

РОЗРАХУНКОВА МОДЕЛЬ СТРУМИНИ, ЩО НАСТИЛАЄТЬСЯ НА КРИВОЛІНІЙНУ ПОВЕРХНЮ

Найбільш розповсюдженим у сучасній практиці повітророзподільником з використанням настилання струмини на криволінійну поверхню є повітророзподільник приблизно рівномірного розподілу повітря круглого перерізу з тангенціальною щілиною [1] (рис. 1).

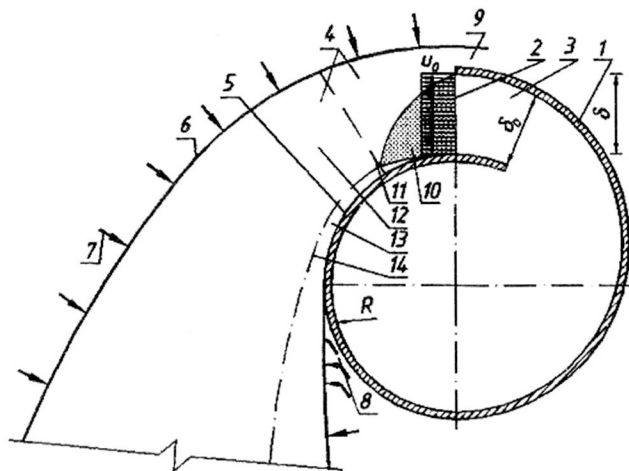


Рис. 1. Схема повітророзподільника з тангенціальною щілиною

Він складається з повітроводу утвореного спіралеподібною стінкою 1. Кінці стінки заходять внапуск з утворенням тангенціальної щілини 2. Назвемо простір 3 вихідним каналом. Вхід до нього має ширину δ_0 , а щілина, з якої витікає струмина, має ширину δ . Найчастіше застосовується вихідний канал у формі криволінійного дифузора, хоча цей канал може мати в загальному випадку форму прямолінійного дифузора, прямого патрубку, відвода чи прямо- або криволінійного конфузора.

Струмина 4 обмежена частиною поверхні повітророзподільника (поверхнею настилання 5) та вільною границею 6. Вона інтенсивно ежектуює зовнішнє повітря 7.

Після відриву струмини за рахунок підсмоктування повітря утворюється зона зворотного руху 8. Біля верхньої межі вихідного каналу за рахунок підсмоктування повітря до струмини утворюється вторинна струмина 9, що настилається.

Відомими величинами є швидкість виходу повітря зі щілини u_0 та геометричні розміри повітророзподільника: радіус поверхні настилання R і ширина щілини δ . Прийmemo, що профіль швидкості повітря у щілині рівномірний, а напрямок руху повітря у ній відповідає дотичній до поверхні настилання.

Необхідно виразити параметри повітря в окремо взятому перерізі через значення максимальної швидкості u_m і ширини струмини $u_{\text{меж}}$; одержати швидкість підтікання повітря до струмини та статичний тиск на її межі; обчислити профілі статичного тиску та середній тиск повітря у перерізах струмини; одержати рівняння згасання максимальної швидкості повітря u_m за ходом струмини та зростання ширини струмини $u_{\text{меж}}$.

Логічно прийняти схему розвитку струмини, що аналогічна до відомої схеми напівобмежених плоских струмин (див. рис. 1). Вона передбачає рівномірний профіль швидкості повітря на виході зі щілини. Після виходу повітря існує початкова ділянка з ядром постійних швидкостей 10, яке звужується до зникнення у перехідному перерізі 11, що є початком основної ділянки. Струминний примежовий шар 12 формується аналогічно до вільного струминного примежового шару. Біля поверхні настилання утворюється пристінний примежовий шар 13, що спочатку є ламінарним, а згодом турбулентним. За браком дослідних даних визначити критичний переріз, в якому відбувається турбулізація пристінного примежового шару 13, неможливо. На основній ділянці струмини пристінний та струминний примежові шари займають весь простір струмини і розділені лінією максимальних швидкостей (в літературі цю лінію часто називають віссю).

Для визначення профілю швидкостей у струміні виділимо довільний радіальний переріз AB (рис. 2, 3).

Прив'яжемо до цього перерізу декартову систему координат: початок координат встановимо у точці B на поверхні настилання, вісь Ox розташуємо за дотичною до поверхні настилання в напрямку руху повітря, а вісь Oy — радіально в напрямку назовні.

За браком дослідних даних прийmemo профіль швидкості повітря у перерізі AB аналогічним до профілю швидкості повітря у перерізах плоских напівобмежених струмин.

Прийmemo профiль швидкостi за рекомендацiями Абрамовича [2]. У пристiнному примежовому шарi використаемо закон одної сьомої [2]

$$\bar{u} = \bar{y}_{\text{nc}}^{1/7}, \quad (1)$$

де $\bar{u} = u/u_m$ — безрозмiрна швидкiсть повітря, а $\bar{y}_{\text{nc}}$ — безрозмiрна ордината, вiднесена до товщини пристiнного примежового шару. Для основної дiлянки струмини $\bar{y}_{\text{nc}} = y/y_m$, а для початкової — $\bar{y}_{\text{nc}} = y/y_{\text{я-nc}}$. Будемо вважати, що пристiнний примежовий шар є турбулентним вiд початку формування струмини.

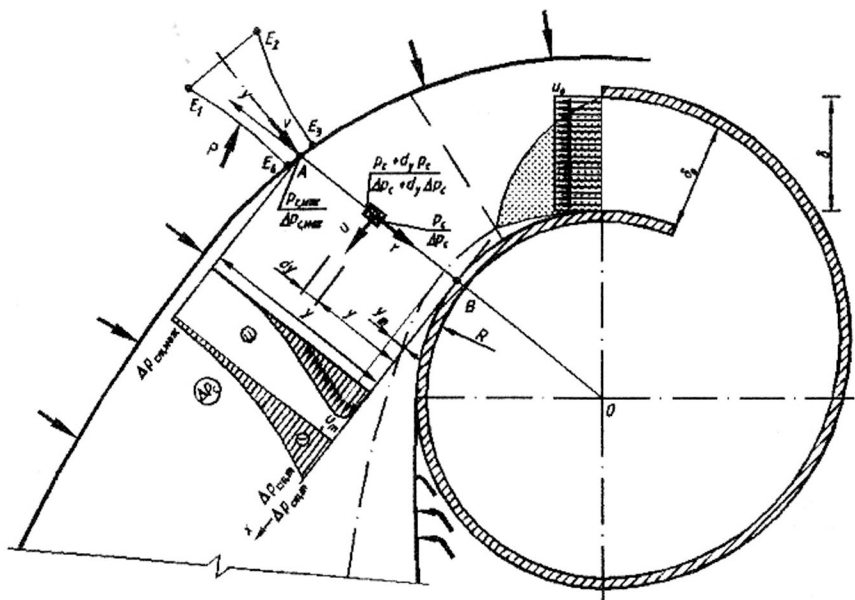


Рис. 2. Схема довільного радіального перерізу основної ділянки струмини

У струминному примежовому шарi прийmemo профiль Шлiхтинга [2]

$$\bar{u} = \left(1 - \bar{y}_{\text{ст}}^{3/2}\right)^2, \quad (2)$$

де $\bar{y}_{\text{ст}}$ — безрозмiрна ордината, що змiнюється вiд нуля до одиницi в межах струминного шару. Для основної дiлянки $\bar{y}_{\text{ст}} = (y - y_m)/(y_{\text{меж}} - y_{\text{я-ст}})$, а на початковiй дiлянцi $\bar{y}_{\text{ст}} = (y - y_{\text{я-ст}})/(y_{\text{меж}} - y_{\text{я-ст}})$.

