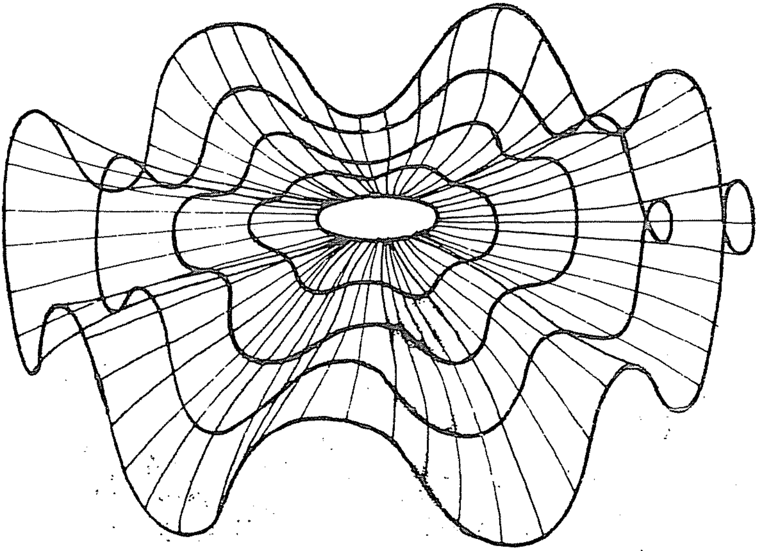
ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

70 років КНУБА

2000 ВИПУСК 67



Прикладна геометрія та інженерна графіка: Міжвідомчий науково-технічний збірник. Випуск 67. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко. -К. КНУБА, 2000, 256 с.

В збірник включені дослідження кривих ліній та поверхонь, способи їх утворення, апроксимації, зображення та практичного застосування. Ряд статей присвячено питанням теорії зображень, геометричному моделюванню об'єктів, процесів та явищ, задачам комп'ютерної графіки, геометричним питанням САПР, деяким питанням технічної естетики.

Розрахований на викладачів, аспірантів та докторантів, працівників науково-дослідних та проектних організацій.

В сборник включены исследования кривых линий и поверхностей, способы их образования, аппроксимации, изображения и практического использования. Несколько статей посвящено вопросам теории изображений, геометрическому моделированию объектов, процессов и явлений, задачам компьютерной графики, геометрическим вопросам САПР, некоторым вопросам технической эстетики.

Рассчитан на преподавателей, аспирантов и докторантов, работников научно-исследовательских и проектных организаций.

Рекомедований до випуску Вченою Радою КНУБА, протокол № II від 28.04.2000р.

Адреса редколегії: 03037, Київ, Повітрофлотський проспект, 31, КНУБА тел. 241 – 55 – 19

ISSN 0131-579X
на умовах замовлення

УДК 515.2

Іванова Л. С., канд.техн.наук

ДИСКРЕТНЕ ЗАВДАННЯ ПОЛІНОМУ *N*-ГО СТУПЕНЮ.

Довільну криву можна подати у вигляді гнучкої нитки, що певним чином навантажена. Неперервний закон розподілу навантаження обумовлює завдання континуально поданої кривої, математична модель якої може бути записана у вигляді функціонального аналітичного виразу $R=R(u,a)$, де u – множина змінних, a – множина параметрів функції R. Розподіл навантаження у вигляді зосереджених зусиль, прикладених до окремих вузлів(точок) гнучкої нитки, обумовлює дискретне завдання кривої у вигляді множини точок. Математичну модель дискретно поданої кривої можна записати у вигляді системи скінченнорізницевих рівнянь рівноваги у кожному вузлі* :

$$\{u_{i-1} - 2u_i + u_{i-1} - P_i = 0; \quad i = 1, \ldots, m.$$

де u_i - узагальнена координата i -го вузла,

P_i - умовне зусилля, прикладене до i -го вузла,

m - кількість вузлів.

Від характеру розподілу зусиль залежить вигляд кривої, що моделюється. Таким чином, за певним характером розподілу зусиль можна отримати дискретну множину точок, що належать кривій, яка відповідає відомому аналітичному виразові. Тобто мається на увазі, що одну і ту ж криву можна задавати в аналітичній або дискретній формі.

Для практичних цілей дослідження та моделювання кривих доцільно зробити порівняльний аналіз та вивести формули взаємозалежності параметрів різних форм подання кривої. З цією метою розглянемо дискретне подання поліному n -го ступеню

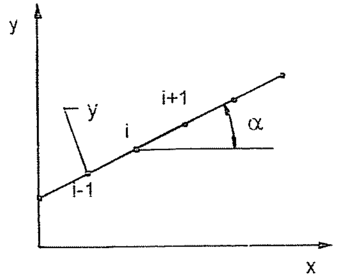
$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n .$$

Така крива у дискретному вигляді може бути утворена у разі навантаження гнучкої нитки вертикальними зосередженими зусиллями P_i , розташованими з регулярним кроком Δx вздовж осі OX.

