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{adm}. \quad (1.64)$$

Друга теорія міцності виконується для крихких станів матеріалів (легований чавун, сталь після низького отпуску). Формулу (1.64) не можна використовувати для матеріалів, що не підпорядковуються закону Гука або знаходяться за межами пропорційності.

III теорія міцності (критерій найбільших дотичних напружень, теорія Кулона–Ранкіна): вважаємо, що граничний стан настає тоді, коли найбільше дотичне напруження τ_{\max} досягає небезпечного значення τ_u , яке визначається з експерименту на розтяг (стиск). Маємо умову руйнування

$$\tau_{\max} = \tau_u.$$

Умова міцності

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm} = \frac{\tau_u}{n}.$$

З (1.29) отримуємо

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad \tau_u = \frac{\sigma_u}{2}.$$

Отримуємо умову міцності згідно третьої теорії

$$\sigma_{екв}^{III} \leq \sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{n}, \quad \sigma_{екв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (1.65)$$

За **IV теорією міцності** (критерій питомої потенціальної енергії формозміни, теорія Генкі–Губера–Мізеса) граничний стан настає при досягненні інтенсивністю нормальних напружень свого граничного значення. Користуючись формулою (1.35) рівняння граничного стану можна подати у формі

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sigma_u,$$

де еквівалентні напруження за четвертою теорією, також відомі як еквівалентні напруження за Мізесом, визначаються як

$$\sigma_{екв}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}. \quad (1.66)$$

Ця теорія пов'язана з умовою пластичності Генкі–Губера–Мізеса і застосовується для пластичних матеріалів, які руйнуються переважно шляхом зсуву (в'язке (пластичне) руйнування). Граничне напруження σ_u приймається рівним границі текучості σ_s , тобто $\sigma_u = \sigma_s$.

Умова міцності набуває вигляду

$$\sigma_{екв}^{IV} \leq \sigma_{adm}. \quad (1.67)$$

Слід звернути увагу на те, що допустимий напружений стан визначається при досягненні умов міцності в одній найбільш небезпечній точці.

Деформативні і міцнісні характеристики конкретних матеріалів визначаються експериментально. Основним дослідом є розтягування і стиснення стандартних зразків з цих матеріалів. Вони виконуються на розривних машинах різної конструкції. Одержані дані про індивідуальні властивості матеріалів приводяться в довідковій літературі.

В табл. 1 наведено орієнтовні значення густини ρ , деформативних параметрів E, ν , граничних напружень σ_s, σ_θ , температурного коефіцієнту лінійного розширення α для деяких матеріалів.

При проведенні розрахунків слід мати на увазі, що індивідуальні властивості матеріалів визначаються з похибкою п'ять, а то й більше, відсотків.

Таблиця 1

Механічні характеристики матеріалів

Матеріал	Густина	Модуль Юнга	Коефіцієнт Пуассона	Границя текучості	Границя тимчасового опору	Температурний коефіцієнт
	$\rho, 10^3$ кг/м ³	$E, 10^5$ МПа	ν	$\sigma_s,$ МПа	$\sigma_e,$ МПа	$\alpha, 10^{-7}$ град ⁻¹
сталь Ст.3	7,8	2,0	0,3	250	420	125
алюміній, дюралюміній	2,7	0,7	0,34	240	420	255
мідь, бронза	8,5	1,1	0,33	190	250	165
чавун	7,5	1,2	0,25	—	+160/-800	110
скло	2,5	0,56	0,25	—	+50/-500	100
бетон	2,2	0,2	0,17	—	+5/-35	120
граніт	2,5	0,49	0,3	—	+12/-120	120
сосна вздовж волокон	0,5	0,1	—	—	+40/-80	30

Контрольні запитання

1. Що таке напруження?
2. Як визначаються напруження на елементарній площадці?
3. Як отримуються три рівняння рівноваги?
4. Як отримується правило парності дотичних напружень?
5. Що таке тензор напружень?
6. Як визначаються головні напруження і головні площадки?
7. Що таке інваріанти тензора напружень?
8. Як будується еліпсоїд Ламе?
9. Що таке кругова діаграма Мора?
10. Як визначаються екстремальні дотичні напруження?
11. Чому дорівнюють нормальні напруження на площадках з екстремальними дотичними напруженнями?
12. Що таке параметри Лоде?
13. Чому дорівнюють параметри Лоде для простих напружених станів?
14. Як розкласти тензор напружень на сферичну і девіаторну складові?
15. Як визначаються інваріанти девіатора напружень? Який зв'язок між другим інваріантом девіатора і інтенсивністю нормальних напружень?
16. Як формулюються тригонометричні формули для визначення головних напружень девіатора?
17. Чому дорівнює кут подібності девіаторів для простих напружених станів?
18. Як формулюються формули Коші для деформацій?
19. Що таке тензор деформацій? Які його властивості?
20. Як визначається сферична і девіаторна складові тензора деформацій?
21. Як формулюється пряма і обернена форма узагальненого закону Гука?
22. Який зв'язок між пружними сталими Ламе і технічними пружними сталими?
23. Який зв'язок між сферичними і девіаторними компонентами тензорів напружень і деформацій?
24. Як формулюються задачі теорії пружності? Що таке граничні умови?
25. Як визначається граничний напружений стан для пластичних і крихких матеріалів?

2. АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО–ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ (НДС) ЗА ЗАДАНИМ ТЕНЗОРОМ НАПРУЖЕНЬ

2.1. Постановка задачі

Задано компоненти тензора напружень і положення похилої площадки (Додаток 2 згідно шифру). Потрібно визначити значення і напрямки головних напружень, максимальні дотичні напруження, напруження на заданій похилій площадці, оцінити вигляд напруженого стану, перевірити, чи настає граничний стан для конкретних пластичних та крихких матеріалів, визначити пружні деформації.

2.2. План виконання завдання

1. Записати компоненти тензора напружень у вигляді матриці та графічно інтерпретувати окремі випадки напруженого стану.
2. Підготувати вихідні дані для комп'ютерного розрахунку і розшифрувати результати розрахунку.
3. Визначити головні напруження.
4. Визначити положення головних площадок, графічно інтерпретувати напружений стан.
5. Визначити максимальні дотичні напруження.
6. Визначити напруження на заданій похилій площадці, вказати їх на рисунку.
7. Побудувати діаграму Мора. Знайти на діаграмі Мора точку, що відповідає заданій похилій площадці.
8. Розкласти тензор напружень на кульовий тензор і девіатор.
9. Оцінити напружений стан по відношенню до граничного напруженого стану для сталі Ст3 та чавуну (табл. 1).
10. За заданим тензором напружень сформувати тензор деформацій.

2.3. Приклад

Розглядається напружено-деформований стан матеріалу в точці А всередині деякого тіла. Відомий тензор напружень

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & -85 & 58 \\ -85 & -72 & -11 \\ 58 & -11 & 53 \end{bmatrix} \text{ МПа.}$$

Вимагається визначити головні напруження та напрямки головних осей, визначити максимальні дотичні напруження, визначити напруження на похилій площині з напрямними косинусами $n_x = 0.6$, $n_y = -0.7$, $n_z = -0.387$, перевірити настання граничного стану для чавуну та для сталі Ст3, визначити тензор деформацій.

1. Зобразимо графічно компоненти тензора напружень.

На рис. 2.1 у диметричній проекції показано нескінченно малу частку матеріалу у формі куба з вершиною в точці A і гранями, перпендикулярними осям x , y , z . На всіх гранях цього куба показуємо у вигляді векторів відповідні напруження, що діють паралельно осі y . Враховуючи знаки компонент тензора, спрямовуємо вектори згідно з правилом знаків напружень.

На аналогічному рис. 2.2 показуємо всі напруження, що діють на верхній і нижній гранях куба, які перпендикулярні осі z .

На аналогічному рис. 2.3 показуємо всі напруження, що діють на правій, передній і нижній гранях куба, які мають додатну нормаль.

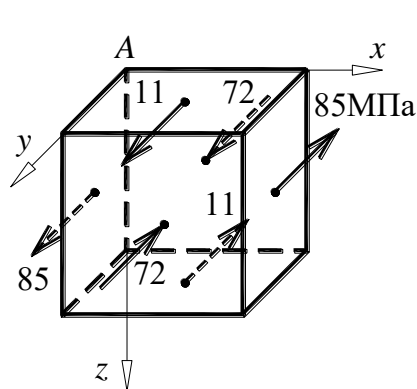


Рис. 2.1

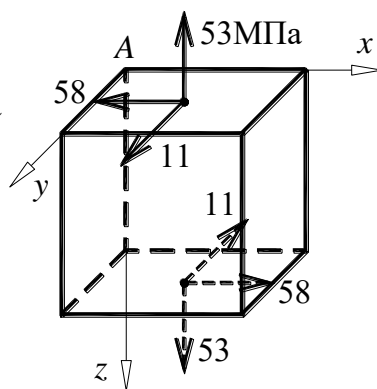


Рис. 2.2

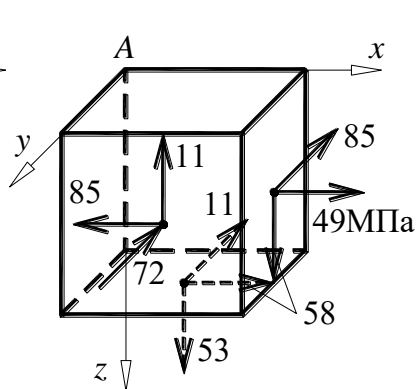


Рис. 2.3

2. Більшість величин, що вимагаються, можуть бути визначені допоміжною програмою "tensor.exe". Підготуємо дані для введення у програму. Обчислимо інваріанти напруженого стану:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 49 - 72 + 53 = 30 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49 & -85 \\ -85 & -72 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 49 & 58 \\ 58 & 53 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -72 & -11 \\ -11 & 53 \end{vmatrix} =$$

$$= 49(-72) - (-85)^2 + 49 \cdot 53 - 58^2 + (-72)53 - (-11)^2 = -15457 \text{ МПа}^2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49 & -85 & 58 \\ -85 & -72 & -11 \\ 58 & -11 & 53 \end{vmatrix} = 49(-72)53 + 2 \cdot (-85)(-11)58 -$$

$$-58^2(-72) - (-85)^2 53 - (-11)^2 49 = -225170 \text{ МПа}^3.$$

Результат розрахунку програми "tensor.exe" показано на рис. 2.4.

