

УДК 539.376

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Гуляр О.І., д-р техн. наук,
Пискунов С.О., канд. техн. наук,
Рутковський В.А., канд. техн. наук

ЕФЕКТИВНІСТЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОВЗУЧОСТІ

Вступ. Під впливом високих температур довготривала міцність багатьох відповідальних елементів машинобудівних конструкцій, зокрема лопаток газових турбін і їх з'єднань, роторів, елементів корпусів турбін та ін., здебільшого визначається розвитком деформацій повзучості і супутнім накопиченням пошкодженості матеріала. Зазначені об'єкти являють собою просторові тіла складної форми, визначення ресурса яких під впливом довільно розподілених у просторі навантажень потребує розв'язання просторових задач повзучості. Розв'язання просторових задач повзучості з урахуванням пошкодженості матеріала призводить до значних труднощів, які обумовлені як складністю побудови відповідних розв'язувальних рівнянь і алгоритмів так і обсягом обчислень. Розв'язання задач зазначеного класу до теперішнього часу не знайшло широкого відображення в наукових публікаціях і не реалізовано в ліцензійних програмних комплексах.

Метою даної роботи є аналіз обсягу обчислювальних витрат і оцінка ефективності розробленого алгоритма розв'язання просторових задач повзучості із використанням напіваналітичного метода скінченних елементів (НМСЕ) на основі розв'язання тестових прикладів і практичних задач енергетичного машинобудування.

Фізичні співвідношення. Для опису нелінійного деформування матеріалу в умовах повзучості використовуються залежності між швидкостями інтенсивності деформацій повзучості $d\varepsilon_{ic}/dt$ та пошкодженості $d\omega/dt$ і параметрами напружено-деформованого стану

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ic}/dt = f_1(\varepsilon_{ic}, \sigma_i, \omega) \\ d\omega/dt = f_2(\varepsilon_{ic}, \sigma_e, \omega) \end{cases}, \quad (1)$$

де t – час; $0 \leq \omega \leq 1$ – скалярний параметр пошкодженості матеріалу Качанова–Работнова [1]; σ_i – інтенсивність нормальних напружень; σ_e –

еквівалентне напруження, обчислене за одним із відомих критеріїв міцності.

Алгоритм розв'язання задачі повзучості. Чисельне розв'язання задачі повзучості на основі метода скінченних елементів (МСЕ) передбачає покрокове подання процесу деформування за часом. На кожному кроці для визначення напружено-деформованого стану формується система нелінійних рівнянь МСЕ, розв'язання якої проводиться із застосуванням ітераційних алгоритмів. Для оптимізації обчислювальних витрат важливого значення набуває вибір схеми інтегрування рівнянь повзучості і раціонального алгоритму розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Значна кількість вищезгаданих просторових об'єктів являють собою тривимірні тіла канонічної форми – призматичні та кругові неоднорідні тіла, ефективним методом чисельного дослідження яких є НМСЕ [2].

При застосуванні НМСЕ на кожному кроці розв'язання задачі розв'язок системи рівнянь виконується за алгоритмом, що являє собою комбінацію метода блочних ітерацій і крокового інтегрування за параметром навантаження. На кожній ітерації m кроку n визначення розв'язку системи рівнянь здійснюється за формулою:

$$\{u_l\}_{n+1}^m = \{u_l\}_n^m + \beta [K_{ll}]^{-1} (\{Q_l\}^m - \{R_l\}_n^m), \quad (2)$$

де $\{u_l\}_n^m, \{u_l\}_{n+1}^m$ – коефіцієнти розкладу вектора вузлових переміщень на ітераціях n і $n+1$ відповідно; β – параметр релаксації; $[K_{ll}]$ – діагональна підматриця жорсткості системи; $\{Q_l\}^m$ – вектор вузлових навантажень; $\{R_l\}_n^m$ – вектор вузлових реакцій на ітерації n .

Формула (2) описує ітераційний цикл, всередині якого організовано цикл за утримуваною кількістю членів ряду розкладу переміщень в ряд за системою базисних функцій φ_l ($l = 0 \dots L$) – поліномів Лагранжа та Міхліна [2]. Умовою збіжності ітераційного процесу на кроці є:

$$\left\| \sum_{l=0}^L \{\Delta u\}_l^n \right\| \leq \varepsilon \left\| \sum_{l=0}^L \{u\}_l^n \right\|, \quad (3)$$

де $\{\Delta u\}_l^n$ і $\{u\}_l^n$ – відповідно прирощення і накопичені значення амплітудних переміщень на ітерації n ; ε – наперед визначений параметр точності розв'язання системи рівнянь НМСЕ ($\varepsilon = 10^{-3} \dots 10^{-7}$).