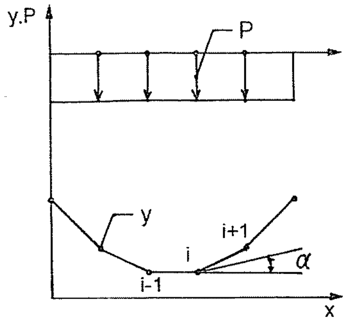
Для $\boldsymbol{n = 1}$ одержуємо рівняння прямої. Навантаження дискретної моделі для цього випадку $P_i = 0$ для всіх вузлів. Кількість управляючих параметрів –2. Для аналітичної форми подання це a_0, a_1, а для дискретної - координати двох будь-яких вузлів, що належать лінії: y_s, y_t.

$y = a_0x + a_1$	$\{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = 0, \quad i=1,\ldots,m$
$a_0 = (y_{i+1} - y_i)/ \Delta x$; $a_1 = (x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1})/ \Delta x$	$P_i = 0, \; i=1,\ldots,m$

* - Ковалев С.Н. Дискретное представление локального кубического сплайна // Прикладная геометрия и инженерная графика. –К.: КГТУСА. 1996. – Вып. 59. –с. 24-26



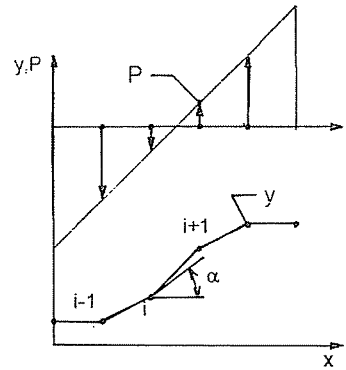
n = 2. Параболі другого порядку належать точки нитки, навантаженої однаковими зусиллями $P_i = P = const$ для всіх вузлів. Кількість управляючих параметрів дорівнює 3. Для аналітичної форми подання: a_0 , a_1 , a_2 ; для дискретної – сполучення координат трьох будь-яких вузлів y_s , y_i , y_k , або двох вузлів та зусилля y_s , y_i , P.



$y = a_0x^2 + a_1x + a_2$	$\{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} - P = 0, \quad i=1,\dots,m$
$a_0 = P/2\Delta x^2$; $a_1 = (y_{i+1} - y_i)/\Delta x - a_0(x_{i+1} + x_i)$; $a_2 = (x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1})/\Delta x + a_0(x_{i+1}x_i)$	$P = 2a_0\Delta x^2 = y''(x_i)\,\Delta x^2$

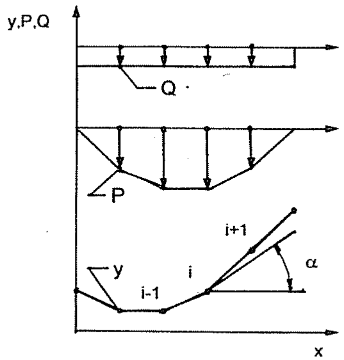
n =*3*. Поліному 3-го ступеню належать точки дискретно поданої кривої у випадку лінійного розподілу навантаження. Тоді система рівнянь, що описує дискретну модель кривої, містить в собі два різновиди рівнянь. Кількість управляючих параметрів – 4. Це a_0 , a_1 , a_2 , a_3 для аналітичного виразу, та сукупність значень для дискретної моделі: y_s , y_i , y_k , y_l , або y_s , y_i , P_k , P_l , або y_s , y_i , y_k , P_l .

13 — 2870



$y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$	$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} - P_i = 0, \\ \qquad i=1,\dots,m \\ P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1} = 0, \\ \qquad i=2,\dots,m-1 \end{cases}$
$a_0 = (P_{i+1} - P_i)/6\Delta x^3$; $a_1 = (x_{i+1}P_i - x_iP_{i+1})/2\Delta x^3$; $a_2 = (y_{i+1} - y_i)/\Delta x - a_0((x_{i+1})^2 + x_{i+1}x_i + (x_i)^2) - a_1(x_{i+1} + x_i)$; $a_3 = (x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1})/\Delta x + (a_0(x_{i+1} + x_i) + a_1)(x_{i+1}x_i)$	$P_i = 6a_0\Delta x^2x_i + 2a_1\Delta x^2 = y''(x_i)\,\Delta x^2$

n = 4. Розподіл навантаження для дискретної моделі в цьому випадку здійснюється по параболі другого порядку і система рівнянь доповнюється надмножиною $Q_i = Q = const$, яка керує законом розподілу зусиль P_i . Слід



зазначити, що для $n = 3$ ця надмножина $Q = 0$. Кількість управляючих параметрів – 5. Для аналітичного виразу це: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. Для дискретної моделі можливі сполучення параметрів: y_k, y_l, y_k, y_l, y_l, або y_k, y_l, P_k, P_l, Q.

