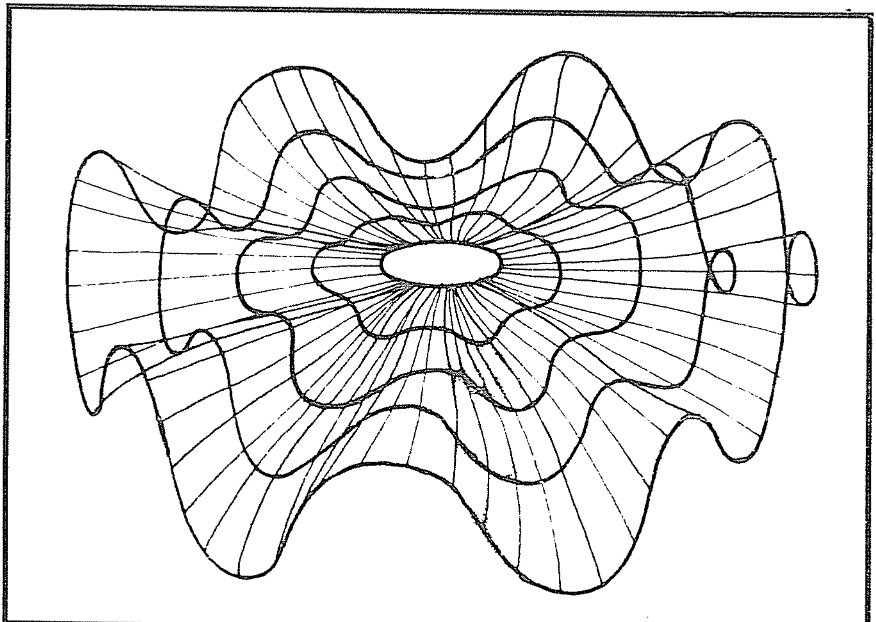
ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

2003 **ВИПУСК 72**



Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". Випуск 72. Відповідальний редактор В.Є. Михайленко. – К.: КНУБА. 2003. – 236 с.

В збірник включені дослідження кривих ліній та поверхонь, способів їх формоутворення, апроксимації, зображення та практичного застосування. Ряд статей присвячено питанням теорії зображень, геометричному моделюванню об'єктів, процесів та явищ, проблемам комп'ютерної графіки, геометричним питанням САПР, деяким питанням технічної естетики.

Розрахований на працівників науково-дослідних і проектних організацій, викладачів, аспірантів та докторантів

В сборник включены исследования кривых линий и поверхностей, способов их формообразования, аппроксимации, изображения и практических приложений. Ряд статей посвящен вопросам теории изображений, геометрическому изображению объектов, процессов и явлений, проблемам компьютерной графики, геометрическим вопросам САПР, некоторым вопросам технической эстетики.

Рассчитан на работников научно-исследовательских и проектных организаций, преподавателей, аспирантов и докторантов.

Адреса редакції: Повітрофлотський проспект, 31, КНУБА
03680, Київ, Україна
Телефон редакції: 214-55-47

Рекомендовано до випуску Вченою Радою КНУБА, протокол № 36 від 6.12.2002.

ISSN 0131-579X

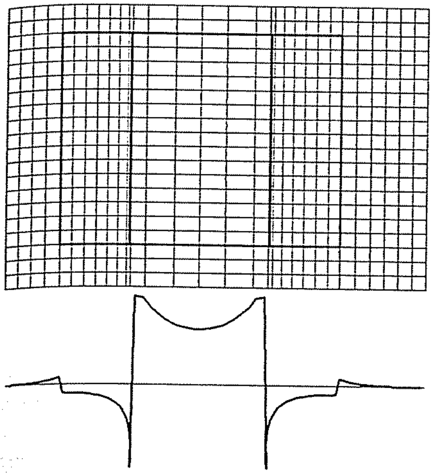


Рис. 17

1. *Дорошенко Ю.О.* Політканинні перетворення у деформативному конструюванні геометричних об'єктів. – К.: Педагогічна думка, 2001. – 390 с.

2. *Дорошенко Ю.О.* Комп'ютерна графіка: розкриємо секрети програмної реалізації візуальних спецефектів статичних зображень// Комп'ютер у школі та сім'ї. – 1998. – №1. – С. 43–47.