КНУБА
Кафедра опору матеріалів
Напружений стан в точці

Тензор напружень

49	-85	58
-85	-72	-11
58	-11	53

Координати нормалі

n = { nx, ny, nz } = { 0.6, -0.7, -0.387 }

Результати розрахунку

Інваріанти

I1 = 30; I2 = -15457; I3 = -225170

Головні напруження

s11 = 133.291 [МПа]; s22 = 14.3589 [МПа]; s33 = -117.65 [МПа].

Положення головних площадок

n1 = { nx1, ny1, nz1 } = { 0.740428, -0.337711, 0.581134 }

n2 = { nx2, ny2, nz2 } = { 0.469313, -0.359177, -0.806683 }

n3 = { nx3, ny3, nz3 } = { 0.481156, 0.870025, -0.107453 }

Компоненти повного вектора напружень на заданій площадці

Pnx = 66.454 [МПа]; Pny = 3.657 [МПа]; Pnz = 21.989 [МПа].

Повний вектор напружень

Pn = 70.093 [МПа]

Нормальні та дотичні напруження на заданій площадці

snp = 28.8028 [МПа] tsn = 63.9017 [МПа]

Еквівалентні напруження за 3 та 4 теорією міцності

seq3 = 250.94 [МПа] seq4 = 217.419 [МПа]

Рис. 2.4

3. Головні напруження σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} діють на головних площинах напруженого стану, що перпендикулярні головним осям напруженого стану x_1 , x_2 , x_3 . Ці напруження задовольняють характеристичне рівняння

$$\sigma_{ii}^3 - I_1 \sigma_{ii}^2 + I_2 \sigma_{ii} - I_3 = 0,$$

де I_1, I_2, I_3 — інваріанти напруженого стану. Запишемо характеристичне рівняння напруженого стану з числовими коефіцієнтами:

$$\sigma_{ii}^3 - 30\sigma_{ii}^2 - 15457\sigma_{ii} + 225170 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримуємо три дійсних корені. Головні напруження дорівнюють кореням у порядку зменшення: $\sigma_{11} = 133.291 \text{ МПа}$, $\sigma_{22} = 14.359 \text{ МПа}$, $\sigma_{33} = -117.650 \text{ МПа}$.

Тензор напружень, приведений до системи головних осей x_1, x_2, x_3 , набуває наступного вигляду:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 133.291 & 0 & 0 \\ 0 & 14.359 & 0 \\ 0 & 0 & -117.65 \end{bmatrix} \text{ МПа}.$$

Для перевірки визначення головних напружень обчислимо інваріанти напруженого стану в системі головних осей:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 133.291 + 14.359 - 117.65 = 30 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \tau_{13} \\ \tau_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} =$$

$$= 133.291 \cdot 14.359 + 133.291 \cdot (-117.65) + 14.359 \cdot (-117.65) = -15457.097 \text{ МПа}^2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} =$$

$$= 133.291 \cdot 14.359 \cdot (-117.65) = -225173.33 \text{ МПа}^3.$$

Відносна похибка при визначенні I_2 становить

$$\frac{15457.097 - 15457}{15457} = 6 \cdot 10^{-6} = 6 \cdot 10^{-4} \%,$$

при визначенні I_3 —
$$\frac{225173.33 - 225170}{225170} = 1.5 \cdot 10^{-5} = 1.5 \cdot 10^{-3} \%.$$

4. Напрямні косинуси n_{ix}, n_{iy}, n_{iz} i -ої головної площини, на котрій діє головне напруження σ_{ii} , визначаються з наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} (\sigma_{xx} - \sigma_{ii})n_{ix} + \tau_{xy}n_{iy} + \tau_{xz}n_{iz} = 0, \\ \tau_{yx}n_{ix} + (\sigma_{yy} - \sigma_{ii})n_{iy} + \tau_{yz}n_{iz} = 0, \\ \tau_{zx}n_{ix} + \tau_{zy}n_{iy} + (\sigma_{zz} - \sigma_{ii})n_{iz} = 0, \\ n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2 = 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Система чотирьох рівнянь містить три невідомі. Перші три рівняння цієї системи є лінійно залежними: будь-яке з них можна представити як лінійну комбінацію двох інших.

Для визначення напрямних косинусів першої головної площини запишемо систему (2.1) із відповідними числовими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} (49 - 133.291)n_{1x} - 85n_{1y} + 58n_{1z} = 0, \\ -85n_{1x} + (-72 - 133.291)n_{1y} - 11n_{1z} = 0, \\ 58n_{1x} - 11n_{1y} + (53 - 133.291)n_{1z} = 0, \\ n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримуємо $n_{1x} = 1.274n_{1z}$, $n_{1y} = -0.581n_{1z}$, $n_{1z} = \pm 0.581$. Із двох можливих варіантів розв'язку оберемо такий:

$$n_{1x} = 0.740, \quad n_{1y} = -0.338, \quad n_{1z} = 0.581.$$

Запишемо систему рівнянь (2.1) для визначення напрямних косинусів другої головної площини:

$$\begin{cases} (49 - 14.359)n_{2x} - 85n_{2y} + 58n_{2z} = 0, \\ -85n_{2x} + (-72 - 14.359)n_{2y} - 11n_{2z} = 0, \\ 58n_{2x} - 11n_{2y} + (53 - 14.359)n_{2z} = 0, \\ n_{2x}^2 + n_{2y}^2 + n_{2z}^2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему й обираючи один із двох варіантів розв'язку, отримуємо $n_{2x} = 0.469$, $n_{2y} = -0.359$, $n_{2z} = -0.807$.

Напрямні косинуси головних площин є одночасно проєкціями одиничних векторів \vec{n}_1 , \vec{n}_2 , \vec{n}_3 головних осей x_1 , x_2 , x_3 . Щоби ці осі утворювали правогвинтову систему координат, має виконуватись умова $\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Звідси визначимо одиничний вектор третьої головної осі:

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n_{1x} & n_{1y} & n_{1z} \\ n_{2x} & n_{2y} & n_{2z} \end{vmatrix} = (n_{1y}n_{2z} - n_{1z}n_{2y})\vec{i} + (n_{1z}n_{2x} - n_{1x}n_{2z})\vec{j} +$$

$$+(n_{1x}n_{2y} - n_{1y}n_{2x})\vec{k} = n_{3x}\vec{i} + n_{3y}\vec{j} + n_{3z}\vec{k},$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} — одиничні вектори осей x , y , z . Отже, напрямні косинуси третьої головної площини дорівнюють

$$n_{3x} = n_{1y}n_{2z} - n_{1z}n_{2y} = -0.338 \cdot (-0.807) - 0.581 \cdot (-0.359) = 0.481,$$

$$n_{3y} = n_{1z}n_{2x} - n_{1x}n_{2z} = 0.581 \cdot 0.469 - 0.74 \cdot (-0.807) = 0.870,$$

$$n_{3z} = n_{1x}n_{2y} - n_{1y}n_{2x} = 0.74 \cdot (-0.359) - (-0.338)0.469 = -0.107.$$

Виконаємо деякі перевірки правильності визначення напрямних косинусів. Обчислимо модулі одиничних векторів головних осей:

$$|\vec{n}_1| = n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2 = 0.74^2 + (-0.338)^2 + 0.581^2 = 0.999405 \approx 1,$$

$$|\vec{n}_2| = n_{2x}^2 + n_{2y}^2 + n_{2z}^2 = 0.469^2 + (-0.359)^2 + (-0.807)^2 = 1.00009 \approx 1,$$

$$|\vec{n}_3| = n_{3x}^2 + n_{3y}^2 + n_{3z}^2 = 0.481^2 + 0.87^2 + (-0.107)^2 = 0.999710 \approx 1.$$

Перевіримо ортогональність одиничних векторів. Їх скалярні добутки повинні дорівнювати нулю.

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= n_{1x}n_{2x} + n_{1y}n_{2y} + n_{1z}n_{2z} = 0.74 \cdot 0.469 + (-0.338)(-0.359) + \\ &+ 0.581 \cdot (-0.807) = 0.347060 + 0.121342 - 0.468867 = \\ &= 0.468402 - 0.468867 = -4.65 \cdot 10^{-4} \approx 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 &= n_{2x}n_{3x} + n_{2y}n_{3y} + n_{2z}n_{3z} = 0.469 \cdot 0.481 + (-0.359)0.87 + \\ &+ (-0.807)(-0.107) = 0.225589 - 0.312330 + 0.086349 = \\ &= 0.311938 - 0.31233 = -3.92 \cdot 10^{-4} \approx 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_3 \cdot \vec{n}_1 &= n_{3x}n_{1x} + n_{3y}n_{1y} + n_{3z}n_{1z} = 0.481 \cdot 0.74 + 0.87 \cdot (-0.338) + \\ &+ (-0.107)0.581 = 0.355940 - 0.294060 - 0.062167 = \\ &= 0.35594 - 0.356227 = -2.87 \cdot 10^{-4} \approx 0. \end{aligned}$$

На рис. 2.5 в ізометричній проекції показані координатні осі x , y , z , що проходять крізь точку A . Побудуємо на рис. 2.5 головні осі напруженого стану й нескінченно малу частку матеріалу у формі куба, що його грані паралельні головним площинам.