Приймемо положення лінії максимальних швидкостей на основній ділянці струмнини, яка розділяє пристінний і струминний примежові шари, за результатами дослідів Фертмана (Förthmann E.), згідно з якими товщина пристінного примежового шару y_m дорівнює одній десятій частині товщини струмнини $y_{\text{меж}}$ [2]

$$y_m = 0,1 y_{\text{меж}} \quad (3)$$

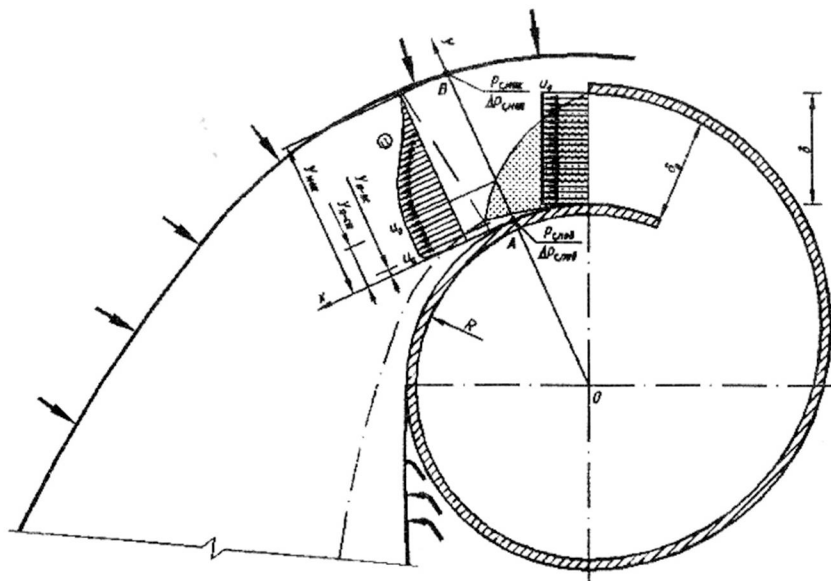


Рис. 3. Схема довільного радіального перерізу початкової ділянки струмнини

На початковій ділянці профіль швидкості залежить, крім товщини струмнини $y_{\text{меж}}$ ще від двох ординат меж ядра $y_{\text{я-пс}}$ та $y_{\text{я-ст}}$. Приймемо лінійні закони розширення струминного шару та звуження ядра. Тоді відношення товщини пристінного і струминного шарів зберігається і дорівнює цьому відношенню у перехідному перерізі, а отже, і на основній ділянці (1:9):

$$y_{\text{я-пс}} / (y_{\text{меж}} - y_{\text{я-ст}}) = 1/9 \quad (4)$$

Коефіцієнти усереднення для прийнятого профілю швидкості наведені у таблиці.

Коефіцієнти Кориоліса α та Бусинеска β віднесені до середньої швидкості повітря у перерізах потоку u_c . Коефіцієнти перерахунку ди-

намічного тиску αk^2 та кількості руху βk^2 віднесені до максимальної швидкості u_m .

Розглянемо процес підсмоктування навколишнього повітря. За рахунок вихрового руху на вільній межі струмини прилеглі до неї частинки навколишнього повітря захоплюються струминою. При цьому виникає певне розрідження $\Delta p_{c, \text{меж}}$ на межі струмини, що спонукає підтікання повітря з навколишнього середовища.

Коефіцієнти усереднення

Аеродинамічна величина	Коефіцієнт осереднення	Позначення	Величина на ділянці	
			основний	Початковий
Середня швидкість	Коефіцієнт поля швидкості	k	0,492	$0,45 + 0,55 \bar{u}_{\text{я-ст}} - 0,125 \bar{u}_{\text{я-пс}}$
Кількість руху	Коефіцієнт перерахунку кількості руху	βk^2	0,362	$0,316 \bar{u}_{\text{меж}} + 0,684 \bar{u}_{\text{я-ст}} - 0,222 \bar{u}_{\text{я-пс}}$
	Коефіцієнт Бусинеска	β	1,492	$\frac{0,315 + 0,684 \bar{u}_{\text{я-ст}} - 0,222 \bar{u}_{\text{я-пс}}}{(0,45 + 0,55 \bar{u}_{\text{я-ст}} - 0,125 \bar{u}_{\text{я-пс}})^2}$
Динамічний тиск	Коефіцієнт перерахунку динамічного тиску	αk^2	0,600	$\frac{0,251 + 0,749 \bar{u}_{\text{я-ст}} - 0,3 \bar{u}_{\text{я-пс}}}{0,45 + 0,55 \bar{u}_{\text{я-ст}} - 0,125 \bar{u}_{\text{я-пс}}}$
	Коефіцієнт Кориоліса	α	2,474	$\frac{0,251 + 0,749 \bar{u}_{\text{я-ст}} - 0,3 \bar{u}_{\text{я-пс}}}{(0,45 + 0,55 \bar{u}_{\text{я-ст}} - 0,125 \bar{u}_{\text{я-пс}})^3}$

Напрямок підтікання повітря за браком дослідних даних приймемо найкоротшим, тобто перпендикулярно до межі струмини.

Визначимо зв'язок між розрідженням на поверхні струмини $\Delta p_{c, \text{меж}}$ та швидкістю підтікання повітря v . Для цього виділимо елементарну струминку $E_1 E_2 E_3 E_4$ потоку повітря, що підтікає (див. рис. 2). Переріз $E_1 E_2$ знаходиться на відстані від вільної межі струмини, що достатня для нехтування швидкістю повітря та розрідженням у ньому. Переріз $E_3 E_4$ лежить на вільній межі струмини. Швидкість повітря у ньому дорівнює швидкості підтікання повітря v , а статичний тиск дорівнює статичному тиску на поверхні струмини $p_{c, \text{меж}}$.

