

УДК 539.3

к.т.н. Левківський Д.В.,
dmitriylev@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2964-1605,
Сович Ю.В.,
yuliiiasov@bigmir.net, ORCID: 0000-0002-5114-6363,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ПРЯМИХ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Розглядається розподіл теплового поля у часі при охолодженні та нагріванні товстої кільцевої пластини. Граничні умови та теплові навантаження вісесиметричні, тому задача зводиться до плоскої та залежить від двох просторових координат. По товщині виконується зниження вимірності узагальненим методом прямих. По координаті x та t використовується явна різницева схема.

Ключові слова: зниження вимірності, проекційний метод, теплопровідність, різницева схема, узагальнений метод прямих.

1. ВСТУП

Пластини є одним з основних конструктивних елементів багатьох інженерних споруд. Під пластиною розуміється тіло, у якого один розмір (висота, товщина) значно менший від двох інших розмірів. Розрізняють три види пластин: мембрани, тонкі і товсті пластини. Запропонована в роботі теорія, дозволяє дослідити розподіл теплових полів в часі для вісесиметричних тіл довільної товщини. Дану теорію можна застосувати для розрахунку моделей в ядерній енергетиці, електротехніці, будівництві.

2. ВИХІДНІ РІВНЯННЯ

У задачах термопружності, при дослідженні НДС пружних тіл під дією нестационарних теплових впливів, на першому етапі розрахунку визначається розподіл температур в тілі, за допомогою теорії теплопровідності. У даній роботі розглядається чисельно-аналітичний підхід до розв'язання рівнянь нестационарної теплопровідності за допомогою узагальненого метода прямих [2]. Вихідні рівняння теплопровідності, граничні та початкові умови, згідно узагальненого метода прямих розв'язуються в два етапи. На першому етапі, за допомогою проекційного методу, виконується зниження вимірності вихідних рівнянь, на другому – редуковані рівняння, з урахуванням редукованих

граничних та початкових умов, розв'язуються чисельними методами. У роботі розглядається товста кільцева пластина в циліндричній системі координат (рис.1а). Розподіл теплових впливів вісесиметричний, тому це спрощує вихідні диференціальні рівняння нестационарної теплопровідності і робить їх двовимірними по просторових координатах. Диференціальні рівняння записані відносно просторових координат x , z та часової координати t . По коловій координаті θ шукані функції температури та теплового потоку не змінюються. Це дає можливість звести тривимірну задачу до двовимірної (рис.1б).

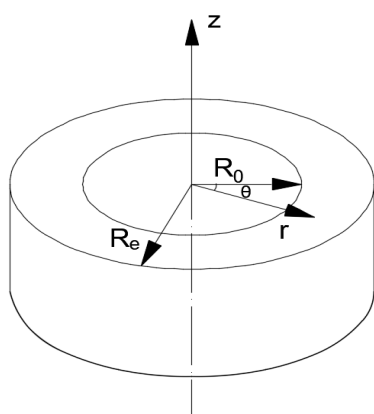


Рис. 1а. Кільцева пластина, просторова задача.

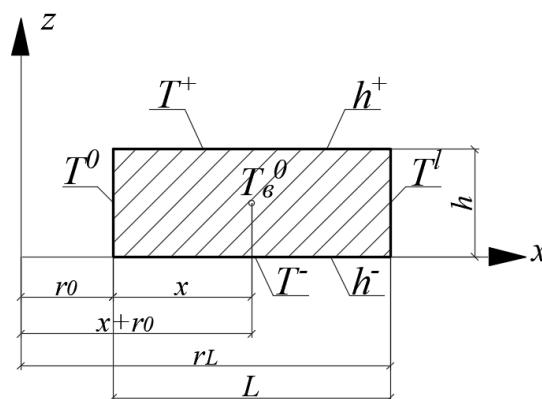


Рис. 1б. Кільцева пластина, двовимірна задача.