При розв'язанні задачі повзучості на першому кроці при $t=0$ визначається розподілення напружень при пружньому деформуванні. На початку кожної ітерації n наступних кроків за часом компоненти тензора напружень σ_{ij} обчислюються за формулою:

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_{n-1} + (\Delta\sigma_{ij})_n, \quad (4)$$

де прирощення напружень $(\Delta\sigma_{ij})_n$ визначається згідно закону Гука за величиною прирощення повних деформацій.

Дійсні значення напружень σ_{ij} , що враховують поточний рівень нелінійних деформацій, обчислюються за формулою:

$$(\overline{\sigma}_{ij})_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} (\sigma_{ij})_n^m + (\overline{s^{ij}})_n^m = (\sigma_o)_n^m + (\overline{s^{ij}})_n^m, \quad (5)$$

де $(\overline{s^{ij}})_n^m$ – компоненти девіатора напружень, які залежать від прирощень нелінійних деформацій повзучості:

$$(\overline{s^{ij}})_n^m = (s^{ij})_n^m - G_1 (\Delta\epsilon_{ij}^c)_n^m, \quad (\Delta\epsilon_{ij}^c)_n^m = (\xi_{ij}^c)_n^m \Delta t_m, \quad (6)$$

де $G_1 = E / (1 - 2\mu)$; $(\xi_{ij}^c)_n^m = \frac{3}{2} (\xi_i^c)_n^m \frac{(s_{ij})_n^m}{(\sigma_i)_n^m}$ – компоненти тензора швидкості деформацій повзучості; $\xi_i^c = \frac{d\epsilon_{ic}}{dt}$; Δt_m – величина кроку за часом.

Напруження, отримані за (4)–(6), використовуються для подальшого обчислення значення вектора вузлових реакцій. В разі виконання умови (3) ітераційний процес на кроці припиняється і, на основі наведених залежностей (1), проводиться обчислення значень прирощень деформацій повзучості $(\Delta\epsilon_{ij}^c)_m$ і пошкоженості $(\Delta\omega)_m$ на кроці m і відповідних накопичених величин $(\epsilon_{ij}^c)_m$ і ω_m :

$$(\epsilon_{ij}^c)_m = (\epsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\Delta\epsilon_{ij}^c)_m = (\epsilon_{ij}^c)_{m-1} + (\xi_{ij}^c)_m \Delta t_m,$$

$$\omega_m = \omega_{m-1} + (\Delta\omega)_m = \omega_{m-1} + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_m \Delta t_m.$$

В кінці кожного кроку для всієї області здійснюється перевірка умови початку руйнування $\omega > \omega_{кр.}$, де $\omega_{кр.} \approx 1$ критичне значення параметру пошкодженості, що відповідає втраті матеріалом несучої здатності.

При використанні НМСЕ розв'язання як лінійних так і нелінійних задач здійснюється на основі ітераційного процесу. В зв'язку з цим необхідним є проведення дослідження збіжності розв'язку як при пружному деформуванні, так і з урахуванням нелінійної роботи матеріалу.

Дослідження збіжності і ефективності алгоритма розв'язання задач повзучості. Для дослідження характеру збіжності ітераційного процесу при розв'язанні задач повзучості розглянемо тестовий приклад про деформування тонкостінної трубки, розрахункова схема якої, побудована із використанням призматичних неоднорідних скінченних елементів, наведена на рис. 1. Деформування в умовах повзучості описується системою рівнянь

$$\frac{d\varepsilon_{ic}}{dt} = A \frac{Sh(\sigma/c)}{(1-\omega)^{k_1}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = B \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^{k_2}, \quad (7)$$

де $A = 3.12 \cdot 10^{-4} \text{ год}^{-1}$, $k_1 = 2.36$, $c = 20.5 \text{ МПа}$, $B = 0.58 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-3.17} \text{ год}^{-1}$, $k_2 = 3.17$ – константи матеріалу при $T = 850^\circ\text{C}$ [3].

