УДК 697.2:536.2

Д. А. Строй, *інженер*
Київський національний університет
будівництва і архітектури

РОЗВ'ЯЗОК МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОМЕНЕВОГО ОПАЛЕННЯ, ЩО СТВОРЮЄ КОМФОРТНИЙ ТЕПЛОВИЙ РЕЖИМ В ПРОЦЕСІ РОЗІГРІВУ БУДІВЛІ

Нові можливості енергозбереження в системах опалення виробничих приміщень розглядаються у роботах [1], [2] і [3]. Ці можливості полягають у створенні комфортного теплового режиму в нестаціонарному процесі розігріву будівлі. Створення таких режимів дозволяє розширити область застосування систем перервного опалення, які менш витратні ніж постійно діючі системи опалення. А при застосуванні режимів перервного опалення дозволяє змінити режим роботи таким чином, що стає можливим значна економія теплової енергії.

Детальніше доцільність створення комфортних теплових режимів у нестаціонарних процесах, розглянуто в [1], де наведені також залежності, що характеризують зменшення втрат теплоти. В роботі [3] введені спрощуючі припущення, і обгрунтовано побудову математичної моделі, для системи опалення, що створює комфортний тепловий режим в процесі розігріву будівлі. Схему теплових потоків і температур, що відповідає прийнятій моделі теплообміну і спрощуючим припущенням наведено на рис. 1.

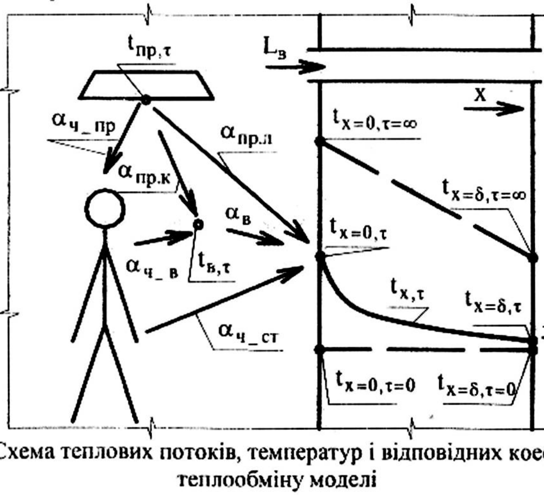

Рис. 1. Схема теплових потоків, температур і відповідних коефіцієнтів теплообміну моделі

Система рівнянь з яких складається згадана математична модель має такий вигляд:

$$
\begin{cases}
\partial t_{x,\tau} / \partial \tau = a\left(\partial^2 t_{x,\tau} / \partial x^2\right), & (1) \\
-\lambda\left(\partial t_{x,\tau} / \partial x\right)\Big|_{x=\delta} = \alpha_н (t_{x=\delta,\tau} - t_н), & (2) \\
-\lambda F_{ст}\left(\partial t_{x,\tau} / \partial x\right)\Big|_{x=0} = \alpha_{пр.л} F_{пр} (t_{пр,\tau} - t_{x=0,\tau}) - \alpha_в F_{ст} (t_{x=0,\tau} - t_{в,\tau}), & (3) \\
t_{x,\tau=0} = t_{x=0,\tau=0} - [(t_{x=0,\tau=0} - t_{x=\delta,\tau=0})/\delta]\, x, & (4) \\
V_в \cdot c_в \cdot \left(dt_{в,\tau} / d\tau\right) = \alpha_{пр.к} F_{пр}\left(t_{пр,\tau} - t_{в,\tau}\right) + \\
\quad + \alpha_в F_{ст} \cdot \left(t_{x=0,\tau} - t_{в,\tau}\right) - Lc_в\left(t_{в,\tau} - t_н\right), & (5) \\
t_{в,\tau=0} = \mathrm{const}, & (6) \\
t_П = \dfrac{\alpha_{ч\_пр} t_{пр,\tau} + \alpha_{ч\_ст} t_{x=0,\tau} + \alpha_{ч\_в} t_{в,\tau}}{\alpha_{ч\_пр} + \alpha_{ч\_ст} + \alpha_{ч\_в}}. & (7)
\end{cases}
$$

Невідомими в системі, є функції $t_{пр,\tau}$, $t_{x=0,\tau}$, і $t_{в,\tau}$, які залежать від моменту часу τ, та визначають тепловий комфорт.

Рівняння (1) в системі — це рівняння Фур'є, що описує розподіл температур по товщині одношарової плоскої стінки в залежності від моменту часу τ.

