

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
київський національний університет будівництва і архітектури

**О. А. Котовенко,
О.Ю. Мірошниченко**

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ДОВКІЛЛЯ

*Рекомендовано вченою радою
Київського національного університету будівництва
і архітектури як навчальний посібник для здобувачів
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями E2
«Екологія» і G2 «Технології захисту навколишнього середовища»*

Київ 2026

УДК 504:519.711

К76

Рецензенти: *О. В. Нестеров*, д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. Інституту теоретичної фізики АН України ім. М.М. Боголюбова;
М. Д. Гомеля, д-р хім. наук, професор НТУУ «КПІ» ім. Ігоря Сікорського;
М. В. Кравченко, д-р техн. наук, доц. каф. ТЗНС і ОП, КНУБА

Затверджено на засіданні вченої ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № 34 від 27 червня 2025 року.

Котовенко О. А., Мірошніченко О.Ю.

К76 Моделювання і прогнозування стану довкілля: навч. посіб. /О.А. Котовенко, О.Ю. Мірошніченко. – Київ : КНУБА, 2026. – 188 с.

ISBN 978-966-627-287-7

Викладено основні системно-функціональні принципи моделювання як методи дослідження і прогнозування стану природного середовища, процесів та явищ, що відбуваються в ньому під дією природних і антропогенних факторів. Висвітлено принципи застосування системного аналізу як бази для створення математичних моделей. Наведено різноманітні моделі дослідження компонентів біосфери. Розглянуто моделювання стану довкілля за умов недетермінованої базової інформації.

Призначений для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 101 «Екологія», 183 «Технології захисту навколишнього середовища».

УДК 504:519.711

© О.А. Котовенко, О.Ю. Мірошніченко, 2026
ISBN 978-966-627-287-7 © КНУБА, 2026

ЗМІСТ

Вступ.....	6
Частина I. МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ДОВКІЛЛЯ У ВИПАДКУ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ БАЗОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ.....	8
1. Системний аналіз як основний підхід до формалізації та вирішення екологічних задач.....	11
2. Моделювання як метод дослідження.....	19
2.1. Фізичне моделювання.....	21
2.2. Математичне моделювання.....	22
2.2.1. Класифікація математичних моделей.....	27
3. Моделювання динаміки систем, що розвиваються.....	32
3.1. Класичні методи математичного опису динамічних систем.....	33
3.2. Якісна теорія динамічних систем.. ..	34
3.3. Сучасні підходи до моделювання динамічних систем.....	38
4. Перші математичні моделі в екології.....	40
4.1. Експоненціальне і логістичне зростання популяцій.....	40
4.2. Модель «хижак – жертва».....	45
4.3. Побудова моделі «хижак – жертва» для опису трофічних ланцюгів.....	48
5. Математичне моделювання стану гідросфери.....	53
5.1. Загальні принципи і методи математичного моделювання і прогнозування в гідроекологічних дослідженнях.....	53
5.2. Побудова імітаційної моделі гідрохімічного режиму водних об'єктів.....	59
5.3. Фільтрація і математичні моделі руху підземних вод.....	63
6. Застосування математичного моделювання для дослідження процесів у ґрунтах.....	68
6.1. Математичне моделювання і прогнозування хімічного забруднення ґрунтів.....	69
6.2. Моделювання антропогенного впливу пестицидів та радіонуклідів на ґрунти.....	70

7. Моделі клімату	73
7.1. Енергобалансові моделі клімату.....	74
7.2. Статистична модель.....	75
7.3. Радіаційно-конвективні моделі.....	77
7.4. Моделі загальної циркуляції.....	79
8. Моделі глобальних біогеохімічних циклів	81
8.1. Моделювання продуктивного процесу наземних рослин	82
8.2. Модель круговороту азоту в наземній екосистемі.....	86
8.3. Модель глобального круговороту вуглецю в системі атмосфера – рослини – ґрунт (АРГ1).....	90
8.4. Модель глобального круговороту вуглецю та азоту в системі атмосфера – рослина – ґрунт (АРГ 3).....	97
8.5. Модель глобального круговороту вуглецю і азоту в системі атмосфера – океан (АО).....	101
9. Математична теорія катастроф та її застосування для дослідження біосфери	107

**Частина II. МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ДОВКІЛЛЯ У
ВИПАДКУ НЕДЕТЕРМІНОВАНОЇ БАЗОВОЇ
ІНФОРМАЦІЇ.....**113

10. Первинна статистична обробка даних спостережень (експериментальних даних)	116
10.1. Проста статистична сукупність.....	116
10.2. Статистичний розподіл.....	117
10.3. Графічне зображення статистичного розподілу.....	120
10.4. Емпірична функція розподілу.....	123
10.5. Чисельні характеристики статистичного розподілу.....	125
11. Теорія кореляції в аналізі зв'язків між характеристиками екологічних явищ і процесів	131
11.1. Основні поняття та визначення.....	131
11.2. Лінійна кореляція.....	134
11.3. Нелінійна кореляція.....	145
12. Статистичне оцінювання параметрів розподілу	147
12.1. Постановка задачі.....	147

12.2. Точкові статистичні оцінки.....	148
12.3. Інтервальні оцінки.....	150
13. Ознайомлення з випадковими процесами.....	155
14. Введення в аналіз часових рядів.....	163
14.1. Задачі аналізу часових рядів.....	163
14.2. Елементарні способи опису часових рядів. Темп зростання.....	165
14.3. Аналітичне вирівнювання часових рядів.....	173
14.4. Інтервали довіри тренду.....	176
14.5. Екстраполювання часових рядів.....	178
15. Стохастична модель забруднення атмосфери.....	180
Список літератури.....	190

ВСТУП

«Моделювання і прогнозування стану довкілля» – важливий курс для здобувачів освіти, що дає їм потужний інструмент як у науковій, так і в практичній діяльності.

Метою вивчення дисципліни «Моделювання і прогнозування стану довкілля» є здобуття студентами обґрунтованих знань про методи математичної постановки, дослідження та розв'язання проблем, що перманентно виникають в екологічних системах у зв'язку з їх розвитком й антропогенним навантаженням на навколишнє середовище (наприклад, таких як проблеми природокористування і прогнозування стану навколишнього середовища, еволюційного розвитку техногенезу та ін.).

Здобувачі отримують підготовку до діяльності, що пов'язана з аналізом спостережень, формалізацією екологічних завдань, моделюванням екосистем та процесів, модельних досліджень різних впливів на навколишнє середовище.

Вивчення дисципліни дає майбутнім фахівцям інструмент для проєктування екологічно безпечних об'єктів та оптимального керування природокористуванням.

У результаті вивчення дисципліни здобувач вищої освіти повинен

- знати основні принципи та положення математичного моделювання;
- бути ознайомленим з базовими поняттями системного аналізу;
- бути ознайомленим з принципами динаміки еволюціонування екологічних систем;
- бути ознайомленим з якісною теорією динамічних систем;
- знати базові математичні моделі стану навколишнього середовища;
- бути ознайомленим з основними методами і підходами до моделювання за умов недетермінованої базової інформації (статистичне моделювання);
- знати підходи і методи математичного моделювання випадкових процесів в екологічних системах (математична модель Колмогорова й аналіз часових рядів);

- уміти проводити первинну математичну обробку даних спостережень за умов детермінованих і недетермінованих даних;
- уміти визначати базову інформацію для створення моделі об'єкта, процесу чи явища з поточної інформації;
- уміти застосовувати системний підхід для створення модельного дослідження об'єктів, процесів, явищ;
- вміти застосовувати основні принципи динаміки екологічних систем, що еволюціонують;
- уміти оцінювати вплив промислових об'єктів та інших об'єктів господарської діяльності на навколишнє середовище;
- уміти розв'язувати спеціалізовані екологічні задачі та практичні проблеми у сфері екології, охорони довкілля та збалансованого природокористування, а також у процесі навчання на основі застосування основних теорій та методів науки про довкілля, що характеризується комплексністю та невизначеністю умов.

Вивчення дисципліни спирається на знання, отримані за програмою середньої освіти, зокрема в курсах математики, фізики, хімії та ін., а також на зміст фундаментальних та загальних інженерних дисциплін.

Навчальний посібник з курсу «Моделювання і прогнозування стану довкілля» є відповідним навчальній програмі з дисципліни.

Частина I

МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ДОВКІЛЛЯ ЗА НАЯВНОСТІ ДЕТЕРМІНОВАНОЇ БАЗОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ

По суті прогрес та історія науки і техніки знайшли своє найбільш точне вираження в розвитку здатності людини створювати моделі природних явищ, понять і об'єктів. Майже всі без винятку автори, які пишуть про науку, стверджують, що одним з головних елементів, необхідних для ефективного вирішення складних задач, є побудова і відповідне використання моделі.

Роберт Шеннон

Уважний аналіз свідчить, що діяльність людини у сфері навчання, сприйняття і пізнання світу, взаємодій і взаємовідносин між людьми, а також людини з навколишнім середовищем основана на створенні деяких відображень у нашому мозку реальних об'єктів та їхньої сукупності на підставі деякої інформації, сформованої на базі даних, що надходять (у розгляданому випадку за допомогою рецепторів), а також формалізації цих відображень. Складно уявити, на якому етапі свого розвитку людина здобула здатність створювати моделі реальних об'єктів і ситуацій, використовуючи свій мозок як носій знань. Сприймаючи і пізнаючи навколишній світ, людина будує в мозку різні окремі відображення (моделі) реального світу і його компонентів, на основі яких потім синтезує складну узагальнену модель світу.

Не тільки наукове пізнання, а й естетичний аспект існування людини являє собою збирання інформації, в кінцевому підсумку – синтез певних моделей навколишнього світу (наприклад, образотворче мистецтво, музика, балет, театр).

Побудова моделей як одна із сторін пари протилежностей «аналіз – синтез» має багато аспектів, з яких той чи інший (залежно від поставленої мети) визначають як першорядний. Особливо суттєвим у побудові моделей є аспект відображення того, що розуміють у сенсі теорії пізнання.

Кожна модель зберігає знання належним чином. При цьому запам'ятовування знань звичайно пов'язане зі зменшенням надлишковості. Тобто поняття моделі може бути вжите в найширшому розумінні як структура для зберігання знань.

Основою будь-якої моделі слугує редукція (стиснення) інформації – створення деякої множини базової інформації.

Під інформацією розуміють будь-які дані про яку-небудь подію, процес, об'єкт, явище, які є предметом операцій сприйняття, передавання, перетворення, зберігання або використання. Потрібну інформацію вилучають з даних. Дані можна розглядати як сировину (ресурс) для виробництва інформації. Що ж таке опорна (базова) інформація?

Для відновлення цілого його треба розкласти на окремі елементи. Для поглибленого розуміння цілого слід знову зібрати окремі елементи відповідно до зв'язків між ними.

Усі науки, всі види мистецтва використовують розкладання цілого на складові елементи. На окремих елементах цілого концентрується увага. Наш мозок зберігає сприйняті елементи цілого. Якщо ми хочемо для подальшого використання зафіксувати ці елементи поза нашим мозком, їх треба зобразити відповідним чином.

Окремі елементи, представлені в зображальній, тобто кодованій формі, становлять опорну інформацію модельного опису об'єкта.

Складність побудови моделей полягає в тому, що ціле треба розкласти на елементи опорної інформації й основні відношення з тим, щоб їх можна було передати підходящому середовищу для запам'ятовування, а потім, в міру потреби, знову створити цілісність за таким «відбитком», тому модель має бути інтерпретованою.

Для глибшого розуміння розглянемо приклад.

Модель, створена письменником: «Коли сьогодні вранці я глянув у вікно, то ледве упізнав велику ялину, яка ще вчора стояла темною і відкидала тінь на наш будинок. У сирій холодній ночі вона покрилась льодом і стояла тепер обсипана знизу доверху кристаликами льоду, виблискуючи всіма кольорами райдуги в променях сонця, що сходило. На її гіллі осіли тисячі тонких кристаликів льоду. З них утворились нові гілочки, що примхливо розділялись і, злегка вдаряючись одна об другу, подзенькували від набігаючого вітру. Покриті важкими кристалами гілки обвисли вниз; дерево крктало і стогнало під незвичним тягарем, але гордо несло свою прикрасу всім напоказ і велично простягало свою крону назустріч сонцю, ніби добре розуміло свою роль останнього свідка минаючої зими».

У цих кількох рядках міститься велика кількість опорної інформації. Ось невелика частина тієї інформації, яку можна з них вилучити: ще вчора темна ялина покрилась кристаликами льоду; гілки ялини подовжились; гілки ялини прогнулись під тягарем льоду.

Ці компоненти опорної інформації в контексті поставлено в залежність один від одного.

Як би розглянув це явище фізик. Його б зацікавило: змінена відбивна здатність дерева; порядок збільшення діаметра (довжини) гілок; частотний склад звуку, який дають гілки; величина прогину гілок під дією навантаження.

Для фізика кваліфікований опис згаданих понять – це фізичні величини.

Фізична величина є модельним описом окремої сторони явища, яке може функціонувати як атрибутивна властивість складного явища. Суть фізичної величини полягає в тому, що вона описує явище, яке може проявитись з різною інтенсивністю. Інтенсивність проявляється у вигляді результату вимірювання фізичної величини. Цю основну засаду фізики запозичили всі природознавці. Таким чином, фізичні величини є засобом представлення опорної інформації в усіх моделях, застосовуваних у наукових дослідженнях та інженерній практиці .

До фізичних величин належать такі: маса, вага, температура, вологість, довжина, сила, швидкість, енергія, густина, електрична напруга, сила струму, концентрація, тиск.

Мовою фізики елементи опорної інформації музиканта в кінцевому підсумку є множиною «чистих» тонів, які можна описати певними частотними коливаннями, тоді як елементи опорної інформації художника являють собою множину «чистих» кольорів, які описують з використанням частот або довжини хвиль.

Квантифікація таких сигналів відбувається в процесі вимірювання.

1. Системний аналіз як основний підхід до формалізації та вирішення екологічних завдань

Для кількісної оцінки та прогнозу стану екологічних систем, їхніх реакцій на антропогенні дії, особливо на рівні невеликих дуже шкідливих для природи дій, винятково ефективним є метод математичного моделювання. Цей метод відіграє суттєву роль переважно тоді, коли кінцевою метою є не тільки опис та оцінка стану природного середовища, але і його регулювання відповідно до фактичного та прогнозного станів, а також екологічного резерву, що врешті-решт має сприяти оптимізації взаємовідношень людської спільноти з природою.

Одним з методів, який застосовують для створення моделей природних об'єктів, є метод «чорного ящика». Під «чорним ящиком» розуміють об'єкт, в якому зовнішньому спостерігачеві доступно визначити лише вхідні та вихідні величини, а внутрішня будова та процеси, що в ньому відбуваються, невідомі.

Чимало важливих висновків можна дійти про поведінку системи, спостерігаючи лише за реакцією вихідних величин на зміну вхідних величин. Такий підхід, зокрема, відкриває можливості для об'єктивного вивчення систем, будова яких невідома, занадто складна для того, щоб

можна було за властивостями складових частин цієї системи та структурою зв'язків між ними зробити висновки про їхню поведінку.

Нехай на вхід системи надходять сигнали (впливи, дії) x_1, \dots, x_m , а на її виході одержують вихідні сигнали y_1, \dots, y_m (рис. 1.1). Довго спостерігаючи за поведінкою такої системи і, в разі потреби, виконавши активні експерименти над нею, тобто змінюючи певним чином вхідні дії, можна досягти такого рівня знання властивостей системи, що виникає можливість передбачати зміну її вихідних координат унаслідок зміни вхідних. Проте, хоч би як докладно вивчали поведінку «чорного ящика», не можна одержати однозначний висновок про його внутрішню будову, бо однакову поведінку можуть мати різні системи. Метод «чорного ящика» широко використовують для розв'язання задач з моделювання керованих систем, але він не відображає їхньої будови.



Рис. 1.1. Схема «чорного ящика»

Нескінченна різноманітність середовищ біосфери, асиметрія її структури зумовили виникнення множини еволюційних зв'язків. Це призвело до генезису великої кількості видів рослин та тварин. Незважаючи на нерівномірність розподілу біосферних середовищ, різноманітність видів тварин та рослин, їхніх біомас, екологія легко доводить, що в побудові біосфери анархії не спостерігається. Це дає можливість вивчення складних взаємодій та структур біосфери, математичного моделювання різних видів взаємодій у процесі еволюції біосфери і її окремих частин, а також в процесі еволюції екосистем. У будові біосфери можна встановити цілком певні структури, зазначити, що конкретні співтовариства організмів (біоценоз, біогеоценоз) склалися у строго визначених умовах навколишнього середовища та

характеризуються високим рівнем організації взаємовідношень та зв'язків між окремими особинами, популяціями та видами, що його складають.

Сукупність специфічного фізико-хімічного оточення (біотопа) зі співдружністю живих організмів (біоценозом) утворюють екосистему. Біоценоз та біотоп впливають один на одного, що виражається переважно у неперервному обміні енергією та речовиною як між двома складовими, так і в середині кожної з них.

Головне значення поняття *екосистема* для екологічної науки полягає в тому, що воно підкреслює обов'язкову наявність взаємовідношень, взаємозалежностей та причинно-наслідкових зв'язків, інакше кажучи, об'єднання компонентів у функціональне ціле. Звідси випливає, що оскільки частини у функціональному сенсі невіддільні від цілого, то екосистема являє собою найбільш підходящий для застосування математичних методів та методів системного аналізу елемент біосфери.

Системний аналіз є синтетичною дисципліною, що розробляє способи дослідження різноманітних складних систем, процесів або ситуацій навіть за нечітко визначених критеріїв. Такі дослідження потрібні для визначення науково обґрунтованих програм дій, зважаючи не тільки на об'єктивну, а й суб'єктивну інформацію.

За системного підходу використовують математичний апарат дослідження операцій і методи неформального аналізу, такі як метод експертиз, метод опитування, евристичні методи. Суттєвим підходом в дослідженні систем є вибір способу опису змін, що відбуваються у цих системах та формалізація такого опису (навіть у випадках суб'єктивної інформації). Складність формалізації визначається поєднанням різнотипних факторів, що характеризують систему, наприклад, поєднанням екологічних, економічних та інших факторів.

Системний аналіз складається з двох частин: *теорії складних систем і дослідження операцій*. Системний аналіз виник наприкінці 30-х років ХХ ст. у зв'язку з другою світовою війною, коли постали такі проблеми, для вирішення яких виникла потреба в розвитку методів

дослідження складних систем, що визначалися економічними, технічними, політичними і соціальними факторами.

Під *системою* розуміють множину об'єктів разом з відношеннями (зв'язками) між цими об'єктами та їхніми атрибутами.

Об'єкти – це окремі частини або компоненти системи, причому може бути необмежена множина таких частин (компонент).

Атрибути – це властивості об'єктів.

Відношення (зв'язки) – це ті властивості системи, що її об'єднують в єдине ціле.

Якщо елементи, що утворюють деяку систему, позначити символами X_1, X_2, \dots, X_n , де n – кількість елементів, то множину (вектор) $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ називають складом системи S .

Елементи X_1, X_2, \dots, X_n об'єднуються в ціле (систему) певними відношеннями і зв'язками, які називаються системо-утворювальними.

Системний аналіз як метод розроблення раціональних програм дослідження та керування середовищем є одним з найважливіших інструментів. Причинами його слабого використання є такі:

- невміння деяких дослідників подати інформацію у формі, зрозумілій для особи, яка ухвалює рішення;
- переоцінка можливостей системного аналізу;
- неадекватність даних;
- невизначеність та труднощі встановлення причинно-наслідкових зв'язків між змінними та описом стану середовища;
- поширена думка про неможливість використання аналітичних методів дослідження довкілля;
- нездатність деяких дослідників виразити цілі планування таким чином, щоб було можливо оцінити прогрес у вирішенні поставлених задач.

Системний аналіз має безсумнівні переваги порівнянно з традиційними методами. Зокрема, він дає можливість знайти впорядковану систему правил для вибору правильного рішення, краще зрозуміти взаємозв'язки, вивчаючи проблему. Крім того, системний

аналіз дає змогу суттєво покращити планування для розв'язання проблем довкілля.

Одним з найважливіших етапів системного аналізу є виділення об'єкта, який моделюють, із середовища.

Діалектичну пару «*частина – ціле*» визначають шляхом компромісу, встановлюючи межі між системою і навколишнім середовищем, тобто окреслюючи деяку поверхню, що обмежує систему. Ця поверхня не є чіткою поверхнею розділення, оскільки вхідні і вихідні величини забезпечують взаємодію системи з навколишнім середовищем.

У той же час діалектична пара «*суттєве – несуттєве*» знаходить вираження в угоді про всі суттєві величини в системі, відповідні поставленій меті. Тут потрібно вести мову лише про величини, до яких є доступ ззовні. Такими величинами можна вважати тільки вхідні і вихідні величини, або величини, що визначаються ними. До них не належать координати стану, які є тільки допоміжними величинами і не доступні ззовні; їх неможливо ні змінити, ні вплинути на них.

Діалектичну пару «*випадковість – необхідність*» можна брати до уваги після відповідних висновків про невизначеність поведінки системи.

Поведінка системи детермінована, якщо вона не зазнає випадкових впливів, інакше форма опису явищ мала б містити можливості моделювання випадковості.

Діалектична пара «*статика – динаміка*» належить до часових характеристик об'єктів, що відображає залежність поведінки процесу від часу.

З цими поняттями тісно пов'язана діалектична пара «*інерційність – мінливість*». У ній знаходить вираження роль минулих станів, запам'ятовувань в агрегованій (укрупненій) формі у вигляді координат станів, поточне значення яких відображає суттєві риси минулого. Фактор інерційності стикається з дійсними впливами на систему. Ця діалектична пара втілюється в конкретних співвідношеннях, де обидва взаємовпливи виступають у вигляді взаємозв'язку.

Нарешті, у кожному дослідженні поведінки системи потрібно взяти до уваги діалектичну пару «*неперервне – дискретне*», причому у

двох відношеннях. У першому – відносно можливих значень спостережуваних величин. У другому – стосовно відображення характеру часу у поведінці системи. У строго неперервних системах час плине безперервно. У дискретних він фіксується лише в деякій послідовності точок.

Часто в теоретико-системному описі означених об'єктів виділяють жорстко лише один з аспектів розглядуваної діалектичної пари. Однак потрібно брати до уваги, що в реальних системах обидві сторони врівноважуються, причому умови рівноваги можуть змінюватися і навіть є предметом моделювання. Тобто вони мають належним чином мати своє вираження в концепції систем. У теорії систем йдеться про комплексну взаємозалежність між згаданими й іншими діалектичними парами.

Діалектична пара «структура – функція» є суттєвою для побудови моделей.

Діалектична пара «аналіз – синтез» тісно пов'язана з ідентифікацією функцій системи в межах обраного класу. Мета *аналізу* – дослідження поведінки і властивостей систем, якщо задано характеристики зовнішнього середовища, структури системи, характеристики самої системи, тобто чисельні значення параметрів. Завдання *синтезу* визначає вибір оптимальної в тому або іншому сенсі системи або внутрішніх її параметрів, заданих характеристик зовнішнього середовища з огляду на обмеження, що накладаються на систему.

Виділимо конкретну систему з середовища, квантифікуючи її як деяку систему, що складається з елементів, пов'язаних між собою. Якщо розглянути формально зовнішнє середовище як нескінченну множину інших систем $E_1, E_2, \dots, E_k, E_{k+1}$, які впливають на систему S (на її елементи) і вибрати відповідну міру інтенсивності впливу, то можна визначити відповідну кількість зовнішніх систем x_1, \dots, x_m , які взаємодіють з системою S . Множину X , що складається із зовнішніх

систем, які перебувають у суттєвих (у певному сенсі) зв'язках з системою S , позначають так:

$$X = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

Множину відношень зв'язків між елементами системи S і зовнішнім середовищем називають структурою цієї системи і позначають як

$$\Sigma = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_l),$$

де l – кількість всіх зв'язків, які утворюють структуру системи S .

Склад системи V , навколишнє (зовнішнє) середовище X і структура Σ можуть змінюватися у часі, що можна записати таким чином:

$$\begin{cases} V = V(t) = \{V_1(t), \dots, V_n(t)\}; \\ X = X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}; \\ \Sigma = \Sigma(t) = \{\Sigma_1(t), \dots, \Sigma_l(t)\}. \end{cases}$$

Функцією системи S називають закон (сукупність правил) $F(t)$, за якими, залежно від зовнішніх факторів $X(t)$, відбувається зміна в часі внутрішніх елементів $V(t)$ і структури $\Sigma(t)$.

Зважаючи на викладене, можна дати формалізоване визначення системи.

Системою $S(t)$, яка функціонує в зовнішньому середовищі $X(t)$, називається множина об'єктів:

$$S(t) = S(V, X, \Sigma, F),$$

яка утворена з сукупності внутрішніх елементів $V(t)$, пов'язаних між собою і з зовнішнім середовищем $X(t)$, сукупністю зв'язків $\Sigma(t)$, які змінюються в часі відповідно до множини функцій $F(t)$.

Таким чином, з основних положень теорії систем випливає, що системний підхід до вивчення будь-яких реальних систем полягає у такому:

1) у визначенні складових частин V_1, \dots, V_n і взаємозв'язку з ними елементів (факторів) зовнішнього середовища;

2) у вивченні структури внутрішніх зв'язків, а також зв'язків між елементами системи і зовнішніми впливами;

3) у виявленні законів функціонування реальної системи $F = (F_1, \dots, F_p)$, які визначають характер зміни основних компонентів системи під дією зовнішніх об'єктів (елементів зовнішнього середовища).

Якщо визначити реальну систему, яку потрібно дослідити, через $S_0 = S_0(V_0, X_0, \Sigma_0, F_0)$, то, виходячи з основних понять теорії систем, під математичною моделлю цієї реальної системи S_0 будемо розуміти деяку її модель $S = S(V, X, \Sigma, F)$, в якій елементами (компонентами) множин V, X, Σ, F є математичні символи, зазвичай змінні і постійні величини, зокрема скалярні функції часу на деякому інтервалі $t_0 \leq t \leq t_N$, а саме:

$$\begin{cases} V = \{V_1, \dots, V_n\}; \\ X = \{x_1, \dots, x_m\}; \\ F = \{f_1, \dots, f_p\}. \end{cases}$$

4. Визначить поняття «структури» і «функції» та їхні ролі в системному аналізі.

5. У чому основні переваги системного аналізу як методу дослідження?

2. Моделювання як метод дослідження

Побудова моделей – один з основних напрямів міждисциплінарних робіт, що дають можливість надійного опису систем і процесів.

Оскільки будь-який результат процесу пізнання завжди має тільки відносний, попередній характер, це справедливо також і для кожної моделі. Таким чином, модель дає відносне уявлення про об'єкт, яке постійно уточнюється. Один із аспектів моделювання – відносна умовність досягнутого рівня пізнання; інший (другий) аспект – обов'язкова спроможність моделей до розширення.

Суттєвою особливістю побудови моделей є те, що метою побудови не може бути лише одне зберігання стиснутої (редукованої) інформації. Більш важливою є можливість активувати побудовану модель та використовувати її як заміник покладеного в її основу об'єкта. При цьому у міру використання нових даних модель може безперервно вдосконалюватися стосовно її корисності.

Побудову моделі найчастіше розглядають як засіб, що задовольняє певну мету. Тоді в діалектичній парі системного аналізу «пізнання – дія» аспект пізнання підпорядковується аспекту керування.

Цільовий напрям побудови моделей не можна чітко відокремити від аспекту накопичення знань. Мета впливає на те, як встановлюється лінія поділу в діалектичній парі «суттєве – несуттєве», тобто на те, які риси об'єктивного явища є суттєвими для моделі. Модель, побудована з певною метою, є ніби проєкцією явища об'єктивної реальності під визначеним кутом зору. Цілеспрямована модель завжди передає суттєве для цієї мети; вона являє собою заміну дійсності з таким ступенем абстракції, яка є найбільш корисною для поставленої мети.

Кожна модель зберігає знання у відповідній формі: при цьому запам'ятовування знань звичайно пов'язане із зменшенням об'ємності.

Тому кожна модель має зв'язок з функцією. Зміст знання є семантичною стороною моделі. Способи, за допомогою яких знання вводять в модель, кодуються в ній та є *синтаксичною стороною*. Мову кодування семантичних аспектів називають *синтаксисом*. Остання мовна компонента має велике значення в активізації моделі. У той же час модель за своєю функцією як структури для збереження знань є сполучною ланкою між теоретичним та емпіричним пізнанням.

2.1. Фізичне моделювання

У процесі дослідження екологічних процесів (об'єктів, явищ) може бути використане і фізичне, і математичне моделювання об'єктів та процесів.

Фізичне моделювання – це дослідження об'єктів (систем), процесів та явищ на фізичних моделях, під час якого досліджуваний об'єкт, процес або явище зберігає фізичну природу або натомість використовують аналогічне або інше фізичне явище.

Фізичне моделювання виконують, відтворюючи досліджуваний процес на моделі, яка може мати в загальному випадку відмінну від оригіналу природу, але однаковий з ним математичний опис. При цьому фізичні процеси, що відбуваються у моделі і оригіналі, є подібними.

Основою для фізичного моделювання є методи теорії двоїстості (подвійності), які ґрунтуються на аналізі розмірностей фізичних величин. Обов'язковою умовою у фізичному моделюванні є дотримання геометричної подібності оригіналу і моделі, а також відповідних масштабів для параметрів досліджуваного процесу, явища чи об'єкта. Для цього натурні значення відповідних параметрів помножують на постійну величину, яку називають масштабом моделювання чи коефіцієнтом.

Фізичне моделювання дає змогу дослідити процеси і системи, безпосередній аналіз яких виконати важко чи неможливо.

Фізична модель – установка чи пристрій, що дає можливість виконати фізичне моделювання, тобто дослідити фізичний процес за допомогою подібного йому фізичного процесу, процесу тієї самої фізичної природи.

Установки та прилади, на яких виконують дослідження, є фізичними моделями, якщо вони мають фізичну подібність процесу, яку відтворює модель, та процесу, який відбувається в досліджуваному об'єкті (системі), та відображають їх у тому чи іншому масштабі. При цьому під фізично подібною моделлю (фізично ізоморфною) розуміють однозначну відповідність між параметрами об'єкта та його моделі, що проявляється у тотожності безрозмірно математично описаних процесів досліджуваного об'єкта і моделі. Подібні величини, що характеризують процес, відрізняються тільки масштабами, а за заданими характеристиками одного явища можна однозначно одержати характеристики іншого явища.

Використання фізичних моделей дає змогу визначити вплив різних параметрів на перебіг досліджуваних процесів у системі, а також уточнити структуру системи.

Фізичні процеси в складних системах часто описують сукупністю диференціальних або інтегральних рівнянь, які містять велику кількість змінних, безпосередній зв'язок між якими встановити досить важко, а іноді неможливо. Фізичне моделювання дає змогу подолати цю складність шляхом вибору в ролі моделі такого об'єкта, в якому залежність між різними параметрами можна визначати безпосереднім вимірюванням.

2.2. Математичне моделювання

Для кількісної оцінки та прогнозу стану екосистем, їхньої реакції на антропогенні впливи, особливо на рівні невеликих, але поширених на величезних територіях впливів, винятково ефективним є математичне моделювання.

Математичне моделювання є найбільш довершеною формою моделювання. Метод математичного моделювання відіграє велику роль особливо тоді, коли кінцевою метою стає не тільки опис та оцінювання стану природного середовища, але і його регулювання, зважаючи на фактичний і прогнозний стани, а також на екологічний резерв, що зрештою має слугувати оптимізації відносин людського суспільства з природою як основному завданню сталого розвитку.

Переходячи до питань математичного моделювання, слід зауважити, що хоча математичне моделювання без математичних методів розв'язання рівнянь, за допомогою яких подано моделі, є неможливим, основна проблема в таких науках, як біологія і екологія на сучасному етапі розвитку, – це розроблення методології математичного моделювання та побудова конкретних математичних моделей.

Математичне моделювання є найбільш сучасним всеосяжним методом наукового дослідження; це процес створення математичних моделей.

Математична модель – це система математичних співвідношень, які описують досліджуваний об'єкт, процес чи явище.

Для створення математичних моделей можуть бути застосовані будь-які математичні методи (способи), наприклад, мова диференціальних чи інтегральних рівнянь, теорія множин, абстрактна алгебра, математична логіка, теорія ймовірності тощо.

Таким чином, *математична модель* – це опис деякого явища, процесу чи класу явищ за допомогою математичної символіки. Тобто *синтаксисом математичного моделювання* є мова математики. *Математична модель реальної системи* – це абстрактний, формалізований її опис, тобто система математичних співвідношень, які описують досліджуваний об'єкт, процес чи явище.

Кожне наукове дослідження починається з цілеспрямованого накопичення інформації про об'єкти, процеси та явища. Одночасно з накопиченням інформації, починається її впорядкування – *класифікація об'єктів*. *Класифікація* являє собою один з методів опису, які полегшують аналіз досліджуваного явища (об'єкта чи процесу). Накопичення інформації та її класифікація перебувають у постійній взаємодії та зв'язку з процесом ідентифікації. Кожний новий об'єкт аналізують з такого погляду – чи належить він до вже встановлених класів, чи відкриває нову групу, чи з огляду на накопичену інформацію стає ясно, що треба перебудувати систему класифікації.

Важливим методом дослідження є встановлення зв'язків (кількісних та/або якісних співвідношень). Ці зв'язки виявляються в результаті постійного аналізу інформації, що накопичується та

уточнюються. Тобто на перших етапах дослідження узагальненість зв'язків встановлюють емпірично (а не доводять). На цьому закінчується так званий вербальний (описовий) період дослідження (побудова вербальної моделі).

Це перший крок до побудови конкретної моделі, хоча він значною мірою належить ще до розділу *семантики – тобто суті моделі*.

Математична модель починається з того моменту, коли формується система аксіом, що описують не тільки сам об'єкт, а й деяку алгебру, тобто сукупність правил, які визначають допустимі операції над об'єктом.

