МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
Модуль 2.
Диференціальне числення функцій однієї змінної

Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань
для здобувачів першого (бакалаврського)
рівня вищої освіти спеціальностей
123 «Комп’ютерна інженерія»
та 125 «Кібербезпека»

Київ 2024

УДК 517
М33

Укладачі: І. С. Безклубенко, канд. техн. наук, доцент;
О. І. Баліна, канд. техн. наук, доцент;
О. І. Серпінська, асистент

Рецензент Є. В. Бородовка, д-р техн. наук, професор

Відповідальний за випуск О. О. Терентьєв, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій проєктування та прикладної математики, протокол № 8 від 28 лютого 2024 року.

В авторській редакції.

М33 **Математичний** аналіз. Модуль 2. Диференціальне числення функцій однієї змінної : методичні вказівки / уклад. : І.С. Безклубенко та ін. – Київ : КНУБА, 2024. – 76 с.

Містять необхідний теоретичний і довідковий матеріал, приклади розв'язання типових задач та варіанти завдань до виконання модуля 2 індивідуальної роботи з математичного аналізу. Наведено завдання за варіантами до виконання самостійної роботи, а також приклад розв'язання типового варіанта РГР.

Призначено для для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія» та 125 «Кібербезпека».

Загальні положення

Дане видання являє собою методичні вказівки до вивчення загального курсу математичного аналізу, який викладається на першому курсі студентам спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія» та 125 «Кібербезпека». Методичні вказівки містять систематично підібрані задачі та вправи з розділів «Елементи математичного аналізу» та «Диференціальне числення функції однієї змінної».

Після вивчення цих розділів студент повинен вміти:

1) знайти область визначення функції, дослідити на парність та непарність, періодичність;
2) обчислити границю послідовності та границю функції;
3) порівняти нескінченно малі функції та визначити порядок малості;
4) знайти похідну функції вищих порядків;
5) дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву функції, дослідити характер точок розриву та побудувати схематичний графік функції;
6) знайти похідну функції, використовуючи таблицю похідних та формули диференціювання;
7) знайти похідну функцій, заданих неявно та параметрично;
8) застосувати похідну до розкриття невизначеностей під час обчислення границь функцій;
9) застосувати диференціал першого порядку до наближених обчислень;
10) дослідити функцію та побудувати її графік.

Основою навчання є самостійна робота студента над підручником, конспектом лекцій та виконання індивідуальної розрахунково-графічної роботи (РГР).

Перелік завдань до розрахунково-графічної роботи

Завдання 1. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

Завдання 2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

Завдання 3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;

b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;

c) зробити схематичний рисунок.

Завдання 4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$.

Завдання 5. Застосувати диференціал першого порядку для знаходження наближеного значення функцій.

Завдання 6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати їхні графіки.

Завдання 7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини.

Завдання 8. Розвинути функцію в ряд Тейлора або Маклорена.

Завдання 9. Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя.

Приклад розв'язання типового варіанта

Завдання 1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

Розв'язання:

$$a)\, y = \sqrt{\frac{x^2-1}{(x+3)(x-4)} - 1};$$

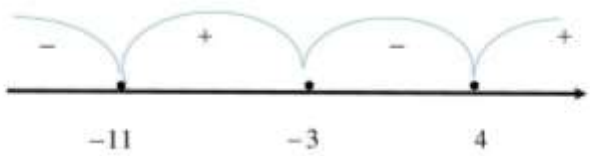
Область визначення функції:

$$\frac{x^2-1}{(x+3)(x-4)} - 1 \geq 0;$$

$$\frac{x^2-1-x^2+x+12}{(x+3)(x-4)} \geq 0;$$

$$\frac{x+11}{(x+3)(x-4)} \geq 0.$$

Для розв'язання нерівності застосовуємо метод інтервалів:



Отже, $x \in [-11;-3[\cup]4;+\infty[$.

Парність/непарність:

Якщо $f(-x) = f(x)$, то функція $y = f(x)$ парна.

Якщо $f(-x) = -f(x)$, то функція $y = f(x)$ непарна.

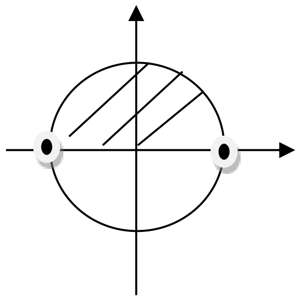
$$f(-x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{(-x+3)(-x-4)} - 1};$$

отже, функція ні парна і ні непарна (загального вигляду).

Періодичність: функція не має періоду.

$б) \, y = \sqrt{\sin x};$

Область визначення функції:



$$\sin x \geq 0;$$
$$x \in [0; \pi].$$

Парність/непарність:

$$f(-x) = \sqrt{\sin(-x)} = \sqrt{(-\sin x)}.$$

Отже, функція $y = \sqrt{\sin x}$ загального вигляду.

Періодичність:

Функція $y = \sqrt{\sin x}$ періодична з періодом $T = 2\pi$.

$в) \, y = \arcsin(\lg(\operatorname{tg} x)).$

Область визначення:

$$-1 \leq \lg(\operatorname{tg} x) \leq 1;$$
$$0 < \operatorname{tg} x; \; 0 < x < \frac{\pi}{2};$$
$$\frac{1}{10} \leq \operatorname{tg} x \leq 10.$$

Отже, $x \in \left[arctg \frac{1}{10}; arctg 10 \right].$

Парність/непарність:

$$f(-x) = \arcsin(\lg(-\operatorname{tg} x)).$$

Отже, функція ні парна і ні непарна (вона загального вигляду).

Функція $y=\arcsin(\lg(\operatorname{tg} x))$ *періодична* з періодом $T=\pi$.

<u>*Завдання 2.*</u> Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

Розв'язання:

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{1-3x^2+2x^4}{2-5x+3x^2+3x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^4}-\frac{3}{x^2}+2}{\frac{2}{x^4}-\frac{5}{x^3}+\frac{3}{x^2}+3}=\frac{2}{3}.$$

б) $$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to4}\left(\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}\right)=$$
$$\lim_{x\to4}\frac{(2x-8)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{6\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to4}\frac{(2x-8)2\sqrt{2}}{x-4}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

в) $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\left(1-\cos^2 x\right)}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1.$$

г) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x=[0\cdot\infty]=\lim_{t\to0}\frac{t\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=\lim_{t\to0}\frac{t\cdot\cos t}{\sin t}=$$
$$=1\cdot\cos0=1.$$

<u>*Завдання 3.*</u> Задана функція $y=f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;

c) зробити схематичний рисунок.

Розв'язання:

a) $y = 4^{\frac{1}{2-x}}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2.$

В точці $x_1 = 1$ функція визначена, неперервна.

В точці $x_2 = 2$ функція має розрив.

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} 4^{\frac{1}{2-x}} = \infty;$$

$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} 4^{\frac{1}{2-x}} = 0.$$

Таким чином, $x = 2$ є точкою розриву другого роду.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} 4^{\frac{1}{2-x}} = 4^0 = 1;$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 4^{\frac{1}{2-x}} = 4^0 = 1.$$

Побудуємо схематичний графік функції $y = 4^{\frac{1}{2-x}}$ (рис. 1).

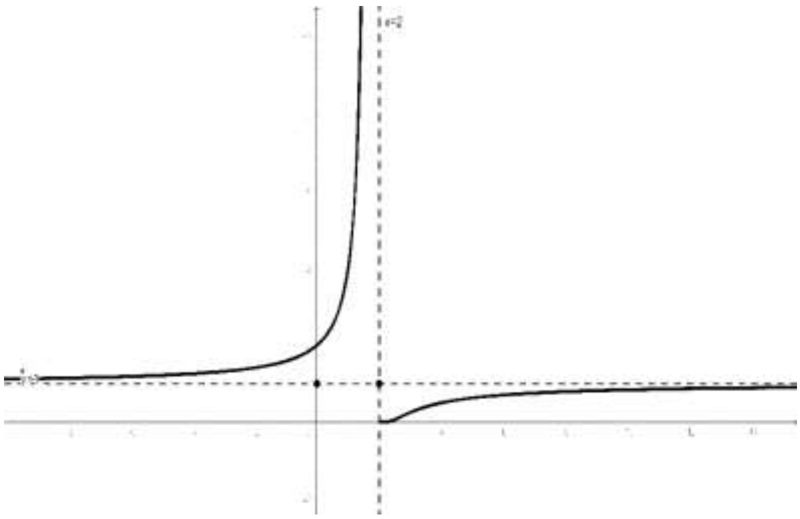


Рис. 1

$$b)\ f(x)=\begin{cases} 2-x, \text{ якщо } x \le 0; \\ x^2, \text{ якщо } 0 < x < 2; \\ 4, \text{ якщо } x > 2. \end{cases}$$

В точці $x = 0$ отримуємо:

$$f(0) = 2;$$
$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} (2-x) = 2;$$
$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} \left(x^2\right) = 0.$$

В точці $x = 2$ отримуємо:

$$f(2) = 4;$$
$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} \left(x^2\right) = 4;$$
$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} (4) = 4.$$

Отже, в точці x=0 функція має розрив 1 роду, а в точці x=2 функція має усувний точковий розрив.

Побудуємо схематичний графік функції (рис. 2).