Запишемо рівняння кількості руху для струминки $E_1 E_2 E_3 E_4$ в проєкціях на її вісь. На переріз $E_1 E_2$ діє сила тиску, що повністю проєціюється на вісь струминки зі знаком мінус.

$$P_{1-2,oc} = -P_{1-2} = -p_a E_1 E_2 = -(p_a E_1 E'_4 + p_a E'_3 E'_4 + p_a E'_3 E_2) = \\ = -(p_a E_1 E'_4 + p_a E_3 E_4 + p_a E'_3 E_2).$$

На переріз $E_3 E_4$ діє сила тиску, що повністю проєціюється на вісь струминки

$$P_{3-4,oc} = P_{3-4} = p_{c,meж} E_3 E_4.$$

На бічні межі струминки $E_1 E_4$ та $E_2 E_3$ діє сила тиску, проекція якої на вісь струминки становить

$$P_{б,oc} = p_{c,c,meж} E_1 E'_4 + p_{c,c,meж} E'_3 E_2,$$

де $p_{c,c,meж}$ — середній статичний тиск на бічних межах струминки.

У перерізі $E_1 E_2$ кількість руху близька до нуля. У перерізі $E_3 E_4$ кількість руху становить

$$I = \rho v^2 E_3 E_4.$$

Тоді рівняння кількості руху після переходу до надлишкових тисків має вигляд:

$$I = P_{1-2,oc} + P_{3-4,oc} + P_{б,oc} = \Delta p_{c,meж} + \Delta p_{c,c,meж} (E_1 E'_4 + E'_3 E_2).$$

Визначити величини $\Delta p_{c,c,meж}$, $E_1 E'_4$ та $E'_3 E_2$ неможливо. Проте можна припустити, що довжини відрізків $E_1 E'_4$ та $E'_3 E_2$ пропорційні довжині відрізка $E_3 E_4$, причому коефіцієнт пропорційності не залежить від вибору перерізу AB . Цей коефіцієнт обумовлюється умовами підтікання повітря до струмини. Середнє розрідження на бічних межах струминки $\Delta p_{c,c,meж}$ пропорційне (близьке до половини) розрідженню на межі струмини $\Delta p_{c,meж}$. З урахуванням цього можна записати

$$\Delta p_{c,meж} = -K_E \rho v^2, \quad (5)$$

де K_E — коефіцієнт умов підтікання повітря до струмини.

Зв'язок між швидкістю підтікання повітря v та максимальною швидкістю повітря u_m прийемо за аналогією з вільними струминами:

$$v = E u_m. \quad (6)$$

За формулами (5) та (6) можна визначити зв'язок між розрідженням у точці на межі струмини $\Delta p_{c,meж}$ та максимальним динамічним тиском повітря у відповідному перерізі струмини $\rho u_m^2/2$:

$$\Delta p_{c,meж} = -K_E E^2 \rho u_m^2 = -E_p \rho u_m^2/2, \quad (7)$$

де E_p — тисковий коефіцієнт підтікання, що показує відношення статичного тиску на межі струмини у певному її перерізі до максимального динамічного тиску в цьому перерізі.

Після визначення розрідження на межі струмини розглянемо як змінюється статичний тиск у перерізах струмини від вільної межі до поверхні настилання.

Якщо струмина плоскопаралельна, то всередині її статичний тиск приблизно такий же, як і на поверхні. Проте якщо струмина настиляється на криволінійну поверхню, то існує доцентрове прискорення частинок повітря. У струмині діють нормальні до напрямку її осередненого руху доцентрові сили, що і зумовлюють обертання струмини навколо центра кривини поверхні. Нормальність цих сил дає змогу вважати їх силами статичного тиску, що виникають за рахунок поглиблення розрідження в напрямку до поверхні настилання (часто у фізиці замінюють обертальний рух дією відцентрової інерційної сили, протилежної до доцентрових сил. Тоді можна казати, що причиною додаткового розрідження у струмині є дія відцентрової сили).

Запишемо це твердження математично.

Виділимо у струмині елементарний об'єм у формі прямокутника (точніше, паралелепіпеда з одиничною шириною) у перерізі AB на відстані у від поверхні настилання (на рис. 2 показано заштрихованим прямокутником). Нехай сторони прямокутника дорівнюють dx та dy . Приймемо, що швидкість повітря u в елементарному об'ємі спрямована дотично до поверхні настилання. Тоді проекція на вісь Oy питомого доцентрового прискорення елементарного об'єму повітря на одиницю маси становить:

$$Y = -u^2/(R + y).$$

Це питома прискорення створюється різницею тисків на основах паралелепіпеда $-d_y p_c dx$. Знак d_y означає частинний диференціал за ординатою y . Тоді другий закон Ньютона для елементарного паралелепіпеда у проекціях на вісь Oy має вигляд:

$$-d_y p_c dx = Y \rho dx dy = -u^2/(R + y) \rho dx dy.$$

Перейдемо до надлишкових тисків

$$\Delta p_c = p_c - p_a, \quad (8)$$

де p_a — атмосферний тиск.

Одержимо диференціальне рівняння розподілу статичних тисків у перерізах струмини:

$$d_y \Delta p_c = \frac{\rho u^2}{R + y} dy. \quad (9)$$

Визначимо профіль статичних тисків у струмині інтегруванням рівняння (9). Якщо розглядати один переріз AB струмини, то можна замінити частинний диференціал повним та інтегрувати рівняння (9) як звичайне диференціальне рівняння першого порядку зі змінними, що розділяються.

Розглянемо струминний примежовий шар. Прийmemo верхню межу інтегрування диференційного рівняння розподілу статичних тисків (9) на вільній межі струмини. Тоді можна записати:

$$\Delta p_{c, \text{меж}} - \Delta p_c = \rho u_m^2 \int_y^{y_{\text{меж}}} \frac{(u/u_m)^2}{R + y} dy. \quad (10)$$

Якщо підставити профіль швидкості Шліхтінга за формулою (2), а також розрідження на межі струмини за формулою (7), то матимемо вираз для розрідження у будь-якій точці струминного примежового шару.

$$\Delta p_c = -K_E E^2 \rho u_m^2 - \rho u_m^2 \int_{\bar{y}_{\text{ст}}}^1 \frac{\left(1 - \bar{y}_{\text{ст}}^{3/2}\right)^4}{J + \bar{y}_{\text{ст}}} d\bar{y}_{\text{ст}}, \quad (11)$$

де J — параметр, що з урахуванням відомого відношення ширини пристінного шару та струмини (1:10) становить:

$$J = \frac{R + y_m}{y_{\text{меж}} - y_m} = \frac{R + 0,1 y_{\text{меж}}}{0,9 y_{\text{меж}}}. \quad (12)$$

Перейдемо до безрозмірного вигляду формули (11) шляхом ділення обох її частин на максимальний динамічний тиск повітря $\rho u_m^2/2$:

$$\frac{\Delta p_c}{\rho u_m^2/2} = -2K_E E^2 - 2 \int_{\bar{y}_{\text{ст}}}^1 \frac{\left(1 - \bar{y}_{\text{ст}}^{3/2}\right)^4}{J + \bar{y}_{\text{ст}}} d\bar{y}_{\text{ст}}. \quad (13)$$