Розв'язання задачі проведено при постійному кроці за часом Δt_0 . Виконані дослідження збіжності величин параметра пошкодженості і деформацій повзучості в залежності від точності розв'язання системи рівнянь НМСЕ ε свідчать, що похибка визначення ε_{ic} $\delta_{\varepsilon_{ic}}$ в межах 1% досягається при $\varepsilon = 10^{-4}$, δ_{ω} – при $\varepsilon = 10^{-5}$ (рис. 1). При $\varepsilon = 10^{-5}$ похибка визначення часу до початку руйнування становить 2,1%.

Скінченноелементне розв'язання задач повзучості з урахуванням умов збіжності вимагає виконання великої кількості кроків (порядку тисячі), а дотримання умови збіжності отриманого розв'язку за кількістю невідомих для просторових задач вимагають розв'язання систем рівнянь методом скінченних елементів великої розмірності (до ста тисяч невідомих). Внаслідок цього сумарні обчислювальні витрати набувають обсягу, який, навіть із використанням сучасної обчислювальної техніки, не є прийнятним. В зв'язку з цим для мінімізації обчислювальних витрат важливого значення набуває розробка раціонального алгоритму розв'язання систем нелінійних рівнянь.

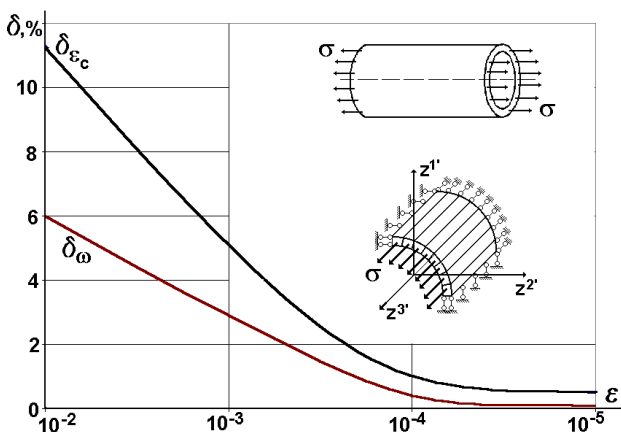


Рис. 1

При використанні НМСЕ на кожній ітерації розв'язання нелінійної задачі необхідним є проведення внутрішнього ітераційного процесу з розв'язання лінійної задачі. З метою зменшення ітераційних витрат розв'язання нелінійної задачі при реалізації алгоритму (2) було застосовано суміщення на кожному з кроків за часом ітераційних процесів розв'язання лінійної задачі НМСЕ і нелінійної задачі повзучості. Порівняння ітераційних витрат при розв'язанні зазначеного тестового прикладу засвідчило, що суміщення ітераційних процесів дозволяє скоротити обчислювальні витрати НМСЕ майже на порядок.

Необхідно відзначити, що наведений приклад є найпростішою одновимірною задачею, яка потребує мінімальної кількості ітерацій НМСЕ для розв'язання лінійної задачі. Так, точність визначення переміщення u_z в межах 1% при розв'язання лінійної задачі досягається вже при $\varepsilon = 10^{-2}$. Підвищення складності задачі (наявність неоднорідностей у вигляді вирізів, суттєва неоднорідність напружено-деформованого стану за напрямком $z^{3'}$) потребує значно більшої точності і, відповідно, більшої кількості ітерацій для отримання задовільних величин похибок розв'язку лінійної задачі. Ефективність запропонованого суміщення ітераційних процесів для розв'язання лінійної і нелінійної задачі в зазначених випадках суттєво підвищується.

Зменшення обчислювальних витрат при розв'язанні задачі повзучості може бути досягнуто також за рахунок розв'язання задачі із змінним кроком за часом: на другій стадії встановленої повзучості крок за часом може бути збільшений в декілька разів, при цьому загальна кількість

ітерацій не зростатиме внаслідок менших, порівняно із першою і третьою стадіями повзучості, швидкостями повзучості. Максимально припустима величина кроку за часом визначається з умови збіжності отримуваних результатів при послідовному зменшенні (збільшенні) кроку за часом і залежить від властивостей повзучості матеріалу. Так, для даного прикладу при збільшенні кроку за часом від Δt_0 до $2\Delta t_0$ похибки визначення величин деформацій повзучості, пошкодженості і часу до руйнування залишились в межах 5%, а ітераційні витрати зменшились майже вдвічі.

Дослідження деформування лопатки енергетичної установки. Із застосуванням розробленого алгоритму розв'язання задач повзучості на основі НМСЕ було проведено визначення ресурса до початку руйнування лопатки енергетичної установки.