Починаючи від точки A , будуємо ланцюжок відрізків, паралельних

осям x , y , z і пропорційних відповідно величинам n_{1x} , n_{1y} , n_{1z} . Від початкової до кінцевої точки ланцюжка проводимо вектор \vec{n}_1 . Аналогічним чином у такому же масштабі будуємо вектори \vec{n}_2 й \vec{n}_3 . Відрізки, відповідні від'ємним напрямним косинусам, відкладаємо проти напрямків відповідних осей. Головні осі x_1 , x_2 , x_3 проводимо як продовження векторів \vec{n}_1 , \vec{n}_2 , \vec{n}_3 .

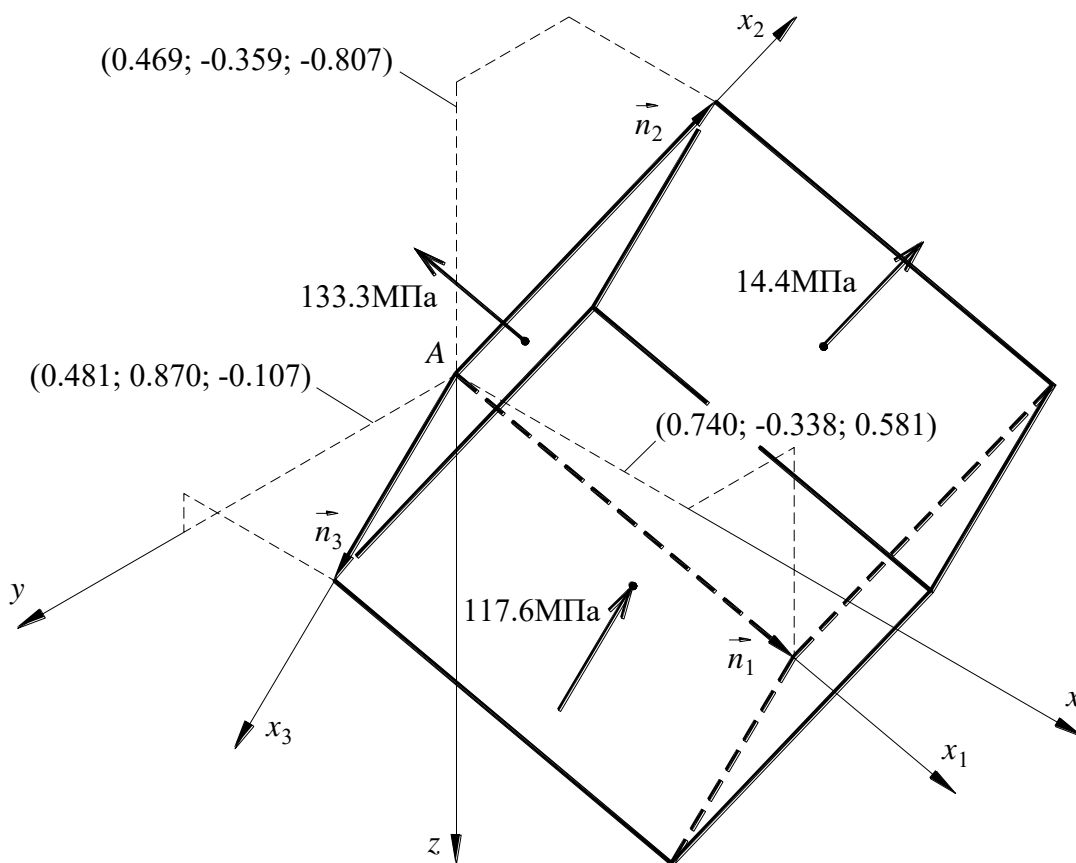


Рис. 2.5

Будуємо куб, три грані якого лежать у головних площинах, а решта граней паралельні головним площинам. При цьому використовуємо зображення векторів \vec{n}_1 , \vec{n}_2 , \vec{n}_3 як ребра куба, що лежать на головних осях. Паралельно до цих трьох ребер добудовуємо решту ребер куба. На гранях куба показуємо у вигляді векторів відповідні головні напруження, спрямовуючи їх згідно з правилом знаків напружень.

5. Максимальні дотичні напруження діють на площинах, нахилених під кутом 45° до двох головних площин (або, що те саме — до двох головних осей). На рис. 2.6. у диметричній проекції показано нескінченно малу частку матеріалу у формі призми, що утворюється, якщо куб

розрізати діагональною площиною. Похила грань цієї призми нахилена під кутом 45° до головних осей x_1 та x_2 . На цій грані діє дотичне напруження, яке дорівнює

$$\tau^{(12)} = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} = \frac{14.359 - 133.291}{2} = -59.466 \text{ МПа} .$$

Нормальне напруження на цій грані дорівнює

$$\sigma^{(12)} = \frac{\sigma_{22} + \sigma_{11}}{2} = \frac{14.359 + 133.291}{2} = 73.825 \text{ МПа} .$$

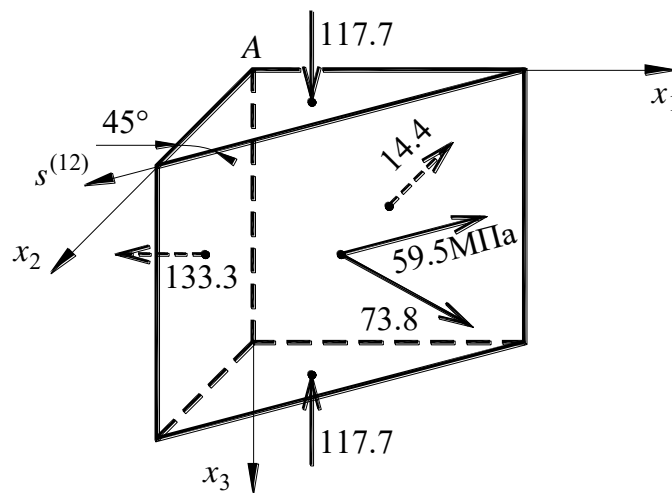


Рис. 2.6

На рис. 2.6 крізь ребро похилої грані призми проводимо вісь $s^{(12)}$ таким чином, аби вона вказувала напрямок обертання за правилом правої руки навколо осі x_3 . На похилій грані показуємо у вигляді векторів напруження $\tau^{(12)}$ і $\sigma^{(12)}$. Від'ємне дотичне напруження спрямовуємо проти осі $s^{(12)}$. Нормальне напруження спрямовуємо перпендикулярно площині згідно з правилом знаків нормальних напружень (назовні частки матеріалу, оскільки напруження додатне). На гранях, перпендикулярних головним осям, показуємо відповідні головні напруження.

На рис. 2.7 показано призму, похила грань якої нахилена під кутом 45° до головних осей x_2 та x_3 . На цій грані діють напруження

$$\tau^{(23)} = \frac{\sigma_{33} - \sigma_{22}}{2} = \frac{-117.649 - 14.359}{2} = -66.004 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma^{(23)} = \frac{\sigma_{33} + \sigma_{22}}{2} = \frac{-117.649 + 14.359}{2} = -51.645 \text{ МПа} .$$

Проводимо на рис. 2.7 вісь $s^{(23)}$, спрямовуючи її за правилом правої руки навколо осі x_1 . Показуємо на похилій грані напруження $\tau^{(23)}$ і $\sigma^{(23)}$. Від'ємне дотичне напруження спрямовуємо проти осі $s^{(23)}$. На гранях, перпендикулярних головним осям, показуємо відповідні головні напруження.

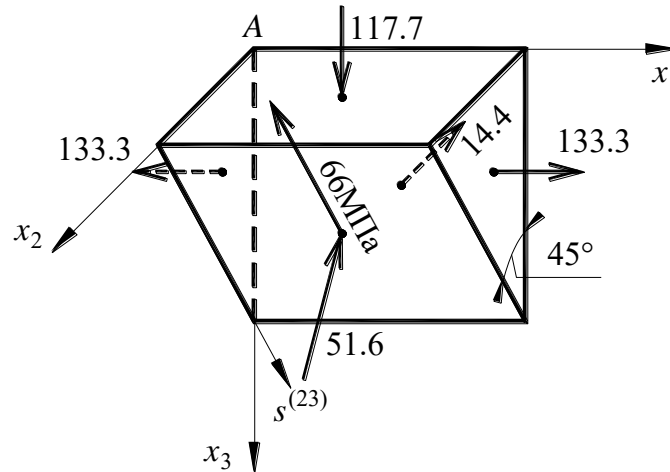


Рис. 2.7

На рис. 2.8 показано призму, похила грань якої нахилена під кутом 45° до головних осей x_3 та x_1 . На цій грані діють напруження

$$\tau^{(31)} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2} = \frac{133.291 - (-117.649)}{2} = 125.470 \text{ МПа},$$

$$\sigma^{(31)} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{2} = \frac{133.291 + (-117.649)}{2} = 7.821 \text{ МПа}.$$

Проводимо на рис. 2.8 вісь $s^{(31)}$, спрямовуючи її за правилом правої руки навколо осі x_2 . Показуємо на похилій грані напруження $\tau^{(31)}$ і $\sigma^{(31)}$. Додатне дотичне напруження спрямовуємо в напрямку осі $s^{(31)}$. На гранях, перпендикулярних головним осям, показуємо відповідні головні напруження.

Найбільше дотичне напруження в даному напруженому стані складає $\tau_{\max} = |\tau^{(31)}| = 125.47 \text{ МПа}$.

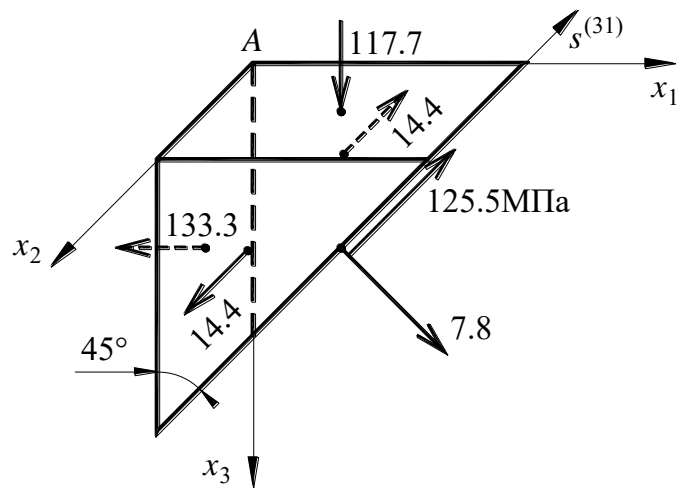


Рис. 2.8

6. Похилу площину, нахил котрої задано напрямними косинусами n_x , n_y , n_z , можна описати рівнянням $n_x x + n_y y + n_z z = C$, де C — деяка константа. Отже, в цьому випадку похила площина описується рівнянням $0.6x - 0.7y - 0.387z = C$.