Розв'язок диференційного рівняння Фур'є визначається такими умовами однозначності:

- із зовнішньої сторони огороджуючої конструкції рівнянням (2) — граничною умовою 3-го роду що визначає рівність теплового потоку, що надходить з товщі стінки до зовнішньої поверхні і теплового потоку, що відводиться від цієї поверхні до зовнішнього повітря в будь-який момент часу;
- з внутрішньої сторони рівнянням (3) — граничною умовою 3-го роду, що описує рівність теплового потоку, що надходить на внутрішню поверхню стінки від випромінювача, тепловому потоку, що відводиться від внутрішньої поверхні — у товщу стінки теплопровідністю, і що відводиться до внутрішнього повітря — конвекцією;

- у початковий момент часу $\tau = 0$, рівнянням (4) — початковим розподілом температур по товщині стінки.

Диференціальне рівняння (5) отримане з теплового балансу повітря за проміжок часу $d\tau$. Розвязок рівняння (5) повинен підкорятися початковій умові, — рівнянню (6), яке визначає рівність температури повітря в момент часу $\tau = 0$, фоновому значенню.

До системи рівнянь входить також рівняння (7), що зумовлює тепловий комфорт (обґрунтування див. [3]).

Розглянемо порядок розв'язку наведеної вище системи рівнянь (1)÷(7).

Розв'язок системи рівнянь відносно функції $t_{x,\tau}$ — розподілу температур по товщині стінки, будемо шукати як загальний розв'язок диференціального рівняння Фур'є у наступному вигляді:

$$t_{x,\tau} = t_{x=0,\tau=\infty} - [(t_{x=0,\tau=0} - t_{x=\delta,\tau=0} / \delta)]\, x + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} A_i [\sin(k_i x) + p_i \cos(k_i x)] \cdot e^{-a \cdot k_i^2 \cdot \tau}. \tag{8}$$

Загальний розв'язок системи відносно функції $t_{в,\tau}$ будемо шукати у вигляді:

$$t_{в,\tau} = t_{в,\tau=\infty} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(g_i \cdot A_i p_i \cdot e^{-a \cdot k_i^2 \cdot \tau} \right). \tag{9}$$

Відомо, якщо функція задовольняє диференціальному рівнянню, то і сума таких функцій, йому задовольняє. Тому постійні інтегрування p_i, k_i, g_i, будемо знаходити з умови задоволення частковими розв'язками

$$t_{x,\tau}^{ч} = t_{x=0,\tau=\infty} - \left[\left(t_{x=0,\tau=0} - t_{x=\delta,\tau=0}\right)/\delta\right] x + \\ + A_i \left[\sin(k_i x) + p_i \cos(k_i x)\right] \cdot e^{-a \cdot k_i^2 \cdot \tau}, \tag{10}$$

і

$$t_{в,\tau}^{ч} = t_{в,\tau=\infty} + g_i \cdot A_i p_i \cdot e^{-a \cdot k_i^2 \cdot \tau}. \tag{11}$$

граничним умовам із зовнішньої і внутрішньої сторони стінки, рівнянню теплового балансу повітря і рівнянню комфорту. Коефіцієнти A_i

при i-тих доданках суми в рівняннях (10) і (11) задовольняють граничним умовам і тепловому балансу повітря при будь-яких своїх значеннях (як це буде показано нижче). Тому можна знайти такі значення A_i, при яких функція $t_{x,\tau}$ буде задовольняти ще і початковому розподілу температур по товщині стінки.

Розв'язок системи рівнянь щодо шуканої функції температури випромінювача одержимо виражаючи $t_{\text{пр},\tau}$ з рівняння комфорту (7):

$$t_{\text{пр},\tau} = [(\alpha_{\text{ч\_пр}} + \alpha_{\text{ч\_ст}} + \alpha_{\text{ч\_в}})t_{\Pi} - \alpha_{\text{ч\_в}} t_{\text{в},\tau} - \alpha_{\text{ч\_ст}} t_{x=0,\tau}] / \alpha_{\text{ч\_пр}}. \quad (12)$$

Температури $t_{x=\delta,\tau=\infty}$ і $t_{x=0,\tau=\infty}$, що установляться по закінченні процесу розігріву на зовнішній і внутрішній поверхні стінки відповідно, можна визначити із системи рівнянь (1)÷(7), після підстановки в її значення $\tau = \infty$. Якщо врахувати що для стаціонарного кінцевого розподілу температур тепловий потік крізь зовнішню і внутрішню поверхню стінки той самий, і дорівнює:

$$-\lambda\left(\partial t_{x,\tau=\infty}/\partial x\right)\Big|_{x=\delta} = -\lambda\left(\partial t_{x,\tau=\infty}/\partial x\right)\Big|_{x=0} = \lambda\left(t_{x=0,\tau=0} - t_{x=\delta,\tau=0}\right)/\delta, \quad (13)$$