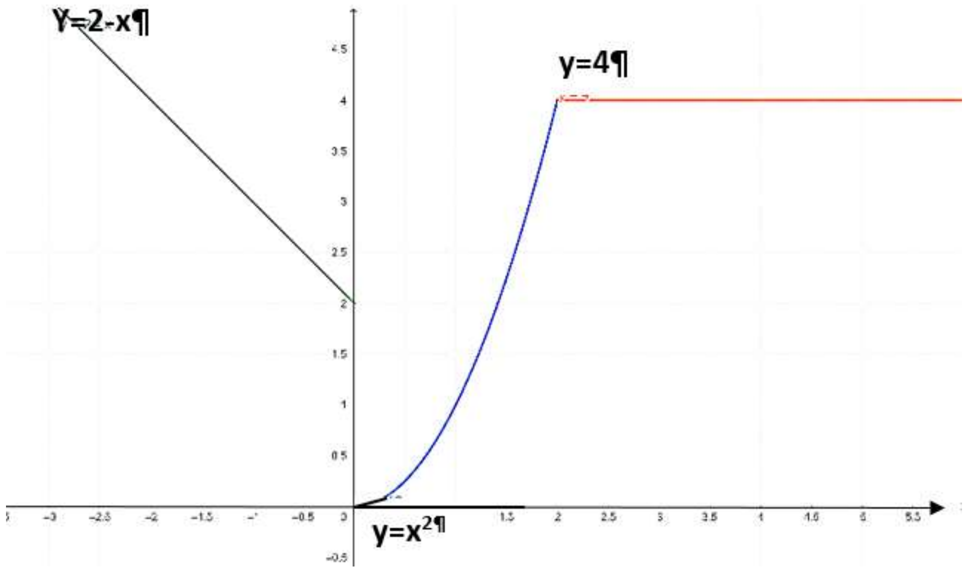


Рис. 2

<u>Завдання 4.</u> Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$.

Розв'язання:

$$a)\ y = x + \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}};$$

$$y' = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{3x^2\left(1-x^3\right) - \left(1+x^3\right)\cdot\left(-3x^2\right)}{\left(1-x^3\right)^2} =$$

$$1 + \frac{1}{3}\frac{\left(1-x^3\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(1+x^3\right)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{3x^2 + 3x^2}{\left(1-x^3\right)^2} = 1 + \frac{2x^2}{\left(1+x^3\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1-x^3\right)^{\frac{4}{3}}}.$$

б) $y = 2^{\sin x} \cdot \mathrm{ctg}^3 \frac{x}{2};$

$$y' = \ln 2 \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos x \cdot ctg^3 \frac{x}{2} + 2^{\sin x} \cdot 3ctg^2 \frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{\ln 2 \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \cos^3 \frac{x}{2}}{\sin^3 \frac{x}{2}} - \frac{\frac{3}{2} \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^4 \frac{x}{2}} =$$

$$\frac{\ln 2 \cdot 2^{\sin x} \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos^3 \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \cdot 2^{\sin x} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^4 \frac{x}{2}}.$$

в) $y = x \arcsin \sqrt{x} + \log_3 \sqrt{1+x^2};$

$$y' = 1\cdot \arcsin\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\ln 3\cdot\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x =$$

$$= \arcsin\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x(1-x)}} + \frac{x}{\ln 3\cdot\left(1+x^2\right)}.$$

г) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$;

$$\ln y = \ln x^{arctgx};$$
$$\ln y = arctgx\cdot \ln x;$$
$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{x} arctgx + \ln x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right);$$
$$y' = x^{arctgx}.\left(\frac{1}{x} arctgx + \ln x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right).$$

д) $\operatorname{tg}(x-y) - x^2y^3 = 0$;

$$\frac{1}{\cos^2(x-y)}(1-y') - 2xy^3 - 3y^2y'x^2 = 0;$$
$$1 - y' - 3y^2y'x^2\cos^2(x-y) = 2xy^3\cdot\cos^2(x-y);$$
$$y'\left(1+3y^2x^2\cos^2(x-y)\right) = 1 - 2xy^3\cos^2(x-y);$$
$$y' = \frac{1-2xy^3\cos^2(x-y)}{1+3y^2x^2\cos^2(x-y)}.$$

е) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$;

$$y' = 2xe^{\frac{1}{x}} + x^2 e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}(2x-1).$$

ж) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t; \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$

$$x' = \cos t - (\cos t - t\sin t) = t\sin t;$$

$$y' = -\sin t + (\sin t + t\cos t) = t\cos t;$$

$$y' = \frac{y_t{}'}{x_t{}'} = \frac{t\cos t}{t\sin t} = ctgt.$$

Завдання 5. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції $y = \ln(x+1)$ при $x = 0{,}0056$.

Розв'язання:

Використаємо формулу:

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x.$$

Покладемо:

$$x_0 = 0;\ \Delta x = 0{,}0056;\ y(0) = 0;\ y' = \frac{1}{x+1};\ y'(0) = 1.$$

Отже, $y(0{,}0056) = 0 + 1 \cdot 0{,}0056 = 0{,}0056.$

Завдання 6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати їхні графіки

$a) y = \frac{e^x}{x}.$

Розв'язання:

1) Область визначення функції:

$$x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty).$$

2) Функція не періодична.

3) Функція ні парна, ні непарна.

4) Нулі функції:

Точки перетину з осями відсутні.

5) Екстремуми функції:

Знаходимо першу похідну функції і прирівняємо її до нуля:

$$y'_x = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0;$$

$x = 1.$

Точка $x=1$ – стаціонарна точка. Досліджуємо знак похідної зліва та справа від точки $x=1$ (рис. 3).

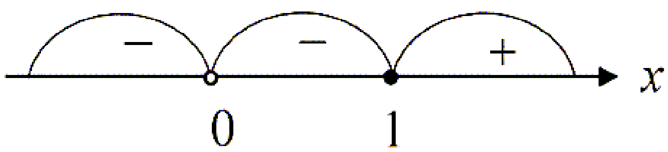


Рис. 3

В точці $x=1$ функція має мінімум.

$$y_{\min(1)} = e.$$

6) Асимптоти функції: $x = 0$ – вертикальна асимптота.

$$y = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0;$$

Отже, $y = 0$ – горизонтальна асимптота.

Похилих асимптот нема.

7) Знаходимо значення функції на кінцях області визначення:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0;$$

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{e^x}{x} = \infty;$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \frac{e^x}{x} = -\infty.$$

Зобразимо графік на координатній площині (рис. 4):

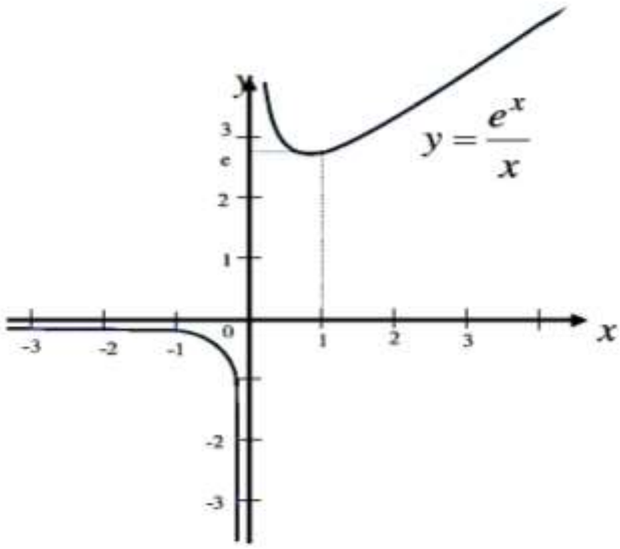


Рис. 4

б) $y = \frac{\ln x}{x}$.

Розв’язання:

1) Область визначення функції:

$x \in (0;\ \infty)$.

2) Функція ні парна, ні непарна.
3) Функція не періодична.
4) Нулі функції:

$$y = \frac{\ln x}{x} = 0,\ x = 1.$$

5) Екстремуми функції:

Знаходимо першу похідну функції і прирівняємо її до нуля:

$$y_x{}' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0;$$

$$(1 - \ln x) = 0;$$

$$x = e.$$

Точка $x = e$ – стаціонарна точка. Досліджуємо знак похідної зліва та справа від точки $x = e$ (рис. 5).

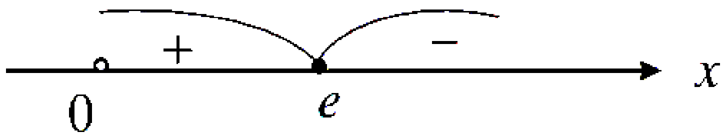


Рис. 5

В точці $x = e$ функція має максимум.

$$y_{\max}(e) = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

6) Точки перегину функції:

Знаходимо другу похідну функції і прирівняємо її до нуля:

$$y''_x = \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4} = 0;$$

$$(2 \ln x - 3) = 0;$$

$$x = e^{\frac{3}{2}}.$$

Точка $x = e^{\frac{3}{2}}$ – точка, в якій можливий перегин. Досліджуємо знак другої похідної зліва та справа від точки $x = e^{\frac{3}{2}}$ (рис. 6).

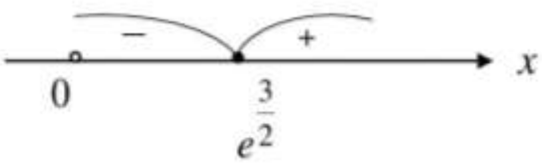


Рис. 6

В точці $x = e^{\frac{3}{2}}$ функція має перегин.

$$y\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}.$$

7) Асимптоти функції: $x = 0$ – вертикальна асимптота;

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0;$$

$y = 0$ – горизонтальна асимптота.

Похилих асимптот нема.

8) Знаходимо значення функції на кінцях області визначення:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0;$$

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

Зобразимо графік на координатній площині (рис. 7):

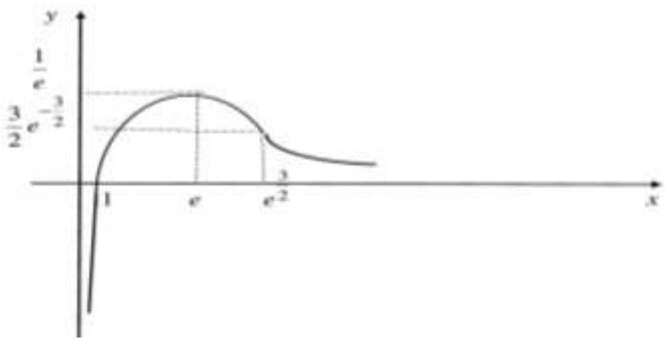


Рис. 7

Завдання 7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Якими повинні бути розміри циліндричного бака, об'ємом V, щоб на його виготовлення пішло якнайменше матеріалів (рис. 8)?