Кількість накопичених відомостей про зв'язки та співвідношення між об'єктами дає змогу виділити з-поміж них визначальні, з яких решта можуть бути виведені дедуктивно. Тобто перехід до нового періоду дослідження починається зі спроб побудувати математичну модель.

Розглядаючи описаним чином реальний об'єкт, будують модель відповідно до поставленої мети, при чому на цьому, другому кроці основний наголос роблять на формалізованому описі. Зіставлення, що слугує оцінюванню адекватності моделі, може стосуватися етапу судження про різницю у поведінці об'єкта та моделі.

Оскільки модель виконує функцію деякого заміника оригіналу, то має бути досягнута, відповідно до визначеної мети, адекватність моделі оригіналу. Модель адекватна оригіналу, якщо відповідно до її інтерпретації виникає портрет оригіналу високого ступеня, схожий на оригінал. При цьому, як правило, схожість оригіналу та його портрета, одержаного за допомогою моделі, потребує кількісного оцінювання.

Оскільки будь-яка модель має характер проєкції, не можна говорити про абсолютну адекватність.

Оцінюючи подібність, треба пам'ятати про мету побудови моделі. Конкретна система, з якою відбувається порівняння, не є сталою, вона змінюється. Оцінюючи відмінності, стикаємося, природним чином, з великими труднощами, тому що зазвичай неможливо використати для порівняння об'єкт у всій його дійсній цілісності.

Модель, яка містить подання (представлення) всіх характеристик і особливостей, теоретично характерних для модельованої реальної системи, називається ізоморфною моделлю.

Модель M реального об'єкта O існує тоді, коли:

- реальний об'єкт сприймається як конкретна система з погляду діалектичної пари «суттєве – несуттєве»;
- суттєвими величинами конкретної системи O відповідні деякі величини моделі M ;
- визначене співвідношення між суттєвими величинами в конкретній системі O відповідне аналогічному співвідношенню між образами цих величин у моделі M .

Вибір суттєвих величин і співвідношень між ними залежить від мети застосування синтаксичних та допоміжних засобів для опису поведінки реального об'єкта. Об'єкт O та модель M можуть бути суттєво різними, але строго визначеними. Таким чином, настає наступний етап з точно визначеним методом для встановлення якісних співвідношень та математичного моделювання. Початком цього точного неописового періоду можна вважати етап, коли обрані величини та математичні моделі достатньо точно узгоджуються з накопиченими раніше фактами описового періоду.

Математична модель складної системи завжди має бути деяким компромісом між достатньо простим поданням процесів функціонування модельованої системи та складними ефектами, суттєвими для функціонування реальної системи.

Складні системи вивчають за допомогою неізоморфних, чи гомоморфних, моделей, які дещо спрощено віддзеркалюють найбільш притаманні характеристики процесу функціонування цих систем.

Одним з основних питань, що виникають у процесі використання і одержання гомоморфних моделей, є вибір рівня гомоморфізму, тобто рівня наближення і правдивості, за якого ще можливо досягнути достовірних результатів.

Зазвичай деталі, що не слугують безпосередньо меті моделювання, сприймаються тільки як перешкода, отже, від них можна абстрагуватись. Але це не завжди правильно, оскільки в деяких

випадках перешкода може опосередковано слугувати досягненню мети, оскільки вона концентрує увагу у певних напрямках. Тому для більш глибокого дослідження складної системи (процесу, явища) часто доцільно мати у розпорядженні не одну модель, а декілька. При цьому в кожній моделі особливо виокремлено один аспект, що слугує меті, а в сукупності вони доповнюють подання проблеми загалом.

Ще одним важливим аспектом моделювання є обов'язкова здатність моделей до розширення. Тобто має бути можливість вводити новіші знання в уже побудовану модель. Якщо при цьому встановлені для моделі рамки стануть тісними, треба розширити обраний основний клас моделей.

Мета, що визначається в побудові моделі, впливає найчастіше на те, як встановлюється лінія поділу пари «суттєве – несуттєве». Модель, побудована з певною метою, є ніби проєкцією об'єкта (процесу, явища) об'єктивної реальності під певним кутом.

Для складного об'єкта (системи, процесу, явища) можна одержати велику кількість можливих моделей як проєкцій цього об'єкта.

У такому разі ці моделі різним чином подають різні сторони складного єдиного явища (об'єкта, системи, процесу).

За одночасного розгляду декількох таких проєкцій можна прийти до суперечностей, дисонансів. У той же час багатообразність моделей використовують для того, щоб мати можливість кращого досягнення колективної мети моделювання.

Цілеспрямована модель завжди передає суттєве для обраної мети. Вона являє собою заміну дійсності з таким ступенем абстракції, який є найкращим для поставленої мети.

2.3. Класифікація математичних моделей

Розглядають матеріальні та ідеальні моделі.

Ідеальна модель існує тоді, коли властивості реального об'єкта описують формалізовано, так що можливою є імітація реального об'єкта або за допомогою ідеальної моделі можна виготовити матеріальні моделі.

Про *матеріальні моделі* говорять тоді, коли як модель будують матеріальний об'єкт, адекватний реальному об'єкту і за своїми конкретними властивостям призначений деяким чином замінювати реальний об'єкт.

Ідеальну модель, для якої реального об'єкта ще не існує, але він міг би бути створений або побудований на основі накопиченої інформації, будемо називати передбачувальною моделлю.

У дослідженні екологічних систем застосовують такі гомоморфні моделі – узагальнені та математичні.

Для одержання загального представлення про процеси функціонування (про елементи та підсистеми) використовують узагальнені – якісні моделі.

Узагальнені моделі поділяють так:

1) *іконографічні* узагальнені моделі, що дають загальне спрощене уявлення про досліджувану систему (процес, явище) у вигляді деякого графічного зображення.

Іконографічна модель – це графічні відображення таких якісних властивостей системи, за допомогою яких можна визначити якісні характеристики системи, чи графічне відображення функціональних співвідношень між параметрами та змінними системи (яка є суто математичною). Іконографічні моделі поділяють на топологічні (графи) та сітьові;

2) *оперативно-описові* моделі, що дають загальне спрощене уявлення про процес функціонування системи у формі послідовного мовного опису різних процесів, які відбуваються в елементах системи (приклад – різні регламенти, ГДК тощо);

3) *символічні моделі* – це сукупність математичних співвідношень у вигляді формул, рівнянь, операторів, логічних умов чи нерівностей, які визначають характеристики станів системи (фізичні параметри станів матеріальних й енергетичних потоків тощо), параметрів станів елементів системи і параметрів потоків у системі. Така модель є результатом формалізації процесів, що відбуваються в системі, тобто результатів створення чіткого формально-математичного опису процесу

функціонування системи з достатнім необхідним ступенем наближення до дійсності.

Класифікація моделей може бути складена за різними ознаками і з різними цілями: за характером використання початкової інформації, за типом (видом) математичного методу; за ступенем адекватності моделі і реальної системи; за рівнем конкретизації модельованого об'єкта тощо.

Потрібно також розрізняти математичні моделі за характером опису ними просторових характеристик (властивостей) реальної системи. Моделі, в яких просторові характеристики природної системи не беруть до уваги, тобто ці моделі описують такі характеристики (параметри), які залежать тільки від часу, називають *моделями із зосередженими значеннями (параметрами)*. Моделі, в яких відображено зміну характеристик не тільки в часі, а й у просторі, тобто шукані характеристики (параметри) залежать і від часу, і від точки простору, називають *моделями з розподіленими значеннями (параметрами)*. Слід зауважити, що для теоретичних досліджень найперспективнішими є детерміновані моделі з розподіленими параметрами. Однак потрібно ширше реалізовувати можливості простих концептуальних моделей, особливо тих, що фізично обґрунтовані. Можна з упевненістю сказати, що прості моделі в практичному відношенні є мобільнішими, хоча вони і не здатні відтворювати весь спектр природних умов.

Математичні моделі можна класифікувати за Шенноном: *детерміновані, стохастичні (імовірнісні), статичні, динамічні, дискретні, неперервні, натурні, символічні*.

Детерміновані моделі застосовують тоді, коли за одночасного розгляду співвідношень між станами і параметрами системи стани у заданий момент часу однозначно визначаються через параметри системи, інформацію, що надходить, та початкові умови.

Імовірнісні (статистичні, стохастичні) моделі застосовують тоді, коли за допомогою співвідношень між станами і параметрами системи можна визначити однозначно лише розподіл імовірностей для станів системи.

Динамічна модель – модель, яка дає опис модельованого об'єкта (системи, процесу, явища) у його розвитку (залежно від часу).

Якщо для класифікації виходити із способів подальшого використання моделі для дослідження складної системи, то такі моделі можна розділити на *аналітичні* та *імітаційні*.

Статична модель – модель, що описує модельований об'єкт (систему, процес, явище) в усталеному стані.

Дискретна модель – опис функціонування модельованого об'єкта (системи, процесу, явища) у дискретному часовому просторі, який визначається дискретними станами. Дискретність часового простору означає, що зміни стану системи можуть відбуватися тільки в моменти часу, що становлять деяку дискретну величину.

Для *аналітичних моделей* характерним є те, що процеси функціонування елементів складної системи записують у вигляді деякої функції і логічних умов. Аналітичні моделі можна досліджувати таким способом, коли намагаються отримати у загальному вигляді дійсні залежності для шуканих величин.

Разом з наведеною класифікацією множина математичних моделей, використовуваних в різних галузях природознавства і суспільних наук, поділяється на дві групи – *аналітичні* і *імітаційні*. При цьому вважають, що в аналітичних моделях застосовують аналітичні методи, а в імітаційних моделях основним і принципово обов'язковим апаратом дослідження є комп'ютер. Однак у такому разі важко провести грань між імітаційними і аналітичними моделями, тому що в аналітичних моделях часто доводиться користуватися чисельними експериментами, а в імітаційному – неможливо обійтись без попередніх аналітичних оцінок. Найбільш чітко виражена різниця між цими моделями в роботі англійського зоолога М. Сміта «Моделі в екології», у якій він наголошує, що математичний опис екологічних систем можна поділити на дві різні групи: описи, що мають суто теоретичне значення, та описи для практичних цілей, які називають імітаційними моделями, або імітаціями.

Добре розроблену математичну модель можна використовувати для теоретичних і для імітаційних досліджень, тобто з програванням конкретних процесів, явищ, ситуацій. Як правило, для вивчення конкретного процесу або явища можна побудувати різні моделі, кожна з

яких матиме деякий визначений рівень, що характеризує її узагальненість і адекватність реальності. Причому між цими моделями часто простежуються певні зв'язки. Ці зв'язки вказують на те, що конкретні моделі не можуть бути одночасно реалістичними і загальними.

З найбільш узагальнених математичних моделей, що описують широкий клас (наприклад, математична модель механічних рухів), виводять часткові класи і блоки математичних моделей, що описують більш вузькі сукупності конкретних явищ.

Схематично процес математичного моделювання, запропонований академіком Дородніциним, охоплює кілька етапів.

1. Виявлення можливих формальних зв'язків (людина).
2. Складання варіанта математичної моделі (людина).
3. Вирішення модельних задач (людина+комп'ютер).
4. Порівняння результатів вирішення з накопиченою інформацією (людина + комп'ютер).
5. Визначення невідповідностей і аналіз можливих причин невідповідностей (людина + комп'ютер).
6. Складання нового варіанта моделі (людина).

Далі йде повторювання циклів (п. 3-6). Після декількох циклів модель може бути прийнята, якщо результат буде позитивним. Найбільш важкими етапами є встановлення певних причин і процесів.

Говорячи про всі переваги методів математичного моделювання, слід, проте, зазначити, що нерідко ясні і чіткі уявлення про перебіг процесів і про кількість зв'язків підмінюють великою кількістю експериментальних даних, а за теоретичний модельний опис видають підібраний емпіричний вираз, причому зазвичай без вказаних меж його використання.

За всіх вимог до точності математичних моделей не можна забувати, що математична модель не може бути точнішою, ніж введена в неї вихідна інформація.

Для того щоби своєчасно дати прогноз щодо можливих змін стану біосфери, а також оцінити негативний вплив цих змін на розвиток живих організмів, зокрема й людину, потрібне глибоке вивчення і

ретельний аналіз фізичних, хімічних і біологічних процесів і явищ, що відбувається у біосфері.

Оскільки математичні моделі екологічних процесів і систем досить складні, а кількість невідомих велика, то на практиці часто використовують метод декомпозиції, який полягає у розкладанні вихідної задачі на ряд окремих задач та задачу, що координує їхнє рішення.

Застосовують також агрегування, що означає заміну групи змінних, які характеризують стан системи, однією змінною, котру називають агрегатом.

Запитання для самоперевірки

1. Як визначити фізичну модель деякого об'єкта?
2. На чому ґрунтується фізичне моделювання?
3. Що таке математична модель?
4. Що називають ізоморфною моделлю?
5. Назвіть класифікацію математичних моделей за Шеноном.
6. Як визначити основні етапи математичного моделювання (за Дородніциним)?

3. Моделювання динаміки систем, що розвиваються

Особливостями сучасного глобального екологічного процесу є те, що різке підсилення антропогенних впливів на навколишнє середовище призводить до такого прискорення всіх еволюційних процесів у біосфері, що межа між еволюційними і власне екологічними процесами починає стиратися.

У фізиці і біології говорять про еволюцію, в теорії керування і кібернетиці вживають термін «системи, що розвиваються», в

математиці, коли йдеться про вивчення систем, стан яких змінюється з часом, використовують поняття «динамічні системи» і т. ін.

Здається, що еволюційні процеси потрібно описувати моделями, які є деяким спеціальним класом динамічних систем. Але дати точне визначення або хоча б опис цього класу дуже непросто, тим більше, що термін «еволюція» використовують для опису явищ зовсім різної природи. Чи можливо взагалі одним і тим самим терміном називати процеси, які відбуваються в неживій, косній матерії і в живій природі? Незважаючи на всі їхні відмінності, ми можемо говорити про деякі загальні риси цих, здавалося б, протилежних явищ. Цим процесам властиві постійні зміни структури (якості, організації). Коли ми починаємо зіставляти різні процеси, які зазвичай називають еволюційними, то виявляємо одну загальну особливість: у процесі розвитку (тобто зміни характеристик у часі) в системах, що еволюціонують, виникають нові якісні особливості.

Основні властивості систем, що розвиваються (як штучних, так і природних), можуть бути сформульовані таким чином. У момент початку розвитку має бути наявність деяких початкових ресурсів. В динамічну систему має надходити речовина, енергія, інформація. В системі, що розвивається (далі РС), має бути система відтворення і вдосконалення самої структури цієї підсистеми. Має бути відповідний характер умов зовнішнього середовища, у взаємодії з яким РС споживає продукти, а також виділяє застарілі непотрібні продукти в так званий «відвал». Мають бути дотримані деякі балансові співвідношення між субстратами, які надходять до динамічної системи, і продуктами динамічної системи, причому має бути функціональний зв'язок між ресурсами, використовуваними на внутрішній розвиток, і тими, що використовуються на виконання зовнішніх функцій динамічної системи; між швидкістю відтворення ресурсів, інтенсивністю їхнього використання і результатами функціонування системи.

Зокрема, мають бути дотримані умови кооперативної і конкурентної поведінки, які зумовлюють нерівноважний стан системи. Нерівноважними системи можуть переходити з одного

квазістаціонарного (гомеостазного) стану до іншого; мають бути виділені автокаталітична і демпфувальна змінні (дисипативні структури); мають бути виділені ідіотип-позитивні і антидіотипічні, негативні змінні; має бути зношеність технологій відтворення продуктів такої системи.

Зберігатися і виживати можуть лише стійкі системи. Але такі системи не можуть еволюціонувати. Процес еволюції не може також бути оберненим. Еволюція – це нескінчена зміна одних стійких станів іншими через нестійкі. Вказати на стійкий стан в перебігу нестійкого в загальному випадку неможливо. Довільна жива система живе лише певний скінченний час, вона стійка лише на цьому проміжку. Вмираючи чи руйнуючись, вона втрачає стійкість, і на її місці виникає нова система.

3.1. Класичні методи математичного опису динамічних систем

Залежно від мети дослідження можуть бути застосовані різні класичні методи дослідження динаміки систем. Один з таких методів оснований на тому, що широкий клас систем у лінійному і кінцевому наближенні може бути представлений у вигляді формули

$$R(t) = \int_{-\infty}^t K(\tau)I(\tau)d\tau,$$

де I – вектор вхідних впливів; R – вектор реакції системи;

K – матриця імпульсних перехідних функцій системи; t – час.

Інші, більш поширені форми запису динаміки системи, зумовлюють використання диференціальних рівнянь.

Математичні моделі екологічних процесів досить складні. Диференціальні рівняння, що описують динаміку цих процесів, мають високий порядок. У ці рівняння входить чимало параметрів, які в багатьох випадках можуть змінюватись у певних межах. Тому дослідження таких моделей зумовило потребу в застосуванні нових методів і нових підходів.

3.2. Якісна теорія динамічних систем

Нехай поведінку динамічної системи описано сукупністю звичайних диференціальних рівнянь:

$$\dot{r}_i = f_i(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.1)$$

де $R = (r_1, \dots, r_n)$ – стан (точка) системи; α_i – параметри системи.

Тоді стаціонарний стан системи знаходимо з рівняння

$$f_i(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0 \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.2)$$

Якщо $r_i = a_i$ ($i = \overline{1, n}$) – особлива точка – розв’язок системи кінцевих рівнянь (3.2), то питання про стійкість отриманого стаціонарного стану розв’язуємо розрахунком коренів характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} P(x) &= \det \{ A_{ik} - \lambda \delta_{ik} \}; \\ A_{ik} &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial r_k} \right)_{r_s = a_s}; \\ \delta_{ik} &= \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Стаціонарний стан є стійким, якщо $r_i \cdot \lambda_i < 0$ ($i = \overline{1, n}$),

де λ_i – корні рівняння (3.3). Точки, в яких порушено умови стійкості, називають критичними, або екстремальними, точками. Найбільш розроблена теорія динамічних систем другого порядку.

Якщо виникає потреба в моделюванні поведінки (стану) екосистеми або її окремих компонент за змінних у часі зовнішніх умов, наприклад, таких, що змінюються періодично чи випадково, то задача зводиться до розгляду неавтономної системи (3.2) або рівняння (3.3). При цьому спочатку будують і досліджують автономну систему (модель), потім залежно від змінних, що характеризують зовнішні умови, або правої частини рівнянь, додають нові частини, які явно

залежать від часу, або постійні коефіцієнти замінюють на змінні, що залежать від часу.

Нехай вираз (3.3) є автономною системою диференціальних рівнянь, в яких одна частина стосується системи повільних рухів:

$$\dot{r}_i = f_{i1}(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k) \quad i_1 = \overline{1, i_1^0}, \quad (3.4)$$

а друга – системи швидких рухів:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{r}_i &= \tilde{f}_{i2}(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k) \\ i_2 &= i_1^0 + 1, n; \\ \varepsilon^{-1} \tilde{f}_{i2} &= f_{i2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Якщо $\varepsilon = 0$, системи (3.4) і (3.5) переходять у систему

$$\begin{cases} \dot{r}_i = f_{i1}(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k) \\ 0 = \tilde{f}_{i2}(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k) \end{cases}, \quad (3.6)$$

яка називається виродженою. Система (3.5) називається приєднаною.

Справедливою є теорема m^0 Тихонова.

Розв'язок повної системи (3.4), (3.5) прямує до рішення виродженої системи (3.6) за $\varepsilon = 0$, якщо:

а) розв'язок $\tilde{r}_{i_1^0+1}, \dots, \tilde{r}_n$ системи $\tilde{f}_{i2}(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0$ – стійка ізолювана точка системи (3.6) за всіх значень $r_1, \dots, r_{i_1^0}$;

б) початкові умови $r_{i_1^0+1}^0, \dots, r_n^0$ для системи (3.5) попадають в область впливу стійкої особливої точки;

в) розв'язання всієї системи і приєднаної системи – єдиний і праві частини цих систем неперервні.

Ця теорема дає змогу знизити порядок системи (3.1) і можливість для практичного її дослідження.

Суть редукції полягає в такому:

1) для досліджуваної системи треба скласти блок-схему структурно-функціональної організації;

2) скласти математичну модель системи (з урахуванням доцільного об'єму і рівня алгоритмізації), виділити системи швидких і повільних рухів, виконати знерозмірювання параметрів, знизити порядок системи рівнянь;

3) дослідити стійкість руху системи, визначити стаціонарні точки, дослідити характер особливих критичних точок;

4) на базі якісного дослідження обрати параметри для числового дослідження моделі, отримати числове рішення і верифікувати їх за експериментальними даними;

5) окреслити сферу застосування моделі, вірогідний соціально-економічний ефект її використання.

У загальному випадку знайти аналітичні розв'язки систем нелінійних диференціальних рівнянь можна далеко не завжди. Наближені (до числового) методи дають можливість їхнього розв'язку майже завжди. Однак не завжди доцільно знаходити ці розв'язки. Часто можна обмежитись якісним аналізом шуканих розв'язків і з'ясувати найбільш цікаві властивості динаміки системи, зокрема умови її рівноваги і стійкості. Для цієї мети існує якісна теорія диференціальних рівнянь.

Основний підхід в *якісній теорії диференціальних рівнянь* полягає в тому, що стан динамічної системи (до якої належить й екосистема) характеризується змінними, які в кожен момент часу набувають певних значень. Якщо в n -мірному просторі відкласти на осях координат значення змінних, то стан системи буде характеризуватися точкою M (значення змінних у відповідний час), яка в просторі буде описувати деяку криву. Цю криву називають *фазовою траєкторією системи (моделі)*, а простір, в якому знаходиться ця крива, – фазовим простором системи.

Будь-яка фазова траєкторія може належати до одного з трьох типів:

1) гладка крива без точок самоперетину;

2) замкнута крива (цикл), що описує періодичний процес;

3) точка, відповідна положенню рівноваги системи.

Якісна теорія диференціальних рівнянь дає змогу описувати поведінку фазових траєкторій і тим самим досліджувати реальні системи. Сукупність фазових траєкторій, відповідних різним початковим умовам, називають *фазовим портретом системи (моделі)*.

Зазвичай фазові траєкторії містять менше інформації про досліджувану систему, ніж інтегральні криві, що дають вичерпну інформацію. Проте в багатьох випадках досить знати поведінку (структуру) фазових траєкторій. Фазова траєкторія для одного диференціального рівняння являє собою пряму, *яка називається фазовою прямою*.

Якщо функція f_i у рівності (3.1) не залежить безпосередньо від часу, то система (модель) називається автономною системою (моделлю).

Одна з важливих властивостей автономної системи полягає в тому, що вона може мати *стаціонарні розв'язки*, які визначають стан рівноваги реальної системи або процесу. У положенні рівноваги всі показники екосистеми не змінюються в часі, тобто не залежать від часу. Тому в *стаціонарному положенні всі похідні за часом у системі (моделі)* дорівнюють нулю. Прирівнявши до нуля праві частини системи, одержимо систему для визначення стаціонарних значень змінних.

Точка фазового простору M^ називається стаціонарною, або особливою, або точкою рівноваги системи.*

Після знаходження стаціонарних розв'язків автономної системи виникає питання про їхню стійкість. Стійкий стан рівноваги можна визначити таким чином: якщо за досить малого початкового відхилення від положення рівноваги системи (розв'язок ніколи не відхилиться далеко від цього положення), то стан рівноваги є стійким і відповідним стійкому стаціонарному режиму функціонування реальної системи.

Динамічні системи, описувані моделями, які визначаються системами звичайних диференціальних рівнянь, називають також *точковими моделями*. Це означає, що в усіх точках простору для такої системи значення концентрації однієї і тієї самої речовини (або густоти популяції) однакові в кожний момент часу.

Порівнювальний аналіз методів інтегральних і диференціальних представлень свідчить, що як один, так й інший апарат дають змогу

отримати, по суті, один і той самий результат. Тому на користь одного або іншого підходу говорить лише зручність і звичка його використання. Але є деякі теоретичні і прикладні переваги інтегральних представлень, зокрема більша компактність запису інтегральних рівнянь; стійкість операцій інтегрування порівняно з диференціюванням.

3.3. Сучасні підходи до моделювання динамічних систем

До сучасних (некласичних) методів моделювання систем, що розвиваються, можна віднести *методи, основані на теорії автоматів* (алгоритмічний автоматний опис чи автоматичне моделювання), *теорії квазістохастичної сталості, теорії особливостей гладких функцій та на математичній теорії катастроф.*

Автоматне моделювання систем, що розвиваються, – складова частина статистичного моделювання. Основним елементом опису моделей є дискретний (цифровий) *автомат* (одне з основних понять у кібернетиці та математиці) – це математична модель реальних чи принципово можливих систем, які приймають, зберігають та переробляють інформацію у дискретному часі. До таких систем належать складні системи – біологічні й екологічні системи. Теорія автоматів надає апарат та методи для синтезу й аналізу математичних моделей дискретних систем та вирішує завдання з їхньої оптимізації.

Протягом останніх шістдесяти років поширення набуло моделювання просторових та просторово-часових структур, під кутом яких можна розглядати багато процесів, що відбуваються в еко- і біосистемах. У моделюванні таких процесів використовують так звані квазілінійні рівняння. Рівняння такого типу можуть бути використані у моделюванні процесів хімічної кінетики, різного роду біохімічних реакцій та різних екологічних явищ тощо.

Особливим етапом у дослідженні поведінки динамічних систем є моделювання квазістохастичної поведінки найпростіших детермінованих моделей. Результати досліджень у цьому напрямі мали практичний вплив на розвиток усіх напрямів, пов'язаних з моделюванням складних систем, зокрема й систем, що розвиваються (динамічних систем). Доволі раніше поширене уявлення про динаміку

складних систем у фазовому просторі в наш час суттєво збагатилося уявленням про квазістохастичний рух як про один з різновидів складної поведінки детермінованих систем.

Деякі динамічні системи за певних умов (значень параметрів) здатні породжувати рухи, які можна розглядати та інтерпретувати як випадкові квазістохастичні. Вважали, що рухи, більш складні, ніж граничні цикли, сідла, фокуси тощо, виникають в багатовимірних системах з великою кількістю ступенів вільності. Але вже в тривимірному випадку для нелінійних диференціальних рівнянь, а також у різницевих рівняннях, у двовимірному та одновимірному випадку, можливими є розв'язки на зразок квазістохастичних. Встановлено, що така складна стохастична поведінка властива, за певних умов, багатьом екологічним, біологічним, хімічним, фізичним та іншим системам.

Запитання для самоперевірки

1. Які класичні методи опису систем, що розвиваються, вам відомі?
2. У чому полягає основний підхід якісної теорії диференціальних рівнянь у дослідженні систем, що розвиваються?
3. Що таке фазовий простір?
4. Визначте поняття «точкові моделі».
5. Які сучасні підходи до дослідження і моделювання динамічних систем вам відомі?

4. Перші математичні моделі в екології

Кількісне оцінювання і прогнозування стану екологічних систем, особливо прогнозування можливих реакцій (відгуку) екосистем і біоценозів на антропогенний вплив, ґрунтується на широкому залученні математичного моделювання всіх тих процесів, які спостерігаються у взаємодії живих істот між собою і з навколишнім середовищем у нових умовах інтенсивного антропогенного впливу.

Метод математичного моделювання важливий і тому, що у вивченні екологічних проблем кінцевою метою стає не тільки опис і прогнозування стану природного середовища, але і його регулювання з

огляду на фактичний і прогнозний стан, а також зважаючи на екологічний резерв (екологічну ємність) тієї чи іншої екосистеми.

В основі математичного моделювання процесів біологічної природи лежить уявлення про біологічну систему (екосистему), для якої справедливі всі закони фізики та хімії, тобто всі основні принципи і закони, відповідно до яких відбуваються різноманітні процеси в неживій природі і які не втрачають своєї сили і для живої матерії.

Отже, будь-яка математична модель має спиратися на закони збереження речовини, енергії, кількості руху і т. п. Однак, як і для опису фізичних процесів, цих законів явно недостатньо, щоб описати хоча б такі біологічні системи, як популяції, співтовариства, біоценози. Потрібні також співвідношення, які визначають інтенсивності потоків речовини, енергії тощо залежно від стану окремих компонентів системи.

4.1. Експоненціальне і логістичне зростання популяцій

Популяція – будь-яка група організмів одного виду, яка займає певний простір і функціонує як частина біотичного співтовариства.

Біотичне співтовариство – сукупність популяцій, що функціонує як цілісна одиниця у відведеному йому (співтовариству) просторі фізичного середовища існування.

Популяція – це множина (група) особин, які мають властивість самовідновлення (густота, народжуваність, смертність, вікова структура, генетична пристосовність), яка властива й організмам, з яких вона складається (життєвий цикл, відновлення).

Під густиною популяції розуміють кількість особин чи біомасу популяції, віднесені на одиницю площі чи об'єму (наприклад, 500 дерев на 1 га, 200 кг риби на 1 га поверхні водоймища і т. п.).

Якщо знехтувати віковими, статевими і генетичними відмінностями, то густина досліджуваного виду організмів може бути повністю описана за допомогою однієї змінної N – кількість особин на одиницю площі.

Всі популяції дуже мінливі, тобто їхня чисельність (густина) з часом зазнає змін. Навіть тоді, коли співтовариство (популяція) і екосистема здаються незмінними, густина, народжуваність, виживання,

вікова структура, швидкість зростання та інші характеристики популяції звичайно змінюються залежно від сезону, фізичних та інших факторів середовища існування. Екологів більш за все цікавить те, з якою швидкістю відбувається зміна чисельності популяції або її вікових груп.

Як відомо, середня швидкість зростання популяції визначається як відношення зміни кількості організмів (особин) ΔN до проміжку часу Δt , протягом якого відбувалась зміна (збільшення чи зменшення). Миттєва швидкість dN/dt зміни кількості особин або, іншими словами, швидкість зміни кількості організмів у деякий час t , визначається як межа середньої швидкості за необмеженого зменшення проміжку часу Δt , тобто

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} .$$

Таким чином, швидкість зростання популяцій є похідною за часом від кількості особин, що розглядається як функція часу $N=f(t)$.

Крім швидкості зростання популяцій розглядають так звану питому швидкість зростання r , яка дорівнює зміні кількості організмів за одиницю часу в розрахунку на одну особину, тобто

$$r = \frac{dN}{Ndt} .$$

Коли для розмноження популяцій настають найбільш сприятливі умови, немає обмежувальних чинників, то швидкість зростання популяцій може бути виражена так:

$$\frac{dN}{dt} = rN , \tag{4.1}$$

де r – коефіцієнт миттєвого зростання (розмноження) популяцій.

Проінтегрувавши рівняння (4.1) одержимо:

$$N(t) = N_0 e^{rt} \tag{4.2}$$

або

$$\ln N = \ln N_0 + rt . \tag{4.3}$$

Скориставшись рівністю (4.3), можна розрахувати r за двома змінними – чисельностями N_1 і N_2 у два моменти часу t_1 і t_2 ($\Delta t = t_2 - t_1$):

$$r = \frac{\ln N_2 - \ln N_1}{t_2 - t_1}; \quad N_0 = N_1 = N(t_1).$$

Експоненціальна функція (4.2) добре описує зростання колоній деяких бактерій до виснаження культурного середовища. Графік цієї функції називається кривою зростання популяцій. Кількість особин, визначене цією кривою (рис. 4.1, *а*), можна також зобразити відповідно до виразу (4.3) в логарифмічному масштабі (рис. 4.1, *б*).

Показник r також можна біологічно інтерпретувати як різницю між питомою миттєвою швидкістю народжуваності b і питомою швидкістю смертності d :

$$r = b - d,$$

де r часто використовується для кількісного вираження репродуктивної пристосованості організмів у генетичному значенні і називається *біотичним потенціалом*.

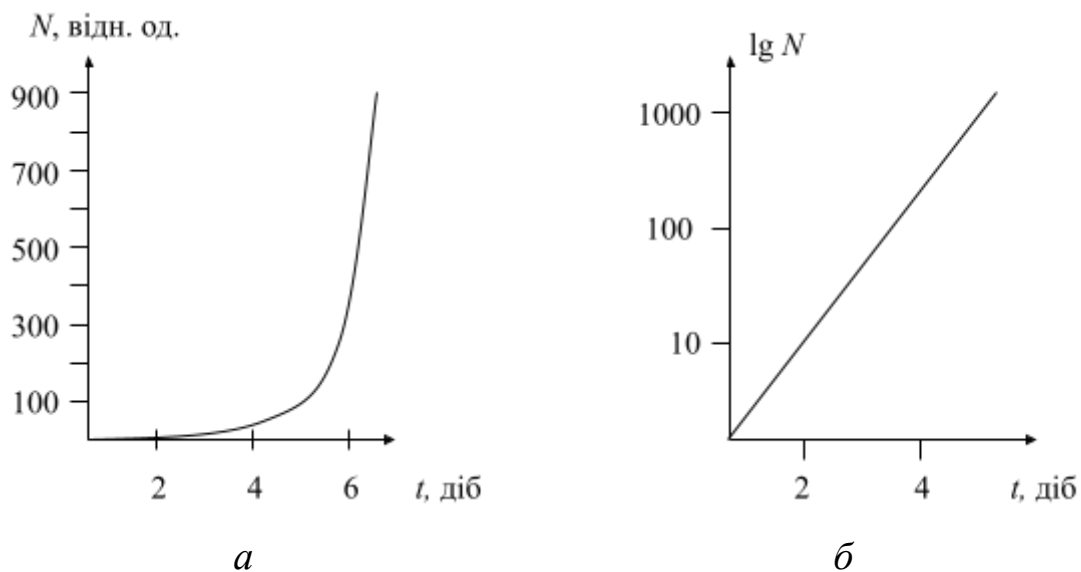


Рис. 4.1. Графік зростання популяцій: *а* – крива зростання популяцій; *б* – крива зростання популяцій в логарифмічному масштабі

Цей показник характеризує природжену здатність організмів до розмноження і виживання.

Спостережувані в природі явища, такі як «цвітіння» води у водоймищах, спалахи чисельності шкідників, ріст бактерій та інших організмів, відбуваються за експоненціальним законом. Однак завдяки впливу навколишнього середовища, наявності ворогів (хижаків) та інших несприятливих факторів, сприятливі умови для розмноження довго тривати не можуть.