Диференціальні рівняння нестационарної теплопровідності в циліндричній системі координат мають вигляд (1):

$$\begin{aligned} q_x &= -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x}; \quad q_z = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial z}; \\ c \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{r_0 + x} q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + q_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут T - функція температури, c - питома об'ємна теплоємність тіла, λ_T - коефіцієнт теплопровідності. Невідомі функції, що входять до розрахункових рівнянь, є функціями змінних (x, z, t) [1]. Вони повинні задовольняти початковим умовам:

$$T(x, z, 0) = T_0(x, z), \quad (2)$$

та граничним умовам конвективного теплообміну:

$$\begin{aligned} \text{при } z = h^+ : \quad q_z(x, h^+, t) &= -\alpha_T^+(T_c^+(x, h^+, t) - T(x, h^+, t)), \\ \text{при } z = h^- : \quad q_z(x, h^-, t) &= \alpha_T^-(T_c^-(x, h^-, t) - T(x, h^-, t)), \\ \text{при } x = 0 : \quad q_x(0, z, t) &= \alpha_T^0(T_c^0(0, z, t) - T(0, z, t)), \\ \text{при } x = r_l : \quad q_x(l, z, t) &= -\alpha_T^l(T_c^l(l, z, t) - T(l, z, t)). \end{aligned} \quad (3)$$

3. ЗНИЖЕННЯ ВИМІРНОСТІ

По координаті z виконується зниження вимірності вихідних диференціальних рівнянь (1) початкових (2) та граничних умов (3) за допомогою узагальненого методу прямих. Для цього використовується проекційний метод з локальними базисними функціями (рис.2).

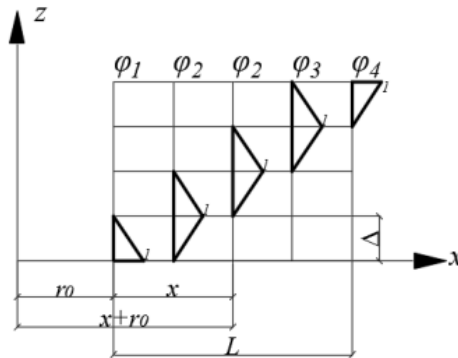


Рис. 2. Базисні функції

Шукані функції записуються у вигляді лінійної комбінації $f(x, z) \approx f^i(x)\varphi_i(z)$. Згідно з проекційним методом невідомі функції розглядаються як елементи евклідового простору зі скалярним добутком:

$$(f(z), g(z)) \approx \int_{h^-}^{h^+} f(z) \cdot g(z) dz \quad (4)$$

Побудовано редуковані рівняння, початкові та граничні умови, використовуючи позначення та індекси тензорної алгебри. Отримано редуковану початково-граничну задачу, яка розв'язується чисельним методом за допомогою явних різницевих схем. З метою спрощення, просторова

координата r замінюється координатою x : $r = r_0 + x$, відповідно $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}$

Нижче приведено процес зниження вимірності по z за допомогою проекційного методу. Система рівнянь (1), граничні (2) та початкові умови (3) скалярно домножаються на взаємний базис:

