УДК 693.542.523

І.І. Назаренко, д-р техн. наук, професор КНУБА,
М.О. Клименко, асистент КНУБА

УРАХУВАННЯ МЕЖОВОГО ШАРУ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ДИНАМІКИ РУХУ МАТЕРІАЛУ В ОБЕРТОВОМУ БАРАБАНІ

Актуальність проблеми Динаміка змішування і сепарування будівельних сумішей в частково заповнених обертових барабанах є предметом чисельних експериментальних та теоретичних досліджень в нашій державі і за кордоном [1-5]. Проте небагато з них присвячені опису неперервного потоку матеріалу в поперечному перерізі обертового барабана [2,3,5]. Відсутні роботи, які визначають швидкість та характер вільної поверхні в аналітичній формі. Практично відсутні експериментальні дослідження з урахування конструктивних особливостей змішувальних робочих органів на динаміку руху матеріалу.

Метою даної роботи є визначення аналітичних залежностей динаміки руху сумішей із використанням підходу апроксимації межового шару, а також товщини каскадного шару та профілю вільної поверхні.

Розглянемо барабан радіусом R, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω (рис. 1). Барабан частково заповнений сумішшю постійної щільності ρ, при цьому довжину вільної поверхні приймемо $2L$. Вільна поверхня нахилена під кутом внутрішнього тертя μ даної суміші. Потік матеріалу в барабані може бути отриманий наступним чином.

Окремі частки суміші обертаються з основним об'ємом суміші з права наліво і потрапляють в тонкий каскадний шар на вільній поверхні. Припустимо, що кутова швидкість ω є достатньо великою для того, щоб забезпечити безперервне скидання суміші, проте відцентрові сили є значно меншими сил тяжіння.

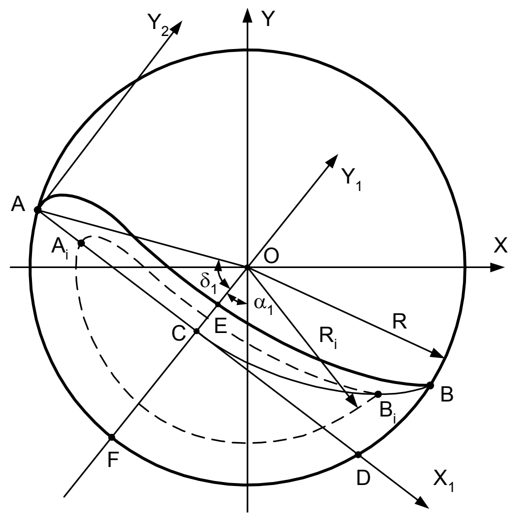

Рис. 1. Зображення потоку в обертовому барабані для прийнятої системи координат

Позначимо висоту вільної поверхні $h(x)$, товщину каскадного шару - $\delta(x)$, а горизонтальні і вертикальні складові швидкості в шарі як V_x та V_y відповідно. В даній роботі апроксимація межового шару використовується, щоб описати швидкість розподілу впоперек шару суміші.

Припустимо, що горизонтальна швидкість V_x має постійний профіль в поперечному напрямку:

$$V_x = u(x) f\left(\frac{y}{\delta}\right),$$

де $u(x)$ – середня швидкість.

Функція $f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ задовольняє умовам:

$$f(0) = 0; \quad f_0^1 f(\eta) dn = 1.$$

Для спрощення аналізу введемо певні перевизначення незалежних змінних наступним чином:

$$(x, y) = L(\bar{x}, \varepsilon\bar{y}), \ (Vx, Vy) = \sqrt{\varepsilon g L}(\bar{V}x, \varepsilon\bar{V}y), \ h = \varepsilon L\bar{h}, \quad \delta = \varepsilon L\bar{\delta},$$

де g – прискорення вільного падіння; $\varepsilon \propto \delta / L$ - малий параметр, фізичне значення якого розкрите нижче. Змінні з надкресленнями є безрозмірними і передбачаються змінними першого порядку. Таке припущення було зроблене, для того, щоб збалансувати інші члени в рівняннях збереження імпульсу та маси. В подальшому, для спрощення системи позначень, надкреслення будуть опущені.

Рівняння збереження маси для шару матеріалу запишеться

$$\rho\varepsilon^{3/2}\sqrt{gL}\,\frac{d}{dx}(u\delta) = -\rho\omega Lx\,, \tag{1}$$

де член в правій частині описує приток часток суміші в каскадний шар, і пов’язаний з обертанням барабана. Інтегруючи це рівняння з граничними умовами $u\delta = 0$ при $x = \pm 1$ ми отримуємо вираз для матеріального потоку *q (x)* на вільній поверхні:

$$q(x) = u(x)\delta(x) = \frac{\Omega}{2}\left(1 - x^2\right), \tag{2}$$

де $\Omega = \varepsilon^{-3/2}\omega\sqrt{L / g}$ - безрозмірна кутова швидкість, яка передбачається матиме перший порядок, тобто припускаємо, що число Фруда $Fr^2 = \omega^2 R / g \approx \omega^2 L / g$ є незначним.