Взаємодія досліджуваної популяції з іншими і вплив на неї зовнішнього середовища значно знижують швидкість зростання популяції і змінюють закономірності. Зокрема, після інтенсивного зростання чисельність популяції може стабілізуватись на деякому стійкому значенні. У такому разі зростання популяції описують так званім логістичним рівнянням

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{K} \cdot N^2, \quad (4.4)$$

яке часто записують у вигляді рівності

$$\frac{dN}{dt} = rN \frac{K - N}{K},$$

де $K = N_{\max}$ – максимально можлива чисельність популяції.

Розв'язуючи логістичне рівняння (4.4), знаходимо:

$$N = \frac{K}{1 + \exp(\alpha - rt)}, \quad (4.5)$$

де стала інтегрування α чисельно дорівнює $\ln \frac{K - N_0}{N_0}$.

З формули (4.5) видно, що в описі логістичним рівнянням крива зростання популяції представляється S- подібною (сигмовидною) кривою.

Логістичне рівняння вперше було запропоноване Ферхюльстом у 1838 р. Цим рівнянням користувався Лотка, а потім майже через 100 років його «перевідкрили» Перл і Піу.

Розв'язок рівняння (4.4) має дві важливі властивості:

1) за малих значень чисельності (або біомаси) популяції зростання має експоненціальний характер, як й у разі опису рівнянням (4.2);

2) з плином часу чисельність популяції асимптотично наближається до деякого постійного числа K , більше за яке чисельність популяції збільшитися не може.

За допомогою кривої, відповідної експоненціальному характеру зростання популяції, але із заданим обмеженням на величину N , можна описувати вільне зростання популяції доти, доки популяція вичерпає свій харчовий ресурс або до настання дії обмежувальних факторів середовища, які чинять опір процесам продукування. Потім зростання швидко припиняється, і густина популяції може залишатись на досягнутому рівні або відразу впасти, що приводить до релаксаційно-коливального характеру зміни чисельності.

Така зміна чисельності популяції називається «тригерною» (термін запозичений з теорії автоматів). Вона властива багатьом природним популяціям і співтовариствам.

Інший вигляд можливого зростання популяцій, який описують логістичною (S -подібною) кривою, характеризує постійне наростання дій несприятливих факторів, яке посилюється в міру збільшення чисельності (густоти) популяцій. Такий тип зростання є прямою протилежністю раніше розглядуваному експоненціальному зростанню, за якого популяція зазнає опору середовища майже наприкінці свого зростання.

4.2. Модель «хижак–жертва»

У теперішній час для побудови моделі біологічних співтовариств широко використовують звичайну в екології класифікацію взаємодій між видами (як і в описі неживої системи, потрібно знати, які сили врівноважують систему), а саме:

1) конкуренція (-,-) – кожний з видів пригнічує (справляє негативну дію) на зростання іншого виду, хоча існує і внутрішньовидова конкуренція;

2) симбіоз (+,+) або коменсалізм (+,0) – кожен з видів прискорює зростання іншого виду («жертви»), інший («жертва») прискорює зростання першого («хижака»);

3) хижацтво (+,-) – один вид («хижак») подавляє зростання іншого виду («жертви»), інший («жертва») прискорює зростання першого («хижака»).

Перевага цієї класифікації в її простоті і логічності. Використовуючи наведену класифікацію, розглянемо систему з двох популяцій (або видів), особини однієї з яких слугують їжею для особин іншої (взаємодія типу «хижак – жертва»).

Крім балансових рівнянь біомас, які отримують із законів збереження речовини, потрібно знати швидкість споживання жертви хижаком, яка, природно, залежить як від чисельності жертви, так і від чисельності хижака. Цю залежність в екології зазвичай називають трофічною функцією. Вид цієї функції залежить від багатьох факторів, таких як мисливська стратегія хижака, захисна реакція жертви, наявність сховищ для жертви і т. ін.

Найпростіші диференціальні рівняння, що описують взаємодії типу «хижак – жертва», були одержані відомим італійським математиком Віто Вольтера, якого вважають батьком математичної біології і математичної екології. Рівняння звичайно складають відносно чисельності популяцій або відносно біомаси організмів, що до неї належать.

Якщо зростання однієї популяції можна виразити експоненціальним або так званим логістичним рівнянням, тобто

$$\frac{dN}{dt} = rN; \quad \frac{dN}{dt} = rN - \frac{r}{k} \cdot N^2, \quad (4.6)$$

то вплив іншої популяції можна виразити членом, який змінює зростання першої популяції, і залежно від типу взаємодії в першу частину рівняння можна підставити різні члени. Зважаючи на це, динаміку чисельності популяцій N_1 і N_2 за наявності конкуренції описують такими рівняннями:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 - \frac{r_1}{k_1} N_1^2 - \alpha N_1 N_2; \quad (4.7)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 - \frac{r_2}{k_2} N_2^2 - \beta N_2 N_1. \quad (4.8)$$

Ці рівняння запропонували Лоткі і Вольтера незалежно один від одного в 1925 і 1926 р.

Вольтера розглядав рівняння, що описують взаємодії між видом жертви з густотою X і хижаком, що її знищує, з густотою Y , в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= aX - bX^2 - cXY \\ \frac{dY}{dt} &= -eY + dXY \end{aligned} \quad ; \quad (4.9)$$

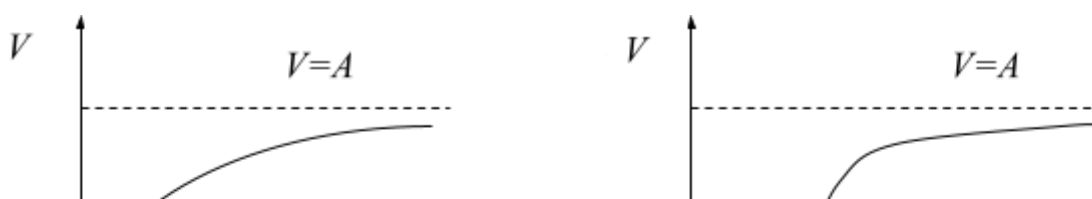
За відсутності хижака ($Y=0$) зростання чисельності (або густоти) популяції відбувається відповідно до логістичного рівняння з істинною швидкістю зростання a і ємністю середовища a/b , а швидкість виїдання жертви, як і в попередніх рівняннях, пропорційна добутку густоти хижака і жертви.

Член ($-bX^2$) в рівнянні (4.9) виражає пригнічувальну дію, яку певний вид (жертва) справляє на своє власне зростання (наприклад, у результаті конкуренції). Цей член називається «демпфувальним» (таким, що зменшує амплітуду коливань), e – коефіцієнт смертності.

У теперішній час для опису системи «хижак – жертва» або «споживач – ресурс» широко використовують таку систему:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= Q - V(R, N)N; \\ \frac{dN}{dt} &= -mN + kV(R, N)N, \end{aligned}$$

де R – кількість ресурсу; N – чисельність споживачів (популяції); Q – швидкість надходження ресурсу в систему; $V(R, N)$ – швидкість споживання ресурсу однією особиною популяції; $k < 1$ – частина ресурсу, витраченого на відтворення (виробництво потомства); m – коефіцієнт смертності, обернено пропорційний середній тривалості життя особин в певних умовах середовища. Найпростішим випадком є такий, коли Q , k , m – сталі величини. Відносно вибору трофічної функції $V(R, N)$ висловлюють різні припущення, зокрема припускають, що вона залежить тільки від R , причому в нулі вона дорівнює нулю, а за збільшення R вона зростає, причому має асимптоту $V=A$ (рис. 4.2).



Останнє обмеження відображає той факт, що навіть за достатності ресурсу швидкість його споживання завжди обмежена. Як свідчать результати численних реальних спостережень, вся різноманітність трофічних функцій може бути поділена на два основних великих класи. До першого класу (чи типу) належать обмежені й опуклі функції (рис. 4.2, *a*), до другого – обмежені функції S -подібного виду (рис. 4.2, *б*). Перший тип характерний для безхребетних хижаків і багатьох видів хижих риб. Звичайно такий тип трофічної функції мають хижаки, не здатні до навчання, тобто «дурні» хижаки. Другий клас трофічних функцій характерний для організмів (популяцій), які проявляють досить складну поведінку, «здатних» до навчання. Таку поведінку мають багато хребетних хижаків, яких умовно можна назвати «розумними».

4.3. Побудова моделі «хижак – жертва» для опису трофічних ланцюгів

У розглянутих раніше моделях «хижак – жертва» йшлося про два види, один з яких є споживачем, а другий – харчовим ресурсом. Насправді в реальних екосистемах нараховуються десятки різних видів, різних взаємодійних популяцій. Виявляється, що формалізація таких складних екосистем має в теперішній час певні труднощі.

Якщо розглянути деякий орієнтований граф екосистеми, наприклад, трофічний граф озерної екосистеми, вершини якого відповідні видам, що належать до екосистеми, а орієнтовані дуги з'єднують ті види, один з яких слугує їжею іншого (дуги показують шляхи руху речовин або енергії), то можна легко переконатися, що в структурі цього графа виділяються трофічні рівні – групи видів, між якими неможливі прямі трофічні зв'язки (рис. 4.3). Зокрема можна виділити такі трофічні рівні: 1-4 – зелені, синьо-зелені та діатомові водорості (1-й рівень); 5-6 – зелені водорості (1-й рівень); 7-9 – рослинноїдний зоопланктон (2-й рівень); 10-11 – хижий зоопланктон (3-й рівень); 12 – риби, що споживають хижий зоопланктон (4-й рівень); 13 – риби, що споживають рослинноїдний зоопланктон (4-й рівень); 14 – хижі птахи (5-й рівень).

Види, що належать до одного і того ж трофічного виду, звичайно перебувають або в стані конкуренції за життєві ресурси, або в коаліції у

використанні цих ресурсів (симбіоз). Тому представлена на рис. 4.3 трофічна мережа (сітка) відображає тільки взаємозв'язки між видами різних трофічних рівнів, тобто відповідна розглянутому раніше типу взаємовідносин – «хижак – жертва» (або «паразит – хазяїн») і не дає уявлення про взаємодії між видами одного рівня. У зв'язку з цим виникає потреба у створенні математичної моделі таких структур, в яких види послідовно утворюють пари «хижак – жертва». Ці послідовні пари видів утворюють такі структури (системи), які називаються трофічними ланцюгами. Трофічних ланцюгів в екосистемі може бути кілька, наприклад, на рис. 4.3 трофічні ланцюги утворюють послідовності такого виду: 1-7-10-12-14, або 6-9-13-14, або 4-8-11-12-14 та ін.

Можна агрегувати всі види, що належать одному і тому самому трофічному рівню, в один «псевдовид» або виділити з багатьох можливих ланцюгів один так званий домінувальний ланцюг, потік

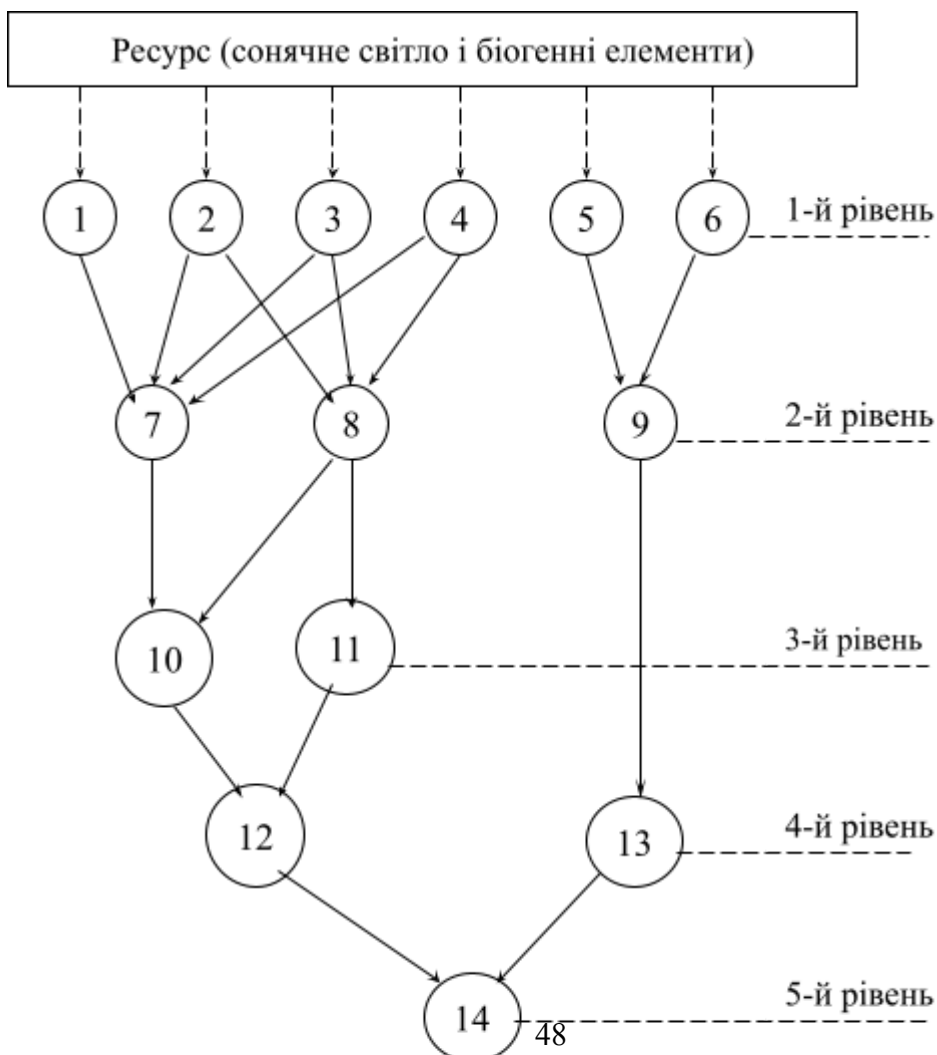


Рис. 4.3. Структурний граф-схема озерної екосистеми

речовини по якому набагато переважає потоки по інших ланцюгах, іншими словами, розглядувану трофічну мережу можна «згорнути» в трофічний ланцюг. В такому разі трофічну структуру утвореного агрегованого співтовариства можна буде описувати одним трофічним ланцюгом, в якому на кожному рівні буде розміщуватись один вид або «псевдовид», причому сам ланцюг може бути незамкненим або замкненим (рис. 4.3). Наприклад, відносно сонячного світла екосистема є незамкненою, а стосовно біогенних елементів (вуглець, азот, фосфор) екосистеми можуть частково замикатись унаслідок діяльності так званих розкладачів-деструкторів (мікроорганізми, гриби, черви), які розкладають мертву органіку до мінеральних компонентів, що слугують поживою для першого трофічного рівня (біогенні елементи).

Скориставшись зображеною на рис. 4.4 схемою трофічного ланцюга і беручи до уваги моделі (4.7) – (4.9), легко скласти диференціальні рівняння відносно біомас різних видів або «псевдовидів», що утворюють цей трофічний ланцюг, тобто:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR}{dt} = Q_0 - V_0 N_1 + \sum_{i=1}^n a_i m_i n_i; \\ \frac{dN_1}{dt} = k_1 V_0 N_1 - m_1 N_1 - V_1 N_2; \\ \frac{dN_2}{dt} = k_2 V_1 N_2 - m_2 N_2 - V_2 N_3; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \frac{dN_n}{dt} = k_n V_{n-1} N_n - m_n N_n, \end{array} \right. \quad (4.10)$$

де Q_0 – зовнішній потік ресурсу (світло); R – первинний ресурс, який знаходиться в екосистемі; N_i – біомаса i -го виду; m_i – коефіцієнт природної смертності; k_i – коефіцієнт засвоєння i -м видом біомаси (i -го виду); $V_i(N_i)$ – трофічна функція, яка показує інтенсивність взаємозв'язку типу «хижак – жертва»; $a_i < 1$ – частина оновленого деструкторами ресурсу, який міститься у відмерлій біомасі i -го виду (характеризує міру замкненості трофічного ланцюга).

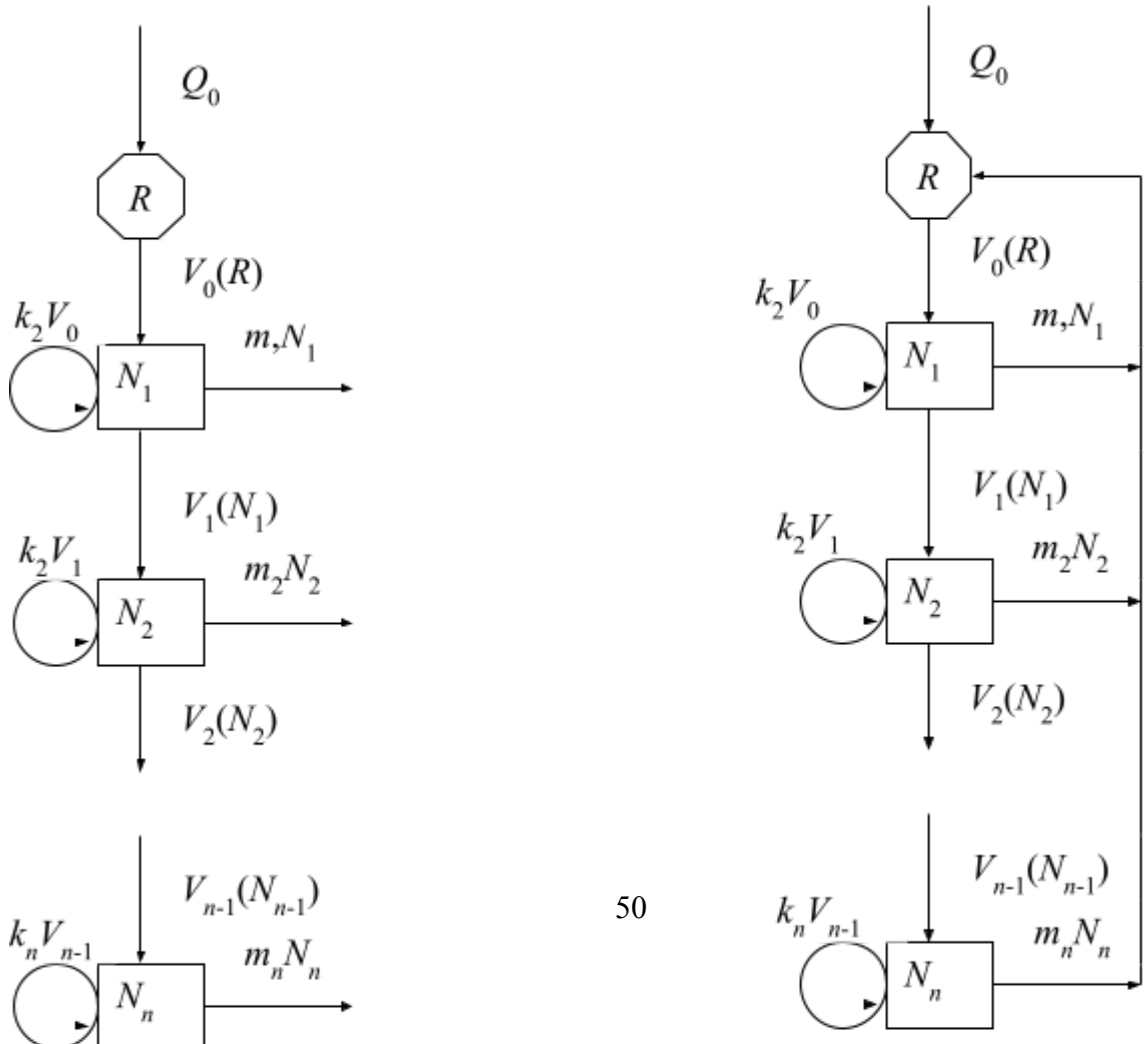
У разі незамкненого трофічного ланцюга останнього члена правої частини першого рівняння системи (4.10), що виражає масу біогенних

елементів, які надходять внаслідок розкладання органічних речовин відмерлої органіки, не буде.

Якщо розглядати окремих випадок, коли зовнішнім ресурсом є маса біогенних елементів (азот, фосфор та ін.) з потоком Q_0 , R – біомаса продуцентів, використовуваних для живлення організмів наступного трофічного рівня зі швидкістю $V_0 N_1$, де

V_0 – трофічна функція, причому N_1 – біомаса організмів другого трофічного рівня, наприклад, біомаси тварин-фітофагів (рослинноїдних), то, беручи до уваги третій трофічний рівень – хижаків, які мають біомасу N_2 , одержуємо систему трьох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = Q_0 - V_0 N_1; \\ \frac{dN_1}{dt} = k_1 V_0 N_1 - m_1 N_1 - V_1 N_2; \\ \frac{dN_2}{dt} = k_2 V_1 N_2 - m_2 N_2 - V_2 Q. \end{cases} \quad (4.11)$$



Система (4.11) є спрощеною математичною моделлю, що описує трофічний незамкнений ланцюг, який охоплює рослини, тварини-фітофаги і хижаків.

Якщо в ролі хижаків розглядати рибу, яких систематично виловлюють, то в праву частину останнього рівняння системи (4.10) треба додати член $(-V_2Q)$, що описує швидкість інтенсивності вилову.

Введемо позначення:

$$r_1 = k_1V_0 - m; \quad r_2 = k_2V_1 - m_2;$$

$$N_1 = B, \quad N_2 = P; \quad R(0) = R_0, \quad B(0) = B_0, \quad P(0) = P_0$$

і запишемо розв'язок цієї системи:

$$R(t) = R_0 + \frac{V_0B_0}{r_1} - \frac{V_0V_1V_2Q}{r_1^2r_2} + \frac{V_0V_1(r_2P_0 - V_2Q)}{r_1r_2^2} + \left(Q_0 - \frac{V_0V_1V_2Q}{r_1r_2} \right) t - \left(\frac{V_0B_0}{r_1} - \frac{V_0V_1V_2Q}{r_1r_2} + \frac{V_0V_1(r_2P_0 - V_2Q)}{r_1r_2(r_2 - r_1)} \right) e^{r_1t} + \frac{V_0V_1(r_2P_0 - V_2Q)}{r_2^2} e^{r_2t}; \quad (4.12)$$

$$B(t) = \frac{V_1V_2Q}{r_1r_2} + \left(B_0 + \frac{V_1(r_1P_0 - V_2Q)}{r_1(r_2 - r_1)} \right) e^{r_1t} - \frac{V_1(r_2P_0 - V_2Q)}{r_2(r_2 - r_1)} e^{r_2t}; \quad (4.13)$$

$$P(t) = \frac{V_2Q}{r_2} + \left(P_0 - \frac{V_2Q}{r_2} \right) e^{r_2t}. \quad (4.14)$$

Одержані розв'язки (4.12) – (4.14) виражаються через показникові функції (експоненти), які можуть мати і позитивні, і негативні показники залежно від коефіцієнтів k_1, m_1, k_2, m_2 .

Для полегшення побудови графіків розв'язків системи рівнянь (4.11) є сенс знайти стаціонарні розв'язки, тобто розв'язки за стійкого (стаціонарного) режиму описуваного цією моделлю процесу взаємодії фітопланктону, зоопланктону і риби. Як відомо, у разі стаціонарного режиму біомаси гідробіонтів не змінюються, тобто швидкість їхньої зміни дорівнює нулю. Тобто, прирівнюючи до нуля праві частини системи (4.11), одержимо модель стаціонарного процесу (якщо він відбувається):

$$\begin{aligned}
 Q_0 - V_0 B &= 0, \\
 r_1 B - V_1 P &= 0, \quad (B = N_1, P = N_2), \\
 r_2 P - V_2 Q &= 0.
 \end{aligned}$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називають біотичним потенціалом?
2. Що таке трофічна функція?
3. Який математичний апарат застосовують для опису моделі зростання популяції?
4. Які види взаємодій між популяціями використовують для побудови моделі «хижак – жертва»?
5. Яка модель є базовою для створення моделі опису взаємодії трофічних ланцюгів?

5. Математичне моделювання стану гідросфери

Вивчення стану і функціонування водних екосистем є однією з найважливіших завдань гідроекологічних досліджень.

Вплив факторів антропогенного походження на природне середовище в наш час стає настільки потужним, що людство уже не може дозволити собі ігнорувати негативні наслідки, які супроводжують досягнення виробничих цілей. Особливо яскраві прояви таких негативних наслідків можна було спостерігати під час будівництва великих гідротехнічних і гідромеліоративних систем.

5.1. Загальні принципи і методи математичного моделювання і прогнозування в гідроекологічних дослідженнях

Розглянемо стисло загальні принципи, якими звичайно керуються, розроблюючи математичні моделі гідроекологічних процесів.

Як уже йшлося, наукове пізнання закономірностей процесів і явищ, що відбуваються навколо нас, починається з цілеспрямованого

накопичення інформації про досліджуваній об'єкт чи систему, встановлення зв'язків, а також кількісних і якісних співвідношень між об'єктами, їхніми окремими елементами і характеристиками. Ці зв'язки і співвідношення виявляються в результаті глибокого аналізу накопиченої і впорядкованої інформації. Спільність зв'язків (закономірність) встановлюють емпірично, а не доводять. Все це характеризує так званий «описовий» період процесу наукового пізнання.

Відповідно до дослідження функціонування водних екосистем в умовах антропогенного впливу описовому періоду відповідною є та частина наукових досліджень, яка пов'язана з проведенням комплексних експедицій і відбором проб для вивчення різних гідрологічних, фізико-хімічних і біологічних показників у натурних умовах. Крім того, встановлюють різні фактори, особливо техногенного характеру, які справляють вплив на зміну досліджуваних показників. Потім систематизується і аналізується велика кількість накопичених даних про зв'язки і співвідношення між окремими елементами водної системи (гідрофізичними, гідрохімічними, гідробіологічними показниками водної екосистеми і діючими на них різними факторами), що дає змогу виокремити визначальні. З цих визначальних факторів інші зв'язки можуть бути виведені дедуктивно. З цього самого моменту починається перехід до якісно нового періоду досліджень, який потребує обов'язкової побудови математичних моделей гідроекологічних процесів і систем.

Математичне моделювання найчастіше застосовують для розв'язання таких проблем гідроекології:

1) дослідження процесів формування якості води в прісноводних екосистемах (річках, водосховищах, лиманах, озерах, ставках і т. ін.) в умовах інтенсивного антропогенного впливу;

2) вивчення біопродуктивності водоймищ і водотоків стосовно промислу гідробіонтів і, зокрема, для вирішення питань розведення, природного відновлення і вилову риб;

3) вивчення і прогнозування процесів міграції і накопичення токсикантів в прісноводних екосистемах та їхнього впливу на якість і продуктивність гідробіонтів;

4) екологічне оцінювання або виконання екологічної експертизи проєктів будівництва великих гідротехнічних споруд та інших народногосподарських комплексів, що взаємодіють з водними об'єктами.

Метою розроблення математичних моделей різноманітних гідробіологічних і екологічних процесів, що відбуваються у водних системах, зазвичай є більш складне завдання – побудова достатньо ефективних універсальних імітаційних моделей, за допомогою яких у діалоговому режимі з комп'ютером можна виконувати численні експерименти і прогнозувати стан досліджуваного реального процесу чи явища.

Доцільно будувати імітаційну математичну модель таким чином, щоб складові її блоки могли змінюватись залежно від розв'язання конкретної задачі чи конкретного типу задач.

Для побудови таких, хоча і не зовсім універсальних, але достатньо загальних імітаційних моделей найбільш прийнятною нині є методологія, основана на побудові багатокамерної багатокомпонентної математичної моделі. У такому разі просторову неоднорідність реальних процесів і середовища моделюють за допомогою окремих блоків і камер, а характеристики досліджуваних процесів середовища всередині камери звичайно усереднюють, тобто вважають рівномірно розподіленими в просторі всередині камери. Для математичного опису динаміки

j -показника всередині i -камери найчастіше використовують апарат звичайних диференціальних рівнянь, а також різні алгебраїчні рівняння. Якщо потрібно відобразити неоднорідність процесу всередині камери, залучають апарат диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Сукупність процесів, що визначають стан досліджуваної водної і екологічної системи, характеризується певними кількісними показниками, які в процесі моделювання обирають як змінні або постійні (сталі) величини. Обрані змінні і постійні величини (постійні величини в такому разі називають параметрами) мають кількісно характеризувати стан і взаємозв'язки різних компонентів екосистем. Звичайно для такої кількісної характеристики абіотичних процесів

розглядають концентрації c^{ij} j -ї речовини в i -й камері, а для опису біологічних процесів користуються біомасою B^{ij} або чисельністю N^{ij} виду досліджуваного гідробіонта. Потім, спираючись на фундаментальні закони фізики (закон збереження речовини, закон збереження енергії та інші), а також на основні закони фізико-хімічної кінетики, складають баланс круговороту речовини й енергії в досліджуваній водній системі, зважаючи на фізичні, хімічні і біологічні процеси, що в ній відбуваються.

Сукупність отриманих балансових і кінетичних співвідношень між змінними c^{ij} , B^{ij} ($i = \overline{1, n}$ $j = \overline{1, m}$) і різними сталими (параметрами), які, як уже зазначено, зазвичай записують у вигляді алгебраїчних і диференціальних (інтегральних) рівнянь, є основою імітаційної динамічної моделі, яка дає змогу за допомогою комп'ютера вираховувати, прогнозувати, оцінювати, аналізувати і «програвати» (імітувати) різні варіанти зміни в просторі і часі розглядуваних у моделі величин (показників) залежно від зовнішніх і внутрішніх факторів, які суттєво впливають на стан і розвиток водної екосистеми.

Аналізуючи умови формування якості води у водоймі, встановлюють основні фактори якості води, що впливають на зміну концентрації того чи іншого інгредієнта. До таких факторів належать:

- 1) зміна річкового стоку чи пропусків через дамбу ГЕС;
- 2) взаємодія з підземними водами;
- 3) вплив вод, що надходять з водозбірної площі у вигляді стоку річок, що впадають у водойму;
- 4) надходження дренажних вод з гідромеліоративних систем;
- 5) інтрузія морської води для лиманів та естуарій;
- 6) седиментація завислих у водяній товщі частинок;
- 7) скаламучення донних відкладень;
- 8) безповоротне водоспоживання;
- 9) надходження забруднень з промисловими і побутовими стоками;
- 10) трансформація речовини (інгредієнтів) унаслідок фізико-хімічного, радіоактивного чи біологічного перетворення;

11) взаємодія з гідробіонтами.

Для вивчення ступеня впливу кожного із згаданих чинників треба встановити основні фізичні, хімічні і біологічні закони, які зумовлюють поширення речовин (домішок) у досліджуваному водоймищі.

Основними механізмами поширення речовини в рухомому потоці рідини є такі:

- 1) розчинення і перемішування речовини (домішки) в потоці, що рухається;
- 2) захоплення частинок перемішаної або розчиненої у воді речовини потоком, що рухається;
- 3) молекулярна і турбулентна дифузія речовини, спрямована на вирівнювання концентрації цієї речовини в потоці рідини, що перебуває в стані спокою чи руху.

Після попадання у водоймище речовина розсіюється у товщі води внаслідок молекулярної та турбулентної дифузії як за напрямком течії, так і перпендикулярно до неї. Крім того, вона захоплюється течією і поширюється вздовж течії зі швидкістю, яка дорівнює середній швидкості течії. Для математичного опису цього процесу треба знати швидкість течії води та інтенсивність (коефіцієнт) турбулентної, а в нерухомій воді – молекулярної дифузії. Знаходження середньої швидкості руху води не є складною проблемою, оскільки ця задача може бути вирішена або на підставі безпосередніх натурних вимірювань, або за допомогою математичних методів гідродинаміки. Набагато складнішою задачею є визначення або оцінювання зміни коефіцієнта турбулентної дифузії. Однак зміна коефіцієнта турбулентної дифузії в широкому діапазоні мало впливає на кінцеву характеристику поширення забруднювальної речовини, особливо коли розглядається поширення речовини в потоці, що рухається, на великі відстані.

Позначимо складові (компоненти) вектора V – усередненої швидкості течії через V_x , V_y , V_z , а коефіцієнти турбулентної дифузії в поздовжньому (збігається з віссю абсцис Ox), в поперечному (збігається з віссю Oy) і вертикальному (збігається з віссю Oz) напрямками як D_x , D_y , D_z . Тоді відповідно до закону Фіка поздовжній потік речовини з

концентрацією $c(x, y, z, t)$ визначається виразом $V_x c - D_x \frac{\partial c}{\partial x}$, поперечний

потік – виразом $V_y c - D_y \frac{\partial c}{\partial y}$, а вертикальний – $V_z c - D_z \frac{\partial c}{\partial z}$.

Скориставшись законом збереження маси речовини, складаємо рівняння балансу неконсервативної речовини, що поширюється в рухомому потоці рідини (у воді), у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних:

$$-\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} - V_x c \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial c}{\partial y} - V_y c \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} - V_z c \right) - \alpha^* c + f(x, y, z, t), \quad (5.1)$$

де α^* – стала швидкості седиментації, яка містить і сталу неконсервативності у випадку лінійного закону трансформації речовини; $f(x, y, z, t)$ – член, що відображає внутрішні джерела і стоки (самоочищувальна здатність, самопоглинання гідробіонтами та ін.)

Для розв'язання рівняння (5.1) потрібні також значення початкових і граничних умов, які в розглядуваній задачі можна задати у такому вигляді:

$$c(x, y, z, t_0) = c_0(x, y, z); \quad (5.2)$$

$$c(x_1, y, z, t) \Big|_{x=x_1} = c_1(y, z, t), \quad -\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=x_2} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial n} = 0, \quad (5.3)$$

де $x=x_1$ – абсциса вхідного поперечного перетину (верхній створ); $x=x_2$ – абсциса вихідного поперечного перетину (нижній або замикальний створ) розглядуваного водоймища; n – зовнішня нормаль до поверхні ложа і до дзеркала водоймища (лиману, водосховища, ріки тощо).

У разі надходження речовини з опадами замість рівності нулю нормальної похідної на дзеркалі водоймища треба задати потік речовини, який визначається рівністю

$$\left[V_z c - D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right]_{z=0} = c_{\text{оп}} q_{\text{оп}}, \quad (5.4)$$

де як $q_{\text{оп}}$ позначимо кількість води, що надходить на одиницю площі дзеркала водоймища з атмосферними опадами за одиницю часу (потік),

а через $c_{\text{оп}}$ – концентрацію забруднювальної речовини, що містилась в опадах.