Найбільш просто виражається статичний тиск на лінії максимальних швидкостей, тобто при $\bar{y}_{\text{ст}} = 0$:

$$\Delta p_{c, m} = -K_E E^2 \rho u_m^2 - \rho u_m^2 S_m \quad (14)$$

або

$$\overline{\Delta p_{c,m}} = -2K_E E^2 - 2S_m, \quad (15)$$

де S_m — інтеграл:

$$S_m = \int_0^1 \frac{\left(1 - \bar{y}_{cr}^{3/2}\right)^4}{J + \bar{y}_{cr}} d\bar{y}_{cr}. \quad (16)$$

Для пристінного шару основної ділянки рівняння профілю статичних тисків одержимо аналогічно, але з використанням профілю швидкостей за законом однієї сьомої (формула (1)). Проінтегруємо диференціальне рівняння розподілу статичних тисків (9) від лінії максимальних швидкостей, тобто

$$\Delta p_{c,m} - \Delta p_c = \rho u_m^2 \int_y^{y_m} \frac{(u/u_m)^2}{R+y} dy = \rho u_m^2 \int_y^{y_m} \frac{(u/u_m)^2}{(R+y)/y_m} \frac{dy}{y_m}.$$

Підставимо залежність (14) для розрідження на лінії максимальних швидкостей. Одержимо вираз для розрідження у пристінному шарі:

$$\Delta p_c = -K_E E^2 \rho u_m^2 - \rho u_m^2 S_m - \rho u_m^2 \int_{\bar{y}_{nc}}^1 \frac{\bar{y}_{nc}^{3/2}}{j + \bar{y}_{nc}} d\bar{y}_{nc} \quad (17)$$

або

$$\overline{\Delta p_c} = -2K_E E^2 - 2S_m - 2 \int_{\bar{y}_{nc}}^1 \frac{\bar{y}_{nc}^{3/2}}{j + \bar{y}_{nc}} d\bar{y}_{nc}, \quad (18)$$

де j — параметр:

$$j = R/y_m = 9J - 1. \quad (19)$$

Перейдемо до безрозмірного вигляду формули (17) шляхом ділення обох її частин на максимальний динамічний тиск повітря $\rho u_m^2/2$.

Найбільш важливим є статичний тиск на поверхні настилення, що дорівнює реакції поверхні настилення за модулем. Розрідження на поверхні настилення визначається за формулами (17) і (18) при нульовій нижній межі інтегрування:

$$\Delta p_{c,n} = -K_E E^2 \rho u_m^2 - \rho u_m^2 S_m - \rho u_m^2 S_n, \quad (20)$$

або

$$\overline{\Delta p_{c,n}} = -2K_E E^2 - 2S_m - 2S_n, \quad (21)$$

де S_n — інтеграл

$$S_n = \int_{\bar{y}_{nc}}^1 \frac{y_{nc}^{3/2}}{j + \bar{y}_{nc}} d\bar{y}_{nc}, \quad (22)$$

Значення інтегралів, що входить до формул (17) і (18), досить громіздке. Тому більш раціональним є чисельне його взяття.

Визначимо також середнє значення розрідження у перерізах струмини

$$\Delta p_{c,c} = \frac{\int_{y_{meж}}^{y_{meж}} \Delta p_c dy}{y_{meж}}. \quad (23)$$

Інтегрування окремо для пристінного і струминного шарів з підставкою відповідних формул для розрахунку статичного тиску (11) і (17) дає такий результат:

$$\Delta p_{c,c} = -\rho u_m^2 (K_E E^2 + S), \quad (24)$$

де S — сума інтегралів:

$$S = \frac{1}{10} S_m + \frac{1}{10} \int_0^1 \left(\int_{\bar{y}_{nc}}^1 \frac{y_{nc}^{3/2}}{j + \bar{y}_{nc}} d\bar{y}_{nc} \right) d\bar{y}_{nc} + \frac{9}{10} \int_0^1 \left(\int_{\bar{y}_{ct}}^1 \frac{(1 - \bar{y}_{ct}^{3/2})^4}{J + \bar{y}_{ct}} d\bar{y}_{ct} \right) d\bar{y}_{ct} \quad (25)$$

У безрозмірному вигляді залежність (24) набуває вигляду:

$$\overline{\Delta p}_{c,c} = \frac{\Delta p_{c,c}}{\rho u_m^2 / 2} = -2 (K_E E^2 + S). \quad (26)$$

Аналогічно розглянемо профіль статичних тисків початкової ділянки струмини. Для початкової ділянки (див. рис. 3) залежності для профілю статичного тиску струминного шару основної ділянки струмини (11) і (13) залишаються справедливими, якщо визначати безрозмірну ординату $\bar{y}_{ct}$ за формулою для початкової ділянки, а також підставляти відповідну залежність для параметра J :

$$J = (R + y_{я-ct}) / (y_{meж} - y_{я-ct}). \quad (27)$$

Статичний тиск на межі ядра зі струминним шаром визначається за формулами статичного тиску на лінії максимальних швидкостей основної ділянки, тобто (14) і (15). Лише індекс m слід замінити на індекс $я-ст$:

$$\Delta p_{c,я-ст} = -K_E E^2 \rho u_{я-ст}^2 - \rho u_{я-ст}^2 S_{я-ст}, \quad (28)$$

або

$$\overline{\Delta p_{c,я-ст}} = -2K_E E^2 - 2S_{я-ст}, \quad (29)$$

Для ядра струмини можна проінтегрувати диференційне рівняння розподілу статичних тисків (9) від межі ядра зі струминним шаром. З урахуванням незмінності швидкості повітря у ядрі та формули розрідження на межі ядра зі струминним шаром (28) одержимо:

$$\Delta p_c = -K_E E^2 \rho u_m^2 - \rho u_m^2 S_m - \rho u_m^2 \ln((1+1)/(1+\bar{y}_я)) \quad (30)$$

або

$$\overline{\Delta p_c} = -2K_E E^2 - 2S_m - 2 \ln((1+1)/(1+\bar{y}_я)). \quad (31)$$

де $\bar{y}_я = (y_я - y_{я-пс})/(y_{я-ст} - y_{я-пс})$ — безрозмірна ордината в межах ядра, ι — безрозмірний параметр:

$$\iota = (R + y_{я-пс})/(y_{я-ст} - y_{я-пс}). \quad (32)$$

При $\bar{y}_я = 0$ отримаємо залежність для межі ядра з пристінним шаром:

$$\Delta p_{c,я-пс} = -K_E E^2 \rho u_m^2 - \rho u_m^2 S_m - \rho u_m^2 \ln((1+1)/\iota) \quad (33)$$

або

$$\overline{\Delta p_{c,я-пс}} = -2K_E E^2 - 2S_m - 2 \ln((1+1)/\iota). \quad (34)$$

Для пристінного примежового шару формула аналогічна до відповідної формули для основної ділянки (17). Проте необхідно від правої частини додатково відняти інтеграл доцентрового прискорення за ядром $\rho u_m^2 \ln((1+1)/\iota)$. Тоді маємо

$$\Delta p_c = -K_E E^2 \rho u_m^2 - \rho u_m^2 S_m - \ln((1+1)/\iota) - \rho u_m^2 S_n \quad (35)$$

або

$$\overline{\Delta p_c} = -2K_E E^2 - 2S_m - \ln((1+1)/\iota) - 2S_n. \quad (36)$$

Параметр j для початкової ділянки набуде вигляду:

$$j = R/y_{я-пс}. \quad (37)$$

Зауважимо також, що безрозмірна ордината $\bar{y}_{пс}$ повинна визначатися за формулою для початкової ділянки.