Представимо доданки, що містять координати x , y , z , у вигляді дробів:

$$\frac{x}{1.667} + \frac{y}{-1.429} + \frac{z}{-2.584} = C.$$

Зобразимо на рис. 2.9 в ізометричній проекції нескінченно малу частку матеріалу у формі тетраедра, три грані якого лежать у координатних площинах, а четверта — у заданій похилій площині. Для цього на координатних осях x , y , z будемо точки, координати яких відповідно пропорційні числам 1.667, -1.429, -2.584. Ці точки є вершинами похилої грані тетраедра.

Визначимо проекції на координатні осі повного напруження на похилій грані:

$$\begin{aligned} P_{xn} &= \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = \\ &= 49 \cdot 0.6 + (-85)(-0.7) + 58(-0.387) = 66.454 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{yn} &= \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z = \\ &= (-85)0.6 + (-72)(-0.7) + (-11)(-0.387) = 3.657 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{zn} &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z = \\ &= 58 \cdot 0.6 + (-11)(-0.7) + 53(-0.387) = 21.989 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

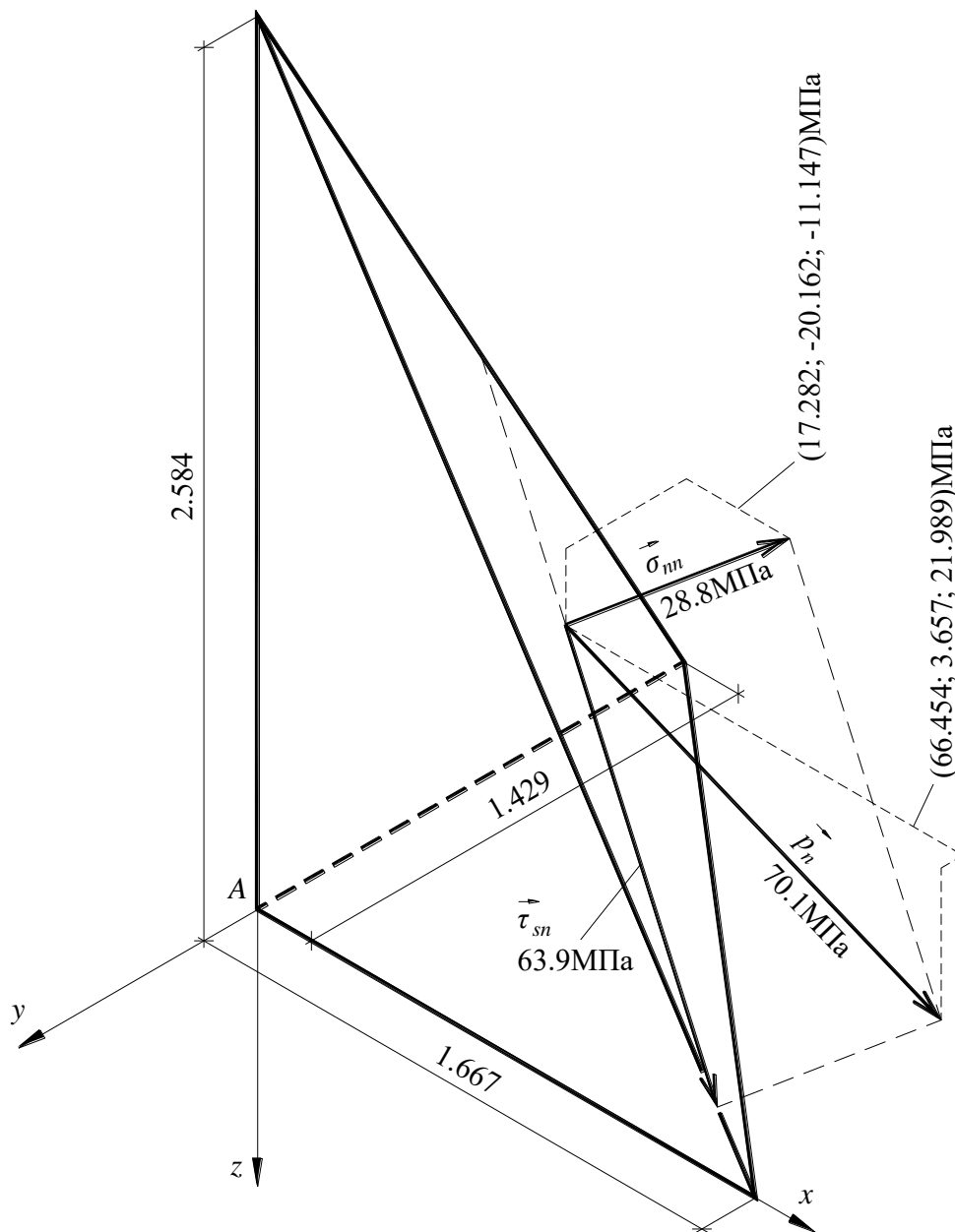


Рис. 2.9

Повне напруження на похилій грані складає

$$p_n = \sqrt{p_{xn}^2 + p_{yn}^2 + p_{zn}^2} = \sqrt{66.454^2 + 3.657^2 + 21.989^2} = 70.093 \text{ МПа} .$$

Визначимо нормальну складову повного напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= p_{xn}n_x + p_{yn}n_y + p_{zn}n_z = \\ &= 66.454 \cdot 0.6 + 3.657 \cdot (-0.7) + 21.989 \cdot (-0.387) = 28.803 \text{ МПа} . \end{aligned}$$

Визначимо дотичне напруження на похилій грані:

$$\tau_{sn} = \sqrt{p_n^2 - \sigma_{nn}^2} = \sqrt{70.093^2 - 28.803^2} = 63.902 \text{ МПа} .$$

Побудуємо на рис. 2.9. вектори \vec{p}_n , $\vec{\sigma}_{nn}$, $\vec{\tau}_{sn}$. Від довільної точки

похилої грані будуюмо ланцюжок відрізків, паралельних осям x , y , z і пропорційних відповідно величинам p_{xn} , p_{yn} , p_{zn} . Від початкової до кінцевої точки ланцюжка проводимо вектор \vec{p}_n .

Для побудови вектора $\vec{\sigma}_{nn}$ визначимо його проекції:

$$\sigma_{xn} = \sigma_{nn} n_x = 28.803 \cdot 0.6 = 17.282 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{yn} = \sigma_{nn} n_y = 28.803 \cdot (-0.7) = -20.162 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{zn} = \sigma_{nn} n_z = 28.803 \cdot (-0.387) = -11.147 \text{ МПа}.$$

Від початку вектора \vec{p}_n будуюмо ланцюжок відрізків, паралельних координатним осям і пропорційних величинам σ_{zn} , σ_{yn} , σ_{xn} . Відрізки відкладаємо в тому же масштабі, що й p_{xn} , p_{yn} , p_{zn} . Відрізки, відповідні від'ємним величинам σ_{yn} і σ_{zn} , відкладаємо проти напрямків відповідних осей. Від початкової до кінцевої точки ланцюжка проводимо вектор $\vec{\sigma}_{nn}$.

Оскільки $\vec{p}_n = \vec{\sigma}_{nn} + \vec{\tau}_{sn}$, то $\vec{\tau}_{sn} = \vec{p}_n - \vec{\sigma}_{nn}$. Будуюмо вектор $\vec{\tau}_{sn}$ як різницю векторів \vec{p}_n і $\vec{\sigma}_{nn}$ за правилом паралелограма.

7. Відобразимо заданий напружений стан у вигляді діаграми Мора. На рис. 2.10 проведено горизонтальну координатну вісь σ_{nn} і вертикальну додатну піввісь τ_{sn} . На осі σ_{nn} відкладаємо точки, відповідні головним напруженням $\sigma_{11} = 133.291 \text{ МПа}$, $\sigma_{22} = 14.359 \text{ МПа}$, $\sigma_{33} = -117.650 \text{ МПа}$.

Між цими точками попарно проводимо півкола радіусами, рівними модулям визначених у п. 5 дотичних напружень на площинах, нахилених під 45° до відповідної пари головних осей: $|\tau^{(12)}| = 59.466 \text{ МПа}$, $|\tau^{(23)}| = 66.004 \text{ МПа}$, $|\tau^{(31)}| = 125.47 \text{ МПа}$.

Напруження на заданій похилій площині, визначені у п. 6, позначаємо на рис. 2.10 точкою з координатами $\sigma_{nn} = 28.803 \text{ МПа}$, $\tau_{sn} = 63.902 \text{ МПа}$.