Якщо забруднювальна речовина (або сіль) надходить з дна внаслідок вилуговування або інфільтрації підземних вод, то на межі з дном слід також задати величину надходження солей з дна у вигляді однієї з таких рівностей:

$$\left[V_z c - D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right]_{z=h} = c_\phi v_\phi;$$

$$c(x, y, h, t) = c_\phi, \quad (5.5)$$

де c_ϕ – концентрації солей у підземних водах; v_ϕ – вертикальна складова вектора швидкості фільтрації; h – глибина водоймища.

Таким чином, за відомих величин $V_x, V_y, V_z, D_x, D_y, D_z, f(x, y, z, t)$ і α^* питання про просторове і часове розподілення у водоймищі забруднювальних речовин зводиться до розв'язання рівняння (5.1) за початкових і граничних умов (5.2)–(5.5). Найбільш ефективними методами розв'язання таких задач є чисельно-аналітичні і чисельні методи.

Наведена математична модель процесу поширення речовини у водоймищі чи водотоці може бути базою для створення імітаційної моделі формування якості води у водній екосистемі як за гідрохімічними, так і за біологічними показниками.

5.2. Побудова імітаційної моделі гідрохімічного режиму водних об'єктів

Розділимо водний об'єкт на n камер і введемо для кожної камери такі величини:

- 1) q^{ij} і c^{ij} – загальна витрата (скид) води транзитної течії з i -ї камери в $(i+1)$ -у камеру і концентрація j -ї речовини (солей) в i -й камері;
- 2) q^{i-1} і $c^{i-1,j}$ – витрата (скид) транзитної течії з $(i-1)$ -ї камери і концентрація в ній j -ї речовини;

3) q_k^i і c_k^{ij} – витрата води k -го водотоку (річки, каналу), що впадає в i -у камеру і концентрація j -ї речовини в цьому водотоці (джерелі забруднення);

4) q_{Φ}^i і c_{Φ}^{ij} – фільтраційна витрата підземних вод і концентрація в них j -ї речовини (солей);

5) $q_{оп}^i$ і $c_{оп}^{ij}$ – кількість (потік) опадів, які випали на водне дзеркало i -ї камери і концентрація в них j -ї речовини;

6) $q_{бв}^i$ – величина (витрата) беззворотного водоспоживання;

7) $q_{вп}^i$ – величина (витрата) випаровування з водної поверхні i -ї камери;

8) $m_{дв}^{ij}(c^{ij}, c_{дв}^{ij}, t)$ – кількість (потік) j -ї речовини, що надходить в i -у камеру з донних відкладень, або величина, яка відображає масообмін j -ї речовини на межі з донними відкладеннями i -ї камери;

9) α^{ij} і λ^j – стала (константа) швидкості седиментації і стала хімічного, біологічного або радіоактивного розпаду;

10) $W_i(t), W_0^i$ – об'єм i -ї камери в момент часу t і початковий момент $t = t_0$.

11) $F^{ij}(c^{ij}, c_{гб}^{ij}, t)$ – величина (функція), яка відображає масообмін j -ї речовини між водним середовищем і гідробіонтами i -ї камери;

12) t – час у добах (або в місяцях).

Згідно із законом збереження маси речовини $M^{ij}(t)$ диференціальне рівняння балансу цієї речовини в i -й камері матиме такий вигляд:

$$\frac{dM^{ij}}{dt} = q^{i-1} c^{i-1} m^i + \sum_{k=1}^{n_j} q_k^i c_k^{ij} + q_{\Phi}^i c_{\Phi}^{ij} + q_{оп}^i c_{оп}^{ij} + \frac{ij}{дв} \left(\frac{ij}{дв}, \frac{ij}{дв} \right) - \left(\frac{i}{бв} + \frac{i}{бв} \right) \frac{ij}{дв} - \alpha \left(\frac{ij}{\lambda} \right) W^i c^{ij} - F^{ij} \left(c^{ij}, c_{гб}^{ij}, t \right) \quad (5.6)$$

$$M^{ij}(t) = c^{ij}(t)W^i(t) = c^{ij}(t) \left[W_0^i + \left(q^{i-1} + \sum_{k=1}^{n_j} q_k^i + q_{\Phi}^i + q_{\text{оп}}^i - q^i - q_{\text{бв}}^i - q_{\text{вп}}^i \right) t \right]. \quad (5.7)$$

де
Враховуючи останню рівність, рівняння (5.6) запишемо відносно невідомої концентрації c^{ij} j -ї речовини:

$$\frac{dc^{ij}}{dt} = \frac{1}{W^i} \left[q^{i-1} c^{i-1,j} + \sum_{k=1}^{n_i} q_k^i c_k^{ij} + q_{\Phi}^i c_{\Phi}^{ij} + q_{\text{оп}}^i c_{\text{оп}}^{ij} + m_{\text{дв}}^{ij} (c^{ij}, c_{\text{дв}}^{ij}, t) - \left(q^i + q_{\text{бв}}^i + \frac{dW^i}{dt} \right) c^{ij} \right] - (\alpha^{ij} - \lambda^i) c^{ij} - (\alpha^{ij} - \lambda^i) c^{ij} \quad (5.8)$$

До рівняння (5.8) слід додати рівняння водного балансу, записаного для i -ї камери:

$$\frac{dW^i(t)}{dt} = q^{i-1} + q_{\Phi}^i + q_{\text{оп}}^i + \sum_{k=1}^{n_j} q_k^i - q^i - q_{\text{бв}}^i - q_{\text{вп}}^i;$$

$$W^i(0) = W_{\Phi}^i + \left(q_{\text{оп}}^{i-1} + q^i + q^i + \sum_{k=1}^{n_j} q_k^i - q^i - q^i \right) t. \quad (5.9)$$

Одержана система диференціальних рівнянь (5.8) – (5.9) вигідно відрізняється від рівняння (5.6):

1) вона досить проста, а методи розв'язання таких систем звичайних диференціальних рівнянь добре опрацьовані;

2) ця система більш інформативна, ніж рівняння (5.6) з граничними умовами (5.7), що робить її більш адекватною досліджуваному (модельованому) процесу.

Під інформативністю тієї чи іншої математичної моделі розуміють її здатність (можливість) максимально використовувати дані натурних і експериментальних спостережень.

У випадках, коли більша точність опису окремих елементів системи чи явища не може бути досягнута з об'єктивних причин або така точність не потрібна для поставленої задачі, завжди вдаються до простіших, але більш інформативних математичних моделей. Введені під час побудови моделі невідомі змінні величини (функції), за допомогою яких описано стан водного об'єкта, зокрема його межі, будемо називати компонентами цієї аналітичної математичної або імітаційної моделі.

В імітаційній моделі (5.8) – (5.9) шуканими величинами є $c^{ij}(t)$ і $W^i(t)$, тому модель називається двокомпонентною. Якщо досліджуваний водний об'єкт і його межа діляться на n камер, то відповідна система рівнянь (5.8) і (5.9), де $i = \overline{1, n}$, називається двокомпонентною n -камерною моделлю.

У вивченні гідрохімічного режиму водоймищ, особливо водосховищ, велике значення має визначення концентрації j -ї речовини в донних відкладеннях. Тому, позначивши як $c_{дв}^{ij}$ концентрацію j -ї речовини в донних відкладеннях, що вимірюється кількістю речовини на одиницю площі верхнього (активного) шару донних відкладень, матимемо рівняння динамічного балансу:

$$\frac{dM_{дв}^{ij}}{dt} = \alpha^{ij} W^i c^{ij} - (\beta^{ij} + \lambda^j) S_{дв}^i c_{дв}^{ij}, \quad (5.10)$$

де β^{ij} – стала інтенсивності скаламучування.

Оскільки $M_{дв}^{ij} = S_{дв}^i c_{дв}^{ij}$; $W^i = S_{дв}^i h_{ср}^i$, де $S_{дв}^i$ – площа дна i -го водоймища (камери), $h_{ср}^i$ – середня глибина водоймища (камери), то вираз (5.10) можна представити як

$$\frac{dc_{дв}^{ij}}{dt} = \alpha^{ij} h_{ср}^i c^{ij} - \left(\beta^{ij} + \lambda^j + \frac{dS_{дв}^i}{S_{дв}^i dt} \right) c_{дв}^{ij}. \quad (5.11)$$

Система рівнянь (5.8) – (5.9) і (5.11) називається трикомпонентною моделлю гідрохімічного і водного режимів або двокомпонентною моделлю гідрохімічного режиму.

На процеси седиментації завислих або сорбованих на зависях частинок j -ї речовини і на інтенсивність скаламучування донних відкладень великий вплив має глибина водоймища (чи водотоку) або глибина деяких його ділянок. Тому для визначення концентрації домішок у водній товщі і в донних відкладеннях доцільно будувати більш точну чотирикомпонентну модель. Для цього на розгляд вводять

дві камери (підобласті), що розділяють донні відкладення на глибоководну і мілководну ділянки і враховують у рівнянні динамічного балансу їхні площі і концентрації домішок на цих ділянках.

5.3. Фільтрація і математичні моделі руху підземних вод

Під фільтрацією розуміють повільний рух (просочування) рідини, газу, розчину або газованої рідини в пористому або тріщинуватому середовищі.

Об'єм ґрунту W складається з об'єму $W_{\text{ч}}$ – частинок ґрунту і об'єму $W_{\text{п}}$ – пустот. Співвідношення між об'ємом, що займає скелет ґрунту, і об'ємом його пустот характеризується коефіцієнтом пористості (пористістю ґрунту). Цей параметр визначається як

$$\sigma = \frac{W_{\text{п}}}{W} = \frac{W_{\text{п}}}{W_{\text{п}} + W_{\text{ч}}}$$

Частина води зазвичай постійно утримується ґрунтом за допомогою молекулярних сил (капілярна і плівкова вода), а частина переміщується під дією сил тяжіння (гравітаційна вода).

Для вивчення процесу забруднення підземних вод різними речовинами, що надходять зі сховищ побутових і промислових відходів, полів фільтрації, ставків-охолоджувачів і т. ін., потрібно знати основні гідродинамічні характеристики підземних водних горизонтів та їхньої потужності (товщини). Такі характеристики, як коефіцієнт фільтрації, пористість, коефіцієнт водовіддачі, визначають лабораторними методами.

Потужність водоносних горизонтів, швидкість фільтрації і витрати визначають в натурних умовах.

Однак визначення швидкостей фільтрації і витрат експериментальним способом становить великі труднощі і коштує дуже дорого. Більше того, експериментальні методи визначення гідродинамічних характеристик є недостатньо точними і надійними. Тому найбільш ефективними і надійними методами визначення

основних фільтраційних характеристик – швидкостей фільтрації і фільтраційних витрат є розрахунковий метод із застосуванням математичного моделювання.

Якщо для вивчення процесів забруднення і самоочищення поверхневих вод методами математичного моделювання можна обмежитись застосуванням камерних нульмірних моделей, які будують на основі системи звичайних диференціальних рівнянь, а гідродинамічні характеристики потоку визначають або експериментально, або за допомогою спеціальних гідродинамічних моделей, які можна описати рівняннями в частинних похідних, то застосування математичного моделювання в гідроекологічних дослідженнях підземних вод ґрунтується тільки на вирішенні крайових задач для рівнянь у частинних похідних. Тому другою важливою характеристикою ґрунту є коефіцієнт водовіддачі (активна пористість):

$$\sigma = \frac{W_{\text{гр}}}{W} = \frac{W_{\text{гр}}}{W_{\text{п}} + W_{\text{ч}}},$$

де $W_{\text{гр}}$ – об'єм, який займає гравітаційна вода, здатна витікати або втікати в об'єм W ґрунту під тиском сили тяжіння.

Просочування води за межу сухого або водонасиченого ґрунту в розглядуваний об'єм водонасиченого ґрунту називається інфільтрацією.

Зворотний рух води може відбуватись як наслідок випаровування, транспірації, капілярного підняття.

Інфільтрація і випаровування (транспірація) характеризуються кількістю рідини, яка надходить через одиничну горизонтальну площу за одиницю часу.

Величина ε називається питомою величиною інфільтрації або випаровування (транспірації).

Потік води, що охоплює ділянку фільтрації, називається фільтраційним, чи підземним, потоком.

Якщо властивості ґрунту проявляються однаково в усіх напрямках простору, то такий ґрунт (або пористе середовище) називають ізотропним, якщо проявляються інакше – анізотропним.

Для математичного опису процесу фільтрації реальний потік рідини замінюють деяким фіктивним фільтраційним потоком, що безперервно заповнює розріз пористого середовища. При цьому вважають, що витрата, яка визначається кількістю рідини, що протікає через будь-яку одиничну площадку розглядуваного розрізу за одиницю часу у фіктивному потоці, дорівнює витраті реального (дійсного) фільтраційного потоку. Для фіктивного потоку тиск на вибрану площадку дорівнює тиску реального потоку на ту саму площадку, а сили опору, які розглядають як масові (об'ємні) сили, для фіктивного потоку у виділеному об'ємі мають дорівнювати реальним силам для того самого об'єму.

Для визначення середньої швидкості руху частинок рідини в пористому середовищі вводять статистичні поняття про швидкість фільтрації.

Нехай через площадку ΔS за одиницю часу (добу) протікає ΔQ об'ємних одиниць (м^3) рідини. Тоді середнє значення швидкості фільтрації визначається рівністю

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta S},$$

а швидкість фільтрації v в розглядуваній точці становить

$$v = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}.$$

Істинна середня швидкість $V_{\text{ср}}$ руху води крізь пори, площа яких дорівнює $\Delta S_{\text{п}}$, буде:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta S_{\text{п}}} = \frac{\Delta Q}{\sigma \Delta S_{\text{п}}} = \frac{v_{\text{ср}}}{\sigma}.$$

Аналогічно істинна швидкість V руху рідини в точці становить

$$V = \frac{v}{\sigma}; \quad \sigma = \sigma.$$

Якщо ввести вектор швидкості фільтрації $v = (v_x, v_y, v_z)$ і вектор істинної швидкості руху рідини $V = (V_x, V_y, V_z)$, то відповідно отримаємо:

$$V_x = \frac{v_x}{\sigma}; V_y = \frac{v_y}{\sigma}; V_z = \frac{v_z}{\sigma}.$$

Закон Дарсі (1856 р.) – основний закон, якому підпорядковується рух рідини в пористому середовищі (встановлений експериментально): *швидкість фільтрації пропорційна градієнту напору і спрямована в бік його зменшення.*

Напір визначається як

$$h = \frac{p}{\rho g} + z = \frac{p}{\gamma} + z,$$

де p – тиск; ρ – густина рідини; g – прискорення сили тяжіння; z – геометрична висота над деякою горизонтальною площиною (віссю порівняння; $\gamma = \rho g$ – питома вага; $p/\rho g$ – п'єзометричний напір (рівень води в п'єзометрі – вертикальній трубці, встановленій нижнім кінцем у точці, де вимірюється напір).

Тоді закон Дарсі можна записати так:

$$V = -\chi \frac{\Delta h}{\Delta L} = -\chi J,$$

де $\Delta h = h_2 - h_1$ – зміна напору на ділянці фільтраційного потоку завдовжки ΔL ; χ – коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт фільтрації), який має розмірність швидкості фільтрації v ; $J = \Delta h / \Delta L$ – градієнт напору.

У диференціально-векторній формі закон Дарсі, одержаний Жуковським (1899 р.):

$$v = -\chi \text{grad } h = -\chi \nabla h. \quad (5.12)$$

У скалярній формі:

$$v_x = -\chi \frac{\partial h}{\partial x}; v_y = -\chi \frac{\partial h}{\partial y}; v_z = -\chi \frac{\partial h}{\partial z}. \quad (5.13)$$

До рівнянь (5.12) треба додати рівняння нерозривності фільтраційного потоку (закон збереження маси речовини) для недеформованого середовища і нестискуваної рідини ($\rho = \text{const}$):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (5.14)$$

Рівняння (5.13) і (5.14) з чотирма невідомими функціями v_x , v_y , v_z і h утворюють повну систему диференціальних рівнянь усталеної фільтрації важкої нестискуваної рідини.

Якщо в рівняння нерозривності (5.14) замість v_x , v_y , v_z підставити їхні вирази з рівностей (5.13), то у разі однорідного середовища ($\chi = \text{const}$) одержуємо однорідне рівняння (рівняння Лапласа):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Для спрощення моделі розглядають тільки плоско-паралельний рух рідини, який може відбуватись або у вертикальній площині (профільна фільтрація), або у горизонтальній (планова фільтрація). Але навіть за таких спрощень точний розв'язок рівнянь фільтрації за певних граничних умов вдається одержати тільки в деяких випадках, причому отримання розв'язку в цих випадках пов'язане з великими математичними труднощами, подолати які можна тільки за допомогою спеціальних методів (наприклад, за допомогою методу конформних відображень).

Запитання для самоперевірки

1. Для вирішення яких задач з гідроекології застосовують математичне моделювання?
2. Яким чином доцільно будувати імітаційну модель гідроекологічних процесів?
3. Які основні фактори встановлюють в процесі аналізу умов якості води у водоймищі?
4. Назвіть основні механізми поширення речовини в рухомому потоці рідини.
5. Що розуміють під поняттям «інформативність моделі»?

6. Визначте поняття фільтрації.
7. Які підходи застосовують для спрощення аналітичної моделі руху підземних вод?

6. Застосування математичного моделювання для дослідження процесів в ґрунтах

Сучасна концепція розглядає ґрунти як геомембрану планети, аналогічну біомембранам, яка здатна вибірково відбивати, поглинати чи пропускати і трансформувати енергетичні та матеріальні потоки між внутрішніми та зовнішніми оболонками землі. Ґрунти є механізмом, що регулює взаємодію між геосферами, а також між біотою, літосферою, гідросферою та атмосферою в межах біосфери планети. Ґрунти в системі геосфер відіграють роль однієї з земних оболонок – педосфери, виконуючи ряд глобальних функцій.

Перша глобальна функція ґрунтів – це забезпечення життя на Землі. У ґрунтах сконцентровані хімічні елементи і сполуки, потрібні для життєдіяльності мікроорганізмів, вода і поживні речовини для рослин. Ґрунт також є середовищем функціонування хребетних та безхребетних тварин. Така функція ґрунтів називається *родючістю*.

Друга глобальна функція ґрунтів – це забезпечення взаємодії великого і малого біологічних круговоротів речовини на земній поверхні.

Всі біогеохімічні цикли елементів, таких як C, N, O_2 , а також потокоутворювальні цикли води відбуваються саме через ґрунти як геомембрани, з одного боку, і як акумулятор біофілів – з другого. Ґрунти – це сполучна ланка, що регулює геологічну й біологічну циркуляцію елементів у біосфері на поверхні Землі.

Третя глобальна функція ґрунтів – це регулювання складу атмосфери і гідросфери. Висока пористість ґрунтів і густе заселення коренями рослин та мікроорганізмами зумовлює газообмін між ґрунтом і приземною атмосферою: із ґрунту в атмосферу постійно надходять гази; водночас із атмосфери ґрунти поглинають кисень, потрібний для процесів окиснення. У глобальному круговороті води ґрунти віддають у

поверхневий і підземний стоки розчинні у воді хімічні елементи та речовини.

Четверта глобальна функція ґрунтів – це регулювання інтенсивності біосферних процесів. Ґрунти мають здатність обмежувати життєдіяльність тих чи інших організмів через високу кислотність або лужність, низьку окиснюваність, вологоємність, наявність токсикантів тощо, а також обмежувати ріст рослин через нестачу тепла, води або тих чи інших поживних речовин.

П'ята глобальна функція ґрунтів – нагромадження на поверхні органічної речовини – гумусу і пов'язаної з цим хімічної енергії. У біологічних циклах синтезу і розпаду речовин, що постійно відбуваються на земній поверхні, ґрунти є акумулятором кінцевих продуктів цих циклів, забезпечуючи їхню повторюваність і стійкість завдяки функції продуктивності.

Шоста глобальна функція ґрунтів – захищати літосферу від інтенсивної дії екзогенних факторів, тобто від руйнування і змивання в моря і океани.

6.1. Математичне моделювання і прогнозування хімічного забруднення ґрунтів

Основними джерелами забруднення ґрунтів є хімічні речовини, використовувані в сільському господарстві (міндобрива, отрутохімікати), атмосферні опади в радіусі дії промислових підприємств; видобування корисних копалин; теплові й атомні електростанції.

Хімічне забруднення ґрунтів відбувається переважно двома шляхами: внаслідок поглинання верхнім шаром ґрунту викидів промислових джерел в атмосферу та безпосереднього внесення хімічних речовин у ґрунт.

У першому випадку математична модель істотно залежить від структури перенесення забруднень повітряним шляхом, висоти, потужності джерела забруднень і відстані від нього.

Моделювання одновимірного поля забруднень. Припустимо, що взаємодія домішок з поверхнею ґрунту відбувається за таким законом:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \alpha U + \beta,$$

коли допускається можливість проникнення і відкидання домішок.

Як вихідне рівняння об'єкта покладено:

$$L(x, y, z) = M_1 \delta(x) \delta(y) \delta(z - h) + M_2 \delta(x) \delta(y) f(z), \quad (6.1)$$

де $L(x, y, z)$ – рівняння дифузії в тривимірному просторі; перший доданок характеризує джерело викидів на висоті h (домішки надходять через трубу); другий доданок – неорганізовані викиди заводів.

Функція $f(z)$ може мати різний вигляд. Наприклад, якщо

$$f(z) = \begin{cases} c & \text{за } 0 \leq z \leq h; \\ 0 & \text{за } z > h \end{cases}$$

то припустимою є лінійність джерела з постійною потужністю викидів c на відріжку $[0; h]$ і нульова потужність за $z > h$.

Якщо $f(z) = \begin{cases} a_0 z^2 + a_1 z + a_2 & \text{за } z \leq h; \\ 0 & \text{за } z > h \end{cases}$ – потужність джерела

домішок розподілена за параболою.

Застосовуючи метод прямих до рівняння (6.1) для розрахунку забруднення за одновимірним профілем, дістанемо рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha U(x) + f(x) = 0$$

6.2. Моделювання антропогенного впливу пестицидів та радіонуклідів на ґрунти

За реальних умов життєдіяльності людина може опинитися під дією як кількох хімічних речовин, так і однієї речовини, яка надходить в

організм різними шляхами – з повітря, води, їжі. Такий вплив називається комплексним впливом ксенобіотиків. Комбінований і комплексний вплив ксенобіотиків, залежно від рівня їхнього вмісту в компонентах природного середовища, оцінюється інтегральним показником, який дістав назву максимально допустимого навантаження. В основу цього поняття покладено оцінку середовища за окремими факторами, коли використовують такі показники: гранично допустимі концентрації (ГДК), гранично допустимі рівні (ГДР), допустимі залишкові кількості (ДЗК) тощо.

Одним з можливих підходів до визначення та інтегральної оцінки впливу пестицидів на здоров'я людей є вивчення динаміки їхнього поширення і трансформації в різних середовищах, зокрема в ґрунтах. Теоретичною моделлю розчинення, перенесення, поглинання і розпаду пестицидів у ґрунтах у разі одновимірного руху в розчині в пористому середовищі є рівняння дифузії

$$m_0 \frac{\partial U}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - V \frac{\partial U}{\partial c} - \frac{\partial b}{\partial t} - \alpha U + f(x),$$

де $D = D_M + \lambda|V|$ – дифузійна складова; α – коефіцієнт швидкості розпаду пестицидів; U – концентрація пестициду в розчині;

V – швидкість фільтрації; $\frac{\partial b}{\partial t}$ – швидкість розчинення пестициду у воді;
 $f(x)$ – функція поглинання пестициду кореневою системою.

Кінетику процесу розчинення і розпаду можна описати рівнянням першого порядку

$$\frac{\partial b}{\partial t} = v(U_m - U) - k_1 b,$$

де k_1, v – константи розпаду речовини в твердій фазі (в сухих ґрунтах);
 U_m – концентрація насичення; b – концентрація пестициду в твердій фазі ґрунтів.

У наш час часто обмежуються розглядом «точкових» моделей, хоча таке спрощення може бути вкрай небезпечним, оскільки усереднюючи поведінку пестициду в просторі, тим самим не беруть до уваги можливість накопичення його в окремих точках простору за межами норм гранично допустимих концентрацій (ГДК).

Процес розкладу речовини в ґрунтах відбувається пропорційно поточній концентрації цієї речовини, а весь комплекс факторів, що впливає на зміну концентрації пестицидів і радіонуклідів у часі виражається через усереднений коефіцієнт k . Кінетику розкладу пестицидів і радіонуклідів у часі можна записати рівнянням

$$\frac{dU(t)}{dt} = -kU(t),$$

розв'язок якого має такий вигляд:

$$U(t) = U_0 e^{-kt},$$

де $U(t)$ – кількість пестициду на момент часу t ; U_0 – початкова концентрація пестициду, k – константа швидкості реакції розпаду пестицидів; t – час.

Основним параметром хімічної кінетики є швидкість її реакцій, яку обчислюють так:

$$k = \frac{2,303}{t} \lg \frac{U_0}{U(t)}. \quad (6.2)$$

Час деструкції пестициду характеризується періодом напіврозпаду.

Період напіврозпаду $T_{1/2}$ – це проміжок часу, протягом якого початкова концентрація речовини зменшується в два рази. Якщо відомий коефіцієнт k , період напіврозпаду обчислюють за формулою

$$T_{1/2} = 0,693/k.$$

Час розпаду до безпечних концентрацій – це проміжок часу, протягом якого початкова концентрація речовини зменшується до рівня ГДК, тобто $U(t) = U_{\text{ГДК}}$.

Як впливає з формули (6.2), час розпаду пестицидів дорівнює:

$$t_r = \frac{2,303(\lg U_0 - \lg U(t))}{k}$$

Запитання для самоперевірки

1. Назвіть основні глобальні функції ґрунтів.
2. За допомогою рівнянь якого виду може бути подана модель розчинення, перенесення, поглинання та розпаду пестицидів в ґрунтах в разі одновимірного руху в пористому середовищі?
3. У чому полягає «точкова» модель?
4. Яке рівняння можна застосувати для опису кінетики процесу розчинення і розпаду речовини у ґрунтах?

7. Моделі клімату

Модель клімату належать до так званих глобальних математичних моделей (разом з моделями глобального круговороту хімічних речовин, глобальних біогеохімічних циклів та ін.), а нерідко і доповнює їх.

Поняття «клімат» було введено Гіппархом Нікейським (190-125 рр. до н. е.). Грецькою мовою слово «клімат» означає нахил. Вже в ті часи греки, знаючи, що Земля являє собою кулю, пояснювали різні умови життя на нашій планеті нахилом сонячних променів до її поверхні.

Згідно з сучасними поглядами «клімат – це статистичний ансамбль станів, які проходить система океан – суша – атмосфера за періоди часу в кілька десятиліть». У цьому визначенні відображена роль трьох

компонент, які роблять основний внесок у стан навколишнього середовища: інерційність океану, легка нестійка атмосфера і суходіл, який найбільше зазнає впливу людини. Стан кожної з трьох компонент описують тривимірними полями термодинамічних і механічних змінних, які залежать від часу.

Для атмосфери – це поля тиску p , температури T і густини ρ , концентрації водяної пари c та інших термодинамічно і оптично активних домішок, опадів P , хмарності C .

Для океану треба знати розподіл солоності s і насиченості прісної води киснем, вуглекислим газом та іншими газами.

Стан поверхні суходолу визначають за його шорсткістю, теплоємністю верхнього активного шару, вологістю, наявністю і товщиною снігового або льодяного покриву, типом та інтенсивністю рослинності.

Набір цих чотиривимірних просторово-часових полів являє собою опис навколишнього середовища з погляду математичної фізики.

Досить повні набори величин, які характеризують стан атмосфери й океану, одержано завдяки глобальним міжнародним геофізичним програмам і супутниковій метеорології.

У ряду напрямів науки про навколишнє середовище теорія клімату і його змін є найбільш розробленою в тому сенсі, що вона з часу свого виникнення спирається на класичні науки: гідромеханіку, термодинаміку, обчислювальну математику. У теперішній час розроблено і реалізовано ієрархію кліматичних моделей, яка охоплює термодинамічні, статистичні, радіаційно-конвективні і гідродинамічні моделі. Кожну з них можна розглядати як складову науки про біосферу, що, крім опису клімату, має включати формалізацію екологічних процесів і процесів людської діяльності.

7.1. Енергобалансові моделі клімату

Побудова і застосування сучасних енергобалансових моделей (ЕБМ) клімату свідчать про їхню ефективність: виявилось, недоступну раніше інформацію можна отримати, використовуючи математичні залежності.

ЕБМ за своїм визначенням описує баланс енергії у відкритій фізичній системі, якою є земний клімат. У припущенні про локальність рівноваги в цілому нерівноважної кліматичної системи рівняння енергії записують у такій формі:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = s(1 - \alpha) - I - Q, \quad (7.1)$$

де T – температура; c – ефективна теплоємність одиниці площі кліматичної системи; s – потік сонячного випромінювання на верхню межу атмосфери; α – альbedo (коефіцієнт відбивання) системи атмосфера – земля і атмосфера – океан; I – інтенсивність довгохвильового теплового випромінювання атмосфери, що виходить з її верхньої межі в космос; Q – кількість тепла, що покидає розглядуваний об'єм кліматичної системи внаслідок адвекції (горизонтального перенесення) і перенесення прихованого тепла, що міститься у водяній парі, яка захоплюється течією повітря.

Величини α , I та Q звичайно подають у вигляді емпіричних функцій температури і рівняння (7.1) стає достатнім для її визначення.

Переважає більшість розв'язаних за допомогою ЕБМ задач стосується так званого середньорічного режиму, коли завдяки усередненню за тривалий час τ можна знехтувати похідною за часом у лівій частині рівняння (7.1). Існують великі розбіжності стосовно часу усереднення. За теперішніми оцінками, τ набуває значення від трьох місяців до 10 років.

ЕБМ застосовують для розрахунку сезонної переміни клімату. Для цього потрібно знати теплоємність c , яка переважно залежить від ще недостатньо добре вивченої взаємодії океану й атмосфери. Звичайно рівняння (7.1) усереднюється за довготою, в результаті чого отримують так звану *зональну ЕБМ клімату*.

Перші розрахунки в усіх сферах дослідження клімату (чутливість кліматичної системи до зміни її внутрішніх параметрів і зовнішніх сил, реконструкція кліматів минулого, особливо проблема чергування льодовикових епох, оцінка антропогенного навантаження на кліматичну систему й обчислення її трендів), були виконані за допомогою комп'ютера. ЕБМ, складені першими, залишаються потужним

інструментом дослідження клімату і виявлення проблем, розв'язання яких потребує більш детальних і дорогих у застосуванні кліматичних моделей.

7.2. Статистична модель

Як раніше зазначено, клімат – це статистичний ансамбль станів, який система океан – атмосфера – суходіл проходить за кілька десятиліть. Тому математична модель клімату, адекватна його фізичній суті, має бути статистичною. Це положення в неявному вигляді міститься в описі ЕБМ, оскільки представлення c , α , I , Q як функцій від температури повітря (та інших змінних) може бути виконане (явним чи неявним чином) за допомогою визначення фізичних характеристик кліматичної системи. Однак ЕБМ оперує середніми значеннями температури. Цієї характеристики явно недостатньо для визначення випадкових величин, які описують стан клімату.

Задача з побудови найпростішої статистичної моделі клімату ґрунтується на тому, що характерні величини часу τ_x погодних і τ_y кліматичних процесів дуже відрізняються одна від одної ($\tau_x \ll \tau_y$), через що рівняння для кліматичних характеристик одержують, усереднюючи вихідні рівняння стосовно проміжного періоду часу τ_i ($\tau_x \ll \tau_i \ll \tau_y$). При цьому внесок швидких погодних процесів у кліматичну модель одержують, усереднюючи рівняння погоди за фіксованого поточного стану клімату. Аналогічною є ситуація під назвою «слабка турбулентність» у фізиці плазми у дослідженні взаємодії випадкових полів слабковзаємодійних електромагнітних хвиль.

Згідно з цією теорією еволюція функції розподілення $p(y, t)$ кліматів підпорядковується рівнянню Фоккера – Планка:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i} (v_i p) - \frac{\partial}{\partial y_i} \left(D_{ij} \frac{\partial p}{\partial y_j} \right) = 0, \quad (7.2)$$

яке описує анізотропну дифузію в рухомому середовищі. Тут вектор u з компонентами u_i описує характеристики клімату, а вектор V з компонентами v_i – швидкість зносу, D_{ij} – тензор дифузії.

Якщо $D_{ij}=0$, рівняння (7.2) описує знос початкового стану за характеристиками без його зміни, що відповідне детерміністським (детермінованим) моделям клімату.

Якщо $v=0$, мінливість кліматичних характеристик необмежено збільшується у міру збільшення часу, що нереально.

Згідно з формулою (7.2) клімат аналогічний руху важкої броунівської частинки внаслідок руху сил з боку броунівських частинок (погод), що її оточують.

Статистичні моделі клімату, які адекватно відображають його імовірнісну сутність, мають велике майбутнє. Однак у теперішній час ще немає міркувань про те, як можна було б побудувати статистичну модель, яка описувала б набір найбільш важливих кліматичних характеристик (температура, опади, потік короткохвильового випромінювання і т.п.) у достатньо густій множині точок на підстильній поверхні. Саме така модель клімату потрібна для використання в повсякденному житті.

7.3. Радіаційно-конвективні моделі

Єдиною силою, що рухає кліматичну систему, є сонячне світло. Геотермальні та антропогенні джерела становлять малу частину від потоку сонячного випромінювання і тому в звичайній ситуації їх не беруть до уваги.

В атмосфері сонячне світло проходить складну трансформацію; воно віддзеркалюється від самої атмосфери, хмар, які виникають у ній, від поверхні суходолу та океану, розсіюється аерозольними краплинками води та кристаликами льоду, що міститься в атмосфері. Вони поглинаються газовою та твердою фазами атмосфери та підстильною поверхнею. Це сонячне короткохвильове випромінювання припадає на діапазон хвиль від 0,1 до 3 мкм.