Інтегральний параметр $S_{\text{я}}$ обчислюється за тією ж формулою, що і для основної ділянки, тобто (22). Лише параметр j набуває вигляду, який відповідає струминному шару, тобто (37).

Визначимо середній статичний тиск у перерізах початкової ділянки струмнини.

Для початкової ділянки струмнини розділимо проміжок інтегрування за формулою осереднення розрідження (23) на частини, що відповідають пристінному примежовому шару, ядру і струминному шару, з підстановкою відповідних формул для розрахунку статичного тиску (11), (30) і (35), а також, безрозмірних ординат меж ядра:

$$\bar{y}_{\text{я-пс}} = y_{\text{я-пс}} / y_{\text{меж}}, \quad (38)$$

$$\bar{y}_{\text{я-ст}} = y_{\text{я-ст}} / y_{\text{меж}}. \quad (39)$$

В результаті одержимо:

$$\Delta p_{c,c} = -\rho u_m^2 (K_E E^2 + S_{\text{поч}}). \quad (40)$$

де $S_{\text{поч}}$ — сума інтегралів

$$S_{\text{поч}} = S_m \bar{y}_{\text{я-ст}} + \ln \left(\frac{1+l}{1} \right) \bar{y}_{\text{я-пс}} + \bar{y}_{\text{я-пс}} \int_0^1 \left(\int_{\bar{y}_{\text{пс}}}^1 \frac{y_{\text{пс}}^{3/2}}{j + \bar{y}_{\text{пс}}} d\bar{y}_{\text{пс}} \right) d\bar{y}_{\text{пс}} +$$

$$+ (\bar{y}_{\text{я-ст}} - \bar{y}_{\text{я-пс}}) \left(1 - \ln \left(\frac{1+l}{1} \right) \right) + (1 - \bar{y}_{\text{я-ст}}) \int_0^1 \left(\int_{\bar{y}_{\text{ст}}}^1 \frac{(1 - \bar{y}_{\text{ст}}^{3/2})^4}{J + \bar{y}_{\text{ст}}} d\bar{y}_{\text{ст}} \right) d\bar{y}_{\text{ст}}. \quad (41)$$

У безрозмірному вигляді залежність (24) набуває вигляду:

$$\overline{\Delta p}_{c,c} = \frac{\Delta p_{c,c}}{\rho u_m^2 / 2} = -2 (K_E E^2 + S_{\text{поч}}). \quad (42)$$

Найбільш просто визначається профіль статичного тиску біля щілини повітророзподільника. Справді, профіль швидкості прийнято рівномірним, а, отже, інтегрування диференційного рівняння розподілу статичних тисків (9) дасть такий результат:

$$\Delta p_{c,\text{меж}} - \Delta p_c = \rho u_0^2 \int_y^{y_{\text{меж}}} \frac{dy}{R+y} = \rho u_0^2 \ln \left(\frac{R+y_{\text{меж}}}{R+y} \right) = \rho u_0^2 \ln \left(\frac{l_0+1}{l_0+\bar{y}} \right), \quad (43)$$

де l_0 — параметр

$$v_0 = R / y_{\text{меж}} \quad (44)$$

З рівняння (43) після підстановки формули (7) розрідження на вільній межі струмینی одержимо:

$$\Delta p_c = -\rho u_0^2 \ln((v_0 + 1)/(v_0 + \bar{y})) - K_E E^2 \rho u_0^2 \quad (45)$$

або

$$\overline{\Delta p}_c = -K_E E^2 - \ln((v_0 + 1)/(v_0 + \bar{y})). \quad (46)$$

Для поверхні настилення, тобто при $\bar{y} = 0$, формули (45) і (46) набудуть вигляду:

$$\Delta p_{c,n,0} = -K_E E^2 \rho u_0^2 - \rho u_0^2 \ln((v_0 + 1)/v_0) \quad (47)$$

або

$$\overline{\Delta p}_{c,n,0} = -2K_E E^2 - 2 \ln((v_0 + 1)/v_0). \quad (48)$$

Середнє розрідження у перерізі біля щілини визначається за рівнянням осереднення розрідження (23) з підстановкою формули профілю (45):

$$\Delta p_{c,c,0} = -K_E E^2 \rho u_0^2 - \rho u_0^2 (1 - v_0 \ln((v_0 + 1)/v_0)) \quad (49)$$

або

$$\overline{\Delta p}_{c,c,0} = -2K_E E^2 - 2 + 2v_0 \ln((v_0 + 1)/v_0). \quad (50)$$

Після розгляду будь-якого окремого перерізу струмینی *AB* перейдемо до розгляду закономірностей розвитку струмینی. Одержані залежності дозволяють розраховувати струмину, що настиляється на криволінійну поверхню, за допомогою основних рівнянь аеродинаміки.

Якщо поверхня настилення є круговим циліндром, то зручно використовувати полярні координати з центром *O* на осі циліндра. Кут φ зручно відлічувати від зовнішнього краю щілини (рис. 4).

Перерізу *AB* відповідає кут φ . Надамо куту φ нескінченно малого приросту $d\varphi$. Тоді переріз *AB* зсунеться і розтягнеться у положення *DC*. Одержимо розрахунковий контур *ABCD*.

Розглянемо основну ділянку струмینی.

Запишемо рівняння балансу об'ємів повітря для контура *ABCD* у такому вигляді: приріст витрати повітря у контурі *ABCD* $d(ku_{\text{т,у меж}})$ дорівнює витраті повітря, що підтікає, $v \cdot AD$.

При цьому використовуємо припущення, що підтікання повітря відбувається в напрямку, перпендикулярному до межі струмینی, тобто

$$AD = \frac{R + y_{\text{мж}}}{\cos(\theta)} d\varphi.$$

Маємо

$$d(ku_m y_{\text{мж}}) = v \frac{R + y_{\text{мж}}}{\cos(\theta)} d\varphi. \quad (51)$$

Запишемо рівняння кількості руху для контура $ABCD$ у проєкціях на вісь Ox , яка є дотичною до поверхні настилення:

$$\Sigma F_x = I_{2,x} - I_{1,x},$$

де ΣF_x — сума проєкцій на вісь Ox сил, що діють на контур $ABCD$; $I_{1,x}$ та $I_{2,x}$ — кількості руху повітря, що відповідно входить та виходить з контура.