Розв'язання:

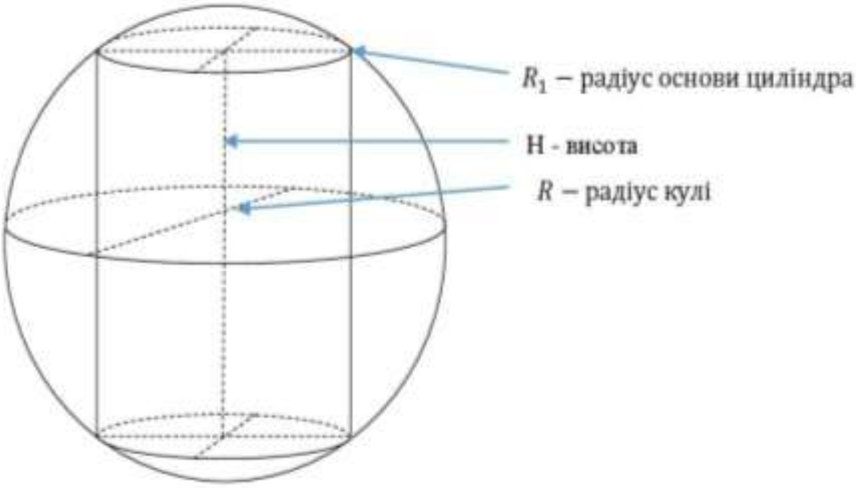


Рис. 8

Нехай $H = x$, тоді $R_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$.

Об'єм циліндра: $V = S_{осн} \cdot H$; тоді

$$V = \pi R_1^2 \cdot H = \pi\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right) \cdot x;$$

$$V'(x) = \pi R^2 - \frac{3\pi x^2}{4} = 0;$$

$$3x^2 = 4R^2;$$

$$x = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Отже, $H = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Завдання 8. Застосувати формулу Тейлора. Написати формулу Тейлора для функції $y = x - e^{-x}$ при $x_0 = 2$ та $n = 2$.

Розв'язання:

Використаємо формулу Тейлора для розвинення в ряд функції $f(x)$:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!}+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!};$$

$$f(2)=2-\frac{1}{e^2};$$

$$f'(x)=1-e^{-x}(-1)=\frac{e^x+1}{e^x};\ \ f'(2)=\frac{e^2+1}{e^2};$$

$$f''(x)=0+e^{-x}(-1)=-\frac{1}{e^x};\ \ f''(2)=-\frac{1}{e^2}.$$

Отже, $f(x)=2-\frac{1}{e^2}+\frac{(e^2+1)(x-2)}{e^2}-\frac{(x-2)^2}{2e^2}.$

<u>*Завдання 9.*</u> Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x};$ *б*) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}.$

Розв'язання:

$$а)\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}+\alpha\sin\alpha x}{\beta e^{\beta x}+\beta\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}}{\beta e^{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

$$б)\lim_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=e^{\infty}=\infty.$$

Варіанти завдань

Варіант № 1

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)\ y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2}};$

$б)\ y = \lg(1 - \sin x);$

$в)\ y = \arccos(1 - x^2).$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{11 - 2x^2 + 4x^6}{2 + 3x^2 + 5x^7};$ $\qquad б)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{3 + x + x^2} - \sqrt{9 - 3x^2 - x^3}}{x^2 - 3x + 2};$

$в)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - 1}{x tg 3x};$ $\qquad г)\ \lim\limits_{x\to 1} (3 - 2x)^{\operatorname{tg}\pi \frac{x}{2}}.$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

а) $y = 8^{\frac{1}{x-3}};\quad x_1 = 2;\quad x_2 = 3.$

б) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ якщо } x \le 0; \\ x^3 + 1, \text{ якщо } 0 < x < 2. \\ 5, \text{ якщо } x \ge 2. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t).$

а) $y = x + \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x^2}};$ б) $y = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}};$

в) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \log_5(x^2 - 3x);$ г) $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sin 2x};$

д) $\sin(x+y) - x^3 y^2 = 0;$ е) $y = x^5 \ln x;$

ж) $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y = \frac{x^3 - x}{x - 2}$ при $x = 2{,}98$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати їхні графіки.

а) $y = \frac{x^4}{x^3 - 1};$ б) $y = \ln(1 + x^2).$

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном, об'ємом 32 м^3 так, щоб на облицювання його стін та дна було витрачено найменшу кількість матеріалу.

8. Розвинути в ряд Тейлора за степенями $(x-2)$ багаточлен $y = x^4 + 5x^2 + x + 2.$

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\cos x}{x};$ б) $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^x.$

Варіант № 2

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$$а)\quad y = \sqrt[6]{\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}};$$

$$б)\quad y = \operatorname{arctg}(\lg x);$$

$$в)\quad y = \arccos(2\sin x).$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$а)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{5 + 4x^2 - 3x^5}{8 - 6x - x^5}; \qquad б)\quad \lim_{x\to 5} \frac{1 - \sqrt{x-4}}{2 - \sqrt{2x-6}};$$

$$в)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2}; \qquad г)\ \lim_{x\to 0} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2.

Необхідно:

a) встановити неперервність функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

а) $y = 3^{\frac{1}{1-x}}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2.$

б) $$f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ якщо } x < 0; \\ x^2, \text{ якщо } 0 \le x \le 3; \\ 4, \text{ якщо } x > 3. \end{cases}$$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t).$

$a)\ y=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}};$ б) $y=x(\sin\ln x+\cos\ln x);$

в) $y=\dfrac{1+x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}};$ г) $y=(\arcsin x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}};$

д) $x\operatorname{tg}y-y\sin x+x^3=0;$ е) $y=e^{-x}\cos x;$

ж) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\sqrt{t}; \\ y=\ln(1+t). \end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y=\sqrt[3]{9x^2+x}$ при $x=-0{,}08.$

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати їхні графіки.

а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4};$ б) $y=\ln(1-x^2).$

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Розкласти 8 на два доданки таким чином, щоб сума їхніх кубів була найменшою.

8. Записати формулу Маклорена для функції $y=\sqrt{x+1}$ при $n=3.$

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{\sin x};$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}.$

Варіант № 3

1. Задано функції $y=f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)\ \ y=\sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}};$

$б)\ \ y=\operatorname{arctg}(\lg(\cos x));$

$$в)\quad y=\arcsin\left(\frac{1-x^2}{2}\right).$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-1}{2+x+3x^2};\qquad б)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x};$$

$$в)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{4}}{1-\sqrt{1-4x^2}};\qquad г)\lim_{x\to 0}\sqrt[5x]{1-3x}.$$

3. Задана функція $y=f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2.

Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

$$a)\, y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}};\quad x_1=1;\quad x_2=3.$$

$$б)\, f(x)=\begin{cases} x^3,\ \text{якщо}\, x<0; \\ \sqrt{x},\ \text{якщо}\ 0\le x\le 4; \\ 5,\ \text{якщо}\ x>4. \end{cases}$$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y=f(x)$ та $x=\varphi(t);\ y=\psi(t)$.

$$a)\, y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2};\qquad б)\, y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}};$$

в) $y = 3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} - \log_1(x^3 - 5x);$ г) $y = (\cos 2x)^{\operatorname{tg} x};$

д) $e^{xy} + 2x^2 + y^3 = 0;$ е) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}};$

ж) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x+9}}$ при $x = 8{,}225.$

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1};$ б) $y = xe^{-x}.$

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. З квадратного листа картону зі стороною А вирізаються з кутів однакові квадрати, а з частини, що залишилася, клеїться прямокутна коробка. Якою повинна бути сторона відрізаного квадрата, щоб об'єм коробки був найбільшим?

8. Написати формулу Тейлора для функції $y = \ln(1+x^2)$ при $x_0 = 1$ та $n = 2.$

9. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.

а) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - e^{-x} - 2)\operatorname{ctg} x;$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}.$

Варіант № 4

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a) y = \sqrt{\dfrac{x^3-1}{(x-7)(x+4)} - 1};$

б) $y=\sqrt{\sin 2x}$;
в) $y=\arccos(\lg(\operatorname{tg}\ 2x))$.

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2-2x^4}{2-15x+3x^2-x^4}$; *б*) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{3x^3}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\operatorname{tg} x$.

3. Задана функція $y=f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

а) $y=9^{\frac{1}{7-x}}$; $x_1=1$; $x_2=7$.

б) $f(x)=\begin{cases}2+x, \text{ якщо } x\le 0;\\ x^3, \text{ якщо } 0<x<2;\\ 8, \text{ якщо } x\ge 2.\end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y=f(x)$ та $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$.

а) $y=x+\sqrt[4]{\dfrac{1+x^2}{1-x^3}}$; б) $y=2^{\cos x}\cdot\operatorname{ctg}^7\dfrac{x}{4}$;

в) $y=(x+2)\arcsin\sqrt{2x}+\log_3\sqrt{1+x^3}$; г) $y=x^{arcc\operatorname{tg} 2x}$;

д) $\operatorname{tg}(x+y)-x^3y^2=0;$ е) $y=x^2e^{\frac{1}{x}};$

ж) $\begin{cases} x=2\sin t+t\cos t; \\ y=\cos t-2t\sin t. \end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y=\ln^2(x+1)$ при $x=0{,}0046$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати їхні графіки.

а) $y=\dfrac{x^3}{x^3+1};$ б) $y=\dfrac{x}{\ln x}.$

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Бокові сторони та менша основа трапеції рівні по 10 см. Визначити її більшу основу так, щоб площа трапеції була найбільшою.