Компоненти кліматичної системи атмосфера – океан – суходіл – кріосфера випускають своє довгохвильове випромінювання з максимумом приблизно на довжині 10 мкм. Довгохвильове випромінювання значною мірою поглинається повітрям, насамперед водяною парою та CO_2 , що міститься у ньому. Короткохвильове сонячне випромінювання у безхмарній атмосфері без суттєвого поглинання, але з суттєвим розсіюванням досягає поверхні суходолу та океану. Частина цього випромінювання, пропорційна коефіцієнту відбиття α підстильної поверхні, відбивається, а решта випромінювання поглинається поверхнею океану та суходолу (які при цьому нагріваються). Нагріта поверхня суходолу та океану випускає випромінювання, яке нагріває атмосферу, тоді як тропосфера нагрівається переважно знизу. У хмарній атмосфері механіка променевого перенесення сильно ускладнюється, але якісно залишається такою самою. У верхній частині атмосфери (стратосфері) під дією активної ультрафіолетової компоненти сонячного випромінювання відбуваються фотохімічні реакції, що призводять до зміни хімічного складу атмосфери, який натомість визначає її оптичні характеристики. Таким чином, радіаційне перенесення енергії і динаміка хімічного складу атмосфери виявляються пов'язаними. Прогрівання атмосфери випромінюванням призводить до того, що виникають ділянки, в яких атмосфера стає несталою в полі сили тяжіння. У такому разі в атмосфері виникає потужний вертикальний конвективний рух, який супроводжується утворенням хмар та випадінням опадів.

Радіаційно-конвективні моделі добре описують вертикальний розподіл температури в атмосфері навіть до висоти у декілька десятків кілометрів, але при цьому вони потребують введення граничного градієнта температури γ , що визначає наявність вертикальної конвекції. Зазвичай він дорівнює 6,5.

Радіаційно-конвективна модель не описує гідродинамічного руху повітря і, отже, міжширотного перенесення тепла. Однак вона добре описує радіаційні і конвективні потоки в атмосфері, які нині є складовою частиною найбільш детальних і точних гідродинамічних моделей клімату. Радіаційно-конвективні моделі використовують для

прогнозу добових кліматичних змін у разі зміни зовнішніх або внутрішніх параметрів систем, а також за антропогенних навантажень і катаклізмів.

7.4. Моделі загальної циркуляції

Основні компоненти кліматичної системи океан – атмосфера являють собою рідке і газоподібне середовища, які описують рівняннями гідродинаміки:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times V - g; \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla(pV) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(E + \frac{V^2}{2} \right) + \nabla \rho V \left(H + \frac{V^2}{2} \right) = R, \end{cases} \quad (7.3)$$

де Ω – кутова швидкість обертання Землі; g – прискорення сили тяжіння; V – швидкість рідини (газу); p – тиск; ρ – густина; E – внутрішня енергія; H – ентальпія рідини (газу); R – швидкість тепловиділення.

Ці рівняння доповнюють рівнянням перенесення солі в океані або вологості в атмосфері:

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial t} + \nabla(\rho q V) = Q, \quad (7.4)$$

де q – концентрація солі в океані або відношення змішування водяної пари в атмосфері.

У правій частині виразів (7.3) і (7.4) R і Q позначають відповідно швидкість тепловиділення і швидкість утворення солі в океані або вологи в атмосфері. Система рівнянь (7.3) і (7.4) замикається рівнянням стану

$$E = E(p, \rho, q) \quad \text{і} \quad H = H(p, \rho, q) ,$$

тобто відповідними краєвими і початковими умовами.

Для великомасштабних рухів за тривалі проміжки часу рівняння (7.3) і (7.4) спрощуються. Припускають, що океан або атмосфера являють собою тонку плівку на поверхні сфери, яка перебуває в стані вертикальної гідростатичної рівноваги. Функції R і Q в атмосфері зумовлюються складними фізичними процесами, що описують рівняннями радіаційної конвективності. В океані $Q = 0$. Верхній шар океану, що бере участь у короткоперіодичному (≈ 10 років) зміні клімату, має середню товщину 240 м.

Характерні періоди процесів, що відбуваються у глибоких шарах океану, сягають тисячі років. Характерні періоди атмосферних процесів лежать в інтервалі від декількох хвилин до декількох місяців. Взаємодія атмосфери й океану відіграє значну роль у формуванні клімату і його функцій.

Із-поміж усіх відомих моделей тільки моделями загальної циркуляції описують локальний клімат і його зміни. Тільки вони здатні відтворити стан клімату і його варіації з точністю, що наближає до практичних вимог.

Висновки:

1. *Енергобалансові моделі* є дуже продуктивними, але вони дають інтегральну інформацію і не можуть описати локальний клімат і його зміни.

2. *Статистичні моделі* адекватно відображають природу клімату, але вони ще недостатньо розвинуті.

3. *Радіаційно-конвективні моделі* слугують надійним інструментом для вивчення радіаційних або фотохімічних процесів в атмосфері, але вони не орієнтовані на опис клімату приповерхневого шару повітря.

4. *Моделі циркуляції* найбільш докладно описують поведінку всієї повітряної маси, динаміку океану і процеси, що відбуваються на поверхні суходолу, а також на межі розподілу океан – атмосфера; вони

дають детальний географічний розподіл всіх метеорологічних характеристик з дуже малим кроком за часом. З погляду просторово-часового розрізнення та достовірності отриманих результатів вони не мають собі рівних, однак розрахунки із застосуванням моделі загальної циркуляції потребують значних комп'ютерних ресурсів.

Запитання для самоперевірки

1. Які моделі є частинами кліматичної моделі?
2. У чому полягає роль енергобалансових моделей в дослідженні кліматичних процесів?
3. Що відтворюють статистичні моделі?
4. Для дослідження яких процесів застосовують радіаційно-конвективні моделі?
5. Для опису яких процесів застосовують моделі циркуляції?
6. Для доповнення яких глобальних екологічних процесів застосовують модель клімату?

8. Моделі глобальних біогеохімічних циклів

Моделювання процесів, що відбуваються у біосфері, – це насамперед опис потоків біогенних елементів – біогеохімічних циклів. Розглянемо кілька моделей.

Процеси, що відбуваються в системі атмосфера – рослини – ґрунт, можуть бути описані за допомогою трьох різних моделей: агрегованої моделі вуглецю, моделі коловороту вуглецю з огляду на просторовий розподіл екосистем і моделі коловороту вуглецю і азоту.

За своєю структурою біосфера – складна, ієрархічно організована система. У межах кожної структурної одиниці процеси перетворення енергії і речовини відбуваються досить автономно. Разом з тим вся жива матерія об'єднана специфічною формою організації і спільними механізмами регуляції потоків енергії і коловороту речовин. Напрямок та інтенсивність потоків енергії і речовини визначаються структурою

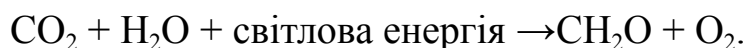
геохімічних циклів – циркуляцією атмосфери і води. Порушення або антропогенні впливи можуть міняти як локальні, так і глобальні характеристики біосфери.

У структурі біосфери можна виокремити такі складові, як атмосфера і гідросфера, автотрофні (рослини) і гетеротрофні організми, ґрунти та ін.

У біосфері природно розрізняти континенти і океани, які поділяються на дрібніші елементи (природні зони, ландшафтні одиниці, біогеоценози, співтовариства тощо).

8.1. Моделювання продуктивного процесу наземних рослин

Продуктивний процес наземних рослин можна уявити таким, що складається з чотирьох фундаментальних процесів: дихання, фотосинтез, зростання і відмирання. Основою цього процесу є фотосинтез, рівняння якого можна записати у такому вигляді:



У процесі фотосинтезу рослини під впливом енергії сонячної радіації, поглинаючи листям CO_2 з атмосфери і кореневою системою воду і поживні речовини з ґрунту, створюють органічну речовину у вигляді асимілятів. Одночасно відбувається транспірація, яка забезпечує постачання рослин водою, поживними речовинами і регулює тепловий режим рослин.

Швидкість фотосинтезу залежить від інтенсивності фотосинтетичної активної реакції (ФАР) – ділянки сонячного спектра в діапазоні 380-710 нм, водного і температурного режимів, концентрації CO_2 в атмосфері, родючості ґрунту і видових особливостей рослин.

Розглянемо математичний опис процесів, що відбуваються в окремій рослині.

Головний процес – це фотосинтез.

Інтенсивність фотосинтезу листка можна розрахувати за формулою

$$\hat{O}_L = kE_n / (k/a + E_n), \quad (8.1)$$

де k – максимальне значення фотосинтезу, a – початковий нахил кривої фотосинтезу листка, E_n – інтенсивність ФАР.

Згідно з формулою (8.1) інтенсивність фотосинтезу підвищується у міру зростання інтенсивності ФАР, досягаючи насичення за великих значень E_n .

Вуглекислий газ визначає живлення рослин з атмосфери і за сучасної його концентрації обмежує фотосинтез. Залежність інтенсивності фотосинтезу від освітленості і концентрації CO_2 в атмосфері може бути виражена формулою Шартьє

$$\Phi_L = (a_1/E_n + a_2/c_1)^{-1}, \quad (8.2)$$

де c_1 – концентрація CO_2 в атмосфері, a_1 і a_2 – коефіцієнти, визначені з експериментів.

Згідно з формулою (8.2) за постійної освітленості інтенсивність фотосинтезу збільшується у міру збільшення концентрації атмосферного CO_2 , досягаючи насичення за великого вмісту CO_2 в атмосфері. Що більша освітленість, то вищою буде інтенсивність фотосинтезу за постійних концентрацій CO_2 в атмосфері. За сучасної концентрації CO_2 в атмосфері інтенсивність фотосинтезу лінійно залежить від зміни вмісту CO_2 .

Ще один важливий фактор, який регулює фотосинтез, – тепло. Максимальна інтенсивність фотосинтезу досягається за деякої оптимальної температури повітря. Підвищення чи зменшення температури знижує фотосинтез. Залежність інтенсивності фотосинтезу від температури можна подати у такому вигляді:

$$\Phi_L = p_0 \exp \left[-\alpha_{pT} (T - T_{\max})^2 \right],$$

де T – температура повітря; T_{\max} – значення температури, за якої інтенсивність фотосинтезу максимальна; p_0 – інтенсивність фотосинтезу за T_{\max} ; α_{pT} – коефіцієнт.

Важливе значення для фотосинтезу має забезпеченість водою, що надходить у рослину через кореневу систему. Вода не тільки безпосередньо бере участь у хімічній реакції фотосинтезу, а й регулює фізичні умови перебігу цієї реакції. Нестача води в ґрунті обмежує фотосинтез.

Однією з форм саморегуляції є транспірація – випаровування води з поверхні листка. Інтенсивність транспірації в багато разів більша за просте випаровування води з листка, коли фотосинтез не відбувається. Транспірація запобігає надмірному перегріванню листкової поверхні, яке може відбутися під час фотосинтезу внаслідок взаємодії світла з речовиною.

Крім вуглецю, водню і кисню для побудови органічної речовини серед хімічних елементів найбільше потрібні азот, калій і фосфор. Вони надходять у рослину через кореневу систему у вигляді засвоєваних сполук. Азот може також фіксуватись рослинами безпосередньо з повітря.

За умов, близьких до оптимальних, поживні речовини впливають на фотосинтез спільно: збільшення концентрації будь-якої з речовин збільшує фотосинтез, а зменшення її концентрації зменшує фотосинтез. Залежність фотосинтезу від спільного впливу поживних речовин можна виразити так:

$$\Phi_L = A_1 \left[\left(1 - e^{-m_1 c_1}\right) \left(1 - e^{-m_2 z_2}\right) \left(1 - e^{-m_3 z_3}\right) \left(1 - e^{-m_4 z_4}\right) \right], \quad (8.3)$$

де A_1 і $m_i (i=1,2,3,4)$ – коефіцієнти; c_1 – концентрація CO_2 в атмосфері; z_2, z_3, z_4 – концентрації поживних форм азоту, фосфору і калію у ґрунті.

У лінійному наближенні залежність (8.3) можна представити у такому вигляді:

$$\Phi_L = A_2 c_1 z_2 z_3 z_4,$$

де A_2 – коефіцієнт.

Та якщо умови за одним чи кількома факторами далекі від оптимальних, то діє принцип лімітувальних факторів Лібіха: фотосинтез обмежує тільки одну з поживних речовин – ту, що в «мінімумі».

Другий фундаментальний процес – дихання рослин. Якщо фотосинтез відбувається тільки в листках, то дихання – результат процесів у всіх частинах рослини.

Інтенсивність дихання T_P можна представити у вигляді формули

$$T_p = [\tau_1 + \tau_2(T)]B,$$

де B – біомаса рослини; τ_1 – коефіцієнт, а $\tau_2(T)$ – функція, що зростає за підвищення температури повітря T .

Чиста продукція органічної речовини (неттофотосинтез) Φ є різницею між приростом органічної речовини в результаті фотосинтезу (бруттофотосинтез) і її витратою внаслідок дихання:

$$\Phi = \Phi_L - T_P.$$

Відомо, що чистий приріст біомаси досягається завдяки перевищенню фотосинтезу над диханням. За достатньо високої температури інтенсивність фотосинтезу і дихання стає однаковою.

Залежність швидкості приросту чистої продукції органічної речовини від інтенсивності ФАР, концентрації CO_2 в атмосфері і кількості води можна представити формулою (Х.А. Молдау):

$$\Phi = \left(aE_n S_1 - aE_n \sum_{i=1}^3 S_i \tau_i \right) \cdot [1 + aE_n S_2 \beta (1 + \nu) Y / (c_1 S_3)]^{-1} - \sum_{i=1}^3 R_i S_i,$$

де a – початковий нахил кривої фотосинтезу; $S_i (i = \overline{1,3})$ – площа поверхні листя, стовбура і коренів відповідно; R_i , $\tau_i (i = \overline{1,3})$ – коефіцієнти дихання, росту та існування; β і ν – коефіцієнти; Y – параметр, що характеризує водний режим рослини:

$$Y = (\Psi_m - \Psi_a) R_S / (\Psi_S - \Psi_R),$$

де Ψ_m – водний потенціал на мезофільних клітинах,
 Ψ_a – потенціал води навколишнього повітря, Ψ_S – водний потенціал ґрунту, Ψ_R – водний потенціал поверхні коренів, R_S – гідравлічний опір води на поверхні коренів.

Третій фундаментальний процес – зростання рослин. У моделі, запропонованій де Вітом, вперше відображено, що свіжих асимілятів рослини не використовують негайно на зростання, а накопичують. В оптимальних умовах зміщення між виробництвом асимілятів та їхнім використанням на зростання невелике – в межах кількох годин.

Моделювання росту рослин потребує завдання функції асимілятів стосовно органів – функції росту. Зазвичай це емпіричні залежності, які виражають в явному вигляді розподіл асимілятів між органами рослин залежно від «біологічного» часу, яким слугує сума середньодобових «ефективних» температур.

Можливим є неявний спосіб задавати функцію росту – у вигляді варіаційних принципів (наприклад, модель росту бавовника, модель росту дерева і т. п.).

Модель розвитку фітоценозу охоплює такі блоки: фотосинтетичний, ростовий, гідрометеорологічний, ґрунтовий. Фотосинтетичний блок задає розрахунок фотосинтезу, дихання, транспірації. Ростовий блок описує ріст окремих органів рослин. У гідрометеорологічному блоці розраховують параметри навколишнього середовища, розподілення інтенсивності ФАР, температури, концентрації CO_2 і вологості повітря по вертикалі у фітоценозі водного потенціалу рослин і ґрунту та ін.

Залежно від мети моделювання кількість відображених у моделі факторів буває різною.

Найбільш детальні моделі побудовано для агроценозів.

У деяких випадках модель містить до кількох сотень змінних. Характерний час розглядуваних процесів – години і доба.

Головними чинниками, що визначають річну продукцію рослин у природних біоценозах, визнають кліматичні умови місцевості.

Як найбільш інформативні і причинно зумовлені фактори слід виділити температурний режим, світловий режим і режим зволоження рослин.

8.2. Модель круговороту азоту в наземній екосистемі

Уміст азоту в рівнях, що подані на рис.8.1, позначимо як N_i , де i – номер відповідного рівня ($i=1, \dots, 7$). Темп надходження азоту з рівня i в рівень j позначимо як V_{ij} . Значення N_i та V_{ij} у положенні рівноваги позначаємо N_{ij}^* та V_{ij}^* .

Зовнішні (вхідні) змінні: середньорічна температура повітря (T), кількість опадів за рік (W).

Змінні, що характеризують стан ґрунту: температура ґрунту (t_n), вологість ґрунту (ω), стік води з ділянки ґрунту (W_s), вектор структурних властивостей ґрунту (q).

Інтенсивність розкладання підстилки та гумусу можна подати так:

$$V_{35} = f_n(t_n, \omega)N_3 = f_n N_3; \quad (8.4)$$

$$V_{46} = f_r(t_n, \omega)N_4 = f_r N_4, \quad (8.5)$$

де f_n та f_r – функції, що означають питомі швидкості розкладання відповідно підстилки та гумусу, а t_n та ω – їхні аргументи.

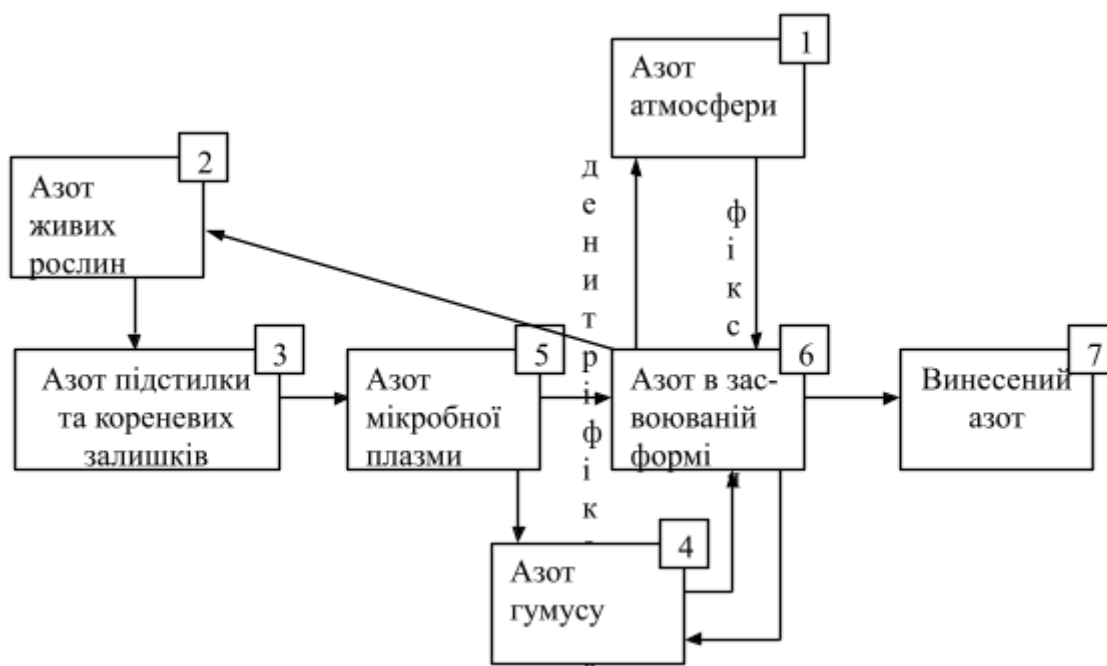


Рис. 8.1. Іконографічна модель круговороту азоту в наземній екосистемі

Інтенсивність створення гумусу та мінералізації підстилки задають співвідношенням

$$\begin{aligned} V_{54} &= a(t_n, \omega) V_{35} = a f_n N_3; \\ V_{56} &= (1 - a) V_{35} = (1 - a) f_n N_3, \end{aligned} \quad (8.6)$$

$(N_5 = \text{const})$,

де a – параметр, що показує, яка частина азоту внаслідок розкладення попадає в гумус.

Інтенсивність зв'язування азоту атмосфери рослинами виражається співвідношенням

$$V_{16} = b_0 + b_1(t_n, \omega) = f_\phi, \quad (8.7)$$

де b_0 – функція, яка відображає небіологічну фіксацію азоту, а $b_1(t_n, \omega)$ – біологічну фіксацію.

Таким чином, перехід азоту в засвоювану форму для рослин може бути поданий як

$$A = f_\phi + (1 - a) f_n N_3 + f_r N_4. \quad (8.8)$$

Припускають, що азот у засвоюваній формі не затримується, а розподіляється між рослинами, атмосферою (денітрифікується) гумусом та вноситься пропорційно функціям споживання (витрат). Інтенсивність процесів виходу з засвоюваної форми виражається співвідношеннями

$$\begin{aligned} V_{62} &= f_p(T, t_n, \omega) A / \Sigma = f_p A / \Sigma; \\ V_{61} &= f_D(t_n, \omega) A / \Sigma = f_D A / \Sigma; \\ V_{67} &= f_B(W_s) A / \Sigma = f_B A / \Sigma; \\ V_{64} &= f_0(t_n, \omega) A / \Sigma = f_0 A / \Sigma, \end{aligned} \quad (8.9)$$

де f_p, f_D, f_B, f_0 – функції споживання рослинами, денітрифікації, винесення та утворення гумусу із засвоюваної форми; а через Σ позначено їхню суму:

$$\Sigma = f_p + f_D + f_B + f_0.$$

Інтенсивність відмирання живих рослин задають формулою

$$V_{23} = mN_2, \quad (8.10)$$

де коефіцієнт m означає питому інтенсивність відмирання.

Система диференціальних рівнянь, що описує модель процесу (враховуючи подані рівняння потоків (8.4) – (8.10)) матиме такий вигляд:

$$\frac{dN_1}{dt} = f_D A / \Sigma - f_\phi;$$

$$\frac{dN_4}{dt} = f_p A / \Sigma - mN_2; \quad (8.11)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = mN_2 - f_n N_3; \quad (8.12)$$

$$\frac{dN_4}{dt} = af_n N_3 + f_0 A / \Sigma - f_r N_4; \quad (8.13)$$

$$\frac{dN_7}{dT} = f_B A / \Sigma;$$

$$\frac{dN_5}{dt} = \frac{dN_6}{dt} = 0$$

У правій частині рівнянь (8.11) – (8.13) містяться тільки змінні N_2, N_3, N_4 . Розв'язавши рівняння відносно цих змінних, за умови, що

$\frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = \frac{dN_4}{dt} = 0$, одержуємо рівняння для значень змінних у деякій позитивній рівновазі:

$$N_2^* = \frac{f_\phi f_p}{m(f_D + f_B)};$$

$$N_3^* = \frac{f_\phi f_p}{f_n(f_D + f_B)};$$
(8.14)

$$N_4^* = \frac{f_\phi (af_p + f_0)}{f_r(f_D + f_B)}.$$
(8.15)

При цьому продуктивність екосистеми, що перебуває в стані рівноваги, дорівнює:

$$V_{62}^* = f_\delta f_p / (f_D + f_B).$$
(8.16)

Розглянемо функціонування системи за постійних кліматичних умов $T = \text{const}$, $W = \text{const}$. Вважаємо, що в екосистемі не змінюється видовий склад рослин. Тоді функції $f_p, f_n, f_D, f_r, f_B, f_0, f_\phi, a$ визначаються тільки значеннями N_3 та N_4 .

У сучасних ґрунтах, що «склались», невелика зміна кількості підстилки та гумусу не змінює фізичних властивостей ґрунту (ефект насиченості), отже, розглянуті функції не залежать від кількості гумусу і підстилки.

Розглянемо вираз для річної продукції. У рівнянні (8.16) f_ϕ означає функцію фіксації азоту; f_p, f_D, f_B – функції споживання: індекси p – споживання рослинами; D – денітрифікації, B – винесення. Таким чином, продуктивність є функцією ряду експериментально вимірюваних величин, які залежать від кліматичних чинників

місцевості, видових властивостей рослин (які в природних біогеоценозах визначаються кліматом) та механічних властивостей ґрунту. Продуктивність не залежить безпосередньо від кількості та питомих швидкостей розкладу гумусу та підстилки у ґрунті. Це розглядається як обґрунтування того факту, що саме кліматичні чинники визначають продуктивність клімакських рослинних асоціацій в різних географічних зонах. Залежність продуктивності від поживних речовин (а в результаті від кількості гумусу та підстилки), відповідно до співвідношення (8.16), проявляється, якщо для певного виду не досягнуто стаціонарного стану в системі.

Оскільки діяльність мікроорганізмів, які розкладають гумус та підстилку, визначається кліматичними чинниками, то відповідно до рівнянь (8.14) і (8.15) кількість гумусу та підстилки також визначається тільки кліматичними факторами місцевості, тоді як біомаса рослин залежить від коефіцієнта m , отже, від видових властивостей рослин.

Стосовно системи рослина – ґрунт, близької до стану рівноваги, справедливим є вираз

$$\frac{\partial V_{62}}{\partial A} = f_p / \Sigma + \frac{\partial f_p}{\partial A} \cdot A / \Sigma > 0$$

оскільки $f_p > 0; \frac{\partial f_p}{\partial A} > 0$.

Це означає, що збільшення засвоюваного азоту у ґрунті призведе до збільшення продуктивності. Відповідно за $A < A^*$, тобто коли кількість азоту в ґрунті менша за стаціонарне значення, то $V_{62} < V_{62}^*$, тобто продуктивність стає меншою, ніж продуктивність у стані рівноваги. Будь-які добавки азоту в ґрунті (наприклад, внесення добрив), які збільшують вміст засвоюваного азоту ($A > A^*$) призводять до $V_{62} > V_{62}^*$ – збільшення продуктивності відносно стану рівноваги. Це означає, що в системі рослина – ґрунт, яка перебуває в стані рівноваги, рослини опиняються в положенні «нестача» стосовно азоту.

8.3. Модель глобального круговороту вуглецю в системі

атмосфера – рослини – ґрунт (АРГ1)

АРГ1 побудована для дослідження поведінки системи атмосфера – рослини – ґрунт (АРГ) під час дії на неї різних (насамперед антропогенних) впливів і визначення її реакції на ці дії.

З цією метою будемо розглядати круговорот вуглецю в системі АРГ. Обмін CO_2 між атмосферою і океаном умовно можна вважати постійним або таким, що змінюється відомим чином.

Тривалість процесів, розглядуваних в моделі, становить десятки, сотні років, що набагато менше часу геохімічного круговороту, інтенсивність якого невелика (0,1% від інтенсивності біологічного круговороту за розрахунками). Тому можна вважати, що, за відсутності збуджувальних факторів, кількість вуглецю в системі не змінюється. При цьому, ґрунтуючись на ряді робіт, можна вважати, що система перебуває в стаціонарному стані.

Вважають, що всі або більша частина біогеоценозів мають подібні функціональні характеристики. Це дає підставу вибрати високий ступінь агрегування змінних і представити всю систему АРГ у вигляді суми двох підсистем: трав'яної екосистеми і лісової. Оскільки продуктивність чагарникових екосистем становить лише 8% від загальної продуктивності рослин суходолу, то в окрему підсистему їх не виділяють, а розглядають разом з трав'яною екосистемою.

Майже всі перетворення вуглецю в ґрунтах відбуваються під дією мікроорганізмів, але їхня миттєва маса мала. Великою є роль наземних тварин у природі, однак їхня біомаса також мала. Тому мікроорганізми ґрунту і наземних тварин можна не включати в модель, а розглядати результати їхньої діяльності у відповідних функціональних залежностях швидкостей споживання і виділення CO_2 . Тоді схема круговороту вуглецю в моделі матиме вигляд, як на рис. 8.2.

Вміст вуглецю в рівнях будемо позначати як Y_i , де i – номер відповідного рівня ($i=2, \dots, 8$); c_1 – кількість вуглецю в атмосфері; темп надходження вуглецю з рівня i в рівень j позначимо як V_{ij} ; початкові

значення c_1 , Y_i і V_{ij} позначимо як c_1^0 , Y_i^0 , V_{ij}^0 , а їхні стаціонарні значення – c_1^* , Y_i^* , V_{ij}^* ; ΔT – це відхилення середньої глобальної температури повітря біля поверхні землі від сучасного значення.

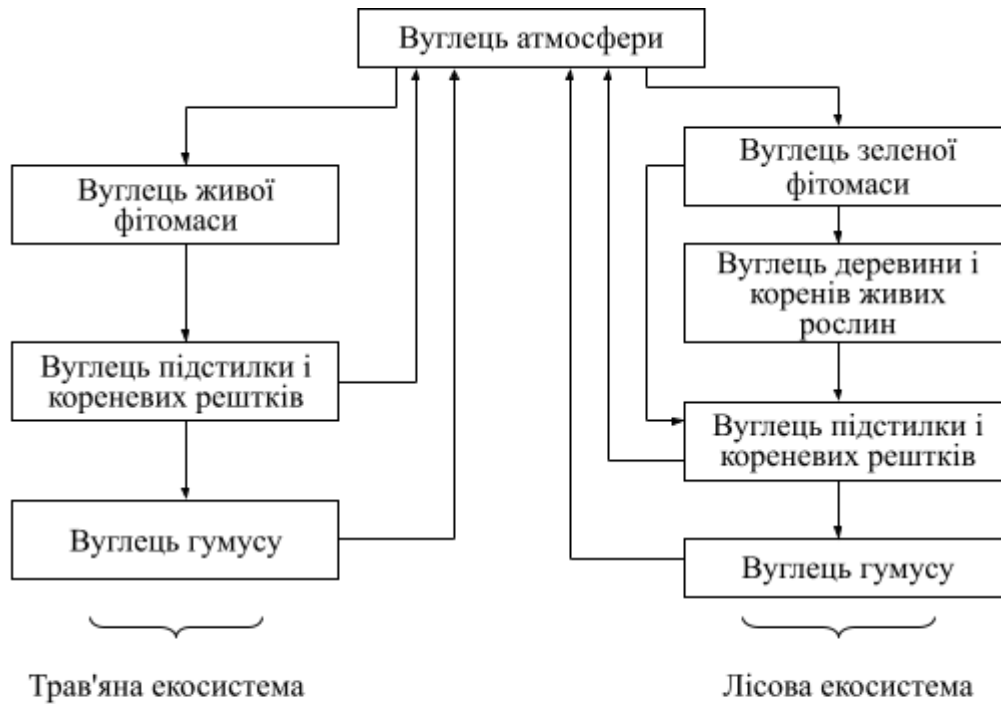


Рис. 8.2. Схема круговороту вуглецю в системі атмосфера–рослини–грунт (АРГ1)

Переважно в аналізі системи і моделюванні користуються значеннями темпів, рівнів і коефіцієнтів переходу.

Схему причинно-наслідкових зв'язків у моделі круговороту вуглецю наведено на рис. 8.3.

Залежність температури від вмісту CO_2 (парниковий ефект) була визначена розрахунковим шляхом на підставі різних модельних уявлень.

Для розрахунків в АРГ1 використовують таку залежність:

$$T_{\Delta} = \begin{cases} 2,45 \{1 - \exp[-0,82(z_1 - 1)]\} & z_1 \geq 1 \\ -5,25z_1^2 + 1,255z_1 - 7,3 & z_1 < 1 \end{cases}$$

де T_{Δ} – відхилення середньої глобальної температури біля поверхні землі від сучасного значення, пов'язане тільки з парниковим ефектом;

z_1 – відносний вміст CO_2 в атмосфері (відносно сучасного значення). За сучасного стану біосфери справедливими є рівності

$$T_\delta = 0 \quad \text{і} \quad z_1 = 1.$$

тоді $\Delta T = T_\delta + E$, де E – зміна температури, не пов'язана з парниковим ефектом.

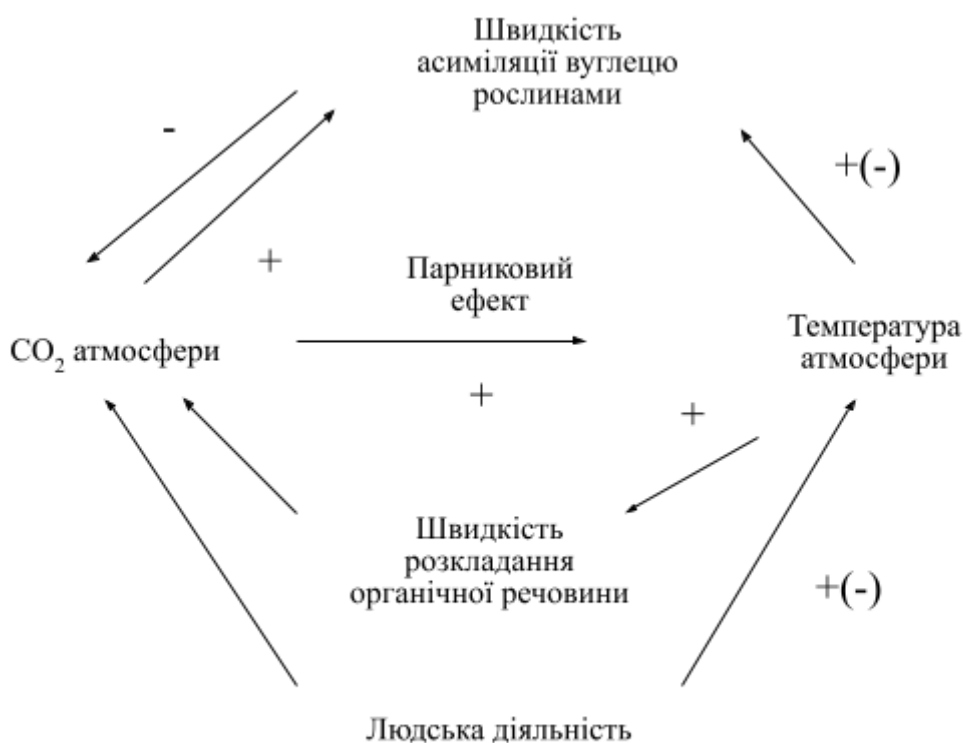


Рис. 8.3. Діаграма причинно-наслідкових зв'язків у моделі круговороту вуглецю АРГІ

Вважатимемо, що впливи на систему АРГІ не занадто великі і траєкторії змінних системи проходять поблизу стаціонарних станів. Це можливо також, якщо клімат змінюється досить повільно і система «відстежує» ці зміни, перебуваючись у квазістаціонарному стані. Тоді можна вважати, що продуктивність системи не залежить від кількості поживних елементів у ґрунті, а визначається тільки кліматичними факторами.

