Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Ляшко А.П., Ткачук Л.Б[1].

МЕТОД АНАЛІЗУ ФРИКЦІЙНИХ АВТОКОЛИВАНЬ ПРИВОДІВ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

АНОТАЦІЯ. Наведена й математично строго обґрунтована модель та метод розрахунку коливних процесів у механічних системах, котрі описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Розглянутий приклад його реалізації й показано, що цей метод призводить до відомих умов автоколивань приводів механічних систем.

SUMMARY: Model and design method of oscillating process in mechanical system are presented and strictly mathematically justified. They are described by nonlinear differential equations. The example of its implementation is considered. It is shown that this method leads to known conditions oscillation drive mechanical systems.

Постановка проблеми. Фізичні процеси, які відбуваються у механічних об'єктах, у загальній постановці задача досить складні, їх математичні аналоги зводяться до нелінійних диференціальних рівнянь, які не можуть бути розв'язані у скінченому виді чи у квадратурах. Тому великого значення при розв'язуванні таких математичних моделей набули якісні та наближені методи, роль та значення котрих для практичних цілей невпинно зростають. З цією метою пропонується загальний метод чисельно-аналітичного дослідження коливних процесів, який ефективно може бути використаний на практиці при проведенні інженерних розрахунків, для розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь, що описують нелінійні динамічні процеси у механічних об'єктах з ідеальними та неідеальними джерелами енергії, з впливом нелінійних сил тертя, корисного опору на фізичні процеси у моделях.

Аналіз публікацій по темі дослідження.

Коливні процеси у механічних системах вивчались у роботах [1-8]. Автори вказаних робіт, як правило, використовували нелінійні диференціальні рівняння у якості математичних моделей нелінійних динамічних процесів у механічних системах, зокрема, у приводах, що взаємодіють з джерелами енергії, у котрих наявні нелінійні сили опору. Результати цитованих вище робіт будуть частково використані у даному дослідженні.

Мета даної роботи полягає у обґрунтуванні загального чисельно-аналітичного методу дослідження фрикційних автоколивань приводів механічних систем.

Виклад основних результатів дослідження.

Нехай загальне нелінійне диференціальне рівняння коливної системи має вид:

$$u'' + f(u)\cdot u' + g(u) = l(t), \tag{1}$$

де $(\ )' = \dfrac{d}{dt}(\ )$, t – час, u – переміщення.

У загальному випадку про інтегрувати рівняння (1) неможливо, оскільки f(u), g(u) – нелінійні функції u.

Для ліквідації цього недоліку пропонується використовувати метод еквівалентної лінеаризації для отримання простих аналітичних залежностей, зручних на практиці при проведенні інженерних розрахунків, згідно з яким функції f(u), g(u) лінеаризуються шляхом заміни:

$$f(u)\cdot u' \to K_1(u_0)\cdot \tilde{u}', \tag{2}$$

$$g(u) \to K_2(u_0)\cdot \tilde{u}. \tag{3}$$

Тут й означає необмежений розв'язок по відношенні до точного u:

$$K_1(u_0) = f(u_0), \tag{4}$$

$$K_2(u_0) = \frac{g(u_0)}{u_0}. \tag{5}$$

Умова $u_0 \neq 0$ завжди може бути досягнута зсувом шуканого розв'язка на постійну величину $a \neq 0$, для цього обираємо $u_0(t) = u(t) + a$.

Початкові умови для точного та лінеаризованого розв'язків при t=0 наступні:

$$u(0) = \tilde{u}(0) = u_0 \neq 0; \tag{6}$$

$$u'(0) = \tilde{u}'(0) = u_0'. \tag{7}$$

Таким чином, розв'язок нелінійного диференціального рівняння (1) зводиться до розв'язку звичайного диференціального рівняння:

$$\tilde{u}'' + K_1(u_0)\cdot \tilde{u}' + K_2(u_0)\cdot \tilde{u}' = l(t). \tag{8}$$

Інтегрування диференціального рівняння (8) не представляє труднощів. Оцінка похибки між точним і наближеним розв'язками здійснена у [5].

Явний вигляд рівняння (8) для наближеного розвязку (1) дозволяє виписати умови авто коливного збудження у механічній системі у такому виді [2-4]:

$$K_1(u_0) < 0,\ K_2(u_0) > \frac{1}{4}\cdot K_1^2(u_0), \tag{9}$$

причому (8) виконуються для всіх u_0.