BI-DIRECTIONAL ORTHOGONAL DEFORMATION OF PLANE USING POLY-FABRIC TRANSFORMATIONS

Yu.O.Doroshenko

The method of using of poly-fabric transformation for deformation of plain geometrical objects particularly images with two mutually orthogonal directions. The proposed tools of guided deformation of plane will allow to solve various problems of designing and computer graphics, particularly in the sphere of creating of animation advertising.

УДК 515.2

Л.С. Іванова, канд.техн.наук

ЗГЛАДЖУЮЧА АПРОКСИМАЦІЯ ДПК НА РІВНОМІРНІЙ СІТЦІ МЕТОДОМ КОРИГУВАННЯ ЗОВНІШНІХ СИЛ

Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

Задача аналізу статистичних даних зводиться до геометричних задач апроксимації, інтерполяції, екстраполяції. Пропонується метод згладжуючої апроксимації, що базується на дискретному поданні цільової функції та механічній інтерпретації процесу її згладжування. Метод може бути використаний для визначення функції математичного очікування у випадку, коли закон розподілу статистики невідомий або вимагає певних обмежень.

Геометричну модель усякого процесу можна зобразити у вигляді гіперповерхні у багатовимірному просторі. У запропонованій інтерпретації процесу статистика (тобто значення цільової функції за фіксованими параметрами) це дискретна множина точок, що належать гіперповерхні. Статистика будь-якого експерименту містить похибки. Похибкою статистики можна вважати відхилення значення статистики від математичного очікування, як наслідок випадкового впливу непрямих факторів. Математичним очікуванням або законом розподілу статистики у геометричній інтерпретації моделі є поверхня, що описується функцією, яка апроксимує упорядковану множину точок. Таким чином задача аналізу статистичних даних з метою оптимізації, прогнозування та керування процесом зводиться до геометричних задач інтерполяції, апроксимації, екстраполяції дискретної множини точок. Більшість методів згладжуючої апроксимації, що традиційно використовуються для аналізу статистичних даних, мають пасивний характер, тобто відтворюють фактичний результат. Вигляд апроксимуючої функції зазвичай обирається апріорно на основі попереднього досвіду великої кількості експериментів [1]. Метод згладжуючої апроксимації, що пропонує автор, базується на теорії дискретної геометрії і має механічну інтерпретацію. Саме це обумовлює його гнучкість і наявність засобів, що розширюють можливості аналізу статистики.

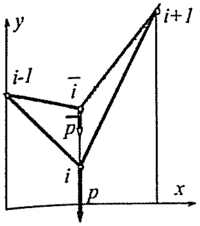
Сутність метода полягає у наступному. Яку завгодно поверхню можна подати у вигляді гнучкої нерозтяжної сітки, вузли якої є упорядкована дискретна множина точок поверхні. Така сітка знаходиться у рівноважному стані під дією зовнішнього навантаження. Спрямоване коригування навантаження за певним законом дозволяє змінювати форму поверхні на бажану. Якщо замінити континуальне навантаження сукупністю зосереджених сил, прикладених до вузлів сітки, то поверхня замінюється дискретною сітковою моделлю. А диференціальні рівняння континуального образу поверхні замінюються кінцево-різницевими залежностями між координатами вузлових точок та вузлових умовних сил.

$$\{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} - P_i = 0; \quad i = 1, \dots, m, \qquad (1)$$

де u_i - узагальнена координата i -го вузла,
P_i - умовна сила, прикладена до i-го вузла,
m - кількість вузлів.

Апроксимуюча поверхня здобувається у дискретному вигляді внаслідок коригування множини сил P_i в системі (1) за певним законом, що залежить від властивостей процесу, вихідних вимог до задачі та вигляду дискретної сітки. Звідси запропонований метод отримав назву методу коригування зовнішніх сил.

Більш детально розглянемо метод коригування зовнішніх сил на прикладі розв'язання задачі згладжуючої апроксимації плоскої дискретно поданої кривої (ДПК) $y = y(x)$: $\{y_0, y_1, y_2, \dots y_n\}$ на сітці з рівномірним кроком Δx.