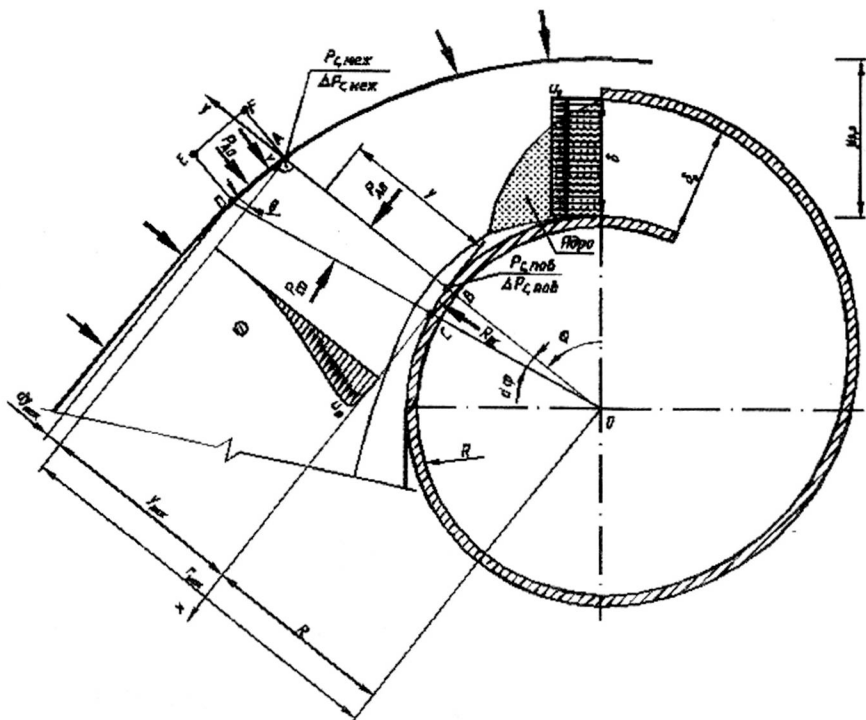


Рис. 4. Схема для дослідження основної ділянки струмнини

Розглянемо сили, що діють на контур $ABCD$.

Скористаємось відомим твердженням про сили статичного тиску. Сила статичного тиску в напрямку осі Ox , яка діє на певну поверхню (для двовимірної задачі — відрізок), дорівнює добутку середнього статичного тиску та проекції цієї поверхні на перпендикулярну до осі Ox площину (вісь Oy).

На відрізки AB і CD діють сили статичного тиску P_{AB} і P_{CD} , що в напрямку осі Ox дорівнюють добутку ширини відповідного перерізу та середнього статичного тиску.

$$P_{AB,x} = p_{c,c} y_{\text{меж}} = (\Delta p_{c,c} + p_a) y_{\text{меж}},$$

а

$$P_{CD,x} = - (p_{c,c} + dp_{c,c})(y_{\text{меж}} + dy_{\text{меж}}) = - (\Delta p_{c,c} + p_a + d\Delta p_{c,c})(y_{\text{меж}} + dy_{\text{меж}}).$$

На відрізок AD діє сила P_{AD} статичного тиску $p_{c,\text{меж}}$, утвореного на межі струмини. Її проекція на вісь Ox дорівнює добутку статичного тиску на межі струмини та довжини проекції відрізка AD на вісь Oy ($dy_{\text{меж}}$)

$$P_{AD,x} = p_{c,\text{меж}} dy_{\text{меж}} = (\Delta p_{c,\text{меж}} + p_a) dy_{\text{меж}}.$$

На відрізок BC діє нормальна сила реакції поверхні R_{BC} . Проте проекції на вісь Ox ця сила не дає. Також на цей відрізок діє сила дотичних напружень від тертя. Проте тертя мало впливає на розвиток струмин, що настилаються. Тому ним прийнято нехтувати.

Розглянемо кількості руху повітря, що надходить і виходить з контура $ABCD$.

Кількість руху повітря, що входить до контура крізь переріз AB , має напрямок, паралельний до осі Ox і становить:

$$I_{AB} = I_{AB,x} = \beta k^2 \rho u_m^2 y_{\text{меж}}.$$

Кількість руху повітря, що надходить до конура $ABCD$ крізь нескінченно малий відрізок AD становить:

$$I_{AD} = \rho v^2 AD = \rho v^2 \frac{R + y_{\text{гп}}}{\cos(\theta)} d\varphi.$$

Проекція цієї кількості руху на вісь Ox становить:

$$I_{AD,x} = I_{AD} \sin(\theta) = \rho v^2 \frac{R + y_{\text{гп}}}{\cos(\theta)} \sin(\theta) d\varphi = \rho v^2 (R + y_{\text{гп}}) \operatorname{tg}(\theta) d\varphi.$$

Загальна проекція на вісь Ox кількості руху повітря, що входить до перерізу, становить:

$$I_{l,x} = I_{AB,x} + I_{AD,x} = \beta k^2 \rho u_m^2 y_{\text{меж}} + \rho v^2 (R + y_{\text{гр}}) \operatorname{tg}(\theta) d\varphi.$$

Кількість руху повітря, що виходить з контура $ABCD$ крізь відрізок CD становить:

$$I_{CD} = \rho (\beta k^2 u_m + d (\beta k^2 u_m))^2 (y_{\text{меж}} + dy_{\text{меж}}).$$

Проекція цієї кількості руху на вісь Ox становить:

$$I_{CD,x} = I_{CD} \cos(d\varphi) = I_{CD} = \rho (\beta k^2 u_m + d (\beta k^2 u_m))^2 (y_{\text{меж}} + dy_{\text{меж}}),$$

адже косинус нескінченно малої величини прямує до одиниці.

Тоді рівняння кількості руху матиме вигляд:

$$P_{AB,x} + P_{AD,x} + P_{CD,x} = I_{CD,x} - (I_{AB,x} + I_{AD,x})$$

або

$$\begin{aligned} & (\Delta p_{c,c} + p_a) y_{\text{меж}} + (\Delta p_{c,\text{меж}} + p_a) dy_{\text{меж}} - (\Delta p_{c,c} + p_a + d\Delta p_{c,c}) (y_{\text{меж}} + dy_{\text{меж}}) = \\ & = ((\beta k^2 \rho u_m^2 + d (\beta k^2 \rho u_m^2)) (y_{\text{меж}} + dy_{\text{меж}})) - \beta k^2 \rho u_m^2 y_{\text{меж}} - v^2 (R + y_{\text{меж}}) \operatorname{tg}(\theta) d\varphi. \end{aligned}$$

Розкриємо дужки, знехтуємо добутками диференціалів (які є нескінченно малими величинами вищого порядку ніж окремі диференціали) і згрупуємо диференціали добутків:

$$-d(\Delta p_{c,c} y_{\text{меж}}) + \Delta p_{c,\text{меж}} dy_{\text{меж}} = \beta k^2 \rho d(u_m^2 y_{\text{меж}}) - v^2 (R + y) \operatorname{tg}(\theta) d\varphi. \quad (52)$$

Рівняння (51) і (52) утворюють систему рівнянь, що описує закономірність згасання швидкості та розширення струмینی.