8. Застосувати формулу Тейлора. Написати формулу Тейлора для функції $y=x+e^{+x}$ при $x_0=3$ та $n=3$.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-\cos 2x}{e^{3x}-\cos 3x};$ $б)\lim\limits_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{1}{x^3}}.$

Варіант № 5

1. Задано функції $y=f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)\ y=\sqrt{\dfrac{x^2-6x+8}{x^4}};$

$б)\ y=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x-\sqrt{1-\operatorname{tg}^2x};$

$в)\ y=\operatorname{arctg}(\ln x).$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^9+4x^{10}}{2+3x^9+5x^{10}};\qquad б)\quad \lim_{x\to-3}\frac{9-x^2}{1-\sqrt{x+4}};$$

$$в)\quad \lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{\sin^2 5x};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\right)^x.$$

3. Задана функція $y=f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

$$a)\ y=3^{\frac{1}{4+x}};\quad x_1=-4;\quad x_2=3.\qquad б)\ f(x)=\begin{cases}-x^2,\ \text{якщо}\ x<0;\\ \operatorname{tg}x,\ \text{якщо}\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{4};\\ 3,\ \text{якщо}\ x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y=f(x)$ та $x=\varphi(t);\ y=\psi(t)$.

а) $y=\sqrt[4]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; б) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$;

в) $y=\operatorname{arctg}(\sin x)-5^{\ln x}$; г) $y=(\operatorname{tg}x)^{\cos^2 x}$;

д) $x^2y^2=\arcsin\dfrac{x}{y}$; е) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

ж) $\begin{cases}x=3\sin^2 t;\\ y=2\cos^3 t.\end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y=(x^3-1)(x^2+1)$ при $x=2{,}05$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

$$a)\, y=\frac{x^2}{x^2-1};\qquad б)\; y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. У конус вписано циліндр із заданими висотою H та радіусом основи R. Знайти конус з найбільшим об’ємом.

8. Знайти три перших члени розвинення в ряд Тейлора функції $y=\ln(2x+1)$ за степенями x та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$$a)\lim_{x\to 1}(x-1)\,\mathrm{ctg}\,\pi(x-1);\qquad б)\lim_{x\to 0}(\arcsin x)^{\mathrm{tg}\,x}.$$

Варіант № 6

1. Задано функції $y=f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$$a)\quad y=\sqrt[4]{\frac{x^2-5x+8}{3x-4}};$$

$$б)\quad y=\lg(1-2\cos x);$$

$$в)\quad y=\sqrt{1-0{,}2^{\cos x}}.$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{7-2x^2+3x^4}{5+3x^2+9x^4};\qquad б)\quad \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{x+5}-2};$$

$$в)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{x^2};\qquad г)\lim_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^2}}.$$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

$$a)\, y = 5^{\frac{1}{x-2}};\quad x_1 = 3;\quad x_2 = 2.$$

$$б)\, f(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x < 0; \\ \sin x, \text{ якщо } 0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2}; \\ 3, \text{ якщо } x > \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$.

а) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}}$;

б) $y - 3^{\operatorname{tg}^2 5x} - \log_3(x^2 - 7x)$;

в) $y = \arcsin\sqrt{x^2 - 1}$;

г) $y = (x-2)^{\sin^2 x}$;

д) $x^2 - y^3 + e^y \operatorname{arctg} x = 0$;

е) $y = \sqrt{1+x^2} \cdot \arcsin x$;

ж) $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}; \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y = x^4 - 3x^2$ при $x = 2{,}99$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

$$a)\, y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1};\qquad б)\, y = \frac{\ln x}{x^2}.$$

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Знайти висоту циліндра найменшого об'єму, який можна вписати до кулі, радіусом 10.

8. Знайти три перших члени розвинення в ряд Тейлора функції $y = xe^x$ за степенями x та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$$a)\lim_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}; \qquad б)\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Варіант № 7

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$$a)\quad y=\sqrt[4]{\frac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}};$$

$$б)\quad y=\sqrt{1-\operatorname{tg} x};$$

$$в)\quad y=\lg\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^3}{-5x^2+x}; \qquad б)\quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1};$$

$$в)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}; \qquad г)\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;

c) зробити схематичний рисунок.

$a)\, y = 4^{\frac{1}{x-2}}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2.$

$$б)\, f(x) = \begin{cases} x-1, \text{ якщо } x < 0; \\ \cos x, \text{ якщо } 0 \le x \le 2\pi; \\ 1, \text{ якщо } x > 2\pi. \end{cases}$$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$.

а) $y = 3 \cdot \sqrt[3]{x^5 + 3x^4 - \frac{2}{x}}$; б) $y = \sin^2 3x \cdot \cos^3 2x$;

в) $y = 5^{\arcsin 2x} - \log_5(x^2 - 7x)$; г) $y = (x^2 - x)^{\sqrt{x}}$;

д) $\ln(x + y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; е) $y = x^2 \operatorname{arctg} x$;

ж) $\begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y = \sqrt[10]{1 - x}$ при $x = 0{,}006$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = \frac{x}{9 - x^2}$; б) $y = \frac{1}{x \ln x}$.

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Якими повинні бути розміри циліндричного бака, об'ємом V, щоб на його виготовлення пішло якнайменше матеріалів?

8. Знайти три перших члени розвинення в ряд Тейлора функції $y = x^2 e^x$ за степенями x та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$$a)\lim_{x\to 1}\ln x\ln(1-x);\qquad б)\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

Варіант № 8

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$$a)\quad y=\sqrt[4]{\frac{x-1}{2-x}+\frac{1}{2}};$$

$$б)\quad y=\lg(\sin(\lg\ x));$$

$$в)\quad y=\arcsin 2^{x}.$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3-11x^2+4x^5}{5x^2-3x^5};\qquad б)\quad \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x});$$

$$в)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{3x};\qquad г)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

а) $y=e^{\frac{1}{1+x}};\quad x_1=-1;\quad x_2=2.$ б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, \text{ якщо } x\le 0;\\ \sin x, \text{ якщо } 0<x\le\pi;\\ 3, \text{ якщо } x>\pi.\end{cases}$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t).$

а) $y = \log_3 \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}};$ б) $y = 3^{\operatorname{ctg} x} - \arcsin\sqrt{x};$

в) $y = e^{a\operatorname{rctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}};$ г) $y = (\operatorname{tg} 3x)^{\sin x};$

д) $y\sin x + \cos(x-y) = x^2;$ е) $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x;$

ж) $\begin{cases} x = 2t^3 + t; \\ y = \ln t. \end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ при $x = 0{,}00175.$

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = \frac{x-1}{(x+1)^2};$ б) $y = e^{2x-x^2}.$

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Розкласти число 9 на два співмножники так, щоб сума їхніх квадратів була найменшою.

8. Знайти три перших члени розвинення в ряд Тейлора функції $y = \sin^2 x$ за степенями x та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{\sin^6 2x};$ $б)\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$

Варіант № 9

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)\ y=\lg\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{8}\right);$

$б)\ y=\sqrt[4]{5-x-\dfrac{4}{x}};$

$в)\ y=\sqrt{\cos x-\sin 2x}.$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x^6+8x^7}{x-3x^7};$ $\qquad б)\ \lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x);$

$в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-1}{xtg3x};$ $\qquad г)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 4x)}.$

3. Задана функція $y=f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

$a)\ y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}};\quad x_1=3;\quad x_2=2.$ $\qquad б)\ f(x)=\begin{cases}\sin x, \text{ якщо } x<0;\\ 2x, \text{ якщо } 0\le x\le 2;\\ 1, \text{ якщо } x>2.\end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y=f(x)$ та $x=\varphi(t);\ y=\psi(t).$

а) $y=x\cdot\sqrt[5]{\dfrac{1+x^2}{5x-3}};$ $\qquad$ б) $y=e^{\sin x}\cdot\operatorname{tg}^3 2x;$

в) $y=\ln\arcsin\sqrt{x}-\cos^3 5x;$ $\qquad$ г) $y=(x^2+3x)^{\operatorname{arctg} x};$

д) $2^{x-y}=x^2y^2;$ $\qquad$ е) $y=x\cdot e^{-x^2};$

ж) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t; \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y = (1+x)^6 - 1$ при $x = 0{,}004$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x};$ б) $y = xe^{\frac{4}{x}}.$

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. В півколо радіусу R вписано прямокутник найбільшої площі. Визначити його розміри.

8. Знайти три перших члени розвинення в ряд Тейлора функції $y = \ln \cos x$ за степенями x та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a) \lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx - \sin x}{x - \sin x};$ $б) \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{1 + 2\ln \sin x}.$

Варіант № 10

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)\ y = \sqrt{\frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + 3x - 10}};$

$б)\ y = \sqrt{\cos x - \frac{1}{2}};$

$в)\ y = \sin(\lg x).$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-8x+1}{x^3-1};$ $\qquad$ $б)\ \lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2-\sqrt{8+x}}{4+x};$

$в)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x};$ $\qquad$ $г)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{2x+1}{3x}}.$

3. Задана функція $y=f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;

b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;

c) зробити схематичний рисунок.

а) $y=2^{\frac{1}{-x}};\quad x_1=1;\quad x_2=0.$

б) $f(x)=\begin{cases}\cos x,\ \text{якщо}\ x<0;\\ x+1,\ \text{якщо}\ 0\le x\le 4;\\ 2,\ \text{якщо}\ x>4.\end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y=f(x)$ та $x=\varphi(t);\ y=\psi(t).$

а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}};$ $\qquad$ б) $y=3^{\operatorname{ctg}x}\cdot\cos\sqrt[8]{x};$

в) $y=\ln\arccos 2x+\operatorname{tg}\sqrt[3]{1+x^3};$ $\qquad$ г) $y=(x^2+1)^{\arcsin x};$

д) $x\sin y-y\operatorname{tg}x+y^2=0;$ $\qquad$ е) $y=\dfrac{x^3}{1-x};$

ж) $\begin{cases}x=\arcsin t;\\ y=\ln(1-t^2).\end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y=(1+x)^{-5}$ при $x=0{,}2.$

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

$$а)\, y=\frac{x^3-3x}{x-1}; \qquad б)\, y=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}.$$

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Перетин тунелю має форму прямокутника, завершеного півколом. Периметр перетину рівний 18 м. За якого радіусу півкола площа перетину буде найбільшою?

8. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\sqrt[3]{x+1}$ при $n=3$.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$$а)\, \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^2}; \qquad б)\, \lim_{x\to 0} x^{\frac{3}{\ln(e^x-1)}}.$$

Варіант № 11

1. Задано функції $y=f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$$а)\;\; y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\log_5(x^2-3x);$$

$$б)\;\; y=x+\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x^2}};$$

$$в)\;\; y=5\cdot\sqrt[5]{x^3+3x^2-\frac{2}{x}}.$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$а)\;\; \lim_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+4x^4}{2+3x^2+x^4}; \qquad б)\;\; \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3};$$

$$в)\;\; \lim_{x\to 0}\frac{x^2 ctgx}{tg3x}; \qquad г)\;\; \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.$$

3. Задана функція y=f(x) та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;

b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;

c) зробити схематичний рисунок.

$$a) y = 9^{\frac{1}{x+4}}; \quad x_1 = 5; \quad x_2 = -4. \qquad б) f(x) = \begin{cases} x+4, \text{ якщо } x < 0; \\ \sqrt{x}+1, \text{ якщо } 0 \le x \le 4; \\ 2x, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$.

а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;　　б) $y = e^{\sin x} \cdot \operatorname{tg}^3 2x$;

в) $y = e^{a\,\mathrm{rctg}\,\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$;　　г) $y = (x^2 - x)^{\sqrt{x}}$;

д) $x^2 - y^3 + e^y \operatorname{arctg} x = 0$;　　е) $y = \frac{\ln x}{x}$;

ж) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t; \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y = \sqrt{1+x}$ при $x = 0{,}02$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = x - \ln(x+1)$;　　б) $y = e^{-x^2}$.

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Якими повинні бути катети прямокутного трикутника з гіпотенузою m, щоб його площа була найбільшою?

8. Знайти перші три члени розвинення в ряд Тейлора за при $x_0 = 2$ функції $y = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$ та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{tg3x};\qquad\qquad б)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}+x^{2}}{x^{4}}.$$

Варіант № 12

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$$a)\ y=\sqrt[4]{\frac{x^2-5x+6}{x^2}};$$

$$б)\ y=\operatorname{arctg}(\lg(\cos x));$$

$$в)\ y=\operatorname{arctg}(\ln x).$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2+x^2-3x^3}{6x^3-3x+1};\qquad б)\quad \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2};$$

$$в)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx-\sin x}{x\sin x}\right);\qquad г)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}.$$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

$$a)\ y=4^{\frac{1}{3-x}};\quad x_1=3;\quad x_2=2.$$

$$б)\ f(x)=\begin{cases}\cos x,\ \text{якщо}\ x<1;\\ x^2+1,\ \text{якщо}\ 1\le x\le 3;\\ x+3,\ \text{якщо}\ x>3.\end{cases}$$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$.

а) $y = 3^{\operatorname{ctg} x} \cdot \cos\sqrt[8]{x}$;

b) $y = x \cdot \sqrt[5]{\frac{1+x^2}{5x-3}}$;

в) $y = (\operatorname{tg} 3x)^{\sin x}$;

г) $y = 5^{\arcsin 2x} - \log_5(x^2 - 7x)$;

д) $y = \sqrt{1 + x^2 \cdot \arcsin x}$;

е) $x^2 y^2 = \arcsin\frac{x}{y}$;

ж) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y = \sqrt[3]{x-1}$ при $x = 9{,}025$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = x - \ln x$;

б) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Знайти відношення радіуса та висоти циліндра з об'ємом V та найменшою поверхнею.

8. Розвинути в ряд Тейлора за степенями $(x-1)$ функцію $y = \sqrt{x}$ до третього члена та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5\ln x^4}{3^x + x}$;

$б)\ \lim\limits_{x\to 0} x\ln x$.

Варіант № 13

1.Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a) \quad y=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}};$

$б) \quad y=\sqrt{\sin x};$

$в) \quad y=\sqrt{1-0{,}2^{\cos x}}.$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$a) \quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)(2x-1)(3+4x)}{2x^2(1+2x)};$ $\qquad б) \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x\sqrt{x+4}};$

$б) \quad \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x\sin x}{\sec x-1}\right);$ $\qquad г) \lim\limits_{x\to\pi}\left(1+3\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{ctg} x}.$

3. Задана функція $y=f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

$a) y=12^{\frac{1}{x}}; \quad x_1=1; \quad x_2=0.$

$$б) f(x)=\begin{cases} x, \text{ якщо } x<1; \\ x^2+1, \text{ якщо } 1\le x\le 2; \\ x-3, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y=f(x)$ та $x=\varphi(t);\ y=\psi(t).$

а) $y=\log_3\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}};$ $\qquad$ б) $y=\sin^2 3x\cdot\cos^3 2x;$

в) $y=\arcsin\sqrt{x^2-1};$ $\qquad$ г) $y=(\operatorname{tg} x)^{\cos^2 x};$

д) $\operatorname{tg}(x-y)-x^2y^3=0;$ е) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}};$

ж) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}\sqrt{t}; \\ y=\ln(1+t). \end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y=\dfrac{4x}{x+3}$ при $x=3{,}06.$

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y=2x-3\sqrt[3]{x^2};$ б) $y=2-3x-x^2.$

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Ґратами, довжиною 120 м, треба обгородити прилеглу до будинку прямокутну площадку найбільшої площі. Визначити розмір найбільшої площадки.

8. Знайти три перших члени розвинення функції $y=e^{x^2-x}$ в ряд Тейлора за степенями x та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x^2}{4^x};$ $б)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}.$

Варіант № 14

1.Задано функції $y=f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)\ y=\sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}};$

$б)\ y=\sqrt{1-\operatorname{tg}x};$

$в)\ y=\operatorname{arctg}(\ln x).$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}; \qquad б)\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-3x}-x;$$

$$в)\ \lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}; \qquad г)\ \lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}.$$

3. Задана функція $y=f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;

b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;

c) зробити схематичний рисунок.

$$a) y=3^{\frac{1}{x+4}};\ x_1=-4;\ x_2=-2.$$

$$б)\ f(x)=\begin{cases}\cos x, \text{ якщо } x\le -1;\\ x^2-1, \text{ якщо } -1<x\le 1;\\ x, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y=f(x)$ та $x=\varphi(t);\ y=\psi(t)$.

а) $y=x+\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x^2}}$; б) $y=x(\sin\ln x+\cos\ln x)$;

в) $y=3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}-\log_1(x^3-5x)$; г) $y=x^{\operatorname{arctg} x}$;

д) $\operatorname{tg}(x-y)-x^2y^3=0$; е) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

ж) $\begin{cases}x=\cos\dfrac{t}{2};\\ y=t-\sin t.\end{cases}$

5. Знайти наближене значення функції $y=(x^3-2x+1)(x^2-3)$ при $x=2{,}003$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y=\dfrac{8x}{(x-1)^2}$; б) $y=\dfrac{e^x}{x^2}$.

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Знайти відношення радіусу основи до висоти конуса найменшої поверхні з об'ємом V.

8. Написати формулу Маклорена для функції $y=xe^x$ при $n=3$.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}\right);\ б)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x+x^2}{x^4}.$$

Варіант № 15

1. Задано функції $y=f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$$a)\quad y=\sqrt{\frac{x^2-1}{(x+3)(x-4)}-1};$$

$$б)\quad y=\lg(\sin(\lg\, x));$$

$$в)\quad y=\sqrt{1-0{,}2^{\cos x}}.$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-n}{\sqrt{n^6+5n^3+1}};\qquad б)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\operatorname{tg}\pi\frac{x}{2}}$.

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

а) $y = 8^{\frac{1}{5-x}}$; $x_1 = 5$; $x_2 = 3$.

б) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ якщо } x \le 1; \\ x^3 - 1, \text{ якщо } 1 < x \le 3; \\ 2x + 3, \text{ якщо } x > 3. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$.

а) $y = \arcsin\sqrt{x^2 - 1}$; б) $y = \sin^2 3x \cdot \cos^3 2x$;

в) $y = e^{a\operatorname{rctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$; г) $y = (x^2 + 3x)^{\operatorname{arctg} x}$;

д) $x\sin y - y\operatorname{tg} x + y^2 = 0$; е) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$;

ж) $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

5. Знайти просте наближене значення величини $\sqrt[3]{1 + a^2}$ при малому a та обчислити її наближене значення за малого фіксованого $a = 0{,}03$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = \ln(2 + 2x + x^2)$; б) $y = \dfrac{x}{e^{2x}}$.

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Знайти розміри циліндра з поверхнею S та найбільшим об’ємом.

8. Знайти три перших члена розвинення в ряд Тейлора за степенями x функції $y = \sin x^2$ та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}\right)$; $б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x^2+2x-4}{x^7+8x-1}$.

Варіант № 16

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)\ y = \sqrt{\dfrac{x^2-6x+8}{x^4}}$;

$б)\ y = \lg(1-\sin x)$;

$в)\ y = \arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{2}\right)$.

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+2x^4-3x}{x-2x^3-5x^2-1}$; $б)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-5}{\sqrt{2x+6}-2}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos 4x}{3x^2}\right)$; $г)\ \lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{2x-1}{x+1}}$.

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

$$a)\, y = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{x+1}}; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 5.$$

$$б)\, f(x) = \begin{cases} \sin 2x, \text{ якщо } x \le 0; \\ x^2 - 1, \text{ якщо } 0 < x \le 1; \\ 4x + 1, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t).$

а) $y = x + \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}};$ б) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}});$

в) $y = \arcsin\sqrt{x^2 - 1};$ г) $y = (x^2 - x)^{\sqrt{x}};$

д) $y\sin x + \cos(x - y) = x^2;$ е) $y = x \cdot e^{-x^2};$

ж) $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \ln(1 - t^2). \end{cases}$

5. Знайти просте наближене значення величини $\frac{1}{(1+a)^3}$ при малому a. та обчислити її наближене значення за малого фіксованого $a = 0{,}02.$

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = x - 2 + \frac{4x}{x-2};$ б) $y = x + \ln x.$

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. В конус, радіусом 4 дм та висотою 6 дм, вписано циліндр найбільшого об’єму. Знайти цей об’єм.