Згідно [2] для трьох суміжних вузлів сітки (рис.1) коригування p_i : $\{\overline{p}_i = f(p)\}$ призводить до переміщення вузла i

$$y_i = \frac{y_{i-1} + y_{i+1} + \overline{p}_i}{2} \qquad (2)$$

Рис. 1

Процес пошуку апроксимуючої кривої має ітераційний характер. З кожним кроком завдяки поступовому коригуванню p_i здійснюється наближення множини заданих точок до кривої згладжуючої апроксимації. Функція коригування зовнішніх сил залежить від вигляду апроксимуючої функції. А вигляд функції визначається законом розподілу P_i, що дорівнюють другим різницям [2]. Звідси, коригування p_i заданої ДПК необхідно спрямовувати так, щоб закон розподілу множини зовнішніх сил наближувався до закону розподілу $\overline{p}_i$ апроксимуючої функції шуканого вигляду.

1. Визначник для апроксимуючої функції у формі прямої $y=a_0\ x+a_1$ (рис.2) має вигляд:

   $$\overline{p}_i = k_i p_i \ ;\ i = 1,\dots,n;\ \ 0 < k_i \le 1\ , \qquad (3)$$

   де k_i визначає швидкість збіжності і залежить в свою чергу від розрахункового інтервалу апроксимування. Величина Δx може збігатися з розрахунковим інтервалом або бути йому кратним. Критерієм закінчення ітераційного процесу є нескінченне наближення найбільшої величини $|p_i|$ до деякої наперед заданої малої величини ε :

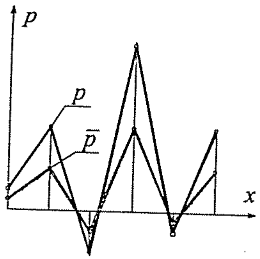
   $$max\,(|p_i|) \le \varepsilon \qquad (4)$$

2. Визначник для функції згладжуючи апроксимації у формі поліному другого степеню $y=a_0x^2+a_1x+a_2$ (рис.3) :

   $$\overline{p}_i = p_m^m + k_i(p_i - p_m^m);\quad i = 1,\dots,n;\quad p_m^m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \qquad (5)$$

   Критерієм закінчення ітераційного процесу є нескінченне наближення найбільшої величини $|p_i - p_m|$ до деякої наперед заданої малої величини ε :

   $$max\,(|p_i - p_m|) \le \varepsilon \qquad (6)$$



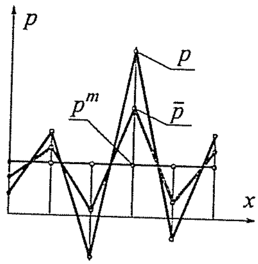


Рис.2 Рис. 3

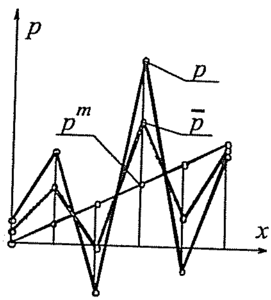
3. Визначник коригування зовнішніх сил для функції згладжуючої апроксимації у формі поліному третього ступеня $y=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ (рис.4) має вигляд:

$$\bar{p}_i = p_i^m + k_i\left(p_i - p_i^m\right) \qquad p_i^m = b_0 x_i + b_1; \quad \{b_0, b_1\} = approxCl(p) \qquad (7)$$

Тобто на кожному ітераційному кроці необхідно здійснювати вкладений цикл згладжування точкової множини P_i прямою, яка є законом розподілу зовнішніх сил апроксимуючої функції шуканого вигляду m-того наближення. Критерієм закінчення ітераційного процесу є нескінченне наближення найбільшої величини $|p_i - p_i^m|$ до деякої наперед заданої малої величини ε:

$$max(|p_i - p_i^m|) \le \varepsilon \qquad (8)$$

4. Дослідження методу показали, що виникає можливість знайти функцію згладжуючої апроксимації у дискретному вигляді або здійснити ДПК-апроксимацію (рис.5). Така функція може не мати