Ця система містить тригонометричні функції кута розширення струмینی θ . Позбудемось цих множників. Скористаємось відомою формулою тангенса кута ω (рис. 4) між дотичною до кривої та радіус-вектором полярних координат r що в даному випадку дорівнює сумі радіуса поверхні настилання R та ширини струмینی $y_{\text{меж}}$:

$$\operatorname{tg}(\omega) = r \frac{d\varphi}{dr} = (R + y_{\text{меж}}) \frac{d\varphi}{dy_{\text{меж}}}$$

у вигляді:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\omega)} = \frac{1}{R + y_{\text{меж}}} \frac{dy_{\text{меж}}}{d\varphi}$$

або

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_{\text{меж}}}{(R + y_{\text{меж}}) d\varphi} \right)^2}} = \frac{R + y_{\text{меж}}}{\sqrt{(R + y_{\text{меж}})^2 + \left(\frac{dy_{\text{меж}}}{d\varphi} \right)^2}}.$$

Скористаємося незмінністю відношення швидкості підтікання v до максимальної швидкості повітря u_m , що дорівнює коефіцієнту підтікання E (формула (6)). Також до рівняння (52) підставимо статичний тиск на межі струмини за формулою (7) і середній статичний тиск у перерізі за формулою (24). Одержимо систему диференціальних рівнянь першого порядку, що описує закономірність розвитку струмини, у такому вигляді:

$$d(ku_m y_{\text{меж}}) = Eu_m \sqrt{(R + y_{\text{меж}})^2 + \left(\frac{dy_{\text{меж}}}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \quad (53)$$

та

$$\rho d \left((K_E E^2 + S) u_m^2 y_{\text{меж}} \right) - \rho K_E E^2 u_m^2 dy_{\text{меж}} = \rho d (\beta k^2 u_m^2 y_{\text{меж}}) - \rho E^2 u_m^2 dy_{\text{меж}}. \quad (54)$$

Шляхом простих перетворень (що пропущені з урахуванням громіздкості), а саме, розписування диференціалів добутків, приведення подібних членів, групування їх та піднесення рівняння до квадрата, система рівнянь (53) і (54) набуває вигляду Коші, при якому в лівій частині є лише по одній похідній, а в правій відсутні диференціали:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= 1 - \frac{2(1 - K_E)E^2 + y_{\text{меж}} \frac{dS}{dy_{\text{меж}}}}{K_E E^2 + S - \beta k^2} > \frac{2E}{k}, \\ \frac{dy_{\text{меж}}}{d\varphi} &= \frac{2E(R + y_{\text{меж}})}{\sqrt{k^2 A^2 - 4E^2}}, \\ \frac{d(\ln(u_m))}{d\varphi} &= -\frac{1}{y_{\text{меж}}} \left(1 + \frac{2(1 - K_E)E^2 + y_{\text{меж}} \frac{dS}{dy_{\text{меж}}}}{K_E E^2 + S - \beta k^2} \right) \frac{E(R + y_{\text{меж}})}{\sqrt{k^2 A^2 - 4E^2}}. \end{aligned} \right. \quad (55)$$

Нерівність у системі рівнянь виникає при звільненні від кореня і дає змогу уникнути зайвих розв'язків, що задовільняють рівняння (53) з точністю до протилежного знака.

Перетворимо систему рівнянь до безрозмірного вигляду. Швидкість повітря прийнято відносити до швидкості виходу повітря зі щілини: $\bar{u}_m = u_m / u_o$.

Безрозмірну ширину струмини найбільш зручно розглядати як відношення ширини струмини $y_{\text{меж}}$ до радіуса поверхні настилання R
 $\bar{y}_{\text{меж}} = y_{\text{меж}}/R$.

Тоді система рівнянь (55) набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{k}{2E} \left(1 - \frac{2(1-K_E)E^2 + \bar{y}_{\text{меж}} \frac{dS}{d\bar{y}_{\text{меж}}}}{K_E E^2 + S - \beta k^2} \right) \geq 1, \\ \frac{d\bar{y}_{\text{меж}}}{d\varphi} &= \frac{1 + \bar{y}_{\text{меж}}}{\sqrt{A^2 - 1}}, \\ \frac{d\bar{u}_m}{d\varphi} &= -\frac{\bar{u}_m}{2\bar{y}_{\text{меж}}} \left(1 + \frac{2(1-K_E)E^2 + \bar{y}_{\text{меж}} \frac{dS}{d\bar{y}_{\text{меж}}}}{K_E E^2 + S - \beta k^2} \right) \frac{1 + \bar{y}_{\text{меж}}}{\sqrt{A^2 - 1}}. \end{aligned} \right. \quad (56)$$

Формули (12) і (19) набудуть безрозмірного вигляду:

$$J = (1 + 0,1\bar{y}_{\text{меж}})/0,9\bar{y}_{\text{меж}} \quad (57)$$

$$\text{та} \quad j = 10/\bar{y}_{\text{меж}}. \quad (58)$$

Чисельне інтегрування системи рівнянь (56) показали, що розширення струмини відбувається за законом, близьким до лінійного. Цей результат показує аналогію між струминою, що розраховується, та вільними струминами. Тому можна користуватись наближеною лінійною закономірністю розширення струмини

$$\bar{y}_{\text{меж}} = \bar{y}_{\text{меж, пер}} + k_y (\varphi - \varphi_{\text{пер}}), \quad (59)$$

де k_y — апроксимаційний коефіцієнт, що визначається за методом найменших квадратів.

Закон згасання швидкості повітря добре описується залежністю

$$\bar{u}_m = \frac{k_u}{\sqrt[4]{(\varphi - \varphi_{\text{пер}}) + 1}} + (1 - k_u), \quad (60)$$

де k_u — апроксимаційний коефіцієнт, що визначається за методом найменших квадратів.