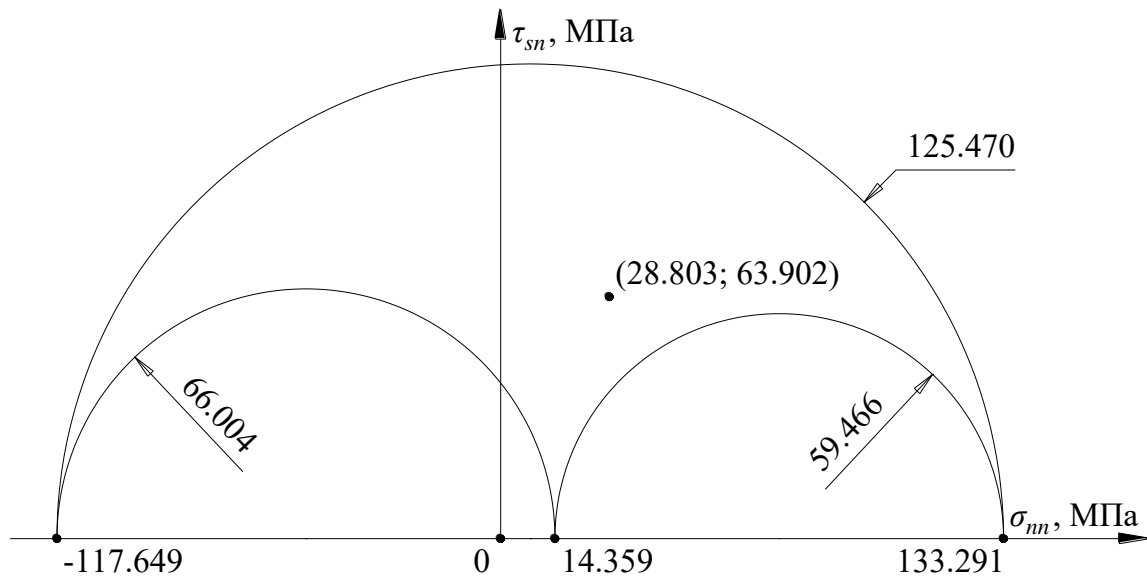


Рис. 2.10

8. Розкладемо тензор напружень T_σ на тензор гідростатичного тиску T_{σ_0} і девіатор D_σ . Гідростатичний тиск у заданому напруженому стані

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \frac{49 - 72 + 53}{3} = 10 \text{ МПа}.$$

Тензор гідростатичного тиску має вигляд

$$T_{\sigma_0} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ МПа}.$$

Оскільки $T_\sigma = T_{\sigma_0} + D_\sigma$, то $D_\sigma = T_\sigma - T_{\sigma_0}$. Отже, девіатор заданого напруженого стану дорівнює

$$D_\sigma = \begin{bmatrix} 49 & -85 & 58 \\ -85 & -72 & -11 \\ 58 & -11 & 53 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & -85 & 58 \\ -85 & -82 & -11 \\ 58 & -11 & 43 \end{bmatrix} \text{ МПа}.$$

На рис. 2.11, на трьох зображеннях частки матеріалу у формі куба, що його грані перпендикулярні осям x , y , z , представимо заданий напружений стан як суму гідростатичного тиску (напружень зміни об'єму) й девіатора (напружень зміни форми).

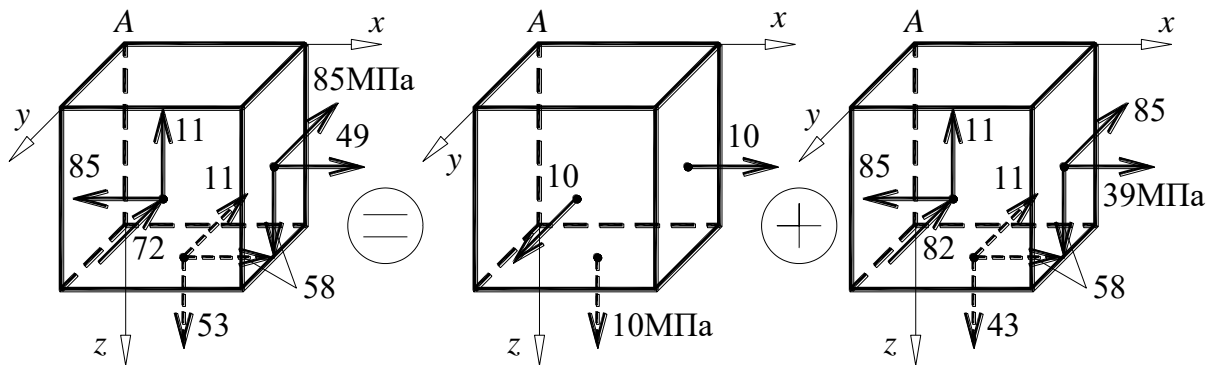


Рис. 2.11

9. Перевіримо настання граничного стану, якщо матеріал тіла – чавун, що має межі тимчасового опору розтягу та стиску відповідно $\sigma_B^{(+)} = 160 \text{ МПа}$ та $\sigma_B^{(-)} = 800 \text{ МПа}$ (див. табл. 1). Для чавуну як крихкого матеріалу, скористаємося I теорією міцності.

$$\sigma_{11} = 133.3 \text{ МПа} < \sigma_B^{(+)}, \quad |\sigma_{33}| = 117.7 \text{ МПа} < \sigma_B^{(-)}.$$

Головні напруження перебувають у межах тимчасового опору. Граничний стан не настає.

Перевіримо настання граничного стану, якщо матеріал — сталь Ст3, яка має межу текучості $\sigma_s = 250 \text{ МПа}$ (табл. 1). Для пластичного матеріалу скористаємося IV теорією міцності. Еквівалентне напруження за IV теорією міцності виражається формулою (1.66):

$$\sigma_{\text{eq}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}.$$

Та ж формула може бути записана і для компонент тензора напружень у системі головних осей x_1, x_2, x_3 , де вона зводиться до

$$\sigma_{\text{eq}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2]}.$$

Це також можна виразити через дотичні напруження на площинах, нахилених під 45° до кожної пари головних осей (п. 5):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{eq}}^{\text{IV}} &= \sqrt{2 \left[(\tau^{(12)})^2 + (\tau^{(23)})^2 + (\tau^{(31)})^2 \right]} = \\ &= \sqrt{2 \left[(-59.466)^2 + (-66.004)^2 + 125.47^2 \right]} = 217.4 \text{ МПа} < \sigma_s. \end{aligned}$$

Еквівалентне напруження менше межі текучості. Граничний стан не настає.

10. Визначимо лінійні та зсувні деформації матеріалу в точці A , якщо матеріал — сталь Ст3, яка має модуль пружності $E = 2 \cdot 10^5$ МПа і коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$ (табл. 1). Оскільки в заданому напруженому стані не досягнуто межі текучості матеріалу (п. 9), то справедливим залишається узагальнений закон Гука. Лінійні деформації дорівнюють

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [49 - 0.3(-72 + 53)] = 2.735 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-72 - 0.3(49 + 53)] = -5.13 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [53 - 0.3(49 - 72)] = 2.995 \cdot 10^{-4}.$$

Ці величини означають, що малий відрізок, проведений крізь точку A паралельно осі x , подовжиться на $2.735 \cdot 10^{-4}$ своєї первісної довжини. Відрізок, паралельний осі y , скоротиться на $5.13 \cdot 10^{-4}$ своєї довжини. Відрізок, паралельний осі z , подовжиться на $2.995 \cdot 10^{-4}$ своєї довжини.

Модуль зсуву матеріалу дорівнює

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0.3)} = 7.7 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Зсувні деформації дорівнюють

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{-85}{7.7 \cdot 10^4} = -11.04 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{58}{7.7 \cdot 10^4} = 7.53 \cdot 10^{-4},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{-11}{7.7 \cdot 10^4} = -1.43 \cdot 10^{-4}.$$

Прямий кут між двома малими векторами, проведеними з точки A в напрямках осей x та y , збільшиться на $11.04 \cdot 10^{-4}$ рад. Кут між векторами в напрямках x та z зменшиться на $7.53 \cdot 10^{-4}$ рад. Кут між векторами в напрямках y та z збільшиться на $1.43 \cdot 10^{-4}$ рад.

Тензор деформацій має вигляд

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.735 & -5.52 & 3.765 \\ -5.52 & -5.13 & -0.715 \\ 3.765 & -0.715 & 2.995 \end{bmatrix} 10^{-4}.$$

3. РОЗРАХУНОК ВІСЕСИМЕТРИЧНОГО РЕЗЕРВУАРА

3.1. Внутрішні зусилля в оболонках

Оболонка вважається *тонкою*, якщо $\frac{h}{a}, \frac{h}{b} < \frac{1}{10}$, де h – товщина,

a, b – планарні розміри оболонки. До тонких оболонок можна віднести цистерни, водонапірні резервуари, повітряні і газові балони, купола будинків, котли та ін.

Серединна поверхня оболонки – геометричне місце точок, рівновіддалених від її зовнішніх поверхонь.

Головні радіуси кривизни ρ_1, ρ_2 – мінімальний та максимальний радіуси січних до серединної поверхні кривих. Відповідні їм криві називаються *лініями головних кривизн*. В довільній точці поверхні лінії головних кривизн перпендикулярні між собою.

Головні кривизни κ_1, κ_2 – обернені до головних радіусів величини:

$\kappa_1 = \frac{1}{\rho_1}, \kappa_2 = \frac{1}{\rho_2}$. Центри кривизни лежать на нормалі до поверхні і є центрами кіл з радіусами ρ_1, ρ_2 .

Полога оболонка – тіло, у якого радіуси кривизни серединної поверхні великі порівняно з товщиною (кривизна мала порівняно з товщиною).

Пологі оболонки відносимо до *криволінійної ортогональної системи* координат з осями 1, 2, 3, де напрямки осей 1, 2 співпадають з головними кривизнами серединної поверхні, 3 – нормаль до поверхні (рис. 3.1).

В загальному випадку в перерізах з нормальними 1, 2 діють:

- N_1, N_2 – сили на розтяг (нормальні),
- Q_1, Q_2 – поперечні сили,
- S_1, S_2 – зсувні зусилля,
- M_1, M_2 – згинальні моменти,
- $M_{\kappa 1}, M_{\kappa 2}$ – крутні моменти.