$$\begin{aligned} (q_x = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x}), \varphi^i(z) &\Rightarrow \int q_x \varphi^i(z) dz \Rightarrow q_x^i = -\lambda_T \frac{\partial T^i}{\partial x}; \\ (q_z = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial z}), \varphi^i(z) &\Rightarrow q_z^i = -\alpha_T \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial T}{\partial z} \varphi^i(z) dz = -\alpha_T \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial (T^\alpha \varphi_\alpha(z))}{\partial z} \varphi^i(z) dz = \\ &= -\alpha_T T^\alpha \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial \varphi_\alpha(z)}{\partial z} \varphi^i(z) dz = -\alpha_T T^\alpha \int_{h^-}^{h^+} \varphi_\alpha'(z) \varphi^i(z) dz = -\alpha_T T^\alpha \int_{h^-}^{h^+} g^{i\alpha} \varphi_\alpha(z) \varphi_\alpha'(z) dz = ; \\ &= -\alpha_T g^{ij} b_{j\alpha} T^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r_0 + x} q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + q_0), \varphi^i(z) \Rightarrow c \frac{\partial T^i}{\partial t} = -\frac{1}{r_0 + x} q_x^i - \frac{\partial q_x^i}{\partial x} - \\
- \int_{h^-}^{h^+} (\frac{\partial q_z}{\partial z} g^{ij} \varphi_j(z)) dz + q_0^i = -\frac{1}{r_0 + x} q_x^i - \frac{\partial q_x^i}{\partial x} - g^{ij} \int_{h^-}^{h^+} (\frac{\partial q_z}{\partial z} \varphi_j(z)) dz + q_0^i = \\
= -\frac{1}{r_0 + x} q_x^i - \frac{\partial q_x^i}{\partial x} - g^{ij} q_z \varphi_j(z) \Big|_{h^-}^{h^+} - g^{ij} \int_{h^-}^{h^+} (q_z \varphi_j'(z)) dz q_0^i = -\frac{1}{r_0 + x} q_x^i - \\
- \frac{\partial q_x^i}{\partial x} - g^{ij} (q_z^+(x, h^+, t) \delta_j^N - q_z^-(x, h^-, t) \delta_j^1) - g^{ij} \int_{h^-}^{h^+} (\varphi_\alpha(z) \varphi_j'(z)) dz + q_0^i = \\
= -\frac{1}{r_0 + x} q_x^i - \frac{\partial q_x^i}{\partial x} - q_z^+(x, h^+, t) g^{ij} \delta_j^N - q_z^-(x, h^-, t) g^{ij} \delta_j^1 - g^{ij} b_{\alpha j} q_z^\alpha + q_0^i = \\
= -\frac{1}{r_0 + x} q_x^i - \frac{\partial q_x^i}{\partial x} - g^{ij} (q_z^N - q_z^1) - g^{ij} b_{\alpha j} q_z^\alpha + q_0^i
\end{aligned}$$

Замінюємо індекси: i на α , $j \rightarrow \beta$, $\alpha \rightarrow j$ в рівнянні $q_z^i = -\lambda_T g^{ij} b_{j\alpha} T^\alpha$:

$$q_z^\alpha = -\lambda_T g^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma} T^\gamma.$$

Редуковані диференціальні рівняння теплового балансу, записані в коефіцієнтах, мають вигляд:

$$q_x^i = -\lambda_T \frac{\partial T^i}{\partial x}; \quad (5)$$

$$q_z^i = -\lambda_T g^{ij} b_{j\alpha} T^\alpha;$$

$$\frac{\partial T^i}{\partial t} = -\frac{\lambda_T}{c(r_0 + x)} \frac{\partial T^i}{\partial x} + \frac{\lambda_T}{c} \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^2} - \frac{1}{c} g^{ij} (q_z^N - q_z^1) + \frac{\lambda_T}{c} g^{ij} b_{\alpha j} g^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma} T^\gamma + \frac{1}{c} q_0^i \quad (6)$$

Граничні умови:

В якості граничних умов по просторових координатах приймаємо рівняння конвективного теплообміну на бічних поверхнях з оточуючим середовищем. У вибраній системі координат маємо рівняння (3). Такий варіант граничних умов дозволяє легко переходити до граничних умов першого роду (на поверхні задано температурну функцію $\alpha \rightarrow \infty$) та другого роду (на поверхні задано тепловий потік q_c , $\alpha \rightarrow 0$). Виконуємо зниження вимірності граничних умов (3).

Редуковані початкові та граничні умови мають вигляд:

$$\text{при } t = 0: T^i(x, 0) = T_0^i(x), \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\text{при } z = h^+: q_z^N(r, t) &= -\alpha_T^+(T_c^+(r, t) - T^N(r, t)), \\
\text{при } z = h^-: q_z^1(r, t) &= \alpha_T^-(T_c^-(r, t) - T^1(r, t)), \\
\text{при } x = 0: q_x^i(0, t) &= \alpha_T^0(T_c^{0i}(0, t) - T^i(0, t)), \\
\text{при } x = r_l: q_x^i(l, t) &= -\alpha_T^l(T_c^{li}(l, t) - T^i(l, t)).
\end{aligned} \quad (8)$$

Шукані функції в рівняннях (7)-(8) залежать від координат t, x , записані в коефіцієнтах. В даному евклідовому просторі коефіцієнти відповідають значенням шуканих функцій в точках на прямих. Для подальшого чисельного розрахунку редукованої початково-граничної задачі використовується явна різницева схема (рис.3).