Розробимо аналогічну математичну модель початкової ділянки. При цьому врахуємо наявність ядра постійних швидкостей:

$$u_m = u_o. \quad (61)$$

Припущення про пряму пропорційність між швидкістю підтікання повітря v та максимальною швидкістю повітря u_o (формула (6)) для початкової ділянки має вигляд:

$$v = Eu_o = const. \quad (62)$$

Для початкової ділянки струмینی система рівнянь аналогічна до (53) і (54). Врахуємо формули (61) і (62):

$$d(ku_o y_{\text{меж}}) = Eu_o \sqrt{(R + y_{\text{меж}})^2 + \left(\frac{dy_{\text{меж}}}{d\varphi}\right)^2} d\varphi; \quad (63)$$

$$-d(\Delta p_{c,c} y_{\text{меж}}) - \rho K_E E^2 u_o^2 dy_{\text{меж}} = \rho d(\beta k^2 u_o^2 y_{\text{меж}}) - \rho E^2 u_o^2 dy_{\text{меж}}. \quad (64)$$

Повне розв'язання системи рівнянь (63) і (64) з урахуванням складних інтегральних залежностей для осереднювальних коефіцієнтів та середнього статичного тиску є невиправданим ускладненням. Адже для основної ділянки струмینی розрахунки підтвердили практично лінійне розширення струмینی відносно кута φ :

$$\frac{dy_{\text{меж}}}{d\varphi} = const.$$

Прийmemo і на початковій ділянці лінійне розширення струмینی. Тоді рівняння можна одразу проінтегрувати в межах від щілини до перехідного перерізу. Справді, профіль швидкостей у перехідному перерізі відповідає основній ділянці.

$$ku_o y_{\text{меж,пер}} - k_o u_o y_{\text{меж,0}} = Eu_o \int_0^{\varphi_{\text{пер}}} \sqrt{(R + y_{\text{меж}})^2 + \left(\frac{dy_{\text{меж}}}{d\varphi}\right)^2} d\varphi, \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \Delta p_{c,c,o} y_{\text{меж,0}} - \Delta p_{c,c,\text{пер}} y_{\text{меж,пер}} + K_E E^2 \rho u_o^2 (y_{\text{меж,пер}} - y_{\text{меж,0}}) = \\ = \rho \beta k^2 u_o^2 y_{\text{меж,пер}} - \rho (\beta k^2)_o u_o^2 y_{\text{меж,0}} - \rho E^2 u_o^2 (y_{\text{меж,пер}} - y_{\text{меж,0}}), \end{aligned} \quad (66)$$

де k_o і $(\beta k^2)_o$ — коефіцієнти поля швидкостей і перерахунку кількості руху у початковому перерізі; $\Delta p_{c,c,o}$ — середній статичний тиск у початковому перерізі; $\Delta p_{c,c,\text{пер}}$ — середній статичний тиск у перехідному перерізі.

Витрата і кількість руху у вторинному потоку набагато менші за витрату і кількість руху повітря у щілині. Вплив вторинного потоку на силу тиску у початковому перерізі є незначним у порівнянні з потужним потоком повітря у щілині. Тоді витрату і кількість руху у початковому перерізі можна прийняти як витрату і кількість руху в щілині:

$$k u_o y_{\text{меж,пер}} - u_o \delta = E u_o \int_0^{\varphi_{\text{пер}}} \sqrt{(R + y_{\text{меж}})^2 + \left(\frac{dy_{\text{меж}}}{d\varphi}\right)^2} d\varphi, \quad (67)$$

$$\Delta p_{c,c,o} \delta - \Delta p_{c,c,пер} y_{\text{меж,пер}} = \rho (\beta k^2) u_o^2 y_{\text{меж,пер}} - \rho u_o^2 \delta. \quad (68)$$

Підставимо лінійний закон розширення струмینی у вигляді:

$$y_{\text{меж}} = y_{\text{меж,0}} + \frac{y_{\text{меж,пер}} - y_{\text{меж,0}}}{\varphi_{\text{пер}}} \varphi. \quad (69)$$

Підставимо до системи рівнянь (67) і (68) формули середнього розрідження у перехідному перерізі (24) та біля щілини (49). Використаємо формулу (69):

$$\begin{cases} k u_{\text{меж,пер}} - \delta - E \int_0^{\varphi_{\text{пер}}} \sqrt{\left(R + y_{\text{меж,0}} + \frac{y_{\text{меж,пер}} - y_{\text{меж,0}}}{\varphi_{\text{пер}}} \varphi\right)^2 + \left(\frac{y_{\text{меж,пер}} - y_{\text{меж,0}}}{\varphi_{\text{пер}}}\right)^2} d\varphi = 0; \\ \left(E^2 + I_p - \beta k^2\right) y_{\text{меж,пер}} - \left(E^2 - \frac{R}{y_{\text{меж,пер}}} \ln\left(1 + \frac{y_{\text{меж,пер}}}{R}\right)\right) \delta = 0. \end{cases} \quad (70)$$

Приведемо рівняння до безрозмірного вигляду. Як видно зі системи рівнянь, зручно прийняти безрозмірну ширину струмینی віднесену до радіуса поверхні настилання R , тобто за формулою:

$$\begin{cases} k \bar{y}_{\text{меж,пер}} - \bar{\delta} - E \int_0^{\varphi_{\text{пер}}} \sqrt{\left(1 + \bar{y}_{\text{меж,0}} + \frac{\bar{y}_{\text{меж,пер}} - \bar{y}_{\text{меж,0}}}{\varphi_{\text{пер}}} \varphi\right)^2 + \left(\frac{\bar{y}_{\text{меж,пер}} - \bar{y}_{\text{меж,0}}}{\varphi_{\text{пер}}}\right)^2} d\varphi = 0; \\ \left(E^2 + I_p - \beta k^2\right) \bar{y}_{\text{меж,пер}} - \left(E^2 - \frac{1}{\bar{y}_{\text{меж,пер}}} \ln(1 + \bar{y}_{\text{меж,пер}})\right) \bar{\delta} = 0. \end{cases} \quad (71)$$

де $\bar{y}_{\text{меж,пер}} = y_{\text{меж,пер}}/R$ — ширина струмнини відповідно у перехідному та початковому перерізах, а $\bar{\delta} = \delta/R$ й $\bar{y}_{\text{меж,0}} = y_{\text{меж,0}}/R$ — відповідно безрозмірна ширина щілини та струмнини у початковому перерізі:

Щоб визначити параметри повітря у перерізах початкової ділянки струмнини, приймаємо лінійні закономірності її розширення та звуження ядра.

$$y_{\text{меж}} = y_{\text{меж,0}} + (y_{\text{меж,пер}} - y_{\text{меж,0}})\varphi/\varphi_{\text{пер}}; \quad (72)$$

$$y_{\text{я-пс}} = (y_{\text{меж,пер}}/10)(\varphi/\varphi_{\text{пер}}); \quad (73)$$

$$y_{\text{я-ст}} = \delta - (\delta - y_{\text{меж,пер}}/10)\varphi/\varphi_{\text{пер}} \quad (74)$$

або у безрозмірному вигляді

$$\bar{y}_{\text{меж}} = \bar{y}_{\text{меж,0}} + (\bar{y}_{\text{меж,пер}} - \bar{y}_{\text{меж,0}})\varphi/\varphi_{\text{пер}}; \quad (75)$$

$$\bar{y}_{\text{я-пс}} = (\bar{y}_{\text{меж,пер}}/10)(\varphi/\varphi_{\text{пер}}); \quad (76)$$

$$\bar{y}_{\text{я-ст}} = \bar{\delta} - (\bar{\delta} - \bar{y}_{\text{меж,пер}}/10)\varphi/\varphi_{\text{пер}}. \quad (77)$$

Використана література

1. Патент Франції № 724614, кл. 36 d/5, опубл. 1932.
2. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960 — 715 с.