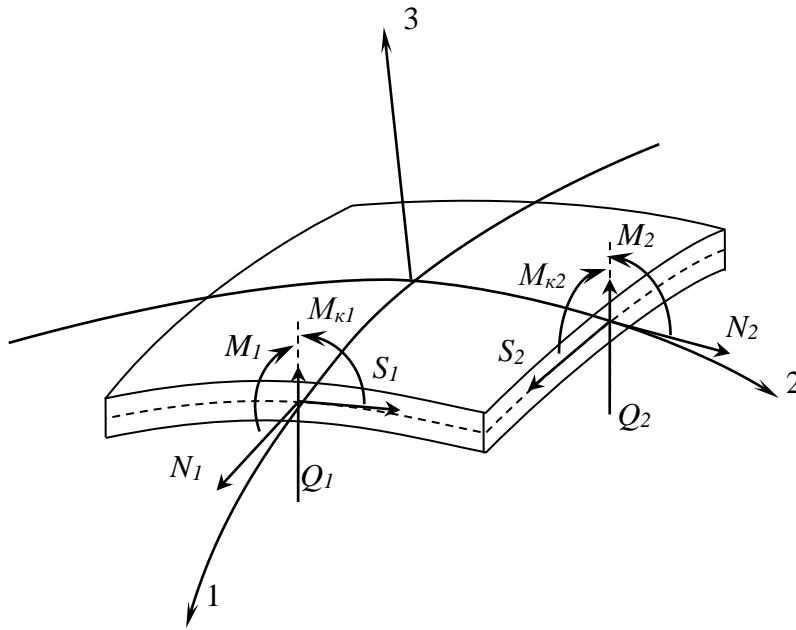


Рис. 3.1. Внутрішні зусилля в елементі оболонки

Маємо 10 невідомих функцій, тобто потрібно побудувати 10 диференціальних рівнянь для їх знаходження. Отримуємо складну математичну задачу. Але при певних типах навантаження кількість невідомих зменшується, і опис спрощується.

Наприклад, якщо оболонка є тілом обертання при вісесиметричному навантаженні, то задача вісесиметрична. В такому випадку

$$M_{\kappa 1} = M_{\kappa 2} = S_1 = S_2 = Q_1 (\text{або } Q_2) = 0, \quad (3.1)$$

тобто залишається п'ять невідомих силових факторів.

Якщо якісь зусилля або моменти малі в порівнянні з іншими, то ними можна знехтувати. При певних навантаженнях можна вважати

$$M_1 = M_2 = M_{\kappa 1} = M_{\kappa 2} = 0, \quad Q_1 = Q_2 = 0, \quad (3.2)$$

що є основним положенням *безмоментної теорії*.

3.2. Тонкостінний резервуар

Розглянемо резервуар, що є вісесиметричною оболонкою, тобто тілом обертання певної кривої $r(z)$ навколо осі симетрії z (рис. 3.2). Товщина h оболонки мала порівняно з радіусами кривизни. Нехай він знаходиться під впливом внутрішнього або зовнішнього тиску $p(z)$ від газу або рідини, що знаходяться всередині.

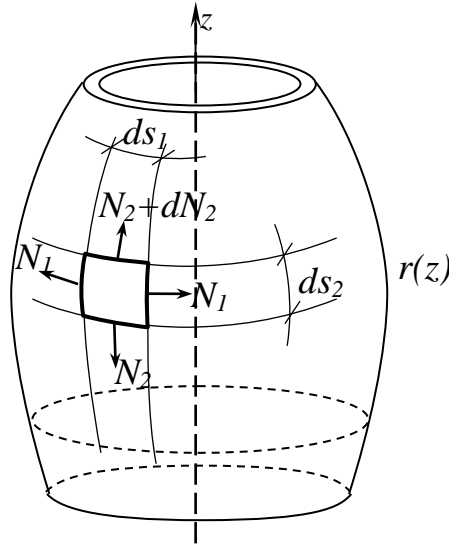


Рис. 3.2. Тонкостінний резервуар

При такому навантаженні можна вважати, що припущення (3.1) та (3.2) виконуються. Така оболонка знаходиться в безмоментному напруженому стані, тобто ненульовими є лише нормальні зусилля N_1, N_2 та відповідні їм напруження σ_1, σ_2 .

Розглянемо виділений на рис. 3.2 елемент $ds_1 ds_2$, грані якого паралельні головним кривизнам з радіусами ρ_1, ρ_2 :

$$ds_1 = \rho_1 d\phi_1, \quad ds_2 = \rho_2 d\phi_2. \quad (3.3)$$

Для довільної кривої $r(z)$ радіуси кривизни та кут нахилу дотичної α знаходяться за формулами

$$\rho_1 = \rho_t = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{r}{r'} \sqrt{1 + (r')^2}; \quad \rho_2 = \rho_m = \frac{\sqrt{1 + (r')^2}}{r''}; \quad \operatorname{tg} \alpha = r'. \quad (3.4)$$

Розглянемо рівновагу елемента $ds_1 ds_2$ під впливом внутрішнього тиску p (рис. 3.3). Запишемо суму проєкцій всіх сил на нормаль n :

$$N_2 ds_1 \sin \frac{d\phi_2}{2} + (N_2 + dN_2) ds_1 \sin \frac{d\phi_2}{2} + 2N_1 ds_2 \sin \frac{d\phi_1}{2} - p ds_1 ds_2 = 0.$$

Враховуючи (3.3) та виконуючи граничний перехід для малих кутів

$$\sin \frac{d\phi_1}{2} \approx \frac{d\phi_1}{2}, \quad \sin \frac{d\phi_2}{2} \approx \frac{d\phi_2}{2},$$

маємо

$$2N_2 \rho_1 d\phi_1 \frac{d\phi_2}{2} + dN_2 \rho_1 d\phi_1 d\phi_2 + 2N_1 \rho_2 d\phi_2 \frac{d\phi_1}{2} - p \rho_1 d\phi_1 \rho_2 d\phi_2 = 0.$$

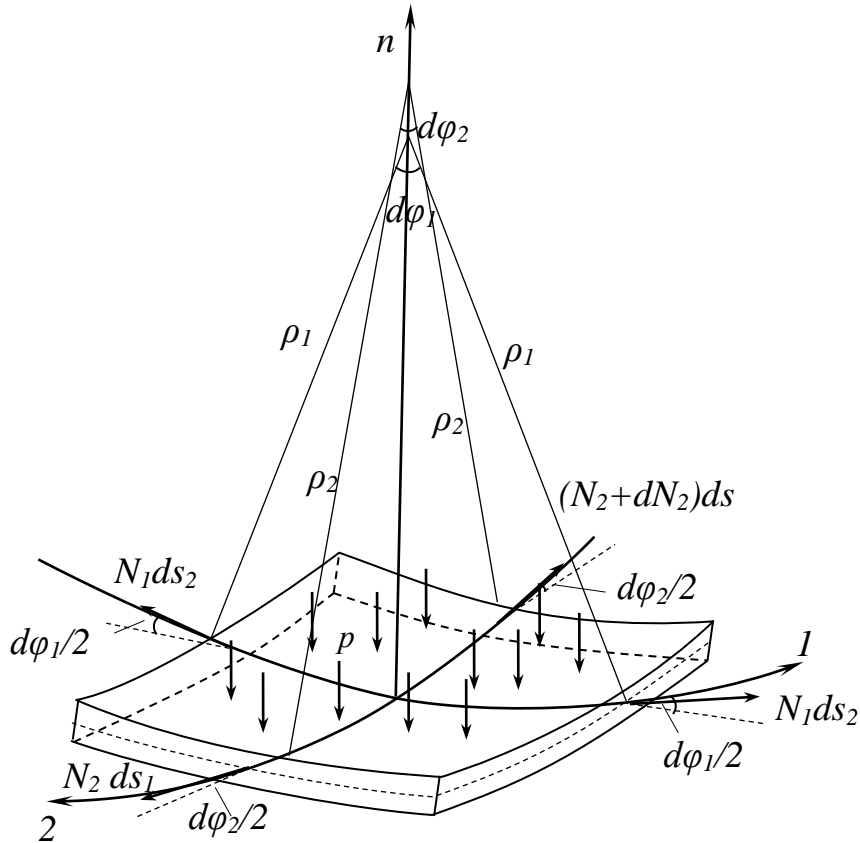


Рис. 3.3. Рівновага елемента оболонки

Відкидаємо доданок третього порядку малості, ділимо все рівняння на $\rho_1 \rho_2 d\phi_1 d\phi_2$ та остаточно отримуємо *рівняння рівноваги*

$$\frac{N_1}{\rho_1} + \frac{N_2}{\rho_2} = p. \quad (3.5)$$

Рівняння рівноваги (3.5) включає дві невідомі. Для додаткового рівняння розглянемо рівновагу відрізаної частини оболонки AOB , що відтинається конічною поверхнею ADB , нормальною до серединної поверхні оболонки. Нехай вона навантажена внутрішнім тиском, рівнодійна якого зводиться до добутку p на площу кола з радіусом r , власною вагою $Q_{об}$ оболонки AOB та вагою рідини Q_p . Сили N_2 діють в кожній точці контуру перерізу (кола з радіусом r) під кутом α до вертикальної осі. Проектуємо сили на вертикальну вісь z :

$$N_2 \cos \alpha \cdot 2\pi r - p \cdot \pi r^2 - Q_{об} - Q_p = 0,$$

$$N_2 = \frac{pr}{2 \cos \alpha} + \frac{Q_{об} + Q_p}{2\pi r \cos \alpha}. \quad (3.6)$$

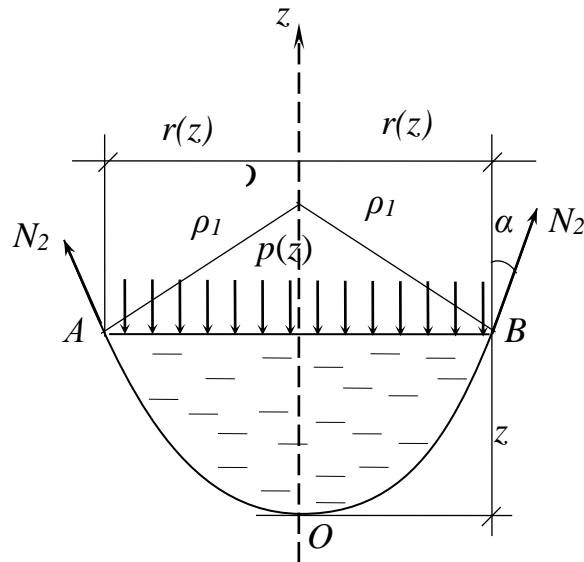


Рис. 3.4. Відрізана нижня частина резервуару

Ми отримали вираз для знаходження меридіональної сили N_2 . Отже, нормальні зусилля N_1, N_2 для тонкостінного резервуару знаходяться з (3.5) та (3.6).