Розглядувана лопатка являє собою просторове тіло складної форми, характерні розміри якого по висоті значно перевищують характерні розміри поперечного перерізу. Площа поперечного перерізу змінна по висоті. Лопатка закручена відносно вертикальної вісі і знаходиться під впливом відцентрового навантаження в неоднорідному, як по висоті, так і в поперечних перерізах полі температур. Необхідно відзначити, що абсолютні величини температур є значно більшими, ніж їх змінення в об'ємі фрагмента лопатки, в зв'язку з чим впливом нерівномірності розподілення температур на напружено-деформований стан можна знехтувати. Але в розглядуваному діапазоні температур суттєвим є вплив температури на фізико-механічні характеристики матеріалу в умовах повзучості, що враховується в подальшому при проведенні моделювання деформування в умовах повзучості.

Результати дослідження просторового напружено-деформованого стану лопатки, виконані в припущенні пружного деформування на основі тривимірного метода скінченних елементів (МСЕ) засвідчили, що напружено-деформований стан лопатки є суттєво неоднорідним як по висоті так і в межах поперечних перерізів. На основі цих результатів було обрано небезпечний поперечний переріз лопатки R^* , комбінація усередненого напруження σ_0 і усередненої температури в якому T_0 призводить до найбільш інтенсивного накопичення деформацій повзучості.

Розв'язання задачі повзучості для лопатки в цілому пов'язано із значними обчислювальними витратами. В зв'язку з цим, для проведення чисельного моделювання деформування в умовах повзучості, було розглянуто фрагмент пера лопатки в околі небезпечного перерізу R^* (рис. 2). Фрагмент охоплює частину пера лопатки $0.94R_0 < R < 1.06R_0$, в межах якої спостерігається найбільш нерівномірне розподілення напружень.

Оскільки процес повзучості супроводжується значним перерозподілом напружень, відповідно, саме в межах цього фрагмента перерозподіл напружень є найбільш вірогідним. Моделювання впливу верхньої частини лопатки здійснюється шляхом прикладення до перерізу $R=1.06R_0$ нерівномірно розподіленого навантаження q , що відповідає діючим в цьому перерізі напруженням. Крім того, фрагмент лопатки завантажений розподіленим за об'ємом відцентровим навантаженням p . Фрагмент лопатки, що розглядається, може бути віднесений до призматичних тіл, ефективним засобом моделювання напружено-деформованого стану яких є напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ) [2]. Відповідна дискретна модель НМСЕ, утворена із використанням неоднорідних призматичних скінченних елементів, наведена на рис. 2.

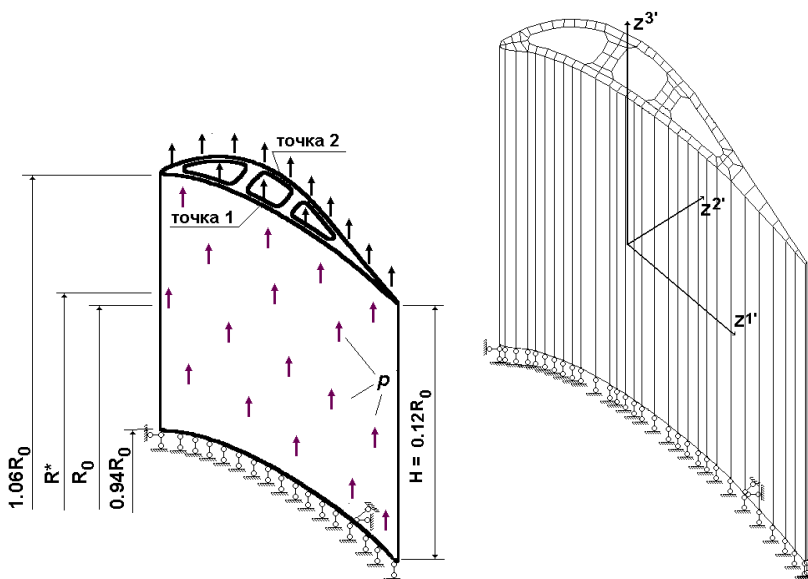


Рис. 2

Прийнята розрахункова схема і дискретна модель НМСЕ передбачає відсутність закручування відносно вісі z^3 і незмінність площі поперечного перерізу лопатки, що є характерним для кола об'єктів, розрахунок яких традиційно здійснюється на основі НМСЕ. Для урахування впливу закручування фрагмента лопатки на напружено-деформований стан був застосований підхід, що ґрунтується на зміні

вихідної щільності матеріала по площині поперечного перерізу. В центральній частині перерізу (в околі точок 1 та 2), для якої закручування призводить до збільшення напружень, вихідна щільність була збільшена, для периферійних частин перерізу – зменшена. При цьому усереднена по перерізу величина щільності залишилась незмінною.