Розглянемо вираз для потоків. Швидкість споживання CO_2 атмосфери на побудову біомаси рослин (фотосинтез мінус дихання) виражається співвідношенням

$$V_{1i} = \begin{cases} F_i = f_i \left(1 + \frac{\alpha_i}{100} \Delta T \right) \left[1 + \frac{\delta_i}{10} \left(\frac{c_1}{c_1^0} \right) \right] S_i; \\ F_i \leq k_i V_{1i}^0; \quad k_i V_{1j}^0; \quad F_i \geq k_i V_{1i}^0; \quad i = \overline{2,5}, \end{cases}$$

де індекси $i = \overline{2,5}$ стосуються відповідно трав'яної і лісової систем; f_2, f_5 – продуктивності цих систем за сучасної температури і концентрації CO_2 в атмосфері; S_2 і S_5 – відносні значення площ, зайнятих трав'яною і лісовою системами; коефіцієнти α_i і δ_i показують, на скільки відсотків порівняно з сучасним значенням збільшується продуктивність у разі зростання відповідно температури на 1°C і концентрації CO_2 в атмосфері на 1%; коефіцієнти k_i визначають межу граничного збільшення продуктивності і показують, у скільки разів гранична продуктивність системи може бути більшою від сучасної.

Оскільки швидкість відмирання деревини і коріння в лісовій системі приблизно однакові, то ці компоненти об'єднані на одному рівні (Y_6). За достатньо малої величини їхньої біомаси, коли відношення конкуренції між деревами слабкі, можна вважати, що відмирання деревини і коренів пропорційне їхній біомасі. Але в міру збільшення густоти дерев конкуренція посилюється, і якщо вся доступна площа вже зайнята, інтенсивність відмирання різко зростає. Зважатимемо, що в цій ситуації приріст біомаси можливий тільки тоді, коли вивільнюється життєвий простір, так що сумарна біомаса не змінюється. Зміна ситуацій відбувається після досягнення змінною Y_6 деякого фіксованого рівня, який визначається коефіцієнтом k_6 . Тоді швидкість відмирання в лісовій екосистемі дорівнює:

$$V_{67} = \begin{cases} mY_6, & Y_6 \leq k_6 Y_6^0; \\ V_{56}, & Y_6 > k_6 Y_6^0, \end{cases}$$

де m – коефіцієнт питомої інтенсивності відмирання деревини і коренів;
 k_6 – коефіцієнт гранично можливого збільшення біомаси деревини і коренів відносно сучасного значення, коли інтенсивність відмирання суттєво збільшується і зростання Y_6 припиняється.

Відповідні швидкості розкладення гумусу (трав'яної – ($i=4$) та лісової – ($i=8$) систем):

$$V_{1i} = \begin{cases} f_i \exp\left\{\frac{\ln Q}{10} \Delta T\right\} Y_i, & \exp\left\{\frac{\ln Q}{10} \Delta T\right\} \leq k_i; \\ f_i k_i Y_i, & \exp\left\{\frac{\ln Q}{10} \Delta T\right\} > k_i, \end{cases}$$

де f_4 і f_8 – питома інтенсивність розкладання гумусу відповідно трав'яної і лісової систем в сучасних умовах; Q – коефіцієнт, який означає, у скільки разів зміниться швидкість розкладання за зміни температури на 10°C ; потік V описує надходження CO_2 в атмосферу з інших джерел.

Використовуючи ситуаційний граф потоків (рис. 8.2), запишемо диференціальні рівняння балансового типу, які описують круговорот вуглецю в системі АРГ:

$$\begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = (V_{12} + V_{15}) + (V_{31} + V_{41}) + (V_{71} + V_{81}) + V; \\ \frac{dY_2}{dt} = -V_{23} + V_{12}; & \frac{dY_3}{dt} = -(V_{34} + V_{31}) + V_{23}; \\ \frac{dY_4}{dt} = -V_{41} + V_{34}; & \frac{dY_5}{dt} = -(V_{56} + V_{57}) + V_{15}; \\ \frac{dY_6}{dt} = -V_{67} + V_{56}; & \frac{dY_7}{dt} = -(V_{71} + V_{76}) + (V_{57} + V_{67}); \\ \frac{dY_8}{dt} = -V_{81} + V_{78}. \end{cases} \quad (8.17)$$

За $V=0$ для рівнянь (8.17) через припущення про замкненість справедливим є співвідношення

$$c_1 + \sum_{j=2}^8 Y_j = M = \text{const}$$

Хоча конкретні вирази для деяких потоків відомі, для багатьох інших процесів обміну вуглецем записати відповідні залежності поки що немає можливості. Становище рятує ієрархія часових масштабів у системі (різна часова ієрархія відмирання живої біомаси і розкладання органіки). Тобто за змінними Y_2, Y_3, Y_5, Y_7 швидко встановлюється рівновага, яка залежить від змінних c_1, Y_4, Y_6, Y_8 . Іншими словами Y_2, Y_3, Y_5, Y_7 розглядаються як квазістаціонарні (на певних відрізках часу). Вважаючи у відповідних блоках вихідні потоки рівними вхідним, тобто прирівнюючи до нуля праві частини відповідних рівнянь, одержуємо чотири рівняння для визначення невідомих потоків:

$$V_{23} = V_{12} = V_{34} + V_{31}; \quad V_{15} = V_{58} + V_{57}; \quad V_{57} + V_{67} = V_{71} + V_{78}.$$

Для того щоби повністю описати модель, сформулюємо таку гіпотезу: якщо потік вуглецю, що виходить з деякого функціонального блока (рівнів з номерами 3, 5, 7) розділяється на два потоки, то відношення їхньої інтенсивності залишається практично постійним. Згідно з цією гіпотезою величини

$$\lambda_3 = V_{31}/V_{34}; \quad \lambda_5 = V_{57}/V_{56} \quad \text{і} \quad \lambda_7 = V_{71}/V_{78}$$

повинні бути сталими.

На основі чотирьох попередніх рівностей та із сталості λ_3, λ_5 і λ_7 одержимо співвідношення

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{31} = V_{12} \frac{\lambda_3}{1 + \lambda_3} = I_3 V_{12}; \quad V_{34} = (1 - I_3) V_{12}; \\ V_{56} = (1 - I_5) V_{15}; \quad V_{57} = V_{15} \frac{\lambda_5}{1 + \lambda_5} = I_5 V_{15}; \\ V_{71} = (V_{67} + I_5 V_{15}) \frac{\lambda_7}{1 + \lambda_7} = I_7 (V_{67} + I_5 V_{15}); \\ V_{78} = (1 - I_7) (V_{67} + I_5 V_{15}); \quad 0 < I_3, I_5, I_7 < 1. \end{array} \right.$$

Тим самим всі невідомі потоки виражаються через відомі і через константи I_3, I_5 та I_7 .

Зважаючи на припущення, поведінку системи АРГ (перейшовши до відносних змінних $z_i = Y_i(c_i^0, \forall i = \overline{2,8})$) можна описати системою рівнянь:

$$\begin{cases} c_1^0 \frac{dz_1}{dt} = (1 - I_3)V_{12} - (1 - I_5I_7)V_{15} + (V_{41} + V_{81}) + I_7V_{67} + V_{12}; \\ c_1^0 \frac{dz_4}{dt} = -V_{41} + (1 - I_5)V_{12}; \\ c_1^0 \frac{dz_6}{dt} = -V_{67} + (1 - I_5)V_{15}; \\ c_1^0 \frac{dz_8}{dt} = -V_{81} + (1 - I_7)(V_{67} + I_5V_{15}). \end{cases}$$

Ця модель описує динаміку біосферних процесів тільки в околиці деякої нетривіальної рівноваги біосфери. Якщо ми хочемо описати деградацію біосфери, її перехід з нетривіальної рівноваги в тривіальну, то ми повинні користуватись іншими рівняннями, серед розв'язків яких має бути і тривіальний розв'язок $Y_4=Y_6=Y_8=0$.

Для того щоб оцінити наслідки антропогенних впливів на деякі екосистеми суходолу й те, якою мірою окремі екосистеми здатні ослабити результати антропогенного впливу, будують АРГ2 з огляду на розподіл екосистем. Таку модель, ґрунтуючись на АРГ1, доповнюють кліматичними розрахунками на моделях загальної циркуляції атмосфери й океану.

8.4. Модель глобального круговороту вуглецю та азоту в системі атмосфера – рослина – ґрунт (АРГ3)

Сумісний круговорот у системі атмосфера – рослина – ґрунт можна подати за допомогою іконографічної моделі (рис. 8.4).

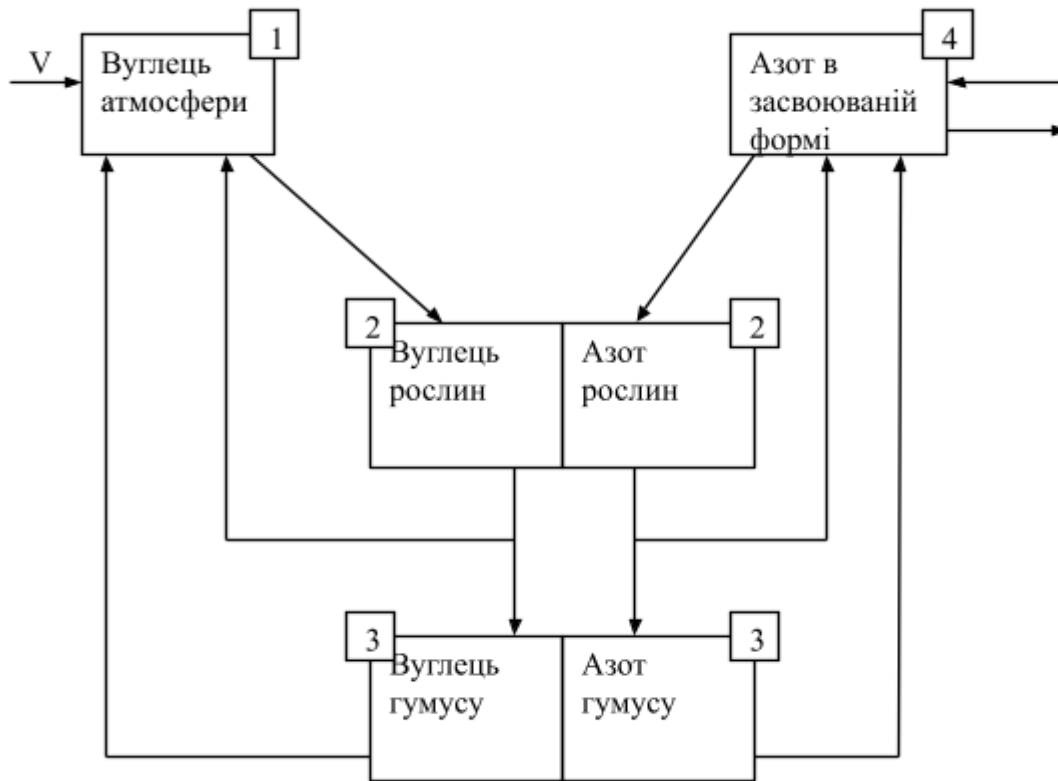


Рис. 8.4. Іконографічна модель круговороту вуглецю і азоту в системі атмосфера–рослини–грунт

Позначимо вміст вуглецю і азоту в рівнях рис. 8.4 як C_i та N_i , де i – номер відповідного рівня. V_{Cij} та V_{Nij} – темпи надходження вуглецю і азоту з рівня i на рівень j . $C_i^0, N_i^0, CN_{ij}^0, VN_{ij}^0$ – початкові значення рівнів та темпів. ΔT – відхилення середньої глобальної температури атмосфери від сучасного значення. V – надходження вуглецю в атмосферу від спалювання палива. V_N – надходження азоту в засвоювану форму, коли немає антропогенних дій $V_N = \text{const}$ V_P – вихід засвоюваного азоту з системи АРГ, причому $V_P = V_D + V_B$, де V_D – вихід азоту внаслідок денітрифікації в атмосферу; V_B – виніс азоту в

океан. Припускаємо, що азот у засвоюваній формі витрачається на побудову біомаси рослин, а частина, що залишилась – виноситься із системи. Час знаходження азоту в засвоюваній формі – один рік. Тоді змінна N_4 є квазістаціонарною.

З достатньою точністю можна вважати, що відношення кількості вуглецю до кількості азоту в рослинах зберігається постійним:

$$C_2/N_2 = K_2 = \text{const} \quad (8.18)$$

З формули (8.18) випливає, що

$$VC_{12}/VC_{42} = K_2 \quad (8.19)$$

Споживання вуглецю на формування річної продукції рослин виражається рівнянням

$$VC_{12} = K_2 F_2 f_1(\Delta T) f_2(C_1/C_1^0) f_3(A/A^0), \quad (8.20)$$

де $A = VN_{42} + V_{34} + V_N$ – надходження азоту в засвоювану форму; A^0 – значення A в початковий момент часу. При цьому має бути дотримана умова $VN_{42} \leq A$.

Функції f_1, f_2, f_3 – залежність річної продукції від температури, вмісту вуглецю в атмосфері та надходження азоту в засвоювану форму:

$$f_1(\Delta T) = 1 + \frac{\alpha}{100} \Delta T (1 - \Delta T / (2T_{\max})); \quad f_2(C_1/C_1^0) = 1 + \frac{\delta}{10} (C_1/C_1^0 - 1);$$

$$f_3(A/A^0) = \frac{A/A^0}{(1 - \gamma)A/A^0 + \gamma}, \quad (8.21)$$

де α, δ, γ – коефіцієнти залежності річної продукції відповідно від температури, вмісту CO_2 в атмосфері та надходження азоту в засвоювану форму; T_{\max} – температура, за якої річна продукція є максимальною за умови постійності інших факторів; F_2 – річна продукція рослин у початковому стані, «вираженому в азоті».

Розглядається більш широкий діапазон можливих змін температури атмосфери, ніж у моделі АРГ1. Тому залежність річної продукції від температури має вигляд параболи. Величина ΔT залежить від кількості вуглецю в атмосфері та інших факторів.

За малих відхилень ΔT та A від початкового стану функції f_1 та f_3 можна записати в лінеаризованому вигляді:

$$\begin{aligned} f_1(\Delta T) &= 1 + \frac{\alpha}{100} \Delta T; \\ f_3(A/A^0) &= 1 + \gamma(A/A^0 - 1), \end{aligned} \quad (8.22)$$

де α – має той самий зміст, що і α_2 та α_5 в АРГ1.

Можна припустити, що інтенсивність відмирання рослин пропорційна біомасі рослин:

$$\begin{aligned} VC_{21} + VC_{23} &= m_N C_2; \\ VN_{23} + VN_{24} &= m_N N_2. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Вважають, що відношення потоків вуглецю, що переходять з рослин в атмосферу і гумус, постійне. Постійним також є відношення потоків азоту, що переходить з рослин у гумус та засвоювану форму. Тоді можна записати:

$$\begin{aligned} VC_{23} &= \varepsilon m_N C_2; \\ VC_{21} &= (1 - \varepsilon_c) m_N C_2; \\ VN_{23} &= \varepsilon_N m_N N_2; \\ VN_{24} &= (1 - \varepsilon_N) m_N N_2; \\ \varepsilon_c &< 1; \varepsilon_N < 1, \end{aligned} \quad (8.24)$$

де $\varepsilon_c, \varepsilon_N, m_N$ – коефіцієнти.

Припустимо, що розклад вуглецю та азоту гумусу відбувається незалежно з різними питомими швидкостями та підпорядковується закону Вант-Гоффа:

$$\begin{aligned}
VC_{31} &= K_c \exp\left\{\frac{\ln Q}{10} \Delta T\right\} C_3; \\
VN_{34} &= K_N \exp\left\{\frac{\ln Q}{10} \Delta T\right\} N_3,
\end{aligned}
\tag{8.25}$$

де K_c та K_N – питомі швидкості розкладання C та N гумусу, Q – такий самий, як у АРГ1. Швидкість розкладу гумусу залежить від C_3/N_3 (вживання вуглецю та азоту мікроорганізмами відповідне інтенсивності їхнього розмноження, воно не надто змінюється).

Припускаємо, що антропогенних викидів CO_2 ($V = 0$) немає, тобто

$$C_1 + C_2 + C_3 = M_N = \text{const}.$$

Тоді, використовуючи вирази (8.18) – (8.25) та зроблені припущення, поведінку системи АРГ можна описати такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
\dot{C}_1 &= -K_2 F_2 f_1(\Delta T) f_3(C_1/C_1^0) f_3(A/A^0) + (1 - \varepsilon_c) m_N C_2 + K_c \exp\{\ln Q \Delta T / 10\} C_3 + V; \\
\dot{C}_2 &= K_2 F_2 f_1(\Delta T) f_2(C_1/C_1^0) f_3(A/A^0) - m_N C_2; \\
\dot{C}_3 &= \varepsilon_c m_N C_2 - K_c \exp\{\ln Q \Delta T / 10\} C_3; \\
\dot{N}_3 &= \varepsilon_N m_N C_2 / K_2 - K_N \exp\{\ln Q \Delta T / 10\} N_3; \\
N_2 &= \frac{C_2}{K_2}; \\
A &= (1 - \varepsilon_N) m_N N_2 + K_N \exp\{\ln Q \Delta T / 10\} N_3 + V_N.
\end{aligned}
\tag{8.26}$$

Таким чином, у моделі відображено, що круговороти вуглецю та азоту взаємопов'язані. Наприклад, антропогенні порушення циклу вуглецю призводять до зміни трансформації сполук азоту у групі і до змін винесення азоту з системи АРГ, а порушення в циклі азоту призводить до зміни вмісту CO_2 в атмосфері. Якщо $\gamma = 0$, цикл вуглецю стає незалежним від циклу азоту і модель можна розглядати як моделювання круговороту вуглецю.

Для наступного аналізу наведено спрощений варіант моделі (8.26).

Припустимо таке:

1. Біомаса рослин набагато менша за масу гумусу, змінні C_2 та N_2 – квазістаціонарні (АРГ – відповідне трав'яній екосистемі).
2. Відношення кількості вуглецю та азоту в гумусі залишається постійним. Це означає, що моделювання стосується невеликих відрізків часу.

У такому разі потрібно, щоби $\varepsilon_N = \varepsilon_c$ та $K_N = K_c$. Тоді $C_3/N_3 = K_3 = \text{const}$ і модель описується двома диференціальними рівняннями, а якщо немає антропогенного навантаження – одним:

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= -\varepsilon_c K_2 F_2 f_1(\Delta T) f_2(C_1/C_1^0) f_3(A/A^0) + K_c \exp\{\ln Q \Delta T / 10\} (M_1 - C_1); \\ N_3 &= \frac{C_3}{K_3}; \quad C_1 + C_3 = M_1. \end{aligned} \quad (8.27)$$

8.5. Модель глобального круговороту вуглецю і азоту в системі атмосфера – океан (АО)

Розглянемо океан як систему, що складається з двох шарів – поверхневого та глибинного. Оскільки основна маса живої речовини перебуває у фотичному шарі (глибина 200 м), то вважатимемо його за поверхневий.

Весь вуглець, що є в поверхневому шарі, можна поділити на вуглець живої біомаси, вуглець мертвої органічної речовини (МОР) та розчинний неорганічний вуглець (так звана карбонатна система, що містить двоокис вуглецю, вуглекислоту та продукти її дисоціації). Глибинний шар містить тільки МОР та неорганічний вуглець. Відповідно такий самий розподіл азоту в океані: азот живої речовини, азот МОР, розчинний неорганічний азот – сполуки азоту, засвоювані живими організмами, – нітрати, нітрити, амоній.

Іконографічну модель циклів C та N відображено на рис. 8.5.

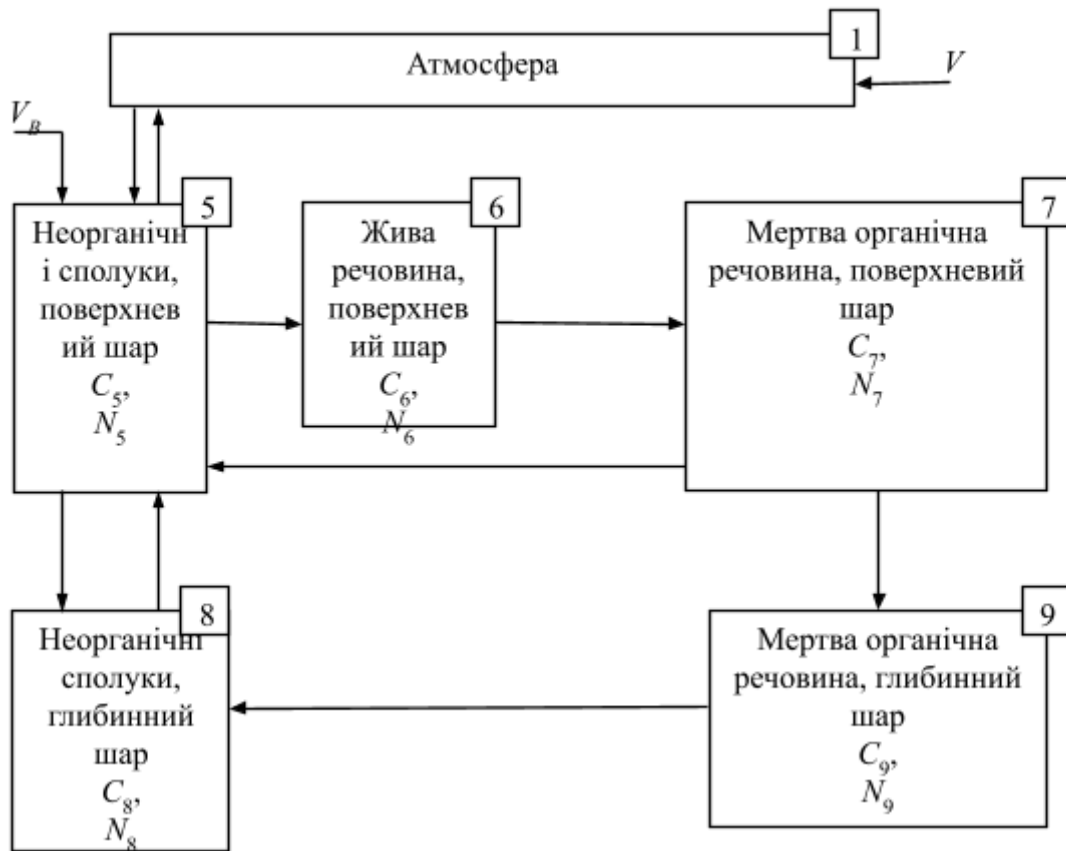


Рис. 8.5. Іконографічна модель круговороту вуглецю і азоту в системі атмосфера – океан

Припускаємо, що зовнішні потоки є антропогенними діями. Так, збільшення притоку біогенних елементів у поверхневий шар океану пов'язане із зростанням виробництва (і внесенням у ґрунти) мінеральних добрив та з інтенсивністю їхнього вимивання з ґрунтів.

Позначимо C_i та N_i – кількість вуглецю та азоту відповідно i – номер рівня. Потіки вуглецю з рівня i в рівень j позначимо як VC_{ij}, VN_{ij} ; початкові значення – $C_i^0, N_i^0, VC_{ij}^0, VN_{ij}^0$. Надходження неорганічного азоту з системи атмосфера – рослини – ґрунт (АРГ) у верхній шар океану позначимо V_B ; V – надходження вуглецю антропогенного походження в атмосферу (спалювання палива).

Позначимо ΔT та ΔT_m – відхилення середньої глобальної температури атмосфери та поверхневого шару океану від значень в доіндустріальний період (вважаємо його за початковий).

Основні фактори, що визначають продуктивність в океані, – наявність елементів мінерального живлення і тепло. Вуглець не лімітує продуктивності океану.

Продуктивність біоти океану може бути подана як співвідношення:

$$VC_{56} = F_6 \left(1 + \frac{\alpha_m}{100} \Delta T_m \right) \left(1 + \gamma \left(\frac{N_5}{N_0^5} - 1 \right) \right);$$

$$VN_{56} = \frac{VC_{56}}{K_6}.$$

Тут вважаємо, що співвідношення кількості вуглецю і азоту в живій речовині є постійним ($C_6/N_6 = K_6 = \text{const}$), отже, постійним є співвідношення потоків ($VC_{56}/VN_{56} = K_6$); α_m – коефіцієнт, що показує залежність продуктивності від температури води шару життєнаселеності; γ_m – коефіцієнт, що виражає залежність продуктивності від кількості неорганічного азоту в поверхневому шарі океану; F_6 – продуктивність живої речовини океану в початковий момент часу, «виражена у вуглеці».

Повний теплообмін у двохсотметровому шарі океану триває три–чотири роки. Час теплообміну верхнього шару такої глибини в середніх широтах, в яких відбувається інтенсивне перемішування вод навесні та восени, становить приблизно один рік. Будемо інтерпретувати ΔT_m як відхилення температури поверхневого шару океану в акваторії, де існують основні скупчення живої речовини. Тоді можна припустити, що на відрізках часу, що нас цікавить, $\Delta T_m = \Delta T$.

Інтенсивність розкладу МОР можна записати так:

$$VC_{75} = p_7 \exp\left(\frac{\ln Q_m \Delta T}{10}\right) C_7;$$

$$VN_{75} = q_7 \exp\left(\frac{\ln Q_m \Delta T}{10}\right) N_7,$$

де p_7 та q_7 – питома інтенсивність розкладення вуглецю та азоту МОР; Q_m – коефіцієнт, що вказує, у скільки разів змінюється швидкість розкладання в разі зміни температури на 10°C .

Значення інших потоків (за винятком потоків вуглецю між атмосферою й океаном) будемо вважати пропорційними кількості речовини на рівнях, з яких потік виходить, тобто

$$VC_{ij} = p_{ij} C_i, VN_{ij} = q_{ij} N_i \quad (8.28)$$

Перенесення V_{AS} вуглекислого газу через межу атмосфера – океан пропорційне різниці парціальних тисків CO_2 в атмосфері на рівні океану (p_A) та розчиненого CO_2 в поверхневому шарі океану (p_S), тобто:

$$V_{AS} = k_{15} (p_A - p_S);$$

$$VC_{15} = k_{15} p_A;$$

$$VC_{51} = k_{15} p_S \quad (8.29)$$

Вважаємо, що у разі досить швидкого перемішування атмосфери парціальний тиск CO_2 в атмосфері є пропорційним загальній масі вуглецю в атмосфері, причому коефіцієнт пропорційності залежить від температури.

Рівняння стану для CO_2 :

$$p_A = \rho RT / M ,$$

де ρ – густина CO_2 , M – молекулярна вага CO_2 ; R – універсальна газова стала; T – температура атмосфери (°К).

Система диференціальних рівнянь, що описують динаміку вуглецю та азоту в системі «атмосфера–океан», може бути подана так:

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= -VC_{15} + VC_{51} + V; \\ \dot{C}_5 &= VC_{15} - VC_{51} - VC_{56} + VC_{75} - p_{58}C_5 + p_{85}C_8; \\ \dot{C}_6 &= VC_{56} - m_S C_6; \\ \dot{C}_7 &= m_S C_6 - VC_{75} - p_{79}C_7; \\ \dot{C}_8 &= p_{58}C_5 - p_{85}C_8 + p_{98}C_9; \\ \dot{C}_9 &= p_{78}C_7 - p_{98}C_9; \\ \dot{N}_5 &= -VC_{56}/k_6 + VN_{75} - q_{58}N_5 + q_{85}N_8 + V_B; \\ \dot{N}_6 &= C_6/k_6 \\ \dot{N}_7 &= -m_S C_6/k_6 - VN_{75} - q_{58}N_5 + q_{79}N_7; \\ \dot{N}_8 &= q_{58}N_5 - q_{85}N_8 + q_{98}N_9; \\ \dot{N}_9 &= q_{79}N_7 - q_{98}N_9, \end{aligned} \tag{8.30}$$

де $VC_{56}, VC_{86}, VC_{75}, VN_{75}$ – потоки, які задаються рівняннями (8.28) і (8.29).

Для складання прогнозів зміни біогеохімічних циклів у системі атмосфера – суходіл – океан використовують об'єднання моделей циклів азоту в системі атмосфера – рослина – ґрунт (АРГ) та атмосфера – океан (АО).

Цикли елементів на суходолі та в океані об'єднує таке. З материковим стоком у поверхневий шар океану надходить певна

кількість сполук азоту. У моделі цей потік є єдиним, що пов'язує цикли азоту на суходолі і в океані. Поток вуглецю в океан з материковим стоком можна знехтувати. Зв'язок циклів вуглецю на суходолі і в океані відбувається через єдиний загальний резервуар – атмосферу.

В об'єднаній моделі процеси на суходолі описують рівняннями для змінних C_2, C_3, N_3 (система рівнянь (8.28)).

Процеси в океані описують рівняннями для змінних $C_5, \dots, C_9, N_5, \dots, N_9$ (система (8.30)).

Праву частину диференціального рівняння для кількості вуглецю в атмосфері C_1 одержуємо як суму правих частин рівнянь для C_1 в системі (8.28) та системі (8.30). Треба мати на увазі, що потік в атмосферу вуглецю антропогенного походження V наявний в обох рівняннях і тут підсумовування не потрібне.

Зв'язок циклів азоту на суходолі та в океані відбувається через потік V_B – винесення неорганічного азоту із системи АРГ в океан.

Якщо припустити, що потік V_B є пропорційним загальній кількості азоту, що залишає систему АРГ ($V_B = k_B V_P$), то рівняння для потоку V_B можна записати так:

$$V_B = k_B \left[(1 - \varepsilon_N) m N_2 + \varepsilon_N \exp\left\{\frac{\ln Q}{10} \Delta T\right\} N_3 - F_2 f_1(\Delta T) f_2\left(\frac{C_1}{C_1^0}\right) f_3\left(\frac{A}{A^0}\right) + V_N \right]. \quad (8.31)$$

Таким чином, модель круговороту вуглецю та азоту в біосфері АРГО є об'єднанням моделей АРГЗ та АО + рівняння (8.29).

Запитання для самоперевірки

1. За допомогою яких моделей можна досліджувати процеси, що відбуваються в системі атмосфера – рослини – ґрунт?
2. Які блоки має містити модель розвитку фітоценозу?
3. Чим регламентується кількість відображених у моделі факторів?

4. У яких дослідженнях може бути використана модель АРГ1?
5. Охарактеризуйте модель круговороту вуглецю та азоту в біосфері.

9. Математична теорія катастроф та її застосування для дослідження біосфери

За останні десятиріччя в природно-антропогенних катастрофах у світі загинуло близько трьох мільйонів людей, а більше ніж мільярд залишилося без житла. Рішенням 42-ї Генеральної Асамблеї ООН дев'яності роки минулого сторіччя були оголошені міжнародними десятиріччями зменшення виникнення катастроф.

У математиці та близьких до неї галузях знань під *катастрофами* зазвичай розуміють стрибкоподібні зміни, які виникають у вигляді раптової відповіді системи на повільну зміну зовнішніх умов.

У першій половині ХХ ст. саме математики взялися досліджувати проблему катастроф. Після цього з'явилися роботи про катастрофи у галузі психології, гідродинаміки, економіки, екології тощо.

Автором саме математичної теорії катастроф вважають Рене Тома.

Перші відомості про математичну теорію катастроф виникли в 1970 р. Джерелом теорії катастроф є *теорія гладких відображень* (Вітлі) і *теорія біфуркацій динамічних систем* (Пуанкаре, Андронов).

Ще у другій половині ХVІІІ ст. Ейлер помітив, що фізична система за деяких умов відчуває зміну станів рівноваги. Це явище помітив Ейлер, досліджуючи рівновагу стержнів під дією сил, що стискували стержень з обох боків. Якщо навантаження на стержень є меншим за деяку критичну величину, то він має єдиний стан рівноваги – прямолінійний. Якщо навантаження перевищує деяку критичну величину, то можливих станів виявляється два. Крім прямолінійного, стержень може мати форму хвилі, яка буде стійкою в нових умовах. Якщо будь-який скільки завгодно малий зовнішній вплив виведе стержень із стану рівноваги, то почнеться необоротний перехідний

процес, який призведе стержень до нового криволінійного синусоїдального стану.

У XIX ст. Пуанкаре показав, що наявність подібних критичних станів є типовим для нелінійних систем. Він розвинув теорію, яка давала змогу знаходити кінетичні стани. Ця теорія дістала назву *теорії біфуркації (галуження)*.

Вивчав цю проблему Ляпунов та ін. Ляпунову належить один з найефективніших методів розрахунку біфуркаційних, тобто критичних, значень параметрів.

У 50 – 60 роки XX ст. ця теорія була наново відкрита.

Біосфера є надзвичайно складною нелінійною системою, рівновага якої залежить від багатьох чинників і параметрів. Тут слід мати на увазі, що доречно говорити не про класичне поняття рівноваги, а про квазірівноважне. У системі безперервно відбуваються необоротні процеси, і кожен з параметрів може мати критичне біфуркаційне значення, перехід через яке означатиме початок необоротного процесу перебудови біосфери, який веде до зовсім нового стану квазірівноваги. Цей стан зовсім не відомий. Ми не знаємо, чи будуть умови для існування людства. Дехто вважає математичну теорію катастроф частиною *теорії особливостей*, а інші включають теорію особливостей в теорію катастроф.

Теорія особливостей – це графічно узагальнене дослідження функцій на максимум і мінімум. У цій теорії функції замінюють відображеннями, тобто наборами декількох функцій від декількох змінних. *Біфуркація* означає роздвоєння і вживається в широкому розумінні для визначення всіляких якісних перебудов або метаморфоз різних об'єктів унаслідок зміни параметрів, від яких вони залежать.