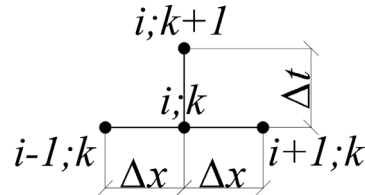


Рис. 3. Явна різницева схема.

Значення температури в наступний момент часу $k+1$ у внутрішніх точках виражається за допомогою рівняння (9):

$$T^{\alpha}(i, k+1) = \frac{\lambda_T}{c} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (T^{\alpha}(i+1, k) - T^{\alpha}(i-1, k)) \frac{1}{r_0 + (i-1)\Delta x} + \frac{\lambda_T}{c} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T^{\alpha}(i+1, k) - 2T^{\alpha}(i, k) + T^{\alpha}(i-1, k)) - \frac{\Delta t}{c} g^{\alpha i} [q_z^N - q_z^1] - \frac{\lambda_T \Delta t}{c} g^{\alpha i} b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta\gamma} T^{\gamma}(i, k) + T^{\alpha}(i, k) - q_0^{\alpha} \quad (9)$$

Значення температури в період часу $k+1$ в контурних точках визначається з граничних умов (8).

Значення температури в першій точці $x=0$:

$$T^{\alpha}(1, k+1) = \frac{T^{\alpha}(2, k+1) + \frac{\alpha_T^0}{\lambda_T} \Delta x T_0^{\alpha}}{1 + \frac{\alpha_T^0}{\lambda_T} \Delta x} \quad (10)$$

Значення температури в останній точці $x=r_0+l$:

$$T^{\alpha}(m, k+1) = \frac{T^{\alpha}(m-1, k+1) + \frac{\alpha_T^l}{\lambda_T} \Delta x T_l^{\alpha}}{1 - \frac{\alpha_T^l}{\lambda_T} \Delta x} \quad (11)$$

Розглянемо уранову кільцеву пластинку, розігріту до 600°C з наступними фізико-механічними характеристиками:

$$h = 0,04 \text{ м}$$

$$\rho = 19850 \text{ кг/м}^3$$

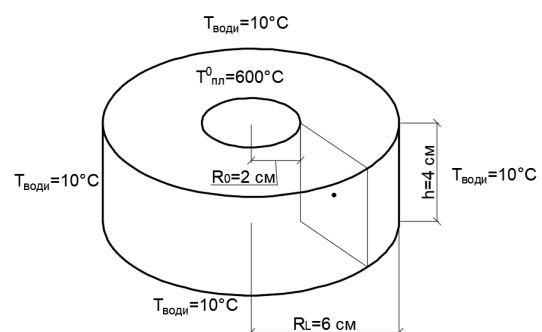
$$R_L = 0,12 \text{ м}$$

$$R_0 = 0,02 \text{ м}$$

$$T_{\text{пластини}}^0 = 600^{\circ}\text{C}$$

$$T_{\text{води}} = 10^{\circ}\text{C}$$

$$\alpha = 9170$$



$$\lambda_T = 31, c = 140 \text{ Дж} / (\text{кг}^\circ\text{C})$$

Досліджено розподіл температури в часі. В процесі розрахунку було визначено оптимальний крок розбиття пластини по координатах: $\Delta z = 0,01 \text{ м}$, $\Delta x = 0,01 \text{ м}$, Δt знаходиться в межах 10^{-5} с до 1 с.

На рис. 4 показана залежність зміни температури в часі для центральної точки пластини. Встановлено, що при $\Delta t > 1$ с втрачається стійкість чисельного алгоритму.