У зв'язку з (8) маємо для частоти автоколивань:

$$\omega = \sqrt{\left(K_2(u_0) - \frac{1}{4}\cdot K_1^2(u_0)\right)}. \tag{10}$$

Наведений вище метод розрахунку коливних процесів зрозумілим чином узагальнюється й на механічні системи, які моделюються рівняннями, відмінними від (1).

[1] Ловейкін В.С., д.т.н., проф., Човнюк Ю.В., к.т.н., доц., Ляшко А.П., асп., Ткачук Л.Б., асп. Національний університет біоресурсів і природокористування України.

Обмежимось тут розглядом конкретного прикладу. Для цього застосуємо розвинуту методику для розрахунку фрикційних автоколивань привода механічної системи [1, 6-8], яка моделюється рівнянням:

$$I \cdot \ddot{\phi} + c \cdot \phi = P - F\left(\dot{\phi}\right). \qquad (11)$$

Тут I – постійний момент інерції; c – коефіцієнт жорсткості пружного елементу;P – постійна величина зовнішнього навантаження; $F(\dot{\varphi})$ - характеристика сили тертя, яка описується нелінійною функцією кутової швидкості:

$$F\left(\dot{\phi}\right) = F_0 - F_1 \cdot \dot{\phi} + F_2 \cdot \dot{\phi}^3 - F_3 \cdot \dot{\phi}^5, \qquad (12)$$

де $F_0 > 0, F_1 > 0, F_2 > 0, F_3 > 0$ - постійні величини [1, 6, 7].

Використовуючи процедуру еквівалентної лінеаризації, перепишемо рівняння (11) у вигляді:

$$\ddot{\tilde{\phi}} + \frac{1}{I} \cdot \left(-F_1 + F_2 \cdot \dot{\tilde{\phi}}^2 - F_3 \cdot \dot{\tilde{\phi}}^4\right) \cdot \dot{\tilde{\phi}} + \\ + \frac{c}{I} \cdot \tilde{\phi} = \frac{P}{I} - \frac{F_0}{I}. \qquad (13)$$

Повторюючи наведені вище міркування, з (13) матимемо лінеарування рівняння:

$$\ddot{\tilde{\phi}} + K_1\left(\dot{\phi}_0\right) \cdot \dot{\tilde{\phi}} + K_2 \cdot \tilde{\phi} = \frac{P}{I} - \frac{F_0}{I}. \qquad (14)$$

де

$$K_1\left(\dot{\phi}_0\right) = \frac{1}{I} \cdot \left(-F_1 + F_2 \cdot \dot{\tilde{\phi}}^2 - F_3 \cdot \dot{\tilde{\phi}}^4\right), \quad K_2 = \frac{c}{I}. \qquad (15)$$

Рівняння (15) доволі точно моделює механічні процеси фрикційних автоколивань приводів механічних систем (наприклад дискової пилки тертя). Воно дозволяє виписати умови наявності у системі автоколивань [3, 4]:

$$F_1 + F_3 \cdot \dot{\phi}_0^{\,4} > F_2 \cdot \dot{\phi}_0^{\,4}, \; c > \\ > \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{I} \cdot \left(F_1 - F_2 \cdot \dot{\phi}_0^2 + F_3 \cdot \dot{\phi}_0^4\right)^2, \qquad (16)$$

Причому нерівності (16) повинні виконуватись для всіх $\dot{\varphi}_0$.

Висновки

1. Із врахуванням позначень (15) видно, що розвинута методика при чотирьохчленній апроксимації $F(\dot{\varphi})$ призводить до добре відомих результатів, отриманих іншими способами, що дозволяє строго математично обґрунтувати їх достовірність [1, 6-8].
2. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для уточнення і удосконалення існуючих інженерних методів розрахунку та аналізу параметрів фрикційних автоколивань приводів механічних систем.

Література

1. Биферман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Биферман. – М., 1980.
2. Вибрации в технике: Справочник. Колебания нелинейных механических систем / под. Ред. И.И. Блехмана. – Т.2. – М.: Машиностроение, 1979.
3. Теодорчик К.Ф. Автоколебательные системы / К.Ф. Теодорчик. – М. 1944.
4. Андронов А.А. Теория Колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М., 1959.
5. Мартыненко М.Д. О колебательных процессах в механических системах / М.Д. Мартиненко, Н.А. Докукова, Л.И. Бойко // Инженерно-физический журнал. - 1999. – Т.72. - №3. – С.491-494.
6. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М., 1991.
7. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин / Н.И.Левитский. – М., 1991.
8. Берестнев О.В. Аналитические методы механики в динамики приводов / О.В. Берестнев, А.Г. Гоман, Н.Н. Ишин. – Минск, 1992.