Математичний опис світу ґрунтується на грі неперервного і дискретного. Дискретне більш помітне. Особливості біфуркації і катастроф – це терміни, які описують виникнення дискретних структур на гладких і неперервних структурах. У наш час *теорія катастроф* – це потужний математичний апарат, що має широку сферу застосування в природознавстві, особливо в комбінації з теорією біфуркації. У той же час це дуже елегантний результат застосування топології до систем, які

мають чотири основних властивості: *бімодальність*; *розривність*; *гістерезис*; *дивергенцію*.

Бімодальність використовують тоді, коли для системи характерним є один або більше станів.

Властивість *розривності* означає, що між цими двома станами виявляється порівняно мало спостережень або індивідів. Прикладом як бімодальності, так і розривності є поділ організмів на самців і самок. Наявність випадкових організмів невизначеної статі не створює значних перешкод для розпізнавання цих двох станів, а теорія дає такий розрив між станами, що будь-який індивід може належати лише до однієї категорії. Про розривність ідеться і тоді, коли мала зміна будь-якої змінної, зокрема часу, зумовлює великі зміни в поведінці або стані системи.

Гістерезис проявляється в тому, що система виявляє чітко виражену уповільнену реакцію на деякі впливи, при цьому ця реакція іде одним шляхом, коли значення впливу збільшується, й іншим, коли значення впливу зменшується.

Дивергенція, характерною особливістю якої є те, що близькі початкові умови еволюціонують до значно більш віддалених один від одного кінцевих станів. Можна навести приклад застосування таких методів до динаміки популяцій: якщо початкові умови трошки вищі або трошки нижчі від цілком визначених порогових значень, то ці умови часто розходяться до принципово різних кінцевих станів.

Математичні моделі катастроф можуть вказати на деякі загальні риси різних явищ стрибкоподібної зміни режиму функціонування системи у відповідь на плавну (повільну) зміну навколишніх умов.

Якщо позначити як Y вектор траєкторії руху системи, а через U – вектор параметрів, які діють на систему (або параметри керування), то список елементарних катастроф, який склав Рене Тома, матиме вигляд, як у табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Список элементарних математичних катастроф та їхній формалізований запис

Кількість параметрів керування	Канонічна форма запису	Назва особливостей
1	$Y^3 + U \cdot Y$	Складка – руйнування центра тяжіння та поглинання його центром тяжіння з меншим потенціалом
2	$\pm (Y^4 + U_1(Y^2/2) + U_2Y)$	Збірка – розділення центра тяжіння на два окремих центри
3	$Y^5 + U_1Y^3 + U_3Y$	Метелик – відшарування, «здугтя» ударної хвилі з вільною границею
4	$\pm Y^6 + U_1Y^4 + U_2Y^3 + U_3Y^2 + U_4Y$	Гіперболічна «омбілічна точка» – двозв'язний «шип»
5	$Y_1^2Y_2 + Y_2^3 + U_1Y_1^2 + U_1Y_1 + U_3Y_2$	Еліптична «омбілічна точка» – кінчик «шипа» (піраміда з трикутною основою)
6	$\pm Y_1^2Y_2 - Y_2^4 + U_1Y_1^2 + U_2Y_2^2 + U_3Y_1 + U_3Y_1 + U_4Y_2$	Параболічна «омбілічна точка» – структура, що має форму гриба, який утворюється струмом, що розбивається

Основними моделями, застосовуваними у теорії катастроф у наукових дослідженнях, є катастрофи «складка» та «збірка».

У дослідженні з погляду катастроф деяких великих систем (наприклад, екологічних, еколого-економічних, соціально-економічних тощо) вдаються до припущень:

- описувана гладкою функцією динамічна система належить до градієнтного типу;

- вектор параметрів має не більше, ніж п'ять компонентів;
- положення рівноваги системи утворюють тільки нерухомі точки;
- систему розглядають як «чорний ящик».

На рис. 9.1 зображено катастрофу, яка називається «складка».

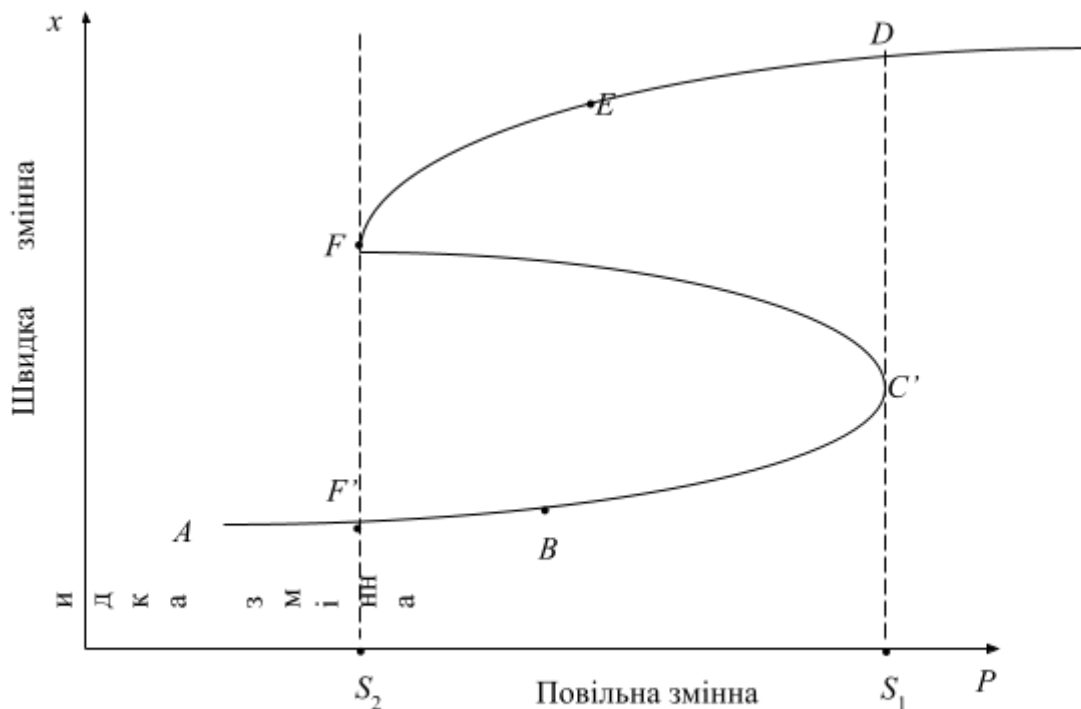


Рис. 9.1. Вид катастрофи «складка»

Вважають, що спочатку система перебуває в точці A на нижній гілці складчастої різноманітності. У міру збільшення змінної P змінна x також збільшується, так що система переходить у точку B , а далі – в C . У точці B змінна P перетинає особливість S_1 , і відбувається катастрофічний стрибок системи на верхню гілку різноманітності в точку D . Подальше зростання змінної P веде систему за точку D . Якщо змінна P починає зменшуватися, то система далі рухається вздовж верхньої гілки різноманітності через точку E в точку F . Тут змінна P перетинає особливості S_2 , і система робить катастрофічний поворот на нижню гілку різноманітності на точку F' , після чого подальша зміна змінної P веде систему до точки A (за зменшення), або в точку B (в разі збільшення), доти, доки вона знову не перетне особливість S_1 .

Проста катастрофа – «складка» добре ілюструє бімодальність, представлену двома гілками складчастої різноманітності, і властивості розривності представлені різкими складками з однієї гілки на іншу, в особливості з S_1 до S_2 . Гістерезис ілюструється тим, що траєкторія системи у разі зменшення параметрів P після перетину з особливостями відрізняється від траєкторії, за якою рухається система за збільшення P . Слід зазначити, що конкретна функція, що пов'язує x і P , на різноманітності неважлива, оскільки лише в проекції x на P зберігає особливість типу «складки».

Запитання для самоперевірки

1. Які властивості мають бути притаманні системі, щоб для її дослідження можна було застосовувати математичну теорію катастроф?
2. Дайте визначення таким властивостям системи, як «бімодальність» та «розривність»
3. Дайте визначення властивостям системи «гістерезис» та «дивергенція».
4. На яку особливість розвитку систем та процесів у них можуть вказати моделі катастроф у дослідженні різних явищ та режимів функціонування систем?
5. Які найпростіші моделі, застосовувані у математичній теорії катастроф для дослідження систем вам відомі?

Частина II

МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ДОВКІЛЛЯ У ВИПАДКУ НЕДЕТЕРМІНОВАНОЇ БАЗОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Екологічні процеси зазвичай перебувають під впливом різноманітних факторів та розмаїття переплетінь взаємозв'язків між окремими елементами. У значній кількості випадків закономірності можуть бути виявлені за цілеспрямованого систематичного дослідження масових явищ, таких як спостереження, збір даних, їхня систематизація та упорядкування і, насамперед, статистичний аналіз.

Оскільки процеси чи явища, що спостерігаються у природному середовищі, підлягають дії багатьох факторів, то кожний їхній індивідуальний прояв буде відрізнятися від іншого (варіювати). І тільки у масовій сукупності об'єктів спостережень виявляються загальні закономірності, у формуванні яких кожна одиниця сукупності робить свій «внесок». За достатньо великого об'єму сукупності випадкові дії значною мірою взаємно гасяться (нейтралізуються) і результат (для сукупності загалом) стає менш залежним від випадку. Це явище є основою утворення статистичних закономірностей.

Статистичні закономірності мають певну статистичну усталеність. В той же час усталеність закономірностей є відносною, вона пов'язана з незмінністю умов її формування. З статистичною усталеністю ми стикаємося у повсякденній практиці дуже часто, ґрунтуючи на ній багато рішень практичного характеру. Наприклад, характеризуючи функціонування деякої екологічної ланки і ухвалюючи рішення щодо майбутнього періоду, виходять з цілого ряду середніх характеристик: середнє процента незабруднених частин цієї ланки, процента техногенного забруднення, витрати природних ресурсів тощо. Підходи та способи наукового аналізу даних, що належать до масових явищ, з метою визначення деяких узагальнювальних ці дані характеристик та виявлення статистичних закономірностей і становлять предмет математичної статистики.

У свою чергу математична статистика спирається на теорію імовірностей – розділ математики, що вивчає закономірності випадкових

явищ. Методи, розроблювані у математичній статистиці, ґрунтуються на тому, що дані одержують під час вибіркового спостереження чи дослідів.

Таким чином, про властивості сукупності доводиться судити за результатами, які у певному сенсі є випадковими (потрапляння у вибірку тієї чи іншої одиниці – наслідок випадку). Використовуючи результати, одержані завдяки застосуванню теорії ймовірностей, математична статистика дає змогу не тільки з'ясувати значення шуканих характеристик, а й дати оцінку ступеню точності висновків, отримуваних в процесі обробки вибіркового даних. Таким чином, створюється база для аналізу статистичних закономірностей за даними спостереження. У математичній статистиці дослідження пов'язане з конкретними даними і йде від практики (спостереження) до гіпотези та її перевірки. Особливе місце посідає проблема застосування методів математичної статистики для аналізу статистичної інформації, яка задана у вигляді часових рядів.

У будь-якому явищі чи процесі природи, що нас оточує, є складний ланцюг великої кількості причин чи наслідків, оскільки будь-яке явище пов'язане з множиною інших явищ. Складні взаємозв'язки природних компонент, їхня неперервна взаємодія під час дослідження часто призводять до неможливості повного передбачення природних явищ та процесів, що відбуваються у докільлі.

Неможливість передбачення випадкових явищ не означає, що вони безпричинні. Навпаки, в їхній основі лежить ланцюг цілком визначених причин та наслідків, як і в основі будь-якого іншого явища. Передбачити випадкові явища неможливо через прихованість їхніх причин, що не можуть бути виявлені. Тобто випадкові явища та випадкові процеси – це такі явища і процеси, причини яких неможливо дослідити. Тому вони існують у природі навколо нас разом із закономірними процесами і явищами, причини виникнення яких нам відомі.

Що ж таке випадкове явище?

Випадковим називають явище, яке за неодноразового відтворення досліду щоразу відбувається дещо інакше.

Кажуть, що у деякій системі триває **випадковий процес**, якщо вона з плином часу може під впливом випадкових подій (факторів) переходити із стану в стан.

Ці поняття найбільш пристосовні до формалізації явищ та процесів, що відбуваються у таких складних системах, як екологічні системи.

Випадковою подією (чи просто подією) називається будь-який факт, який під час досліду може статися чи не статися.

Імовірність події – це чисельна міра ступеня об'єктивної можливості цієї події.

Достовірною називається така подія, яка у певному досліді неодмінно відбудеться. *Неможливою* називається подія, яка у досліді не може відбутися.

Події називаються *несумісними* у досліді, якщо поява однієї з них унеможливує виникнення інших. Події називаються *рівноможливими* у певному досліді, якщо ні одна з них не є об'єктивно більш можливою, ніж інші.

Декілька подій у досліді утворюють *повну групу*, якщо внаслідок досліду обов'язково виникає хоча б одна з них.

Події, що утворюють повну групу і в той же час є несумісними та рівноможливими, називаються *випадковими*, а про дослід кажуть, що він зводиться до схеми випадків. Наприклад, дослід «підкидання монети» зводиться до схеми випадків, тому що подія A_1 – випадіння герба, A_2 – випадіння решки – несумісні, утворюють повну групу та є рівноможливими. Якщо дослід зводиться до схеми випадків, то ймовірність будь-якої події A у такому разі може бути розрахована як відношення кількості випадків, що сприятливі події A , до загальної кількості випадків:

$$P(A) = \frac{m_A}{n},$$

де $P(A)$ – ймовірність події A ; m_A – кількість випадків, сприятливих події A (що зумовлюють її виникнення); n – загальна кількість випадків.

10. Первинна статистична обробка даних спостережень (експериментальних даних)

10.1. Проста статистична сукупність

Випадковою називають величину, яка в процесі спостереження чи дослідіу набуває певного значення, невідомо, якого саме.

Нехай для дослідження деякого явища, що характеризується випадковою величиною X , виконують n спостережень, в кожному з яких X набуває певного значення.

Сукупність значень x_1, \dots, x_n , що їх набуває випадкова величина X в n спостереженнях, називається *простою статистичною сукупністю*, чи простим статистичним рядом.

Звичайно просту статистичну сукупність подають у вигляді таблиці. У першому ряду цієї таблиці вказують номер спостереження (дослідіу), у другому – значення спостережуваної випадкової величини.

Приклад 10.1

На деякій ділянці спостережуваного полігону у певні відрізки часу відбирали партії проб.

Шляхом відбору середньої проби різних партій проб і її наступного аналізу були знайдені значення x_i випадкової величини X – вмісту деякого забруднювального компонента в i -й пробі.

Завдання: записати простий статистичний ряд дослідження у вигляді таблиці.

Розв'язок

Таблиця 10.1

Простий статистичний ряд

i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	2	8	2	15	9
2	5	9	5	16	6
3	6	10	5	17	5
4	7	11	2	18	9
5	7	12	6	19	9
6	9	13	2	20	9
7	5	14	5		

Простий статистичний ряд являє собою первинну форму запису статистичного матеріалу і може бути оброблений різними способами.

Якщо потрібно дослідити достатньо велику сукупність однорідних об'єктів відносно деякої кількісної або якісної ознаки X_i , випадково вибирають з неї обмежену кількість об'єктів та вивчають. Така

сукупність випадково відібраних об'єктів називається *вибірковою сукупністю*, чи просто *вибіркою*. Та велика сукупність об'єктів, з якої виконують вибір, називається *генеральною сукупністю*.

Об'ємом сукупності (вибіркової чи генеральної) називається кількість об'єктів цієї сукупності. Наприклад, об'єм вибірки, поданої у табл. 10.1, дорівнює 20.

В подальшому будемо розглядати виконані n дослідів (спостережень) як «вибірку з деякої суто умовної генеральної сукупності», яка складається з нескінченної кількості можливих дослідів (спостережень), що їх можна було б виконати у тих умовах.

10.2. Статистичний розподіл

Якщо одержана вибірка об'ємом n , у якій значення x_1 випадкової величини X спостерігалось n_1 раз; x_2 – n_2 рази, ..., x_k – n_k разів, при цьому $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Розміщення значень x_1, x_2, \dots, x_n в порядку зростання називають *ранжуванням* статистичних даних. Значення $x_1 \dots x_n$ називається *варіантами*.

Послідовність варіант, записаних у порядку зростання, називається *варіаційним (ранжованим) рядом*; n_1, \dots, n_k називають *частотами варіант* x_1, \dots, x_n , відношення $n_i/n = W_i$ ($i = \overline{1, k}$) називається *відносною частотою* варіанти x_i .

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант x_i та відповідних їм частот n_i чи відносних частот W_i (його подають звичайно у вигляді таблиць, як-от табл. 10.2, 10.3).

Таблиця 10.2

Статистичний розподіл частот

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Таблиця 10.3

Статистичний розподіл відносних частот

x_i	x_1	x_2	...	x_k
W_i	W_1	W_2	...	W_k

Приклад 10.2

Знайти статистичний розподіл частот і відносних частот за даними табл. 10.1.

Розв'язок. Випадкова величина X в 20-ти спостереженнях набувала п'ятьох різних значень: 2, 5, 6, 7, 9 ($i=5$). Значення спостерігались 2-4 рази; 5-6 разів; 6-3 рази; 7-2 рази; 9-5 разів. Запишемо статистичний розподіл частот у вигляді табл. 10.4.

Сума частот n_i дорівнює $n=20$ (об'єм вибірки). Визначивши відносні частоти $W_i=n_i/n$ ($i=1,5$), запишемо їх у таблицю статистичного розподілу відносних частот (табл. 10.5).

Таблиця 10.4

Статистичний розподіл частот

Варіанти x_i	2	5	6	7	9
Частоти n_i	4	6	3	2	5

Таблиця 10.5

Статистичний розподіл відносних частот

Варіанти x_i	2	5	6	7	9
Відносні частоти W_i	0,2	0,3	0,15	0,1	0,25

З табл. 10.5 бачимо, що $\sum_{i=1}^5 W_i = 1$.

Статистичний розподіл можна також задати у вигляді послідовності інтервалів і відповідних їм частот (за частоту, відповідну інтервалу, беруть суму частот варіант, що потрапили у цей інтервал). Такий розподіл часто називають *інтервалом статистичного розподілу*.

Для одержання інтервального статистичного розподілу треба весь діапазон значень x_i випадкової величини X розділити на інтервали і

підрахувати кількість m_i значень x_i , що падають на i -й інтервал, а також знайти відносну частоту $W_i = m_i/n$ ($i = \overline{1, k}$), відповідну i -му інтервалу. Кількість інтервалів не повинна бути надто великою чи надто малою. Практично групування в інтервали рекомендується, якщо $n > 30$; за $n > 100$ рекомендована кількість інтервалів буде 10–20, за $n < 100$ буде 6–8. Довжини інтервалів можуть бути як однаковими, так і різними.

Для зручності обчислень віддають перевагу однаковій довжині інтервалів. Але якщо дослідні дані розподілені нерівномірно, то в області найбільшої щільності розподілу можна обирати інтервали більш вузькі, ніж в області малої щільності. Інтервальні статистичні розподіли подають у вигляді таблиць (табл. 10.6).

Таблиця 10.6

Інтервальні статистичні розподіли

l_i	x_1, x_2	x_2, x_3	...	x_i, x_{i+1}	...	x_k, x_{k+1}
m_i	m_1	m_2	...	m_i	...	m_k

де l_i – позначення i -го інтервалу; x_i, x_{i+1} – границі i -го інтервалу; m_i – відповідна частота; k – кількість інтервалів.

Таку таблицю називають також статистичним рядом.

Приклад 10.3

Виконано аналіз 50 проб води на деякий компонент. Результати аналізу подано в табл. 10.7.

Таблиця 10.7

Інтервальний статистичний розподіл

I_i	3-8	8-13	13-18	18-23	23-28
m_i	5	10	25	6	4
$W_i = m_i/n$	0,1	0,2	0,5	0,12	0,08

m_i – кількість проб, у яких вміст продукту є відповідним i -му інтервалу; $W_i = m_i/n$ ($n=50$) – відносна частота, відповідна i -му інтервалу.

10.3. Графічне зображення статистичного розподілу

Графічне зображення статистичного розподілу дає змогу подати закономірності зміни значень випадкової величини X у наочній формі. Нехай маємо статистичне розподілення частот, як у табл. 10.2.

Позначимо точки $(x_1, n_1) \dots (x_k, n_k)$ на координатній площині та з'єднаємо їх відрізками прямих; одержимо ламану, яка називається *полігоном частот*.

Приклад 10.4

Побудувати полігон частот за даними, наведеними у табл. 10.4.

Розв'язок. Відкладаємо на осі абсцис варіанти x_i , а на осі ординат – відповідні їм частоти n_i і, з'єднавши точки (x_i, n_i) відрізками прямих, одержуємо полігон частот (рис. 10.1).

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $(x_1, W_1), \dots, (x_k, W_k)$; де $W_i = n_i/n$, ($i = \overline{1, k}$).



Рис. 10.1. Полігон частот за даними, наведеними у табл. 10.4

Приклад 10.5

Треба побудувати полігон відносних частот за даними, наведеними у табл. 10.5.

Розв'язок. Відкладаємо на осі абсцис варіанти x_i , а на осі ординат – відповідні їм відносні частоти W_i . З'єднуємо точки (x_i, W_i) відрізками прямих і одержуємо шуканий полігон відносних частот (рис. 10.2).



Рис. 10.2. Полігон відносних частот за табл. 10.5

Інтервальний статистичний розподіл графічно зображують у вигляді так званих гістограм.

Гістограмою частот називають ступеневу фігуру, що складається з прямокутників, основою яких є інтервали довжини h , а висоти дорівнюють відношенню m_i/h (щільність частоти, де m_i – сума частот варіант, що потрапили до i -го інтервалу). Площа гістограми частот дорівнює об'єму вибірки n .

Гістограмою відносних частот називають ступеневу фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є інтервали довжини h , а висоти дорівнюють відношенню W_i/h (щільності відносної частоти). Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі усіх відносних частот, тобто одиниці.

Приклад 10.6

Побудувати гістограми частот та відносних частот за даними табл. 10.7.

Розв'язок. На осі абсцис відкладаємо $h=5$. Над цими інтервалами проводимо відрізки, паралельні осі абсцис, на відстані m_i/h , для чого знайдемо:

$$m_1/h=1; m_2/h=2; m_3/h=5; m_4/h=1,2; m_5/h=0,8.$$

Шукану гістограму зображено на рис. 10.3.

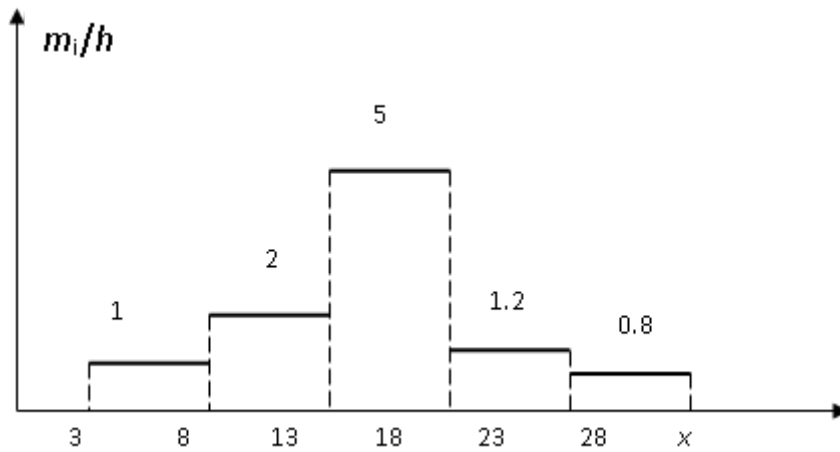


Рис. 10.3. Гістограма частот за даними табл. 10.7

Для побудови гістограми відносних частот знайдемо щільності:

$$W_1/h=0,02; W_2/h=0,04; W_3/h=0,1; W_4/h=0,024; W_5/h=0,0016.$$

Відкладаємо на осі абсцис задані інтервали h . Проведемо над цими інтервалами відрізки, паралельні осі абсцис, на відстані W_i/h . Гістограму зображено на рис. 10.4.

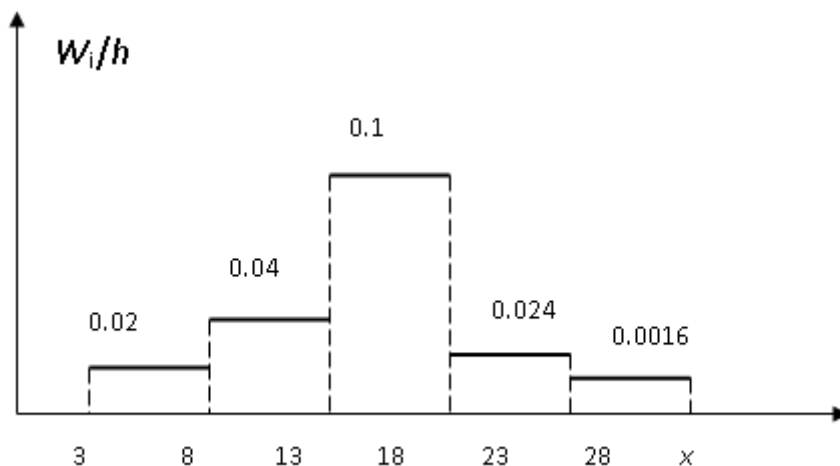


Рис. 10.4. Гістограма відносних частот, побудована за табл. 10.7

10.4. Емпірична функція розподілу

Одним із способів обробки статистичних даних є побудова емпіричної функції розподілу випадкової величини. Нехай відомо статистичний розподіл частот (табл. 10.2). Позначимо n_k – кількість спостережень, у яких X набула значення, меншого, ніж x ; n – загальна кількість досліджень (спостережень), або об'єм вибірки.

Емпіричною функцією розподілу (функцією розподілу вибірки) називають функцію $F^*(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$: $F^*(x) = n_k/n$.

Властивості емпіричної функції такі:

1. Значення її належить відрізку $[0,1]$;
2. $F^*(x)$ – функція, що не зменшується;
3. Якщо x_1 – найменша варіанта, а x_k – найбільша, то $F^*(x) = 0$, якщо $x < x_1$ та $F^*(x) = 1$ за $x > x_k$.

Графік емпіричної функції розподілу має ступеневий вигляд. Величина стрибків у точках x_1 і x_k дорівнює частотам n_1, \dots, n_k .

Доведено, що в разі збільшення кількості дослідів n за будь-якого x відносна частота події $X < x$ наближується до ймовірності цієї події. Отже, емпірична функція розподілу $F^*(x)$ наближується до інтегральної функції $F^*(x) = P(X < x)$, яку часто називають **теоретичною функцією розподілу**. Графік $F^*(x)$ у такому разі буде нескінченно наближуватися до плавної кривої $F(x)$. Таким чином, емпірична функція розподілу вибірки слугує для оцінювання теоретичної функції розподілу генеральної сукупності.

Приклад 10.7

Побудувати емпіричну функцію за статистичним розподілом частот, поданим у табл. 10.4.

Розв'язок. Найменша варіанта дорівнює двом, відповідно $F^*(x) = 0$ за $X \leq 2$. Значення $X < 5$, відповідно $x_1 = 2$ спостерігалось чотири рази, тобто $F^*(x) = 4/20 = 0,2$ за $2 < x \leq 5$. Значення $X < 6$, відповідно $x_1 = 2$ та $x_2 = 5$ спостерігались $4 + 6 = 10$ разів, тобто $F^*(x) = 10/20 = 0,5$ за $5 < x \leq 6$. Значення $X < 7$, відповідно $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ та $x_3 = 6$ спостерігались $4 + 6 + 3 = 13$ разів, тобто $F^*(x) = 13/20 = 0,65$ за $6 < x \leq 7$. Значення $X < 9$, відповідно $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$ та $x_4 = 7$ спостерігались $4 + 6 + 3 + 2 = 15$ разів, тобто $F^*(x) = 15/20 = 0,75$ за $7 < x \leq 9$. Оскільки $x_5 = 9$ – найбільша варіанта, то $F^*(x) = 1$ за $x > 9$.

Запишемо емпіричну функцію:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2; \\ 0,2 & 2 < x \leq 5; \\ 0,55 & 5 < x \leq 6; \\ 0,65 & 6 < x \leq 7; \\ 0,75 & 7 < x \leq 9; \\ 1 & x > 9. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на рис. 10.5.

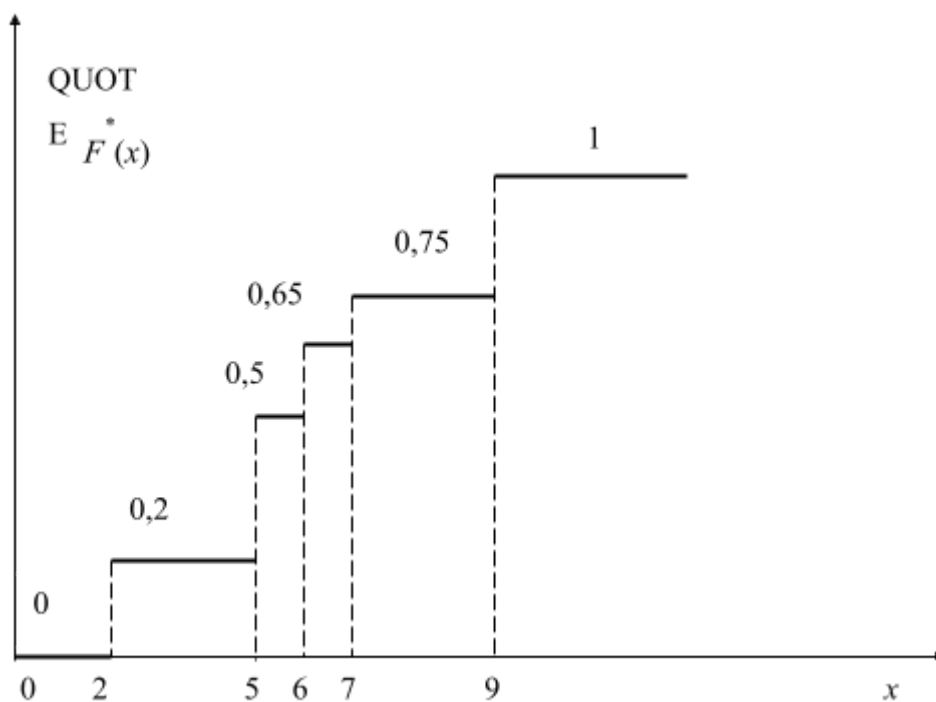


Рис. 10.5. Графік емпіричної функції $F^*(x)$

10.5. Чисельні характеристики статистичного розподілу

Нехай за вибіркою об'єму n побудовано статистичний розподіл частот (див. табл. 10.2).

Знайдемо вибірккову середню:

$$\bar{x}_B = \frac{n_1 x_1 + \dots + n_k x_k}{n}, \quad (10.1)$$

де $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Вибіркове середнє – це середнє зважене значення випадкової величини X з вагами, рівними відповідним частотам.

Характеристикою розсіяння дослідних даних (даних спостереження) x_i навкруги свого середнього значення \bar{x}_B є вибіркова дисперсія.

Вибіркова дисперсія – це середня зважена квадратів відхилень значень x_i від їхнього середнього значення \bar{x}_B з вагами, рівними відповідним частотам:

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n}. \quad (10.2)$$

Вибірковим середнім квадратичним відхиленням (стандартом) називають квадратний корінь з вибіркової дисперсії:

$$\sigma_n = \sqrt{D_B}. \quad (10.3)$$

На практиці для обчислення дисперсії використовують таку формулу:

$$D_B = \bar{x}^2 - (\bar{x}_B)^2, \quad (10.4)$$

де $\bar{x}^2 = \frac{n_1 x_1^2 + \dots + n_k x_k^2}{n}$ – середнє квадратів значень x_i ,

$(\bar{x}_B)^2$ – квадрат середнього значення x_i , обчисленого за формулою (10.1).

Приклад 10.8

За даними прикладу 10.1 (див. табл. 10.4) знайти:

а) середній вміст визначуваного компонента у ґрунті;

б) дисперсію вмісту компонента у ґрунті.

Розв'язок. а) За статистичним розподілом частот (див. табл. 10.4), використовуючи формулу (10.1) знайдемо:

$$\bar{x}_B = \frac{2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 5}{20} = 5,75.$$

б) За формулою (10.2) знаходимо:

$$D_B = \frac{56,25 + 3,38 + 0,19 + 3,13 + 52,81}{20} = 5,79.$$

Таким чином, середній вміст компонента у ґрунті дорівнює 5,75%; дисперсія вмісту компонента у ґрунті становить $D_B=5,79$.

Нехай усі значення випадкової величини X поділено на кілька груп. Розглянувши кожну групу як самостійну сукупність, можна знайти її середнє арифметичне.

Груповою середньою називається середнє арифметичне значень величини X , що належить цій групі.

Знаючи групові середні та об'єм групи, можна знайти загальне середнє: *загальне середнє* (\bar{X}) дорівнює середньому арифметичному групових середніх, зважених за об'ємом груп.

Приклад 10.9

Знайти групові та загальне середнє вибіркової сукупності значень x_i з таблиці спостережень 10.1, що сформовані (поділені) у дві групи і подані у вигляді табл. 10.8.

Таблиця 10.8

Дані спостережень

Групи	$j=1$		$j=2$		
Значення	2	5	6	7	9
Частоти	4	6	3	2	5
Об'єм групи	$N_1=4+6=10$		$N_2=3+2+5=10$		

Розв'язок

$$\bar{x}_1 = \frac{4 \cdot 2 + 6 \cdot 5}{10} = 3,8;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 9 \cdot 5}{10} = 7,7;$$

знайдемо загальне середнє:

$$\bar{x} = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2}{N_1 + N_2} = 5,75.$$

Груповою дисперсією називають дисперсію значень випадкової величини X , що належить групі, відносно групової середньої:

$$D_{i \text{ гр}} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_j)^2}{N_j}, \quad (10.5)$$

де n_i – частота значень x_i , j – номер групи, \bar{x}_j групове середнє j -ї групи,

$$N_j = \sum_{i=1}^k n_i - \text{об'єм групи } j.$$

Приклад 10.10

Знайти групові дисперсії сукупності, яка складається з двох груп за даними, які подані у табл. 10.8.