то система (1)÷(7), після підстановки цього теплового потоку при $\tau = \infty$, матиме вигляд:

$$\begin{cases} \lambda\left(t_{x=0,\tau=0} - t_{x=\delta,\tau=0}\right)/\delta = \alpha_{\text{н}}(t_{x=\delta,\tau=\infty} - t_{\text{н}}), & (14) \\ \lambda F_{\text{ст}}\left(t_{x=0,\tau=0} - t_{x=\delta,\tau=0}\right)/\delta = \alpha_{\text{пр.л}} F_{\text{пр}}(t_{\text{пр},\tau=\infty} - t_{x=0,\tau=\infty}) - \\ \quad - \alpha_{\text{в}} F_{\text{ст}}(t_{x=0,\tau=\infty} - t_{\text{в},\tau=\infty}), & (15) \\ \alpha_{\text{пр.к}} F_{\text{пр}}\left(t_{\text{пр},\tau=\infty} - t_{\text{в},\tau=\infty}\right) + \alpha_{\text{в}} F_{\text{ст}}\left(t_{x=0,\tau=\infty} - t_{\text{в},\tau=\infty}\right) - \\ \quad - L c_{\text{в}} \rho_{\text{в}}\left(t_{\text{в},\tau=\infty} - t_{\text{н}}\right) = 0, & (16) \\ t_{\text{в},\tau=\infty} = \dfrac{\alpha_{\text{ч\_пр}} + \alpha_{\text{ч\_ст}} + \alpha_{\text{ч\_в}}}{\alpha_{\text{ч\_в}}} \cdot t_{\Pi} - \dfrac{\alpha_{\text{ч\_пр}}}{\alpha_{\text{ч\_в}}} \cdot t_{\text{пр},\tau=\infty} - \dfrac{\alpha_{\text{ч\_ст}}}{\alpha_{\text{ч\_в}}} t_{x=0,\tau=\infty}. & (17) \end{cases}$$

У результаті розв'язання системи чотирьох рівнянь (14)÷(17), однозначно визначаємо чотири невідомих $t_{\text{в},\tau=\infty}$, $t_{\text{пр},\tau=\infty}$, $t_{x=0,\tau=\infty}$, $t_{x=\delta,\tau=\infty}$ для кінцевого стаціонарного режиму.

Коефіцієнти p_i і k_i, визначаємо, підставляючи функції (12), (10) і (11) у граничні умови. Підставляючи функцію $t^{ч}_{x,\tau}$ з (10) при $x=\delta$ в рівняння (2) одержимо:

$$-\lambda\left(-\left(t_{x=0,\tau=\infty}-t_{x=\delta,\tau=\infty}\right)/\delta+A_i k_i\left[\cos(k_i\cdot\delta)-p_i\cdot\sin(k_i\cdot\delta)\right]\cdot e^{-a\cdot k_i^2\cdot\tau}\right)=$$

$$=\alpha_{н}\left[\left(t_{x=\delta,\tau=\infty}+A_i\left[\sin(k_i\cdot\delta)+p_i\cdot\cos(k_i\cdot\delta)\right]\cdot e^{-a\cdot k_i^2\cdot\tau}\right)-t_н\right]. \quad (18)$$

Функція $t^{ч}_{x,\tau}$ така, якщо після підстановки її в рівняння (18), розкрити дужки, то всі доданки, які не залежать від τ, будуть такі ж як і в рівнянні (14). А так як значення температур $t_{x=0,\tau=\infty}$, $t_{x=\delta,\tau=\infty}$, $t_{в,\tau=\infty}$, $t_{пр,\tau=\infty}$ — знайдені із системи рівнянь (14)÷(17), є такими що перетворюють кожне рівняння цієї системи в тотожність, то всі доданки, що не містять τ в рівнянні (18), взаємно знищуються, при переносі їх по одну сторону від знака рівності. Тоді з (18) одержимо рівність:

$$-\lambda A_i k_i\left[\cos(k_i\cdot\delta)-p_i\cdot\sin(k_i\cdot\delta)\right]\cdot e^{-a\cdot k_i^2\cdot\tau}=$$
$$=\alpha_{н}A_i\left[\sin(k_i\cdot\delta)+p_i\cdot\cos(k_i\cdot\delta)\right]\cdot e^{-a\cdot k_i^2\cdot\tau}. \quad (19)$$