Зазначимо, що рівняння (2) було отримане раніше в [5].

Розглянемо поверхню розділу між рухомим шаром та основною частиною матеріалу, яка може бути визначена як тонка область, де матеріал сприймає інтенсивні пластичні деформації. Зсув і нормальні напруження в шарі і в основній частині матеріалу становлять $\tau_{xy}^{+}, \tau_{yy}^{+}, \tau_{xy}^{-}, \tau_{yy}^{-}$ відповідно. Згідно з експериментальними даними та чисельними розрахунками перехід від твердого тіла до рідкоподібного може бути описаний критерієм відмов Кулона-Мора, тобто на поверхні розділу відношення між зсувом і нормальними напруженнями є постійним:

$$\tau_{xy}^{-} \big/ \tau_{yy}^{-} = tg(\mu)\,, \tag{3}$$

а основна частина розглядається як твердо-пластичне тіло. Так як каскадний шар має невелику товщину, припустимо, що нормальне напруження на поверхні розділу дорівнює вазі шару матеріалу

$$\tau_{yy}^{+} = \tau_{yy}^{-} = \varepsilon\rho g R\delta\,. \tag{4}$$

Оскільки суміш в рухомому шарі, що тече, є досить текучою, то для напруження зсуву можна використати закон Багнольда:

$$\tau_{xy}^{+} = \chi(\lambda)\rho_{част} D_{част}^{2}\left|\frac{\partial Vx}{\partial y}\right|^{2},$$

де $\chi(\lambda)$ - функція міжчасткового інтервалу, а похідна $\dfrac{\partial Vx}{\partial y}$ визначається на поверхні розділу.

Таким чином, для даного профілю швидкості останнє рівняння запишеться у виді:

$$\tau_{xy}^{+} = \rho D^2\,\frac{gA}{\varepsilon L}\left(\frac{u}{\delta}\right)^2, \tag{5}$$

де A – постійна величина, яка залежить від властивостей суміші і розподілу швидкостей в поперечному до шару перерізі.

Приймаючи, що напруження зсуву є постійною на поверхні розділу, тобто $\tau_{xy}^{+} = \tau_{xy}^{-}$, і об’єднуючи рівняння (3), (4) та (5), ми отримаємо:

$$\rho D^2\,\frac{gA}{\varepsilon L}\left(\frac{u}{\delta}\right)^2 = \varepsilon\rho g L\delta\,. \tag{6}$$

Тепер ми можемо прийняти $\varepsilon^2 = AD^2 / L^2$, тобто, малий параметр $\varepsilon \propto D / L$ пропорційний відношенню діаметра часток суміші до довжини вільної поверхні. Таким чином, рівняння (6) має на меті, що

$$\delta^3 = u^2 . \tag{7}$$

Останній результат означає, що тертя в основі шару, що тече, визначає його товщину, втягуючи в рух нові частки від нерухомої основної частини, коли швидкість шару збільшується, і виділяючи частки з шару в нерухому основну частину, коли швидкість шару зменшується. Підставляючи рівняння (7) в рівняння (2), ми отримуємо вираз для розподілу швидкостей вздовж шару, а також за його товщиною:

$$\begin{aligned} u(x) &= \left[\frac{\Omega}{2}\left(1 - x^2\right)\right]^{3/5}, \\ \delta(x) &= \left[\frac{\Omega}{2}\left(1 - x^2\right)\right]^{2/5}. \end{aligned} \tag{8}$$

Як бачимо, рівняння збереження мас та умова неперервності напружень на поверхні розділу шарів "основна частина – нерухомий шар" спільно з апроксимацією межового шару достатні для визначення поля швидкостей в барабані. Динаміка суміші, таким чином, залежить від умов взаємодії на поверхні розділу, які пов'язують товщину шару з його швидкістю.

Єдиною невизначеною функцією є профіль вільної поверхні рухомого шару суміші, що тече. Для того, щоб завершити вирішення задачі, розглянемо рівняння рівності моментів усереднених в напрямку, поперечному напрямку рухомого шару:

$$\alpha\varepsilon^2 \rho g L \frac{d}{dx}\left(\delta u^2\right) = \varepsilon \rho g L \delta \left[\sin(\mu) - \varepsilon \cos(\mu)\frac{dh}{dx}\right] - \varepsilon tg(\mu)\cos(\mu')\rho g L \delta . \tag{9}$$

Таким чином, в моделі є два регульованих параметри: величина малого порядку ε, яка визначає напруження на поверхні розділу, та певний параметр α, який описує профіль швидкості і, тому залежить від тертя в каскадному шарі суміші. Для спрощення ми припускаємо, що профіль швидкості в поперечному напрямку $f\left(\frac{y}{\delta}\right)$ і α=1, хоча аналіз може бути виконаний для будь-якого іншого профілю швидкостей.