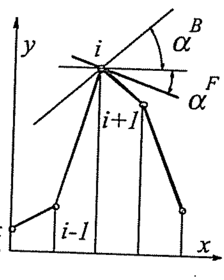


Рис.4 Рис.5

аналітичного аналога, але має властивості гладкої кривої і можливості визначення диференціальних характеристик у кожному вузлі [3]. Тобто з'являється можливість аналізу апроксимуючої ДПК. Диференціальні характеристики виражаються через параметри дискретної моделі, але з необхідною точністю дорівнюють характеристикам континуальних аналогів дискретної моделі. Визначником коригування множини зовнішніх зусиль для ДПК-апроксимації є найпростіший варіант коригування, як для апроксимуючої функції у формі прямої. А критерієм закінчення ітераційного процесу ДПК-апроксимації є нескінченне наближення найбільшої різниці між дотичною "вперед" та дотичною "назад" [3] у кожному вузлі до деякої наперед заданої малої величини ε :

$$\Delta tg\alpha_i = \left| tg\alpha_i^B - tg\alpha_i^F \right| \le \xi \qquad (9)$$

Для того, щоб крайові вузли сітки, що апроксимується, були вільні і мали можливість динамічно брати участь у загальному ітераційному процесі, розроблено метод локальної екстраполяції ДПК на основі наближеної побудови інтегральної функції методом Ейлера. Метод локальної екстраполяції враховує положення крайніх вузлів і характер цільової функції через рух дотичної до кривої в динамічному наближенні до граничного вузлу (рис.6). За рекурентними формулами екстраполяції:

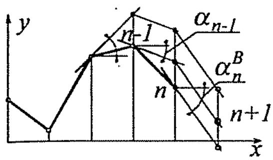


Рис.6

$$y_n = y_{n-1} + \Delta x\, tg\alpha_{n-1};$$
$$y_{n+1} = y_n + \Delta x\, tg\alpha^B_{n-1}; \qquad (10)$$

$tg\alpha_{n-1}=tg\alpha^F_{n-1}+(tg\alpha^B_{n-1} - tg\alpha^F_{n-i})/2$;

визначаються нові координати вузлів 0 та n +1 на кожному інтерполяційному кроці.

Порівняльний аналіз різних варіантів форми функції згладжуючої апроксимації деякої точкової множини методом коригування зовнішніх сил показав, що за найменшу кількість ітерацій можна здійснити ДПК-апроксимацію.

Середньо-арифметичне відхилення для ДПК-апроксимації також найменше.

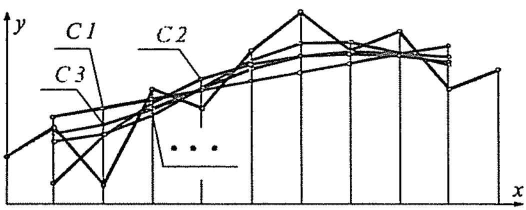


Рис.7

Варіант форми функції згладжуючої апроксимації	*C1*	*C2*	*C3*	*ДПК*
Кількість ітерацій	14	11	9	4
Середньо-арифметичне відхилення	823,44	762	666,44	602,77

У висновках слід зазначити:

- запропонований метод згладжуючої апроксимації у варіанті ДПК-апроксимації дозволяє виявити закон розподілу статистичних даних навіть для тих статистик, для яких наперед невідомий вигляд функції згладжуючої апроксимації.
- метод коригування зовнішніх сил дозволяє визначати апроксимуючу криву для функцій, що складно диференціюються або недиференціюються взагалі тому, що не залежить і не враховує континуальні властивості функцій.
- механічна інтерпретація методу сприяє природньому врахуванню вагових коефіцієнтів γ_i або ступеню довіри до вихідних даних як додатковий множник у (3), (5), (7).

1. Г.Корн, Т.Корн Справочник по математике для научных работников и инженеров // М : «Наука» – 1984. – с. 607-717
2. Іванова Л.С. Дискретне завдання поліному n-го степеню // Прикладна геометрія та інж. графіка.- К: КДТУБА – 2000. - Вип.67. – с.96-100
3. Іванова Л.С. Умови конструювання складених дискретно поданих кривих (ДПК) на множині рівновіддалених значень аргументу // Прикладна геометрія та інж. графіка.- К: КДТУБА – 2001. - Вип.68. – с.104-108

THE METHOD OF FITTING APPROXIMATION BY OUTSIDE FORCES CHANGE OF DISCRETE MODEL ON ANALYTICAL GRID

Ivanova L. S.

The statistical data analysis for the study, optimization, forecasting and process control come to geometrical problems of interpolation, approximation, extrapolation of discrete set of the points. The author offers to study the statistical data at the base of discrete geometry theory. The fitting approximation method has a mechanical interpretation. The fitting approximation method can be used for determination of the statistical law for compound differentiable functions or non-differentiable functions.