У рівнянні (19), множники $A_i\cdot e^{-a\cdot k_i^2\cdot\tau}$ скорочуються, отже, справедливість даної граничної умови не залежить від моменту часу τ і значення коефіцієнтів $A_i\cdot$ A значення постійних інтегрування, при яких виконується гранична умова (2), пов'язані характеристичним рівнянням, отриманим із (19):

$$tg(k_i\cdot\delta)=\frac{\lambda k_i+\alpha_{н}p_i}{\lambda k_i p_i-\alpha_{н}}. \quad (20)$$

Задовольняючи граничним умовам на внутрішній поверхні стінки, підставимо функції (12), (11) і (10) при $x=0$, у рівняння (3). Після взаємного знищення доданків які не залежать від τ (аналогічно тому як це було для рівняння (18)) і виконавши математичні перетворення одержимо друге рівняння що зв'язує постійні інтегрування:

$$p_i = \frac{-\lambda F_{\text{ст}} k_i}{\left(\alpha_{\text{в}} F_{\text{ст}} - \dfrac{\alpha_{\text{пр.л}} F_{\text{пр}} \alpha_{\text{ч\_в}}}{\alpha_{\text{ч\_пр}}}\right) g_i - \left((\alpha_{\text{в}} F_{\text{ст}} + \alpha_{\text{пр.л}} F_{\text{пр}}) + \dfrac{\alpha_{\text{пр.л}} F_{\text{пр}} \alpha_{\text{ч\_ст}}}{\alpha_{\text{ч\_пр}}}\right)}. \quad (21)$$

Задовольняючи тепловому балансу внутрішнього повітря, підставимо функції (12), (11) і (10) при $x=0$, у рівняння (5). Після взаємного знищення доданків, які не залежать від τ (аналогічно тому як це було для рівняння (18)), і виконавши математичні перетворення одержимо третє рівняння, що пов'язує постійні інтегрування:

$$g_i = \frac{\alpha_{\text{в}} F_{\text{ст}} - \alpha_{\text{пр.к}} F_{\text{пр}} \left(\alpha_{\text{ч\_ст}} / \alpha_{\text{ч\_пр}}\right)}{\alpha_{\text{пр.к}} F_{\text{пр}} \left(\alpha_{\text{ч\_в}} / \alpha_{\text{ч\_пр}}\right) + \alpha_{\text{пр.к}} F_{\text{пр}} + \alpha_{\text{в}} F_{\text{ст}} + L c_{\text{в}} \rho_{\text{в}} - a \cdot k_i^2 M_{\text{в}} \cdot c_{\text{в}}}. \quad (22)$$

Маємо систему трьох рівнянь (20), (21), (22) для визначення трійок постійних інтегрування — k_i, p_i, g_i (два з цих рівнянь — (21) і (22) лінійні, а одне — (20) нелінійне, так зване характеристичне).

Таким чином, наведений частковий розв'язок (10) задовольняє граничним умовам при будь-яких значеннях A_i. Тому необхідно знайти такі значення коефіцієнтів A_i, при яких функція (8) буде задовольняти рівнянню (4) — початковому розподілу температур по товщині стінки. Підставляючи (8) у рівняння (4), одержимо:

$$t_{x=0,\tau=0} - \frac{t_{x=0,\tau=0} - t_{x=\delta,\tau=0}}{\delta} x = t_{x=0,\tau=\infty} - \frac{t_{x=0,\tau=\infty} - t_{x=\delta,\tau=\infty}}{\delta} x +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\sin(k_i x) + p_i \cos(k_i x)\right]. \quad (23)$$

Необхідно зауважити, що в розглядуваному випадку, коефіцієнти A_i не можна одержати з традиційних залежностей для розкладання функцій у ряд Фур'є, тому що коефіцієнти p_i, k_i, g_i такі, що для доданків ряду Фур'є умова ортогональності не виконується.

Значення A_i, визначимо як коефіцієнти ряду Фур'є, що представляє функцію $\varphi(x) = t_{x=0,\tau=0} - \dfrac{t_{x=0,\tau=0} - t_{x=\delta,\tau=0}}{\delta} x - \left(t_{x=0,\tau=\infty} - \dfrac{t_{x=0,\tau=\infty} - t_{x=\delta,\tau=\infty}}{\delta} x\right)$, у вигляді суми доданків $A_i\left[\sin(k_i x)+p_i\cos(k_i x)\right]$, методом запропонованим в [4]. Цей метод полягає в прив'язуванні значень функції виражених сумою N членів ряду — $\sum_{i=1}^{N} A_i\left[\sin(k_i x)+p_i\cos(k_i x)\right]$, до значень функції $\varphi(x)$ в N точках по осі x. Тобто коефіцієнти A_i, будуть коренями наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(x_1)=\sum_{i=1}^{N} A_i\left[\sin(k_i x_1)+p_i\cos(k_i x_1)\right] \\ \varphi(x_2)=\sum_{i=1}^{N} A_i\left[\sin(k_i x_2)+p_i\cos(k_i x_2)\right] \\ \ldots \\ \varphi(x_N)=\sum_{i=1}^{N} A_i\left[\sin(k_i x_N)+p_i\cos(k_i x_N)\right]. \end{cases} \tag{24}$$