$y = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$	$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} - P_i = 0, \\ \qquad i=1,\dots,m \\ P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1} - Q = 0, \\ \qquad i=2,\dots,m-1 \end{cases}$
$a0 = Q/24\Delta x^4$; $a_1 = (P_{i+1} - P_i)/6\Delta x^3 - 2a_0(x_{i+1} + x_i)$; $a_2 = (x_{i+1}P_i - x_iP_{i+1})/2\Delta x^3 + 6a_0(x_{i+1}x_i)$; $a_3 = (y_{i+1} - y_i)/\Delta x - a_0((x_{i+1})^3 + (x_{i+1})^2x_i + x_{i+1}(x_i)^2 + (x_i)^3) - a_1((x_{i+1})^2 + x_{i+1}x_i + (x_i)^2) - a_2(x_{i+1} + x_i)$; $a_4 = (x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1})/\Delta x + (a_0((x_{i+1})^2 + x_{i+1}x_i + (x_i)^2) + a_1(x_{i+1} + x_i) + a_2)(x_{i+1}x_i)$	$P_i = 12a_0\Delta x^2(x_i)^2 + 6a_1\Delta x^2x_i + 2a_2\Delta x^2 = y''(x_i)\,\Delta x^2$; $Q = 24a_0\Delta x^4 = y^4(x_i)\,\Delta x^4$

Таким чином при дискретному моделюванні підвищення ступеню поліному забезпечується зміною закону розподілу зусиль, що в свою чергу забезпечується законом зміни характеру розподілу надмножин.

Розв'язання системи рівнянь, які складають математичну модель дискретно поданої кривої, дають можливість одержати дискретний каркас точок, що належать кривій. Завдяки порівняльному аналізу аналітичної та дискретної моделі виявлена залежність значення зосереджених зусиль P_i від розміру Δx – кроку розташування зусиль вздовж OX. Це дає можливість розв'язувати задачу загущення точкового каркасу глобально для всієї кривої, або локально для окремої ділянки. Для цього потрібно визначити нові значення $P_i = P_i(\Delta x)$ і відповідно нові значення надмножин та розв'язати нову систему скінченнорізницевих рівнянь. Шаблон рівняння для системи залишається незмінним. Змінюються лише величини управляючих параметрів та кількість рівнянь відповідно до нового кроку Δx.

Однією з найважливіших диференціальних характеристик кривої є тангенс кута нахилу дотичної у заданій точці $tg\alpha_i$. У випадку подання кривої в аналітичній формі ця величина дорівнює значенню першої похідної:

$$tg\alpha_i = y'(x_i)\ .$$

Для того, щоб записати $tg\alpha_i$ для дискретної моделі кривої, слід визначити значення похідної для $x = 0$:

$n = 2; \quad y'(x) = (2a_0x + a_1)_{x=0} = a_1,$

де $a_1 = (y_{i+1} - y_i)/\Delta x - a_0(x_{i+1} + x_i)$, але виходячи із того, що $x = x_i = 0$, $x_{i+1} = \Delta x$, тоді

$$tg\alpha_i = (y_{i+1} - y_i)/\Delta x - a_0\Delta x =$$
$$(y_{i+1} - y_i)/\Delta x - P/2\Delta x.$$

Таке саме припущення дозволяє записати значення $tg\alpha_i$ для дискретно поданих поліномів вищого порядку:

$n = 3;$

$$tg\alpha_i = (y_{i+1} - y_i)/\Delta x - a_0\Delta x^2 - a_1\Delta x =$$
$$(y_{i+1} - y_i)/\Delta x - P_i/2\Delta x - (P_{i+1} - P_i)/6\Delta x$$

$n = 4;$

$$tg\alpha_i = (y_{i+1} - y_i)/\Delta x - a_0\Delta x^3 - a_1\Delta x^2 - a_2\Delta x =$$
$$(y_{i+1} - y_i)/\Delta x - P_i/2\Delta x - (P_{i+1} - P_i)/6\Delta x - Q/24\Delta x$$

. . . .

Порівняльний аналіз дискретної та аналітичної форми подання поліному n–го ступеню дозволив також виявити лінійну залежність другої похідної від значення P_i у даній точці :

$$P_i = y''(x_i)\,\Delta x^2.$$

Як висновок, слід відзначити, що розглянуті дискретні моделі поліномів n–го ступеню можуть використовуватися як базові функції для конструювання та дослідження кривих, заданих на скінченній множині точок. Перевагою дискретного моделювання кривих слід вважати можливість використовувати в якості управляючих параметрів конструктивні значення у явному вигляді: координати точок, зосереджені зусилля, тангенси кутів нахилу дотичних, тощо. А також доцільним є дискретне моделювання саме локальної частини кривої, оскільки особливістю дослідження кривих в прикладній геометрії є те, що розглядаються скінченні ділянки кривої.

УДК 515.2

Иванова Л. С. Дискретное представление полинома n-ой степени

В статье приводятся результаты сравнительного анализа представления кривых в аналитическом и дискретном виде. Дискретная модель кривой описывается в форме системы конечноразностных уравнений равновесия узлов гибкой нити, нагруженной дискретными определенным образом распределенными усилиями, что определяет конструктивный характер управляющих параметров такой модели. Тогда моделирование кривых в дискретном виде с использованием приведенных соотношений и алгоритмов является предпочтительным, если кривую рассматривать как модель процесса или явления.