8. Розвинути в ряд Тейлора за степенями $(x+2)$ багаточлен $y = x^5 - 2x^4 - x^2 + x + 2.$

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$$a)\quad \lim_{x\to\frac{p}{4}}\left(\frac{x-\frac{p}{4}}{\ln\frac{4e}{p}x-\frac{4}{p}x}\right); \qquad б)\quad \lim_{x\to 0}\frac{3\arcsin x + x^2}{x^4}.$$

Варіант № 17

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$$a)\quad y=\sqrt[4]{\frac{x^2-5x+8}{3x-4}};$$

$$б)\quad y = \operatorname{arctg}(\lg x);$$

$$в)\quad y = \arcsin(\lg(\operatorname{tg} x)).$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)(2x-1)(3+x)}{2x^3+x^2-1}; \qquad б)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x};$$

$$в)\quad \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}; \qquad г)\ \lim_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^2}}.$$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

а) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;

b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;

c) зробити схематичний рисунок.

$$a)\,y = 14^{\frac{1}{6-x}}; \quad x_1 = 6; \quad x_2 = 4.$$

$$б)\,f(x) = \begin{cases} tgx, \text{ якщо } x \le 1; \\ x^3 + 1, \text{ якщо } 1 < x \le 2; \\ x - 3, \text{ якщо } x > 2. \end{cases}$$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$.

а) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}}$;

б) $y = \sin^2 3x \cdot \cos^3 2x$;

в) $y = e^{a\,\mathrm{rctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$;

г) $y = (x^2 + 3x)^{\operatorname{arctg} x}$;

д) $x \sin y - y \operatorname{tg} x + y^2 = 0$;

е) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

ж) $\begin{cases} x = 3\sin^2 t; \\ y = 2\cos^3 t. \end{cases}$

5. Знайти просте наближене значення величини $\dfrac{1}{1 + a^3}$ при малому a та обчислити її наближене значення за малого фіксованого $a = 0{,}03$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$;

б) $y = \ln(x^2 + 1)$.

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Потрібно вирити яму конічної форми (вирву) з твірною а = 3м. За якої глибини об'єм вирви буде найбільшим?

8. Знайти три перших члени розвинення в ряд Тейлора функції $y = arctg2x$ за степенями x та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$$а)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x - b^x}{tgx}\right); \qquad б)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^6 - 2x^3 + 4}{x^5 + x - 1}.$$

Варіант № 18

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$$а)\quad y = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11}};$$

$$б)\quad y = \sqrt[4]{5 - x - \frac{4}{x}};$$

$$в)\quad y = \lg\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$а)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{(5-x)(2x-1)}{(3x^2-1)}; \qquad б)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2+3x};$$

$$в)\quad \lim_{x\to 0}\frac{2xtgx}{\sin^2 x}; \qquad г)\ \lim_{x\to 0}(1+3x^3)^{\frac{1}{x^2}}.$$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

$a) y = 15^{\frac{1}{8-x}}; \quad x_1 = 8; \quad x_2 = 4.$ б) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ якщо } x \le 1; \\ x^3, \text{ якщо } 1 < x \le 3; \\ x-1, \text{ якщо } x > 3. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t); \ y = \psi(t).$

а) $y = \operatorname{ctg}(\sin 2x) - 5^{\ln x} + \cos x;$ б) $y = e^{x^2 arctgx^2 - 4};$

в) $y = \ln \frac{x^5}{1-x^2};$ г) $y = 10^{\ln x - 4};$

д) $y = \sqrt{\frac{1+\sin 3x}{3+2\sin 3x}};$ е) $4^x = e^{x+y};$

ж) $\begin{cases} x = e^{-t-1}; \\ y = e^{t^2+t+1}. \end{cases}$

5. Знайти просте наближене значення величини $\frac{1}{1-a^3}$ при малому a та обчислити її наближене значення за малого фіксованого $a = 0{,}02$.
6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2};$ б) $y = x \ln x.$

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. З круглої колоди, радіусом $R = 2\sqrt{3}$, потрібно вирізати балку прямокутного перетину, з основою b та висотою h. Міцність балки пропорційна bh^2. За яких значень b та h міцність балки буде найбільшою.

8. Розвинути в ряд Тейлора за степенями x функцію $y = ln\,x,$ при $x_0 = 2.$ та $n = 3.$

9. Використовуючи правило Лопіталя, границі.

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{8^x};\qquad б)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - x}{x^3}.$$

Варіант № 19

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$$a)\ y = \sqrt[4]{\frac{x-1}{2-x}+\frac{1}{2}};$$

$$б)\ y = \sqrt{\cos x - \frac{1}{2}};$$

$$в)\ y = \arcsin 2^x.$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{(1-2x)x^2}{(3x-2)(x^2-1)};\qquad б)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{3x};$$

$$в)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{5x^2}\right);\qquad г)\lim_{x\to 1}(4+x)^{\frac{2x-1}{x-1}}.$$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

$$a)\, y=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{4+x}};\; x_1=-4;\; x_2=-5;$$

$$б)\, f(x)=\begin{cases} tgx, \text{ якщо } x\le 0; \\ x^3-1, \text{ якщо } 0<x\le 2; \\ 2x, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y=f(x)$ та $x=\varphi(t);\; y=\psi(t)$.

а) $y=\sqrt{\sin(x^2-x)};$

б) $y=\arcsin\frac{2}{x-1};$

в) $y=11^{\frac{1}{4x}};$

г) $y=\lg 3x tg^3 x;$

д) $xy-x-y=0;$

е) $y=\frac{x-1}{1-x^2}e^{-x};$

ж) $\begin{cases} x=\sin^2(2t+1); \\ y=\cos^2(1-t). \end{cases}$

5. Знайти просте наближене значення величини $(1-a)^3$ при малому a та обчислити її наближене значення за малого фіксованого $a=0{,}00008$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y=2x\ln x;$

б) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}.$

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. З прямокутного листа жерсті 24×9 см потрібно виготовити відкриту зверху коробку, вирізаючи з кутів листа рівні квадрати та загинаючи бокові смуги, що залишилися під прямим кутом. Якими повинні бути сторони квадратів, що вирізаються, щоб місткість коробки була найбільшою?

8. Знайти три перших члени розвинення функції $y = x^5 - 2x^3 - x + 2$ за степенями $(x-2)$ в ряд Тейлора та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$$a) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^2}; \qquad б) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 4}{x^2 + x - 1}.$$

Варіант № 20

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$$a)\ y = \lg\left(\operatorname{tg}\frac{x}{8}\right);$$

$$б)\ y = \sqrt{\cos x - \sin 2x};$$

$$в)\ y = \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}.$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$a) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 5}{2x^3 - 2}; \qquad б) \quad \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7};$$

$$в) \quad \lim_{x\to\infty}\left(x^2 \cos\frac{1}{x}\right); \qquad г) \lim_{x\to -1} (2 - 3x)^{\frac{2x-1}{x+1}}.$$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

$$a)\ y = 13^{\frac{1}{5+x}}; \quad x_1 = -4; \quad x_2 = -5.$$

$$б)\ f(x)=\begin{cases}1,\ \text{якщо}\ x<1;\\ x^2+1,\ \text{якщо}\ 1\le x\le 2;\\ x-3,\ \text{якщо}\ x>2.\end{cases}$$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y=f(x)$ та $x=\varphi(t);\ y=\psi(t)$.

а) $y=\sin^3 2x\cos^2 3x-5^{\ln x}$; б) $y=arctg\sqrt{x}$;

в) $y=5^{1-\ln x}$; г) $y=\ln\frac{(x-2)^3}{x+2}$;

д) $y^2\sin x=arctgx^3$; е) $x^3=5^{\sin x-\ln x}$;

ж) $\begin{cases}x=t^2\sin(2t+1);\\ y=t\sin(1-t).\end{cases}$

5. Користуючись правилами наближеного обчислення, знайти числове значення виразу $\frac{100}{(0{,}008)^8}$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y=\frac{2x}{x-1}$; б) $y=4xe^{-x}$.

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Перетин зрошувального каналу має форму рівнобічної трапеції, бокові сторони якої рівні меншій основі. За якого кута нахилу бокових сторін перетин каналу буде мати найбільшу площу?

8. Знайти три перших члени розвинення в ряд Тейлора функції $y=tg2x$ за степенями x та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{3^x}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\sqrt{x}-2}{x^2+x}$.

Варіант № 21

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

а) $y = \sqrt{\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10}}$;

б) $y = \sin(\lg x)$;

в) $y = \lg(\sin(\lg x))$.

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0} (1-x^3)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

а) $y = 12^{-\frac{1}{x^2}}$; $x_1 = 1$; $x_2 = 0$.

б) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ якщо } x \le 1; \\ x+1, \text{ якщо } 1 < x \le 3; \\ 5x-1, \text{ якщо } x > 3. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$.

а) $y = \sin 2x \cos 3x - x + tgx;$ б) $y = \sin 2x + \cos 3x;$

в) $y = 5x^7 e^x;$ г) $y = \frac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{x};$

д) $y = x^{1-\ln x};$ е) $xy = tgy;$

ж) $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = t\sin(1-t). \end{cases}$

5. Користуючись правилами наближеного обчислення, знайти числове значення виразу $\sqrt[5]{36}$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

$a) y = \ln(x^2 + 4x + 5).$ $б)\quad y = 2 - \sqrt[3]{x-1}.$

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Потрібно вирити яму циліндричної форми з круглою основою, вертикальною боковою поверхнею та заданого об’єму V = 25 м^3 (V ≈ 8π). Якими повинні бути лінійні розміри ями (радіус R та висота H), щоб на облицювання її дна та бокової поверхні було витрачено найменшу кількість матеріалу?

8. Застосувати формулу Тейлора. Розкласти багаточлен $y = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 2.$ за степенями ($x - 1$).