Отже, розв'язком системи диференціальних рівнянь (1)÷(7) будуть функції (8), (9), (12), із постійними інтегрування, що визначаються за наведеними вище формулами.

Замінюючи в (12) значення $t_{x=0,\tau}$ і $t_{\text{в},\tau}$ з (8) і (9) відповідно, одержимо шукану залежність, по якій необхідно регулювати температуру на поверхні випромінювача, щоб умова комфорту виконувалася для будь-якого моменту часу:

$$t_{\text{пр},\tau}=\left(t_{\text{пр},\tau=\infty}-\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_{\text{ч\_в}}g_i+\alpha_{\text{ч\_ст}}\right]A_i p_i\cdot e^{-a\cdot k_i^2\cdot\tau}\right)\Big/\alpha_{\text{ч\_пр}}. \tag{25}$$

Отримана аналітична залежність (25) дає можливість аналізувати основні закономірності комфортних теплових режимів розігріву для будь-яких приміщень. Залежність також може бути використана при розробці інженерних методик розрахунку систем опалення будинків, для яких прийняті спрощуючі припущення, не мають істотних відхилень від дійсності. Наприклад, для приміщень павільйонного типу, із незначною теплоємністю устаткування.

8*

Умовні позначення

x координата відлічувана від внутрішньої поверхні стінки в напрямку ортогональному до її площини, м

τ час, с

t температура, °С

$t_{в,\tau}$ функція температури внутрішнього повітря в залежності від моменту часу τ, °С

$t_{x,\tau}$ функція розподілу температур скрізь товщу стінки в залежності від моменту часу τ, °С

$t_{пр,\tau}$ функція температури температури поверхні випромінювача в залежності від моменту часу τ, °С

$t_П$ комфортна температура приміщення, °С

A_i, p_i, k_i, g_i постійні інтегрування

δ товщина стінки, м

ρ густина, кг/м^3

λ теплопровідність матеріалу стінки Вт/(м · °С)

c питома теплоємність, Дж/кг

a коефіцієнт температуропровідності $= \lambda/(c \cdot \rho)$, м^2/с

α коефіцієнт теплообміну, Вт/(м^2 · °С)

$\alpha_в$ коефіцієнт конвективного теплообміну між внутрішньою поверхнею стінки і внутрішнім повітрям, Вт/(м^2 · °С)

$\alpha_{пр.л}$ коефіцієнт радіаційного теплообміну між випромінювачем і стінкою, Вт/(м^2 · °С)

$\alpha_{пр.к}$ коефіцієнт конвективного теплообміну між випромінювачем і внутрішнім повітрям, Вт/(м^2 · °С)

F площа поверхні, м^2

L об'ємна витрата зовнішнього повітря на вентиляцію, м^3/с

$c_в$ об'ємна теплоємність повітря, Дж/м^3

$V_в$ об'єм внутрішнього повітря, м^3

Значення індексів

τ залежить від моменту часу

в внутрішнього повітря

н зовнішнього повітря

пр випромінювача

ч людини

ст стінки моделі

ч_пр, пр_ст, ч_ст індекси для променевого теплообміну між людиною і випромінювачем, випромінювачем і стінкою, людиною і стінкою, відповідно

$x = \delta$ на зовнішній поверхні стінки

$x = 0$ на внутрішній поверхні стінки

$\tau = 0$ в фоновому режимі

$\tau = \infty$ в кінцевому стаціонарному режимі

Використана література

1. *Строй Д. А.* Энергосберегающий способ отопления помещений // Коммунальное хозяйство городов. — Харків.— Техника. — 2000. — № 22. — С. 160—166.

2. *Строй Д. А.* Отопление зданий в нестационарном режиме // Науковий вісник будівництва. — Харків.— ХДТУБА. — 2000. — № 9. — С. 260—267.

3. *Худенко А. А. Строй Д. А.* Создание комфортных условий в помещении в режиме прогрева.

4. *Строй А. Ф.* Управление тепловым режимом зданий и сооружений. — К., 1993. — 155 с.