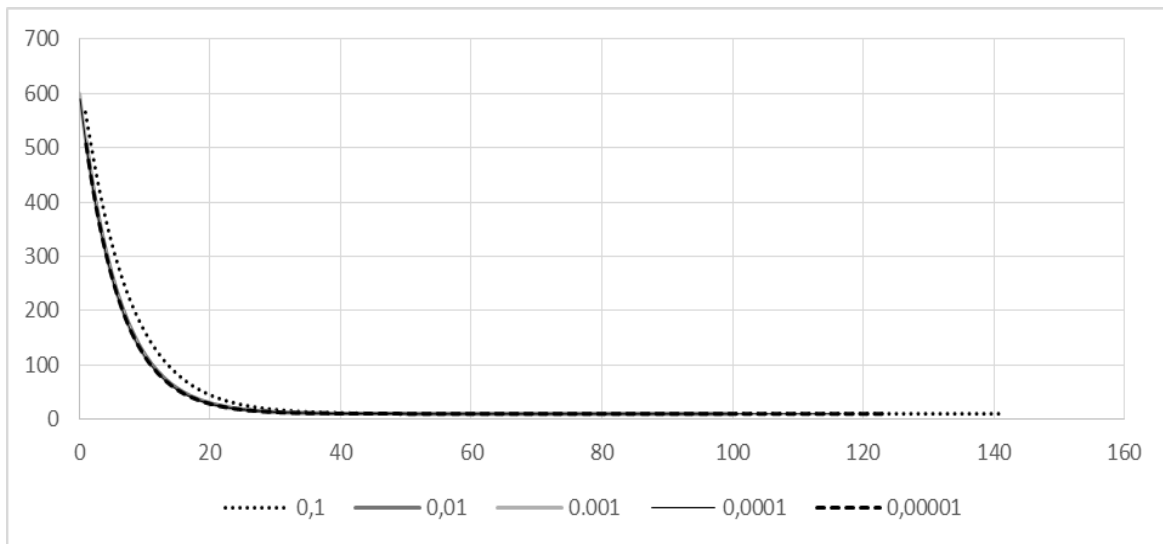


Рис.4. Залежність зміни температури в часі для центральної точки пластини.

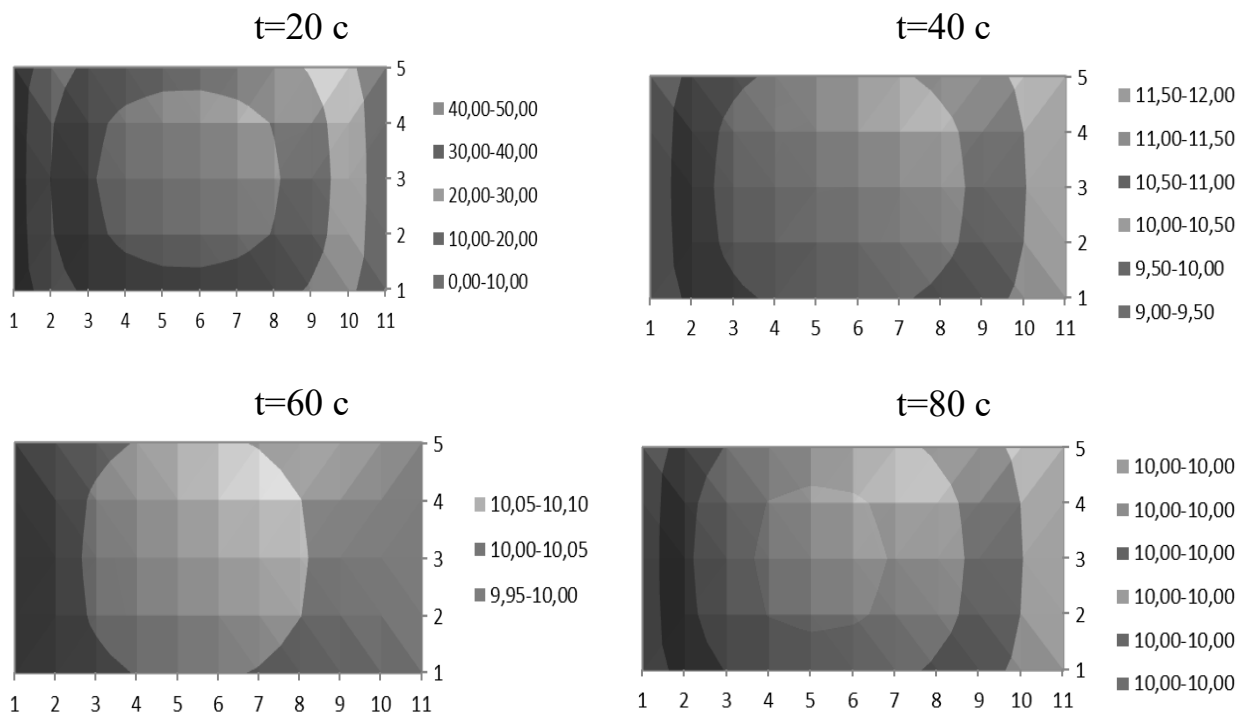


Рис 5. Ізолінії напружень охолодження пластини.