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^3 + x - 2};$ $б)\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}.$

Варіант № 22

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)\ y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x};$

$б)\ y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11}};$

$в)\ y = \arccos(1 - x^2).$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$a)\ \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{9n^2 - 2n + 3} - n}{5n + 3};$ $\qquad б)\ \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1};$

$в)\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x;$ $\qquad г)\ \lim\limits_{x \to 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

а) $y = 5^{\frac{1}{x+2}};\quad x_1 = 3;\quad x_2 = -2.$

б) $f(x) = \begin{cases} 4\sin x, \text{ якщо } x \le -1; \\ x^3, \text{ якщо } -1 < x \le 1; \\ x - 1, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$.

а) $y = \sin^3 2x + \cos^2 3x;$ б) $y = tg2x - ctg3x;$

в) $y = (5 - x^7)e^x;$ г) $y = (tg\,2x - ctg\,3x)^4;$

д) $xy = arctg\frac{x}{y};$ е) $y = x^{\frac{1}{x}};$

ж) $\begin{cases} x = t^3; \\ y = 2t - 1. \end{cases}$

5. Користуючись правилами наближеного обчислення, знайти числове значення виразу $\sqrt[3]{67}$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = \frac{3\ln x}{x};$ б) $y = x^4 - 2x^2 + 2.$

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Прямокутна площадка, що примикає однією стороною до довгої кам’яної стіни, з трьох боків огороджена залізними ґратами. Якою повинна бути довжина сторін площадки, щоб вона мала найбільшу площу, якщо маємо 200 м ґрат?

8. Знайти три перших члени розвинення функції $y = \sqrt[3]{1+x}$ за степенями x в ряд Тейлора та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2 - 2n + 3} - n}{5n + 3};$ $б)$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right).$

Варіант № 23

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$$а)\ y = \lg(1 - 2\cos x);$$

$$б)\ y = \sqrt[4]{\frac{x-1}{2-x} + \frac{1}{2}};$$

$$в)\ y = \arccos(2\sin x).$$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$$а)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{5(n+2)!}; \qquad б)\ \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 5x + 2};$$

$$в)\ \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}}; \qquad г)\ \lim_{x\to 0} x(\ln(x+2) - \ln x).$$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

а) $y = 6^{\frac{1}{x+3}}; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = -3.$

$$б)\ f(x) = \begin{cases} x + 4, \text{ якщо } x \le 0; \\ \sqrt{-x} + 1, \text{ якщо } 0 < x \le 1; \\ x, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$.

$a)\ y=\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}};$ $\qquad$ $б)\, y=\dfrac{\left(1+x^2\right)arctgx-x}{3};$

$в)\, y=e^x(x^2-2x+7);$ $\qquad$ $г)\ y=\dfrac{1}{3(1-\cos\sqrt{4+x})};$

д) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[2]{y^3}=\sqrt[3]{a^2};$ $\qquad$ е) $y=x^{\sqrt{x}};$

ж) $\begin{cases} x=\dfrac{t}{t+1} \\ y=\dfrac{1}{t+1}. \end{cases}$

5. Користуючись правилами наближеного обчислення, знайти числове значення виразу $\sqrt{(1{,}002)^{-3}}$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x^2};$ $\qquad$ б) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}.$

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Резервуар, відкритий зверху, має форму прямокутного паралелепіпеда з квадратною основою. Якими повинні бути його розміри, щоб на виготовлення пішла якнайменша кількість матеріалу, якщо він повинен вміщати 256 л води?

8. Розвинути в ряд Тейлора за степенями $(x-\dfrac{\pi}{4})$ функцію $y=\sin x$ до члена з x^5.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 4x}{x^2};$ $\qquad$ $б)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x-1)}{4-x^2}.$

Варіант № 24

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)\ y = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{2}\right);$

$б)\ y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - \sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x};$

$в)\ y = \lg\left(\operatorname{tg}\frac{x}{8}\right).$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$a)\ \lim\limits_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10};$ $\qquad б)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x};$

$в)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 6x}{x^2};$ $\qquad г)\ \lim\limits_{x\to 0}(2x+1)(\ln(x+3)-\ln x).$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

$a) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4-x}};\quad x_1 = 3;\quad x_2 = 4.$

$$б)\ f(x) = \begin{cases} x-1,\ \text{якщо}\ x \le 1; \\ \sqrt{x}+1,\ \text{якщо}\ 1 < x \le 3; \\ x,\ \text{якщо}\ x > 3. \end{cases}$$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t).$

а) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{3-x}}$;   б) $y=2xe^{x}-(x^{2}-2x+7)\cos x$.

в) $y=x^{3}\lg(1-2\cos x)-\dfrac{x^{3}}{3}$;   г) $y=\operatorname{tg}x-\sqrt{1-\operatorname{tg}^{2}x}$;

д) $y=\dfrac{x-y}{x+y}$;   е) $y=x^{x^{x}}$;

ж) $\begin{cases} x=\dfrac{2at}{t^{2}+1} \\ y=\dfrac{a(1-t^{2})}{t^{2}+1}. \end{cases}$

5. Користуючись правилами наближеного обчислення, знайти числове значення виразу $t=(2{,}08)^{4}$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y=\dfrac{2x^{2}}{2x-1}$;   б) $y=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$.

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Основа трикутника рівна а, його периметр 2р. Визначити дві інші його сторони так, щоб площа його була найбільшою.

8. Розвинути в ряд Тейлора за степенями ($x-2$) функцію $y=e^{x}$ до члена з x^{4} та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

a) $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{(x+h)^{3}-x^{3}}{h}$; $б$) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3\ln x}{x+2}$.

Варіант № 25

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)\quad y = \arcsin(\lg(\operatorname{tg} x)).$

$б)\quad y = \lg(1 - 2\cos x);$

$в)\quad y = \sqrt{\dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + 3x - 10}}.$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$a)\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3};$ $\qquad б)\quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2+x-2};$

$в)\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x};$ $\qquad г)\ \lim\limits_{x\to 0} (x-5)(\ln(x-3)-\ln x).$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

$a) y = 2^{\frac{1}{x-7}};\quad x_1 = 7;\quad x_2 = 3.$

$$б) f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, \text{ якщо } x \le 0; \\ \sqrt{x} + 1, \text{ якщо } 0 < x \le 4; \\ 3x, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t).$

а) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ б) $y = \dfrac{\sin x + \cos y}{\sin x - \cos y}$;

в) $y = (x^2 - 1)\ln(x^2 - 2x + 7)$. г) $y = \sqrt{\dfrac{2\cos x + \sin 3x}{3}}$;

д) $\ln y + \dfrac{x}{y} = 0$; е) $y = x^{x^2}$;

ж) $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t); \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

5. Кулю, радіусом 2 см, охолоджено, внаслідок чого її об'єм зменшився на 0,16 см^3. Знайти зменшення радіуса кулі.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = \dfrac{x^3}{3} - 4x$; б) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{x}$.

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак, об'ємом V. Якими повинні бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

8. Функцію $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ розвинути в ряд Тейлора за степенями х.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)$ $\lim\limits_{x \to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$; $б)$ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$.

Варіант № 26

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a) y = \lg\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{8}\right)$;

б) $y = \operatorname{arctg}(\lg(\cos x));$

в) $y = \operatorname{ctg}(\ln x).$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1};$ *б*) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x} \right)^x;$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2};$ *г*) $\lim\limits_{x\to 0} (1 - 2x^3)^{\frac{1}{x^2}}.$

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

а) $y = 1 - 2^{\frac{1}{x}}; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 0.$

б) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ якщо } x \le 0; \\ \sqrt{-x} + 1, \text{ якщо } 0 < x \le 4; \\ x, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t).$

а) $y = \sqrt{\dfrac{ax^2 + b}{3 + x^2}};$ б) $y = (x^2 + 1) ctg (1 - 2x).$

в) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2});$ г) $y = \arcsin(x^2 - 1);$

д) $\ln y + e^{\frac{-y}{x}} = 9;$ е) $y = x^{x^4};$

ж) $\begin{cases} x = a\cos^3; \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

5. Радіус кола рівний 5 см. На скільки приблизно треба змінити радіус кола, щоб його площа збільшилась на 0,628 см^2?

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = \sqrt{x^3 + 1};$ б) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}.$

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Щоб огородити клумбу, яка повинна мати форму кругового сектора, маємо шматок дроту, довжиною 20 м. Яким слід взяти радіус кола, щоб площа клумби була найбільшою?

8. Розвинути багаточлен $f(x) = x^{10} - 3x^5 + 1$ в ряд Тейлора за степенями $(x-1)$.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x};$ $в)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}.$

Варіант № 27

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)$ $y = \sqrt{\dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + 3x - 10}};$

$б)$ $y = \sqrt{\sin x};$

$в)$ $y = \sqrt{1 - 0{,}2^{\cos x}}.$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$a)\quad \lim\limits_{n\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h};$ $\qquad$ $б)\quad \lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6};$

$в)\quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right);$ $\qquad$ $г)\quad \lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

3. Задана функція $y=f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

а) $y=8^{\frac{1}{x+1}};\quad x_1=-1;\quad x_2=2.$

б) $f(x)=\begin{cases}2^x, \text{ якщо } x\le 0;\\ \sqrt{x}+1, \text{ якщо } 0<x\le 4;\\ 2x-1, \text{ якщо } x>4.\end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y=f(x)$ та $x=\varphi(t);\ y=\psi(t).$

а) $y=\dfrac{a+b(x-1)}{c+d(x+1)};$ $\qquad$ б) $y=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{2-x}+\dfrac{1}{2}};$

в) $y=tg\dfrac{x}{3}-3tg^3x+tg^4x;$ $\qquad$ г) $y=\sqrt{x\sin x+x^2};$

д) $\dfrac{1}{2}\ln(y^2+x^2)=arctg\dfrac{x}{y};$ $\qquad$ е) $y=(1-2tgx)^{xctgx};$

ж) $\begin{cases}x=e^{-t};\\ y=e^{2t}.\end{cases}$

5. Прискорення вільного падіння тіл на Місяці g_m=1,6 м/с^2. Який шлях пройде тіло під час вільного падіння на Місяці за 10,04 с від початку падіння? Рівняння вільного падіння тіл $H = \frac{g_m t^2}{2}$.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = x^4 - 2x^2 + 2$; б) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

7. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Перетин тунелю має форму трапеції, бокові сторони та основа якої рівні по 10 м. Визначити її більшу основу так, щоб площа перетину була найбільшою.