3.3. Умова міцності резервуара

Для оцінки міцності потрібно перейти від сил до напружень. Оскільки в перерізах діють лише нормальні сили, по аналогії з розтягом(стиском) стержнів для оболонок будемо вважати, що нормальні напруження сталі по товщині, тобто

$$N_1 = \sigma_t h, \dots N_2 = \sigma_m h, \quad (3.7)$$

де σ_t – окружні нормальні напруження, σ_m – меридіональні нормальні напруження.

Співвідношення (3.5) перетворюється до вигляду, відомого під назвою формули Лапласа:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_1} + \frac{\sigma_m}{\rho_2} = \frac{p}{h}, \quad (3.8)$$

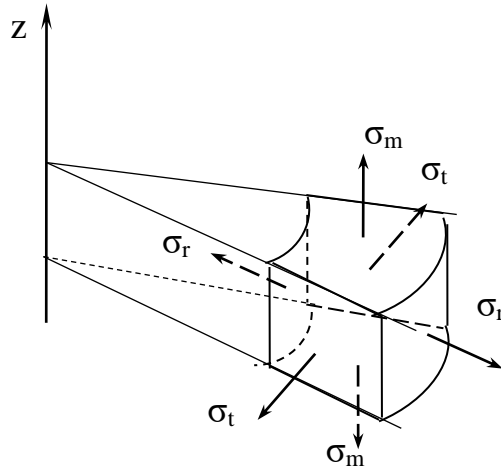


Рис. 3.5. Напруження в стінці оболонки

З (3.6) маємо рівняння рівноваги зони

$$\sigma_m = \frac{pr}{2h \cos \alpha} + \frac{Q_{вв} + Q_p}{2\pi r h \cos \alpha}. \quad (3.9)$$

Геометрична та фізична сторона задачі не розглядалася в силу припущень про постійність напружень σ_m, σ_t по товщині оболонки. Задача виявилася статично визначеною.

Оскільки дотичні напруження відсутні, нормальні напруження σ_m, σ_t є головними. Третє головне напруження σ_r на внутрішній поверхні рівне заданому тиску p , на зовнішній поверхні рівне нулю. Вважаємо його набагато меншим за σ_m, σ_t : $\sigma_r \ll \sigma_m, \sigma_t$. Тоді по четвертій умові (для пластичних матеріалів) отримуємо умову міцності

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2 - \sigma_m \sigma_t} \leq \sigma_{adm}. \quad (3.10)$$

З умови міцності (3.10) визначаємо допустиме навантаження або товщину стінки резервуара.

Розрахунок резервуара за формулами (3.8), (3.9) проводиться в перерізах, досить віддалених від днищ, точок закріплення, поверхневих зосереджених сил та моментів, оскільки вплив цих факторів може приводити до виникнення згинальних або крутильних навантажень (безмоментну теорію вже не можна застосовувати). Для складніших

випадків навантаження розрахунок проводиться за теорією пластин та оболонок .

Приклад. а) Визначити напруження в стінці сферичного балона, заповненого газом з тиском p . Радіус серединної поверхні R , товщина стінки h .

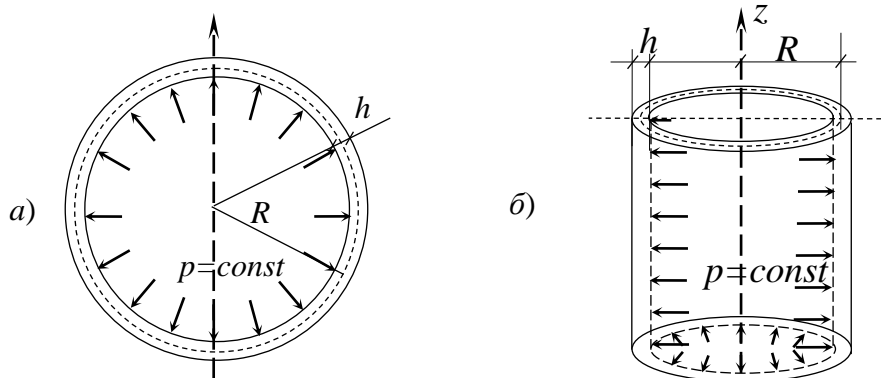


Рис. 3.6. Резервуари сферичної та циліндричної форми

Розв'язання. В силу симетрії радіуси кривизни сфери $\rho_1 = \rho_2 = R$, напруження $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$. З (23.8) маємо

$$\frac{\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R} = \frac{p}{h}, \quad \sigma = \frac{pR}{2h}.$$

Умова міцності (3.10) приймає вигляд

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2 - \sigma_m \sigma_t} = \sigma = \frac{pR}{2h} \leq \sigma_{adm}. \quad (3.11)$$

З (3.11) визначається товщина стінки або допустимий тиск для сферичного балона.

б) Визначити напруження в стінці циліндричного балона, заповненого газом з тиском p . Радіус серединної поверхні R , товщина стінки h .

Розв'язання. Для циліндра меридіональний радіус кривизни $\rho_1 = R$, по довжині маємо $\rho_2 = \infty$ (твірною є пряма, для прямої радіус кривизни $\rho = \infty$). З (23.8) маємо

$$\frac{\sigma_t}{R} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{p}{h}, \quad \sigma_t = \frac{pR}{h}.$$

Меридіональні напруження знаходимо з рівняння рівноваги зони (3.9).
Якщо $Q_{\theta\theta} = Q_p = 0$, то

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h \cos \alpha}.$$

Тут кут α – кут нахилу дотичної до твірної відносно осі z . Отримана формула підходить для конусів (домни, котли, димоходи). Для циліндрів $\alpha = 0$.

Отже, для циліндрів під дією внутрішнього тиску напруження визначаються за формулами

$$\sigma_t = \frac{pR}{h}, \quad \sigma_m = \frac{pR}{2h}. \quad (3.12)$$

З (3.12) бачимо, що для циліндричних балонів окружні напруження вдвічі вищі, ніж поздовжні. Тому поздовжній шов повинен бути вдвічі міцніший за поперечний.

Умова міцності (3.10) приймає вигляд

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{pR}{2h}\right)^2 + \left(\frac{pR}{h}\right)^2} - \frac{pR}{2h} \cdot \frac{pR}{h} = \frac{\sqrt{3}pR}{2h} \leq \sigma_{adm}. \quad (3.13)$$

3.4. Розпірні кільця в оболонках

Для оболонок обертання, твірні яких являють собою плавні криві з неперервною кривизною, розрахунки по безмоментній теорії дають досить задовільні результати. Але в точках зломів поверхні, в точках приєднання днищ або секцій іншої кривизни ситуація може змінитися.

Розглянемо вплив *зломів твірної* на напружений стан оболонки [3]. Нехай в деякому перерізі $a-a$ оболонка має злом: дотичні утворюють кут $180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2$. Розглянемо меридіональні напруження σ_{m1} та σ_{m2} в перерізах. Проектуємо напруження, що діють на кільце $b-b$ $d-d$, на вертикальну вісь. З рівняння рівноваги маємо

$$2\pi r \sigma_{m1} h_1 \cos \alpha_1 = 2\pi r \sigma_{m2} h_2 \cos \alpha_2.$$

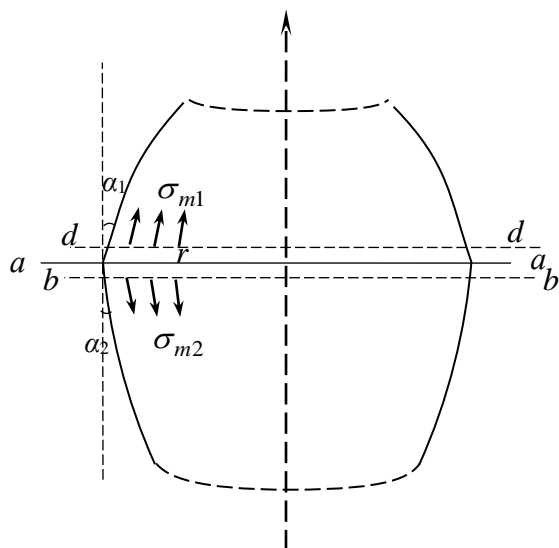


Рис. 3.7. Злом поверхні оболонки

Запишемо проекцію всіх сил на горизонтальну вісь. Оскільки напруження діють в одному напрямку, робимо висновок, що рівноваги немає

$$\sigma_{m1}h_1 \sin \alpha_1 + \sigma_{m2}h_2 \sin \alpha_2 \neq 0.$$

Це означає, що в місці злому виникає додаткове місцеве навантаження q , що стискує оболонку і викликає згинні зусилля:

$$q = \sigma_{m1}h_1 \sin \alpha_1 + \sigma_{m2}h_2 \sin \alpha_2. \quad (3.14)$$

Для того щоб зменшити згин, в резервуарах встановлюють ребра жорсткості, або розпірні кільця, які приймають на себе радіальні зусилля q . Умова міцності для кільця має вигляд

$$\frac{qR}{A} \leq \sigma_{adm}, \quad (3.15)$$

де R – радіус осі кільця, A – площа його перерізу.

При дії зовнішнього тиску меридіональні напруження будуть від’ємними, а q буде направлене зовні оболонки. Тоді кільце працюватиме не на стиск, а на розтяг. Часто замість розпірного кільця використовується потовщення стінки, утворене накладанням стінок секцій.