В результаті розрахунку отримано розподіл температури та зміну теплових потоків в часі. Запропонована методика дозволяє враховувати довільні умови теплової взаємодії об'єкта з оточуючим середовищем. У подальшому отримані результати можуть бути використані для дослідження напружено-деформованого стану вісесиметричних тіл при температурних впливах. Методика також дає можливість розраховувати товсті кільцеві пластини в просторовій постановці, враховуючи колову координату.

Література:

1. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость / А.Д. Коваленко. - К.: Наукова думка, 1965. - 204 с.
2. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих. // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. збірник, вип. 46. – К.: КНУБА, 2012. - С. 613-624.
3. Станкевич А.М., Левківський Д.В. Три варіанти редукції рівнянь плоскої задачі теорії пружності методом “прямих”.// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник, вип. 49. - К.: КНУБА, 2013. - С. 509-521.
4. V. Chybiryakov, A. Stankevich, D. Levkivskiy, V. Melnychuk Application of generalized “method of lines”, for solving problems of thermoelasticity of thick plates. // An international journal on operation of farm and agri-food industry machinery “Motrol”, vol.16, №8, Lublin 2014. P. 11-20.

к.т.н. Левковський Д.В., Сович Ю.В.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ПРЯМЫХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНЫХ ТЕЛ

В данной работе рассматривается распределение теплового поля во времени при охлаждении и нагревании толстой кольцевой пластины. Граничные условия и тепловые нагрузки осесимметричны, поэтому задача сводится к плоской и зависит от двух пространственных координат. По толщине выполняется снижение размерности обобщенным методом прямых. По координате x и t используется явная разностная схема.

Ключевые слова: снижение размерности, проекционный метод, теплопроводность, разностная схема, обобщенный метод прямых.

Phd Levkivskyi D.V., Sovych Y.V.,
Kyiv National University of Construction and Architecture

APPLICATION OF THE GENERALIZED METHOD OF LINES FOR THE RESEARCH OF THE HEAT FIELD OF AXISIMMETRIC BODIES

In this paper we consider the possibility of applying a generalized method of lines to reduce the dimensionality of differential equations recorded in a cylindrical coordinate system. The study of the distribution of the thermal field in time during cooling and heating of a thick ring plate and axisymmetric bodies of arbitrary thickness is performed. Boundary conditions, thermal loads are axially symmetric, so the problem is reduced to a plane problem and depends on two spatial coordinates. For modeling, the differential equation of non-stationary heat conductivity and the boundary conditions of convective heat transfer are used. By the thickness of the plate the dimensionality is reduced by means of the generalized method of lines. The body is divided in step Δ by coordinate z by lines. On a line, a system of basic piecewise linear finite functions, which are often used in the finite element method, is chosen. The desired functions of temperature and heat flow are determined using a linear combination of basic functions on the basis of the projective method of Bubnov-Petrov. Mathematical transformations are performed using a tensor calculus. Reduced equations, initial and boundary conditions are written in coefficients, which corresponds to the actual value of functions on the corresponding lines. By coordinates x and t use an explicit difference scheme. This formulation of the problem enables to take into account arbitrary boundary conditions, external thermal flows, internal local heat sources, and consider bodies of arbitrary dimensions. The calculation algorithm is executed in the algorithmic language of Visual Fortran and C++. A number of practical problems have been solved, which allow us to estimate the accuracy and convergence of the proposed approach, depending on the split step on spatial and temporal coordinates. The data on the distribution of heat in time are used to determine the stress-strain state in the problems of the thermo-elasticity of axisymmetric bodies.

Keywords: reduction of dimensionality, projection method, thermal conductivity, difference scheme, generalized method of lines.