Для моделювання змінної геометрії поперечних перерізів фрагмента пера лопатки вздовж вісі z^3 була розроблена методика, що ґрунтується на корегуванні жорсткісних параметрів призматичного скінченного елемента в точках інтегрування. Зазначений підхід дозволяє моделювати змінення геометрії об'єкта лише при повздовжньому розтягу, що відповідає умовам навантаження лопатки. Для обґрунтування вірогідності розробленої методики підходу було розглянуто тестовий приклад про розтяг в умовах плоскої деформації в площині $z^1 - z^3$ стержня із змінною за лінійним законом товщиною, розрахунок якого був проведений із використанням МСЕ і НМСЕ (рис. 3). Відмінність отриманих результатів лежить в межах 1% (рис. 4).

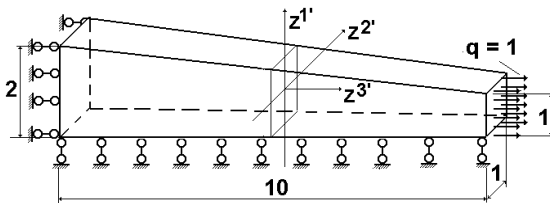


Рис. 3

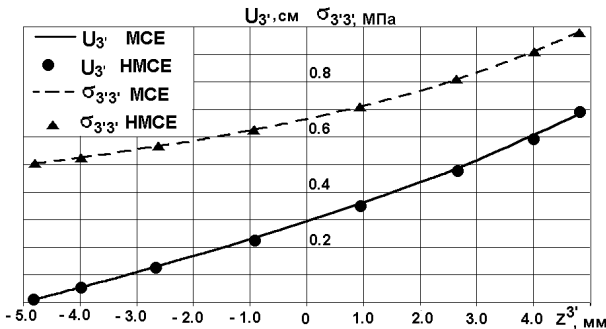


Рис. 4

При побудові дискретної моделі НМСЕ було проведено дослідження збіжності отримуваних результатів – розподілення напружень по висоті фрагмента лопатки в залежності від кількості невідомих дискретної скінченоелементної моделі в поперечному перерізі і за напрямком z^3 .

Обґрунтування вірогідності розробленого підходу до моделювання змінної геометрії для розглядуваного фрагмента лопатки було проведено шляхом співставлення розподілення напружень, отриманих вздовж радіуса фрагмента (штрихова лінія) в найбільш навантажених точках перерізу в порівнянні з результатами, отриманими із використанням тривимірного МСЕ (рис. 5, 6).

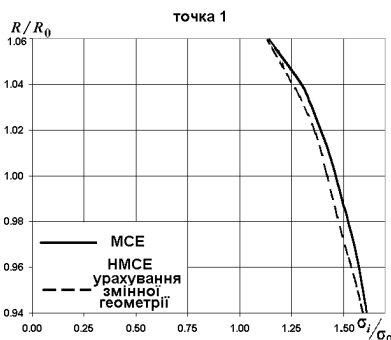


Рис. 5

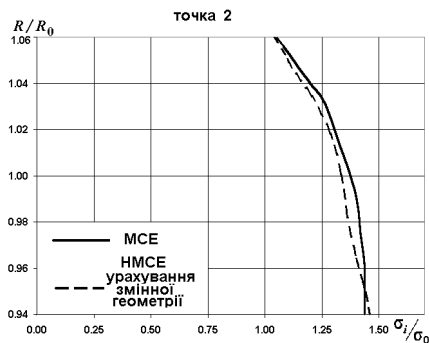


Рис.6

Опис деформування матеріалу лопатки в умовах повзучості здійснюється рівняннями вигляду

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \frac{B\sigma^n}{(1-\omega)^r}, \quad \frac{d\omega}{dt} = C \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^m \frac{1}{(1-\omega)^q}. \quad (8)$$

де $B=B(T)$, $D=D(T)$, $m=m(T)$, $n=n(T)$, $r=r(T)$, $q=q(\sigma, T)$ – константи матеріалу, T – температура.