Перший член в правій частині рівняння (9) є силою тяжіння, яка слабо залежить від зміни величини h, тобто член $\frac{dh}{dx}$ описує зміну середнього тиску вздовж шару суміші. Інший член з правого боку рівності (9) є силою тертя, яка викликана нерухомою основою в каскадному шарі рухомої суміші.

Розглянемо більш детально силу тертя. Закон Бенгольдца вказує, що напруження зсуву повинно бути пропорційним квадрату швидкості деформації. З іншого боку, експерименти з руху суміші по лотку демонструють незначну залежність напруження зсуву. Ця невідповідність може бути пояснена наступним чином. Хоча напруження зсуву в каскадному шарі залежить від швидкості зсуву, що випливає з рівняння (3), співвідношення між зсувом і нормальним напруженням на поверхні розділу не залежить від швидкості. Оскільки нормальне напруження є тиском вище розташованих шарів, тобто $\tau_{yy} \propto \delta$, і сила тертя, подібно до сили Кулона, має незалежний від швидкості вид. Кут $\mu' = \mu - \dfrac{1}{tg\left(\dfrac{d(h-\delta)}{dx}\right)}$ є кутом нахилу поверхні розділу "основний масир - рухомий шар суміші". Розкладаючи це рівняння в ступеневий ряд величини малого порядку ε, ми отримаємо поправку до сили тертя від кута нахилу:

$$\cos(\mu') = \cos(\mu) + \varepsilon \sin(\mu) \frac{d(h-\delta)}{dx}.$$

В рівнянні (9) складові сили гравітації і сили тертя є одного порядку з величиною малого порядку ε. Тому співвідношення $u \propto \sqrt{\varepsilon}$, яке було прийняте раніше, необхідне, для того, щоб врівноважити силу інерції часток суміші без зміни тиску вздовж каскадного шару. Таким чином, рівняння (9) можна переписати в вигляді:

$$\frac{d}{dx}\left(\partial u^2\right) - \sin(\mu) tg(\mu) \delta \frac{d}{dx}(\delta) = -\delta\left(\cos(\mu) + \sin(\mu) tg(\mu)\right)\frac{dh}{dx}.$$

Використовуючи рівняння (8), можна інтегрувати останнє рівняння для визначення форми вільної поверхні:

$$h(x) = \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{\Omega}{2}\right)^{6/5}\left[C_1 - \left(1-x^2\right)^{6/5}\right] - \sin(\mu) tg(\mu)\left(\frac{\Omega}{2}\right)^{2/5}\left[C_2 - \left(1-x^2\right)^{2/5}\right]}{\cos(\mu) + \sin(\mu) tg(\mu)}, \qquad (10)$$

де постійні інтегрування $C_1 \approx 1{,}26$, $C_2 \approx 1{,}46$ визначаються, виходячи з умови збереження мас $\int_{-1}^{1} h dx = 0$. Рівняння (10) показує, що висота вільної поверхні може мати бімодальний або унімодальний профіль, в залежності від величини кутової швидкості Ω. При $\Omega \le 2\left(\frac{\sin(\mu) tg(\mu)}{4}\right)^{5/4}$ висота вільної поверхні має один максимум в точці $x = 0$, в той час, як при $\Omega \ge 2\left(\frac{\sin(\mu) tg(\mu)}{4}\right)^{5/4}$ маємо мінімум в точці $x = 0$ і два симетрично розташовані максимуми.

Висновки. Ми отримали аналітичні залежності висоти вільної поверхні, які добре корелюються з експериментальними даними. Встановлено, що вигнуті, плоскі і S-подібні вільної поверхні мають місце в обертовому барабані, в залежності від режимів руху потоку суміші, при цьому, градієнт висоти $\frac{dh}{dx}$ має інше значення біля стінок барабана. Крім того, виведене рівняння течії межового шару суміші в поперечній площині обертового барабана та отримані в закритій аналітичній формі розв'язки для товщини каскадного шару, усередненої швидкості та профілю вільної поверхні. З'ясовано, що два регульованих параметра розробленої моделі залежать від величини тертя в рухомому шарі суміші.

Література

1. *Новиков А.А.* Интенсивность смешивания бетонных смесей в барабанных смесителях непрерывного действия// Строительные и дорожные машины. - 1988. - №2. – С.24-28
2. *Першин В.Ф.* Исследование, разработка и методика расчета режимных и геометрических параметров машин барабанного типа. – Автореферат дис. канд. техн. наук. – М., 1979.
3. *Канторович З.Б.* Машины химической промышленности. – М.: Машиностроение, 1965. – 416с.
4. *Александровский А.А.* Исследование процесса смешения и разработка аппаратуры для приготовления композиций, содержащих твердую фазу. - Автореферат дис. докт. техн. наук. – М., 1977.
5. *Khakhar D.V., Shinbrot T., McCarthy J.J. and Ottino J.M.*, Phys. Fluids. – 1997. - №9.
6. *Peratt B.A., Yorke J.A.* Europhys.Lett. – 1996. - №35(1). - pp.31-35.