8. Знайти три перших члени розвинення в ряд Тейлора функції $y = \cos x$ за степенями ($x - \frac{\pi}{4}$) та написати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

Варіант № 28

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

а) $y = \sqrt[4]{5 - x - \frac{4}{x}}$;

б) $y = \lg(1 - \sin x)$;

в) $y = \arccos(1 - x^2)$.

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$;   *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$;   *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 5x)}{\ln(\cos 4x)}$.

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
c) зробити схематичний рисунок.

а) $y = 3^{\frac{1}{5-x}}$; $x_1 = 3$; $x_2 = 5$.

б) $f(x) = \begin{cases} 2^x, \text{ якщо } x \le 2; \\ x^2+1, \text{ якщо } 2 < x \le 4; \\ x, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$.

а) $y = \sqrt[4]{5-x-\dfrac{4}{x}}$;   б) $y = x^2 arctg\dfrac{x}{y}$;

в) $y = e^{2x}\arccos(2+\dfrac{x}{3})$;   г) $y = \sqrt[4]{ctgx}-\sqrt[3]{tg(x-1)}$;

д) $\dfrac{1}{2}\ln x^2 = arctg\dfrac{x}{y}$;   е) $y = (\cos x)^x$;

ж) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}; \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

5. Дано рівняння руху тіла $S = St^3 - t^2$. Знайти наближено довжину шляху, що пройде тіло на момент $t = 2{,}08$ с від початку відліку часу.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = x^2 \ln x;$ б) $y = \dfrac{x^2}{x-1}.$

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Серед усіх прямокутників, що мають площу S, знайти той, периметр якого найбільший.

8. Розвинути в ряд Тейлора за степенями ($x-1$) функцію $y = \sqrt{x}$ до члена $y = (x-1)^4$ та написати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x-2)^2 - 4}{x^3};$ $б)\ \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4}{4^x}.$

Варіант № 29

1. Задано функції $y = f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)\ y = \sqrt{\cos x - \dfrac{1}{2}};$

$б)\ y = \operatorname{arctg}(\lg x);$

$в)\ y = \arccos(2\sin).$

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$a)\ \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3 + 3x}{x^2 - 3x + 1};$ $б)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14};$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$; *г*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}^2 x}$.

3. Задана функція y=f(x) та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:
   a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;
   b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;
   c) зробити схематичний рисунок.

а) $y = 5^{\frac{1}{x+5}}; \quad x_1 = -5; \quad x_2 = 2.$

б) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ якщо } x \le 0; \\ -x^2 + 1, \text{ якщо } 0 < x \le 1; \\ x+1, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$

4. Знайти $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t);\ y = \psi(t)$.

а) $y = x^2\sqrt[4]{x - \dfrac{4}{x}}$; б) $y = \mathrm{arctg}(\ln x)$.

в) $y = e^{2x}x - 2\ln x + \dfrac{3}{x}$; г) $y = arcctg\dfrac{1-x}{1+x}$;

д) $y^2\cos(y^2 + x^2) = x$; е) $y = (1 + tgx)^{ctgx}$;

ж) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}; \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

5. Тіло, масою $m = 20$ кг, рухається зі швидкістю $v = 10{,}02$ м/с. Обчислити наближено кінетичну енергію тіла.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y=\dfrac{x^4+1}{x^2}$;   б) $y=\ln(9-x)$.

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Число 60 розбити на дві частини так, щоб сума подвоєної першої частини та квадрата другої була найменшою.

8. Знайти три перших члени розвинення в ряд Тейлора функції $y=\dfrac{x}{x-1}$ за степенями ($x-2$) та записати залишковий член.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(3-x)}{4-x^2}$; $б)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt[3]{n^3+1}}$.

Варіант № 30

1. Задано функції $y=f(x)$. Знайти область визначення функцій, дослідити на парність, непарність, періодичність.

$a)\ y=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{2-x}+\dfrac{1}{2}}$;

б) $y=x+\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x^2}}$;

$в)\ y=\lg\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{8}\right)$.

2. Знайти границі послідовностей та функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt[3]{n^3+1}}$; $б)\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

$в)\ \lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\cdot\operatorname{ctg}5x$; $г)\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+4x}$.

3. Задана функція $y = f(x)$ та два значення аргументу x_1 та x_2. Необхідно:

a) встановити неперервність даної функції для кожного значення аргументу;

b) у випадку розриву функції знайти її границі в точці розриву зліва та справа;

c) зробити схематичний рисунок.

а) $y = 5^{\frac{1}{6-x}}; \quad x_1 = 6; \quad x_2 = 2.$

б) $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ якщо } x \le 0; \\ 1 - x, \text{ якщо } 0 < x \le 4; \\ x^2 - 8, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$

4. Знайти $\frac{\partial y}{\partial x}$ та $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ для заданих функцій $y = f(x)$ та $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$.

а) $y = x + \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x^2}};$

б) $y = \frac{x^5}{e^x};$

в) $y = \frac{3ctgx}{\ln x};$

г) $x\cos(3 + x^2) = y;$

д) $x^y = y^x;$

е) $y = (arctgx)^{arcctgx};$

ж) $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\sin^2 t. \end{cases}$

5. Дано рівняння руху тіла $S = 2t^3 + 1$. Знайти наближено довжину шляху, що пройшло тіло на момент $t = 3{,}99$с від початку відліку часу.

6. Провести загальне дослідження функцій та побудувати графіки.

а) $y = \frac{x}{2} - arctgx;$

б) $y = \frac{4x^3 + 5}{x}.$

7. Розв’язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Зі смуги жерсті, шириною 11 см, потрібно зробити відкритий зверху жолоб, поперечний переріз якого має форму рівнобічної

трапеції. Дно жолоба повинно мати ширину 7 см. Якою повинна бути ширина жолоба зверху, щоб він вміщував найбільшу кількість води?

8. Записати формулу Маклорена для функції $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ при $n=5$.

9. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі.

$a)\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\ln x}{x^2};$ $\qquad$ $б)\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^x}{x^2}.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Безклубенко І. С.* Математичний аналіз : підручник у 2 ч. – Ч. 1. / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна. – Київ : КНУБА, 2024. – 224 с.
2. *Овчінніков Ф. П.* Вища математика : підручник у 2 ч. – Ч. 1. / Ф. П. Овчінніков, В. М. Яремчук. – Київ : Техніка, 2000. – 590 с.
3. *Овчінніков Ф. П.* Вища математика : підручник у 2 ч. – Ч. 2. / Ф. П. Овчінніков, В. М. Яремчук. – Київ : Техніка, 2000. – 790 с.
4. *Міхайленко В .М.* Математичний аналіз для економістів : навчальний посібник / В. М. Михайленко, Н. Д. Федоренко. – Київ : Європейський університет, 2002. – 297 с.
5. *Журавель О. О.* Вища математика : збірник завдань для курсових і самостійних робіт / О. О. Журавель. – Київ : КДТУБА, 1997. – 267 с.
6. *Федоренко Н. Д.* Вища математика : навчальний посібник / Н.Д. Федоренко , О.І. Баліна , І.С. Безклубенко. – Київ : КНУБА, 2003. – 165 с.
7. *Безклубенко І .С.* Математичний аналіз. Модуль 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, елементи математичного аналізу : Конспект лекцій / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна, Ю. П. Буценко. – Київ : КНУБА, 2021. – 63 с.
8. *Безклубенко І. С.* Вища математика. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : методичні вказівки / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна, Ю. П. Буценко. – Київ : КДТУБА, 2019. – 39 с.
9. *Безклубенко І. С.* Лінійна алгебра і аналітична геометрія : методичні вказівки і контрольні завдання для спеціальності АТП заочної форми навчання /І.С. Безклубенко, О.І. Баліна, Ю.П. Буценко. – Київ : КДТУБА, 1999. – 18 с.
10. *Безклубенко І. С.* Теорія функцій комплексної змінної: методичні вказівки / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна, Ю. П. Буценко. – Київ : КДТУБА, 1999. – 35 с.
11. *Баліна О. І.* Вища математика. Модуль 3. Інтегральне числення : методичні вказівки / О. І. Баліна, І. С. Безклубенко, Ю. П. Буценко. – Київ : КДТУБА, 2020. – 31 с.
12. *Баліна О. І.* Вища математика. Модуль 4. Диференціальні рівняння : методичні вказівки / О. І. Баліна, І. С. Безклубенко, Ю. П. Буценко. – Київ : КДТУБА, 2021. – 31 с.
13. *Максименко Д. В.* Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії : практичний посібник / Д. В. Максименко, В. Ф. Мельничук, Л. В. Соколова. – Київ : КНУБА, 2013. – 48 с.
14. *Федоренко Н. Д.* Вища математика (Ряди та їх застосування. Теорія функції комплексної змінної) : конспект лекцій / Н. Д. Федоренко, І. С. Безклубенко, О. І. Баліна. – Київ : КНУБА, 2015. – 60 с.
15. *Дубовик В. П.* Вища математика : навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А. С. К., 2006. – 647с. – ISBN 966-539-320-0.

Навчально-методичне видання

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
Модуль 2.
Диференціальне числення функцій однієї змінної

Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань
для здобувачів першого (бакалаврського)
рівня вищої освіти спеціальностей
123 «Комп'ютерна інженерія»
та 125 «Кібербезпека»

Укладачі: **Безклубенко** Ірина Сергіївна**,**

Баліна Олена Іванівна,
Серпінська Ольга Ігорівна

Випусковий редактор *Л.С. Тавлуй*

Комп'ютерне верстання *Л.В. Лабунець*

Підписано до друку 07.11.2024. Формат 60 х $84_{1/16}$

Ум. друк. арк. 4,42. Обл.-вид. арк. 4,75.

Електронний документ. Вид. № 138/ІІІ-24.

Видавець і виготовлювач:

Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів

видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002