Зважаючи на характерне для лопаток співвідношення розмірів поперечного перерізу і довжини для визначення ресурса в розрахунковій практиці до теперішнього часу застосовуються одновимірні моделі. Згідно до такої методики на основі пружнього розрахунку визначається небезпечний переріз комбінація величин напружень і температур є найбільш несприятливою з точки зору накопичення деформацій повзучості. Використовуючи вищезгадані результати дослідження напружено-деформованого стану лопатки при пружньому деформуванні на основі метода скінчених елементів шляхом безпосереднього

інтегрування рівнянь (8) до досягнення критичного значення пошкоженості при $\sigma = \sigma_0$ при значеннях констант $B=B(T_0)$, $D=D(T_0)$, $m=m(T_0)$, $n=n(T_0)$, $r=r(T_0)$, $q=q(\sigma_0, T_0)$ була визначена величина ресурса до початку руйнування t^* .

Проведення розв'язання просторової задачі повзучості з урахуванням нерівномірного розподілення температур в об'ємі фрагмента лопатки дозволило виявити значне перерозподілення напружень в процесі деформування, що проілюстровано відповідними розподіленнями напружень по висоті фрагмента лопатки в точці 1 в різні моменти часу (рис. 6). Відповідні розподілення по висоті фрагмента параметра пошкоженості наведені на рис. 7.

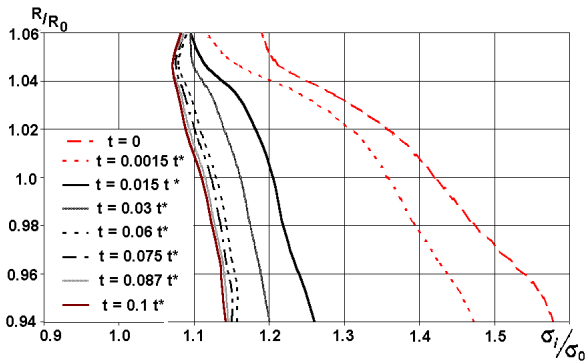


Рис. 7

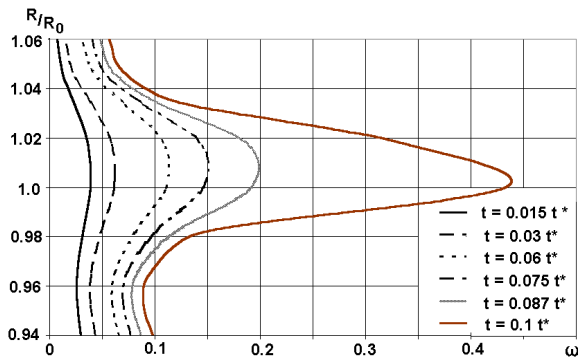


Рис. 8

Як видно, найбільші значення параметра пошкоженості, і відповідно утворення початкової зони руйнування, спостерігаються в точці 1 на відстані $1.005R_0$ від вісі обертання. Але величина ресурса, отримана із урахуванням просторового напружено-деформованого стану менша за величину ресурса, отриману на стержневій моделі майже на порядок. Таким чином для визначення ресурса необхідним є проведення розв'язання просторової задачі повзучості.

В розглянутій задачі, де йдеться про визначення величини ресурса порядку декількох сотен тисяч годин, для розв'язання просторової задачі повзучості на основі кроково-ітераційного алгоритма за часом із дотриманням умов збіжності отриманого розв'язку за величиною кроку за часом необхідно виконати біля тисячі кроків. Зважаючи на значну неоднорідність напружено-деформованого стану фрагмента лопатки, лише розв'язання лінійної задачі на кожному кроці потребує біля 30 ітерацій. Застосування суміщення ітераційних процесів розв'язання лінійної і нелінійної задачі в даному випадку дозволило зменшити загальні обчислювальні витрати майже в 40 разів.

Таким чином, запропонований алгоритм розв'язання задач повзучості на основі НМСЕ дозволяє суттєво зменшити обчислювальні витрати при розв'язанні просторових задач. Ефективність алгоритма підвищується для неоднорідних просторових тіл, в яких реалізований тривимірний напружено-деформований стан.

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций.– М., Наука, 1966. –732 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.:НИИСМ, 1993.-376 с.
3. *Закономерности ползучести и длительной прочности.* Справочник. / Под ред. Шестерикова С.А. – М.: Машиностроение,1983. –101 с.

Матеріал надійшов до редакції 06.04.04.