3.5. Приклад розрахунку тонкостінного резервуара

Постановка задачі

Для циліндричного балона з сферичними торцями підібрати товщину стінок та площу розпирного кільця. Тиск, допустиме напруження, радіуси циліндра та сфери взяти з Додатку 3 згідно до шифру, виданого викладачем.

Приклад. Для циліндричного резервуара з сферичними торцями підібрати товщину стінок та площу розпирного кільця. Дано: тиск $p = 5 \text{ МПа}$, допустиме напруження $\sigma_{adm} = 180 \text{ МПа}$, радіус циліндра $r = 2 \text{ м}$, радіус сфери $R = 3 \text{ м}$ (рис. 3.8).

Розв'язання. Підбираємо товщину стінки циліндра. З умови міцності (3.12)

$$\frac{\sqrt{3}pr}{2h} \leq \sigma_{adm} \rightarrow h_1 = \frac{\sqrt{3}pr}{2\sigma_{adm}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 5 \text{ МПа} \cdot 2 \text{ м}}{2 \cdot 180 \text{ МПа}} = 0,048 \text{ м} \approx 5 \text{ см}.$$

З умови міцності для сфери (3.10) маємо

$$\frac{pR}{2h} \leq \sigma_{adm} \rightarrow h_2 \geq \frac{pR}{2\sigma_{adm}} = \frac{5 \text{ МПа} \cdot 3 \text{ м}}{2 \cdot 180 \text{ МПа}} = 0,0417 \approx 4,2 \text{ см}.$$

Меридіональні напруження в циліндрі та сфері приймають значення

$$\sigma_{m1} = \frac{pr}{2h_1} = \frac{5 \text{ МПа} \cdot 2 \text{ м}}{2 \cdot 0,05} = 100 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{m2} = \frac{pR}{2h_2} = \frac{5 \text{ МПа} \cdot 3 \text{ м}}{2 \cdot 0,042} = 178,6 \text{ МПа}.$$

Визначаємо стискуючі зусилля q на контурі торця за (3.14). Тут $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90^\circ - \alpha$:

$$q = \sigma_{m1}h_1 \sin \alpha_1 + \sigma_{m2}h_2 \sin \alpha_2 = 0 + \frac{pR}{2h_2} h_2 \cos \alpha =$$

$$= \frac{pR}{2} \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} = \frac{5 \cdot 10^6}{2} \cdot \sqrt{3^2 - 2^2} = 5,59 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

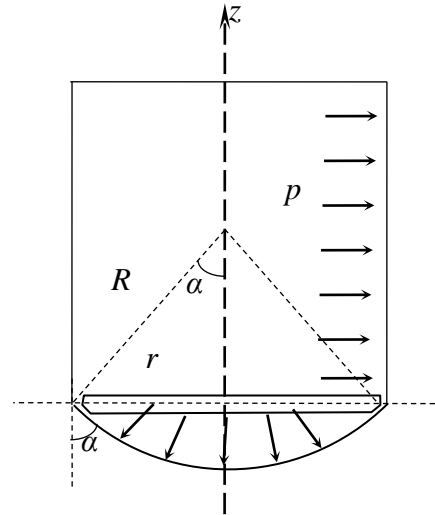


Рис. 3.8. Циліндричний резервуар з сферичними торцями

Якщо вважати, що радіус розпирного кільця $R_k \approx r$, то площа перерізу кільця знаходиться за формулою

$$A_k = \frac{qr}{\sigma_{adm}} = \frac{5,59 \cdot 10^6 \cdot 2}{180 \cdot 10^6} \frac{H}{Pa} = 0,062 \text{ м}^2.$$

Контрольні запитання

1. Яке тіло відноситься до тонких оболонок?
2. Яке тіло називається оболонкою обертання?
3. Як вводиться система координат для пологих оболонок?
4. Які зусилля виникають в стінці оболонки?
5. Скільки рівнянь потрібно для знаходження внутрішніх зусиль в оболонці?
6. Як спрощується постановка задачі для тіл обертання?
7. Що таке безмоментна теорія? Які переваги вона дає?
8. Коли можна користуватися безмоментною терією?
9. Які зусилля виникають в стінці тонкостінного резервуару?
10. Як визначаються головні радіуси кривизни резервуару?
11. Як отримується рівняння рівноваги?
12. Як виконується перехід від поздовжніх сил до напружень?
13. Що описує рівняння Лапласа?
14. Які компоненти входять в рівняння рівноваги зони?
15. Як проводиться перевірка міцності резервуару?
16. Як визначаються напруження в сферичному резервуарі?
17. Як визначаються напруження в циліндричному резервуарі?
18. Як підбирається допустиме навантаження або необхідна товщина стінки резервуару?
19. Що таке розпирні кільця? Коли вони потрібні?
20. Як визначається навантаження на розпирне кільце?
21. Як підбирається переріз розпирного кільця?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Підручники:

1. Писаренко, Г. С. та ін. Опір матеріалів: підручник для студ. вищ. навч. закл. / за ред. Г.С. Писаренка. – 2-е вид., доп. і перероб. – Київ: Вища шк., 2004. – 655с.
2. Шкельов Л.Т. Опір матеріалів: підручник для студентів вищих навчальних закладів / Л.Т. Шкельов, А.М. Станкевич, Д.В. Пошивач. – К.:ЗАТ «Віпол», 2011. – 456с.
3. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. / З ред. В.Г. Піскунова. – Київ : Вища школа, 1995.

Навчальні посібники:

4. О.П. Кошевий, Григор'єва Л.О., Д.В. Левківський. Опір матеріалів в темах і задачах: навчальний посібник. Київ: КНУБА; – Кам'янець-Подільський: ТОВ «Друкарня «Рута», 2019. – 340 с.
5. Л.О. Григор'єва, Д.В. Левківський, О.П. Кошевий. Опір матеріалів з основами теорії пружності: Курс лекцій. Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 270 с.
6. Збірник задач з опору матеріалів: навч. посіб. / П.О. Іваненко, Л.О. Григор'єва, О.П. Кошевий та ін. За ред. П.О. Іваненка – Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 400 с.

Додаткові джерела:

7. Збірник задач з опору матеріалів: Навч. посіб. / М. І. Бобир, А. Є. Бабенко, О.О. Боронко та ін.; за ред. М. І. Бобиря. – К.: Вища шк., 2008. –399 с.
8. Hibbeler, R.C. Mechanics of materials / R.C. Hibbeler. Tenth edition. – NJ: Pearson, 2015. – 900 p.– ISBN 9780134319650
9. Серія відеоуроків та лабораторних робіт з опору матеріалів на Youtube
10. https://www.youtube.com/channel/UC4ptzya-AQGAFDj18iOB_rA ,
https://youtu.be/tibdfc_Q2s8
11. Освітній сайт КНУБА. Курс для дистанційного навчання «Опір матеріалів з основами теорії пружності»
<https://org2.knuba.edu.ua/course/view.php?id=4520>

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Кафедра опору матеріалів
20__ – 20__ навчальний рік

РОЗРАХУНКОВО–ГРАФІЧНА РОБОТА №

(назва роботи)

Шифр _____

Факультет _____

Курс _____

Група _____

Студент (П.І.Б.) _____

Керівник (П.І.Б.) _____

Дата здачі завдання _____

Оцінка _____

Вхідні дані до задачі «Аналіз просторового напруженого стану»

	Компоненти тензора напружень					
	Перша цифра шифру			Друга цифра шифру		
	σ_{xx}	τ_{xy}	τ_{xz}	σ_{yy}	τ_{yz}	σ_{zz}
1	33	-24	23	-25	40	36
2	-20	18	-14	44	-13	18
3	37	29	-19	34	17	-28
4	54	-32	32	-45	27	71
5	62	-10	26	56	-38	64
6	-45	15	30	23	49	-52
7	25	13	-22	-31	56	42
8	-13	27	18	37	-42	29
9	47	30	29	29	51	-36
0	56	21	-43	-40	45	29
	Третя цифра шифру					
	Напрявні косинуси			Осі координат		
	n_x	n_y	n_z	x	y	z
1	0,40	0,55		+		+
2	0,60		0,25		+	+
3		0,35	0,45	+	+	
4	0,50		0,35		+	+
5	0,15	0,65		+		+
6		0,45	0,25	+	+	
7	0,30		0,55		+	+
8	0,65	0,30		+		+
9		0,40	0,55	+	+	
0	0,25		0,60		+	+

Вхідні дані до задачі «Розрахунок тонкостінного резервуару»

Цифра шифру	Перша цифра шифру	Друга цифра шифру	Третя цифра шифру	
	Радіус циліндра	Радіус сферичної частини	Тиск	Допустимі напруження
	г, м	R, м	p, МПа	σ_{adm} , МПа
1	2	2,5	2	100
2	2,5	3	2,5	120
3	2,8	3,5	3	130
4	1,2	3,3	3,5	140
5	1,5	2,3	4	150
6	0,5	4,4	1,2	160
8	0,8	3,6	2,2	170
8	2,2	3,8	3,2	180
9	1,1	2,8	1,5	190
0	1,4	2,6	3,6	200

Навчально-методичне видання

ОПР МАТЕРІАЛІВ
з основами теорії пружності.
Змістовий модуль 4.
Основи теорії пружності

Методичні рекомендації
до виконання самостійної роботи
та дистанційного навчання
здобувачів другого (магістерського) рівня
вищої освіти спеціальності 192
«Будівництво та цивільна інженерія»
ОП «Промислове і цивільне будівництво»

Укладачі: **Григор'єва** Людмила Олександрівна,
Левківський Дмитро Володимирович,
Пошивач Дмитро Володимирович

Комп'ютерне верстання *А. П. Селівестрової*

Ум. друк. арк. 3,25. Обл.-вид. арк 3,5.

Електронний документ. Вид № 15/V-24.

Виконавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03680

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р