Розв'язок. Групові дисперсії будемо визначати за формулою (10.4), використовуючи середні \bar{x}_1 та \bar{x}_2 , що були знайдені у прикладі 10.9:

$$D_{1 \text{ гр}} = \frac{4(2-3,8)^2 + 6(5-3,8)^2}{10} = 2,16; \quad D_{2 \text{ гр}} = \frac{3(6-7,7)^2 + 2(7-7,7)^2 + 5(9-7,7)^2}{10} = 1,81.$$

Знаючи дисперсію кожної групи, можна знайти їхнє середнє арифметичне.

Внутрішньогруповою дисперсією називають середнє арифметичне групових дисперсій, зважене за об'ємами груп:

$$D_{\text{вн гр}} = \frac{\sum N_j D_{j \text{ гр}}}{n}, \quad (10.6)$$

де N_j – об'єм j -ї групи; $D_{j \text{ гр}}$ – групова дисперсія j -ї групи;

$$n = \sum_{j=1}^k N_j - \text{об'єм усієї сукупності; } k - \text{кількість груп.}$$

Приклад 10.11

Знайти внутрішньогрупову дисперсію за даними табл. 10.8.

Розв'язок. Внутрішньогрупову дисперсію знаходимо за формулою (10.6). Вона буде дорівнювати:

$$D_{\text{вн гр}} = \frac{10 \cdot 2,16 + 10 \cdot 1,81}{20} = 1,99.$$

Якщо відомі групові та загальна середні, то можна знайти дисперсію групових середніх відносно загальної.

Міжгруповою дисперсією називають дисперсію групових середніх відносно середньої:

$$D_{\text{між гр}} = \frac{\sum_{j=1}^k N_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{n}, \quad (10.7)$$

де $n = \sum_{j=1}^k N_j$ – об'єм усієї сукупності, N_j – об'єм групи j ,

\bar{x}_j – загальна середня, \bar{x} – групова середня j -ї групи.

Приклад 10.12

Знайти міжгрупову дисперсію за даними прикладу 10.9 (див. табл. 10.8).

Розв'язок. Оскільки $\bar{x}_1 = 3,8$; $\bar{x}_2 = 7,7$; $\bar{x} = 5,75$ (значення, які розраховані у попередніх прикладах), використавши формулу (10.6), обчислюємо міжгрупову дисперсію:

$$D_{\text{між гр}} = \frac{10(3,8-5,75)^2 + 10(7,7-5,75)^2}{20} = 3,8.$$

Якщо сукупність складається з кількох груп, то загальна дисперсія дорівнює сумі внутрішньогрупової та міжгрупової дисперсій:

$$D_{\text{заг}} = D_{\text{між гр}} + D_{\text{вн гр}}. \quad (10.8)$$

Результати, здобуті нами у розв'язку прикладів 10.11 та 10.12, означають, що $D_{\text{заг}} = 3,8 + 1,99 = 5,79$.

Крім розглянутих вже характеристик (вибіркове середнє та дисперсія), часто застосовують інші характеристики.

Медіаною Me називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, однакові за кількістю.

Якщо кількість варіант парна ($n=2k$), то $Me = (x_k + x_{k+1})/2$.

Наприклад, для ряду 4, 6, 8, 10 медіана дорівнює $(6+8)/2=7$. Якщо вона непарна ($n=2k+1$), то $Me = x_{k+1}$.

Наприклад, для ряду 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 медіана дорівнює 10.

Найпростішою характеристикою розсіяння варіаційного ряду є *розмах варіювання* R – це різниця між найбільшою та найменшою варіантами. Для ряду з варіант 4, 6, 8, 10 $R=10-4=6$.

Для характеристики розсіювання варіаційного ряду можна застосовувати *середнє абсолютне відхилення* θ , його визначають як середнє арифметичне абсолютних відхилень:

$$\theta = \frac{\sum n_i |x_i - \bar{x}_B|}{n} .$$

Так для ряду з прикладу 10.2 середнє абсолютне відхилення дорівнюватиме:

$$\theta = \frac{4|2-5,75|+6|5-5,75|+3|6-5,75|+2|7-5,75|+5|9-5,75|}{20} = 1,95.$$

Коефіцієнтом варіації V називається відношення вибіркового середнього квадратичного відхилення до вибіркової середньої та подають його у відсотках:

$$V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} \cdot 100\% .$$

Наприклад, для ряду з прикладу 10.2:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = 2,41;$$

$$\bar{x}_B = 5,75;$$

$$V = 2,41/5,75 \cdot 100\% = 40\%.$$

Якщо потрібно порівняти два варіаційних ряди за величиною розсіяння, то після обчислення для кожного з них коефіцієнта варіації можна стверджувати: більше розсіяння має той ряд, у якого коефіцієнт варіації більший.

Для повнішої характеристики статистичного розподілу використовують моменти – початкові та центральні, які називають *емпіричними*, їх визначають за формулами:

$M_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}$ – початковий емпіричний момент порядку k ,

$m_k = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_B)^k}{n}$ – центральний емпіричний момент порядку k .

Початковий емпіричний момент першого порядку M_1 дорівнює вибірковому середньому ($M_1 = \bar{x}_B$); центральний емпіричний момент другого порядку m_2 дорівнює вибірковій дисперсії ($m_2 = D_B$).

Для того щоб оцінити відхилення емпіричного розподілу від нормального, використовують такі характеристики, як асиметрія та ексцес.

Асиметрія емпіричного розподілу a_s визначається рівнянням

$$a_s = m_3 / \sigma_B^3.$$

де m_3 – центральний момент третього порядку;
 σ_B – середньоквадратичне відхилення.

Ексцес емпіричного розподілу E_k визначають за формулою

$$E_k = (m_4 / \sigma_B^4) - 3,$$

де m_4 – центральний момент четвертого порядку;
 σ_B – середньоквадратичне відхилення.

Запитання для самоперевірки

- 1) Що таке вибіркове середнє?
- 2) Що називають функцією розподілу вибірки? Назвіть її властивості.
- 3) Що визначає вибіркова дисперсія?
- 4) Що таке середнє квадратичне відхилення?

11. Теорія кореляції в аналізі зв'язків між характеристиками екологічних явищ і процесів

11.1. Основні поняття та визначення

Під час дослідження екологічних явищ та процесів часто виникає потреба в аналізі зв'язків між різними кількісними і якісними ознаками.

Дві випадкові величини можуть бути пов'язані функціональною залежністю, або статистичною залежністю, або бути незалежними. За функціонального зв'язку значення однієї величини (аргументу) є відповідним певному значенню другої величини (функції).

Статистичною називають залежність за таких умов:

1. Кожному значенню однієї з випадкових величин (наприклад, X) є відповідним ряд розподілу іншої (наприклад, Y).

2. Із зміною X закономірно змінюються статистичні характеристики рядів розподілу Y : положення рядів, розподіл, розсіяння.

Суворо функціональна залежність реалізується рідко, оскільки обидві величини або одна з них зазнають також дії випадкових факторів, причому серед них можуть бути і спільні для обох величин (під «спільними» тут розуміють такі фактори, які впливають і на X і на Y).

Наприклад, якщо Y залежить від випадкових чинників Z_1, Z_2, V_1, V_2 , а X залежить від випадкових факторів Z_1, Z_2, U_1 , то між Y і X є статистична залежність, оскільки серед випадкових факторів є спільні (Z_1 та Z_2).

Статистичну залежність називають *кореляційною*, якщо внаслідок зміни однієї з величин змінюється середнє значення іншої. Будь-яка кореляційна залежність є статистичною, але не всяка статистична залежність є кореляційною.

Нехай дані, одержувані у спостереженні, вивчають з метою дослідження залежності між випадковими величинами X та Y , і вони такі, що кожному значенню X є відповідні декілька значень Y . Наприклад, за $X = x$ величина Y набуває значень y_1, y_2, \dots, y_k . Знайдемо середнє арифметичне цих значень та позначатимемо його через \bar{y}_x тоді:

$$\bar{y}_x = \frac{\sum_{i=1}^b y_i}{k},$$

де \bar{y}_x називають умовною середньою.

Використовуючи поняття умовної середньої, кореляційну залежність Y від X можна визначити як функціональну залежність умовної середньої \bar{y}_x від x :

$$\bar{y}_x = f(x). \quad (11.1)$$

Рівняння (11.1) називається *рівнянням регресії Y на X (чи Y від X)*; функцію $f(x)$ називають *функцією регресії Y за X* , а її графік – *лінією регресії Y на X (Y на X)*.

Аналогічно можна встановити кореляційну залежність умовної середньої \bar{x}_y від y (\bar{x}_y – середнє арифметичне значень x відповідно Y):

$$\bar{x}_y = \varphi(y). \quad (11.2)$$

Рівняння (11.2) називається *рівнянням регресії X на Y (чи X від Y)*; функцію $\varphi(y)$ називають *функцією регресії X за Y* , а її графік – *лінією регресії X на Y (X на Y)*.

Коефіцієнтом кореляції називають відношення кореляційного моменту до добутку середніх квадратичних відхилень величин, між якими розглядається зв'язок, тобто:

$$r_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (11.3)$$

Кореляційним моментом $K_{x,y}$ («моментом зв'язку» чи коваріацією $\text{cov}\{X, Y\}$, ($\text{cov}_{x,y}$) випадкових величин X та Y називають математичне

очікування добутку центрованих величин X та Y :

$$K_{xy} = M\{X, Y\} = M\{(X - m_x)(Y - m_y)\}.$$

Випадкові величини називаються *корельованими*, якщо їхній кореляційний момент (тобто і коефіцієнт кореляції) відмінний від нуля.

Із незалежності випадкових величин завжди випливає їхня некорельованість, але із некорельованості не завжди випливає їхня незалежність.

Вибірковий коефіцієнт кореляції – безрозмірна величина, при цьому справедливим є вираз:

$$|r_{xy}| \leq 1.$$

Якщо випадкові величини X та Y пов'язані точковою лінійною функціональною залежністю $Y = aX + b$, то $r_{xy} = \pm 1$ (знак «+» чи «-» залежить від того, чи $a > 0$, чи $a < 0$).

Якщо $r_{xy} > 0$, то йдеться про додатну кореляцію X та Y (за збільшення однієї з величин друга має тенденцію у середньому збільшуватися).

Якщо $r_{xy} < 0$ – мова про від'ємну кореляцію між X та Y (за збільшення однієї з величин друга має тенденцію в середньому зменшуватися).

Про наявність чи відсутність кореляції можна дійти висновку у першому наближенні за виглядом кореляційного зображення точок усіх одержаних вимірів (чи спостережень) пар значень випадкових величин.

Кореляційний аналіз вирішує дві основні задачі.

1. Перша задача теорії кореляції – встановити форму кореляційного зв'язку, тобто вигляд функції регресії (лінійна, квадратична, показникова тощо). Якщо обидві функції регресії лінійні, то кореляцію називають *лінійною*, якщо це не так – *нелінійною*. За лінійної кореляції обидві лінії регресії є прямими лініями.

2. Друга задача теорії кореляції – оцінити щільність (силу) кореляційного зв'язку. Щільність кореляційної залежності Y від X оцінюють за величиною розсіювання значень величини Y навколо умовного середнього \bar{y}_x .

Велике розсіювання свідчить про слабку залежність Y та X , або про те, що залежності немає; можливо навіть, що Y та X пов'язані функціонально, але під дією другорядних випадкових факторів цей

зв'язок виявився розмитим, через що за одного і того самого значення $X = x$ величина Y набуває різних значень. Аналогічно (за величиною розсіювання значень X навколо умовного середнього \bar{x}_y) оцінюють щільність кореляції зв'язку X від Y .

11.2. Лінійна кореляція

Нехай відомо, що випадкові величини X та Y пов'язані лінійною кореляційною залежністю (обидві лінії регресії є прямими). Потрібно за даними спостережень (досліду) знайти рівняння прямих ліній регресії Y на X та X на Y й оцінити силу лінійного кореляційного зв'язку.

Нехай маємо найпростіший випадок, коли під час незалежних спостережень була одержана сукупність n пар чисел: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ (кожна пара чисел спостерігалась тільки по одному разу). Тоді шукане рівняння прямої лінії регресії Y на X буде мати такий вигляд:

$$Y = \rho_{yx} x + b, \quad (11.4)$$

де ρ_{yx} – вибірковий коефіцієнт регресії Y за X .

Рівняння (11.4) називається *ймовірним рівнянням прямої лінії регресії Y на X* .

Параметри ρ_{yx} та b в рівнянні (11.4) визначають на основі методу найменших квадратів, тобто такими, щоб сума квадратів відхилень експериментальних значень y_i від значень Y_i ($i=1, 2, \dots, n$), обчислених за рівнянням (11.4), була мінімальною:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 = \min.$$

Система нормальних рівнянь для визначення ρ_{yx} та b має такий вигляд:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \rho_{yx} + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \rho_{yx} + n b = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (11.5)$$

Розв'язавши цю систему, наприклад, за формулами Крамера, знайдемо шукані параметри:

$$\rho_{yx} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}; \quad (11.6)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (11.7)$$

Аналогічно можна знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y :

$$X = \rho_{xy} y + c,$$

де ρ_{xy} – вибірковий коефіцієнт регресії X на Y .

Для характеристики сили лінійного кореляційного зв'язку між величинами X та Y за дослідними даними знаходимо **вибірковий коефіцієнт кореляції**:

$$r_B = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n s_x s_y}, \quad (11.8)$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$; $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$;

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}; \quad s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}; \quad (i=1, n);$$

s_x, s_y – вибіркові середні квадратичні відхилення.

Для практичного використання більш зручними є формули:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i; \quad (11.9)$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}; \quad (11.10)$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}. \quad (11.11)$$

Приклад 11.1

Деякі характеристики X та Y ряда з i компонентів досліджуваних параметрів довкілля пов'язані між собою та мають значення, які подані у табл. 11.1. Знайти залежність між X та Y та обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції.

Таблиця 11.1

Характеристики X та Y

x_i	5	8	10	7	5
y_i	4	5	9	6	1

Розв'язок. Побудуємо таблицю, в якій крім, вихідних даних, містяться коефіцієнти для обчислення системи (табл. 11.2).

Таблиця 11.2

Коефіцієнти для обчислення системи

I	Компо-не нти	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1	5	4	25	16	20

2	2	8	5	64	25	40
3	3	10	9	100	81	90
4	4	7	6	49	36	42
5	5	5	1	25	1	5
Σ		35	25	263	159	197

Підставляючи значення з табл. 11.2 в рівняння (11.5) – (11.7), знаходимо значення ρ_{yx} , b :

$$\rho_{yx} = \frac{5 \cdot 197 - 25 \cdot 35}{5 \cdot 263 - 35^2} = 1,2;$$

$$b = \frac{263 \cdot 25 - 35 \cdot 197}{5 \cdot 263 - 35^2} = -3,58.$$

Рівняння визначуваної регресії матиме такий вигляд:

$$Y = 1,2X - 3,58.$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції знаходимо за формулою (11.8), попередньо зробивши обчислення за формулами (11.9) – (11.11):

$$\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^5 x_i y_i - \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i \sum_{i=1}^5 y_i = 197 - \frac{1}{5} 35 \cdot 25 = 22;$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^5 x_i^2 - \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 x_i \right)^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[263 - \frac{1}{5} \cdot 35^2 \right]} \approx 2,12;$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{4} \left[\sum_{i=1}^5 y_i^2 - \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 y_i \right)^2 \right]} = \sqrt{\frac{1}{4} [159 - 125]} \approx 2,91;$$

$$r_B = \frac{22}{5 \cdot 2,12 \cdot 2,91} \approx 0,71.$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції між X та Y дорівнює 0,71.

Розглянемо більш загальний випадок. Нехай в n незалежних спостереженнях одне й те саме значення x спостерігається n_x разів, а значення y – n_y разів. Такі дані групують, тобто підраховують частоти n_x , n_y , n_{xy} та подають їх у вигляді таблиці, яка називається кореляційною таблицею.

Приклад 11.2

У $n = 8$ незалежних вимірюваннях були одержані такі дані, що подають залежність густини водних розчинів від концентрації досліджуваного компонента за $t=10$ °С (табл. 11.3). Подати ці дані у вигляді кореляційної таблиці.

Таблиця 11.3

Дані вимірювань

Концентрація	15	15	16	16	17	17	17	18
Густина	1,11	1,1 2	1,1 2	1,1 3	1,1 2	1,1 3	1,1 3	1,1 4

Розв'язок. На перетині рядка та стовпця знаходять n_{xy} . Наприклад, частота 1, що є на перетині першого рядка та першого стовпця, вказує, що пара чисел (15 та 1,11) спостерігається у досліді один раз (табл. 11.4).

Таблиця 11.4

Кореляційна таблиця

Значення y_i (щільність) г/см ³	Значення x_i , % (концентрації компонента)				
	15	16	17	18	n_y
1,11	1				1
1,12	1	1	1		3
1,13		1	2		3
1,14				1	1
n_x	2	2	3	1	8

В останньому стовпці записані суми частот рядків, які вказують, скільки разів спостерігалось значення y_i випадкової величини Y у комбінації (сполученні) з різними значеннями випадкової величини X . В останньому рядку записані суми частот стовпців, вони вказують, скільки разів значення x_i величини X спостерігається з різними значеннями величини Y . У нижньому правому куті записана сума всіх частот

(загальна кількість n виконаних вимірювань). Очевидно, $\sum n_x = \sum n_y = n$, у розглянутому випадку $n = 8$.

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X , одержане за згрупованими даними, матиме вигляд:

$$\bar{y}_x = \rho_{yx}x + b$$

(тут використане поняття умовної середньої \bar{y}_x). Беручи до уваги вирази

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}; \quad \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}, \quad (11.12)$$

маємо для згрупованих даних

$$\sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \cdot n; \quad \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y} \cdot n; \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = \bar{x}_i^2 \cdot n,$$

а також те, що кожна пара чисел (x, y) спостерігалась n_{xy} разів

($\sum xy = \sum n_{xy} xy$), формули (11.6) і (11.7) можна подати у такому вигляді:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)}; \quad b = \frac{n\bar{x}^2\bar{y} - \bar{x}\sum n_{xy}\bar{x}y}{n(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)}.$$

Оскільки $\bar{x}^2 - \bar{x}^2 = \sigma_x^2$, то

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2}.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на σ_x/σ_y , одержуємо:

$$\rho_{yx} \sigma_x / \sigma_y = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x \sigma_y}. \quad (11.13)$$

Таким чином, маємо вираз для вибіркового коефіцієнта кореляції:

$$r_B = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x \sigma_y}, \quad (11.14)$$

а формулу, яка пов'язує коефіцієнт регресії Y на X ρ_{yx} з коефіцієнтом вибіркової кореляції:

$$\rho_{yx} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad (11.15)$$

Отже, вибіркоче рівняння прямої лінії регресії Y на X :

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}), \quad (11.16)$$

і аналогічно X на Y :

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}). \quad (11.17)$$

Приклад 11.3

На основі спостережень, що були виконані протягом тривалого періоду часу вимірювань досліджуваного компонента (X) в атмосферних викидах технологічного об'єкта, та даних процента вилучення цього компонента (Y) після очищення деяким методом складено кореляційну таблицю (табл. 11.5). Знайти вибіркоче рівняння прямої лінії регресії Y на X .

Розв'язок. Шукатимемо розв'язок у вигляді виразів (11.16) та (11.17). Спочатку обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції. Результати розрахунку зручно записати у дві допоміжні таблиці, розміщені праворуч і знизу від вихідної кореляційної таблиці (будемо називати їх «правою» та «нижньою» таблицями (табл. 11.6)).

Таблиця 11.5

Кореляційна таблиця

X \ Y	4-10	10-16	16-22	22-28	28-34	34-40
17-27	2	4				
27-37		6	2	1		
37-47			3	35	2	
47-57			1	10	6	
57-67				4	2	4

Таблиця 11.6

Кореляційна та допоміжні («права» і «нижня») таблиці

X \ Y	4-10	10-16	16-22	22-28	28-34	34-40	n_y	y	v	$n_y v$	$n_y v^2$	q	qv
17-27	2	4					6	22	-2	-12	24	-14	28
27-37		6	2	1			9	32	-1	-9	9	-14	14
37-47			3	35	2		40	42	0	0	0	-1	0
47-57			1	10	6		17	52	1	17	17	5	5
57-67				4	2	4	10	62	2	20	40	10	20
n_x	2	10	6	50	10	4	82			16	90		67
x	7	13	19	25	31	37							
u	-3	-2	-1	0	1	2							
$n_x u$	-6	-20	-6	0	10	8	-14						
$n_x u^2$	18	40	6	0	10	16	90						
t	-4	-14	-1	17	10	8							
tu	12	28	1	0	10	16	67						

Як значення y_i величини Y беремо середини інтервалів: $y_1 = 22$ (середина інтервалу 17-27), $y_2 = 32$ (середина інтервалу 27-37) і т. д. Запишемо ці значення в стовпець y «правої» таблиці. Аналогічно визначаємо значення x_i величини X : $x_1 = 7$ (середина інтервалу 4-10); $x_2 = 13$ (середина інтервалу 10-16) і т. д. Запишемо їх у рядок x «нижньої» таблиці. Для спрощення розрахунків перейдемо від початкових варіант x_j та y_i ($i=1, \dots, 5; j=1, 2, \dots, 6$) до умовних варіант

$$u_j = \frac{x_j - c_1}{h_1} \quad \text{та} \quad v_i = \frac{y_i - c_2}{h_2},$$

де $h_1 = x_{j+1} - x_j = 10 - 4 = 16 - 10 = \dots = 6$;

$$h_2 = y_{j+1} - y_j = 27 - 17 = 37 - 27 = \dots = 10.$$

Як c_1 беремо варіанту $x = 25$, яка має найбільшу частоту $n_x = 50$, а за c_2 візьмемо варіанту $y = 42$, що має найбільшу частоту $n_y = 40$. Таким чином, умовні варіанти:

$$u_j = \frac{x_j - 25}{6} \quad \text{та} \quad v_i = \frac{y_i - 40}{10}.$$

Запишемо їх відповідно в рядок u «нижньої» таблиці і в стовпчик v «правої» таблиці. Елементи рядка $n_x u$ дорівнюють добуткам відповідних елементів рядків n_x і u . А елементи стовпця $n_y v$ дорівнюють добуткам відповідних елементів стовпців n_y та v . Аналогічно заповнюємо рядок $n_x u^2$ і стовпець $n_y v^2$.

Кожний елемент стовпця q дорівнює сумі добутків частот n_{uv} , які записано у відповідному рядку вихідної кореляційної таблиці, на відповідні елементи рядка u :

$$q_1 = 2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) = -14; \quad q_2 = 6 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = -14 \text{ і т. д.}$$

У рядку t кожен елемент дорівнює сумі добутків частот n_{uv} , які знаходяться у відповідному стовпці початкової кореляційної таблиці, на відповідні елементи стовпця v :

$$t_1 = 2 \cdot (-2) = -4; \quad t_2 = 4 \cdot (-2) + 6 \cdot (-1) = -14 \text{ і т. п.}$$

У стовпці qv кожен елемент дорівнює добутку відповідних елементів стовпців q та v , у рядку tu кожен елемент дорівнює добутку відповідних елементів рядків t та u . Рівність сум $\sum qv = \sum tu = 67 = \sum n_{uv} uv$ слугує контролем правильності обчислень.

Після цього послідовно знаходимо:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_x u}{n} = -0,171; \quad \bar{v} = \frac{\sum n_y v}{n} = 0,195;$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{90}{82} - (-0,171)^2} = 1,034; \quad \sigma_v = \sqrt{\frac{90}{82} - 0,195^2} = 1,029.$$

Беручи до уваги $\sum n_{uv}uv = 67$, знаходимо коефіцієнт кореляції:

$$r_B = \frac{67 - 82 \cdot (-0,171) \cdot 0,195}{82 \cdot 1,034 \cdot 1,025} \approx 0,799.$$

Знаходимо значення:

$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + c_1 = -0,171 \cdot 6 + 25 = 23,97;$$

$$\bar{y} = \bar{v}h_2 + c_2 = 0,195 + 40 = 41,95;$$

$$\sigma_x = \sigma_u h_1 = 6,204;$$

$$\sigma_y = \sigma_v h_2 = 10,29.$$

Підставивши всі знайдені величини у рівняння (11.16) одержуємо шукане вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X :

$$\bar{y}_x = 1,325x + 10,184.$$

Аналогічно можна одержати вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y , використовуючи рівняння (11.17):

$$\bar{x}_y = 0,482y + 3,76.$$

Порівняємо умовні середні, розраховані за цими рівняннями, та задану кореляційну таблиці 11.6 (\bar{y}_x^*, \bar{x}_y^* – умовні середні за даними табл. 11.6; \bar{y}, \bar{x} – умовні середні, обчислені за формулами) (табл. 11.7, 11.8).

Таблиця 11.7

x_i	\bar{y}_x	\bar{y}_x^*	$\bar{y}_x - \bar{y}_x^*$
7	21,45 9	22	0,541
13	29,40 9	28	-1,409
16	37,35 9	40,33 3	2,974
25	45,30 9	45,4	0,091
31	53,25 9	52	-1,259
37	61,20 9	62	0,791

$$\bar{y}_7 = \frac{2 \cdot 22}{2} = 22;$$

$$\bar{y}_{13} = \frac{4 \cdot 22 + 6 \cdot 32}{10} = 28;$$

$$\bar{y}_{19} = \frac{2 \cdot 32 + 3 \cdot 42 + 1 \cdot 52}{6} = 40,333 \quad ;$$

$$\bar{y}_{25} = \frac{1 \cdot 32 + 35 \cdot 42 + 10 \cdot 52 + 4 \cdot 62}{50} = 45,4;$$

$$\bar{y}_{31} = \frac{2 \cdot 42 + 6 \cdot 52 + 2 \cdot 62}{10} = 52;$$

$$\bar{y}_{37} = \frac{4 \cdot 62}{4} = 62.$$

Таблиця 11.8

y_i	\bar{x}_y	\bar{x}_y^*	$\bar{x}_y^* - \bar{x}_y$
22	13,39 4	11	-2,394

32	18,21 4	15.66 7	-2,547
42	23,03 4	24.85	1,816
52	27,85 4	26.76 5	-1,089
62	32,67 4	31	1,674

$$\bar{x}_{22} = \frac{2 \cdot 7 + 4 \cdot 13}{6} = 11;$$

$$\bar{x}_{32} = \frac{6 \cdot 13 + 2 \cdot 19 + 1 \cdot 25}{9} = 15,667;$$

$$\bar{x}_{42} = \frac{3 \cdot 19 + 35 \cdot 25 + 2 \cdot 31}{40} = 24,85;$$

11.3. Нелінійна кореляція

Кореляцію називають *нелінійною*, якщо графіки регресії $\bar{y}_x = f(x)$ чи $\bar{x}_y = \varphi(y)$ можуть бути подані кривою лінією.

Наприклад, функція регресії Y на X має такий вигляд:

$$\bar{y}_x = a_0 + \frac{a_1}{x} \quad (\text{кореляція гіперболічна}),$$

$$\bar{y}_x = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (\text{кореляція параболічна}).$$

Для знаходження невідомих параметрів рівняння регресії, як і у разі лінійної кореляції, застосовують метод найменших квадратів.

Для оцінювання щільності нелінійної кореляції слугує вибіркове кореляційне відношення.

Вибірковим кореляційним відношенням Y до X називають відношення міжгрупового середнього квадратичного відхилення до загального середньоквадратичного відхилення випадкової величини Y :

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\text{міжгр}}}{\sigma_{\text{заг}}},$$

чи в інших позначеннях:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y}; \quad (11.18)$$

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{D_{\text{міжгр}}} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}}; \quad (11.19)$$

$$\sigma_y = \sqrt{D_{\text{заг}}} = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}}, \quad (11.20)$$

де \bar{y} – загальне середнє величини Y ;

\bar{y}_x – умовне середнє величини Y ;

n_x – частота значення x величини X ;

n_y – частота значення y величини Y ;

n – об'єм вибірки (сума всіх частот).

Так само визначають вибірконе кореляційне відношення X на Y :

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_x}.$$

Вибіркове кореляційне відношення (позначимо його як η) має такі властивості:

1. $0 \leq \eta \leq 1$.
2. Якщо $\eta = 0$, то величини Y та X кореляційною залежністю не пов'язані.
3. Якщо $\eta = 1$, то величини Y та X пов'язані функціональною залежністю.
4. Вибіркове кореляційне відношення є не меншими за абсолютну величину вибіркового коефіцієнта кореляції $\eta \geq |r_B|$.

5. Якщо $\eta = |r_B|$, то має місце точкова лінійна кореляційна залежність.

Перевага вибіркового кореляційного відношення перед коефіцієнтом кореляції полягає у тому, що η слугує мірою щільності зв'язку будь-якої форми, зокрема й лінійної залежності.

Приклад 11.4

Знайти вибіркоче кореляційне співвідношення за даними табл. 11.6 (приклад 11.3).

Розв'язок. Знаходимо загальне середнє:

$$\bar{y} = \frac{\sum n_y y}{n} = \frac{6 \cdot 22 + 9 \cdot 32 + 40 \cdot 42 + 17 \cdot 52 + 10 \cdot 62}{82} = 43,95.$$

Визначимо загальне середнє квадратичне відхилення:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}} = \\ &= \sqrt{\frac{6 \cdot 4814,80 + 9 \cdot 142,8 + 40 \cdot 3,80 + 17 \cdot 64,8 + 10 \cdot 325,8}{82}} = 10,29. \end{aligned}$$

Для знаходження середнього квадратичного відхилення використовуємо формулу (11.9) (умовне середнє \bar{y}_x за $x = 7, 13, 16, 25, 31, 37$ (див. табл. 11.6)):

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{y}_x} &= \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}}, \\ \sigma_{\bar{y}_x} &= \sqrt{\frac{2 \cdot 505,8 + 10 \cdot 211,41 + 6 \cdot 43,43 + 50 \cdot 1,85 + 10 \cdot 86,68 + 42 \cdot 97,91}{82}} = \\ &= 8,22. \end{aligned}$$

Шукане вибіркоче кореляційне відношення дорівнюватиме

$$\eta_{yx} = \sigma_{yx} / \sigma_y = 8,22 / 10,25 = 0,802.$$

Порівняємо кореляційне відношення $\eta_{yx} = 0,802$ з коефіцієнтом кореляції $r_B = 0,799$, обчисленим у прикладі 11.3. Бачимо, що вони майже рівні між собою, що підтверджує наявність точної лінійної кореляційної залежності між величинами Y і X , розглянутими у прикладі 11.3.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке статистична залежність?
2. Що визначає коефіцієнт кореляції ?
3. Які випадкові величини називають корельованими?
4. Що таке нелінійна кореляція?

12. Статистичне оцінювання параметрів розподілу

12.1. Постановка задачі

Нехай випадкова величина розподілена за нормальним законом, тобто:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Параметри a та σ невідомі. Треба знайти їх наближені значення (статистичні оцінки) за даними обмеженої статистичної сукупності (вибірки). Якщо відомо, що випадкова величина X має показниковий розподіл, то виникає потреба оцінювати невідомий параметр λ .

Позначимо через θ параметр теоретичного розподілу, числове значення якого невідоме, θ^* – статистична оцінка для θ . Очевидно, θ^* є випадковою величиною, оскільки визначається за відповідною вибіркою, отже, її можна описати законом розподілу та кількісними характеристиками. Для того щоб оцінка θ^* давала достатньо добре наближення оцінюваного параметра θ , треба щоби вона мала властивості незміщеності, ефективності, спроможності.

Незміщеною називають статистичну оцінку θ^* , математичне очікування якої дорівнює параметру θ , що оцінюється за будь-якого об'єму вибірки, тобто $M(\theta^*) = \theta$.

Якщо $M(\theta^*) \neq \theta$, то оцінку θ^* називають *зміщеною*.

Ефективною називають статистичну оцінку, яка (за заданого об'єму вибірки n) має найменшу можливу дисперсію.

Спроможною називають статистичну оцінку, яка за $n \rightarrow \infty$ прямує, відносно ймовірності, до оцінюваного параметра.

Іншими словами, у міру збільшення об'єму вибірки n з ймовірністю, близькою до одиниці, можна стверджувати, що різниця між θ^* та θ за абсолютною величиною буде меншою за будь-яке мале додатне δ .

Тобто $(P | \theta^* - \theta | < \delta) > 1 - \varepsilon$, де ε – додатне число, близьке до нуля.

12.2. Точкові статистичні оцінки

Точковою називають статистичну оцінку, яка визначається одним числом.

Незміщеною точковою оцінкою генеральної середньої (середньої генеральної сукупності) править вибіркова середня (\bar{x}_B).

Незміщеною точковою оцінкою генеральної дисперсії є вибіркова дисперсія

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_n = \frac{\sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1} \quad (12.1)$$

На практиці зручнішою є формула

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n n_i x_i\right)^2}{n}}{n-1} \quad (12.2)$$

Для оцінювання середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності використовують «виправлене» середнє квадратичне відхилення, яке дорівнює квадратному кореню з виправленої дисперсії:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}}. \quad (12.3)$$

Порівнюючи формули (12.3) та (12.1) бачимо, що вони відрізняються тільки знаменниками. На практиці формулу (12.1) використовують, якщо вибірка $n < 30$. У разі збільшення n вибірка та виправлена дисперсії відрізняються мало.

Якщо початкові варіанти x_i – великі числа, то для спрощення обчислень доцільно відняти одне і те саме число C , тобто перейти до умовної варіанти $u_i = x_i - C$. (Як C зручно взяти число, що дорівнює вибірковій середній чи близьке до неї). Тоді:

$$\bar{x}_B = C + \frac{\sum_{i=1}^k n_i u_i}{n};$$

$$D_B(X) = \frac{\sum_{i=1}^k n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum_{i=1}^k n_i u_i}{n} \right]^2,$$

тобто дисперсія не змінюється за переходу до умовних варіант.

Приклад 12.1

У процесі очищення, залежно від його якості, очищення становило (%): 92,4; 82,5; 96,7; 79,4; 87,7; 90,1. Знайти незміщені оцінки генеральної середньої та дисперсії.

Розв'язок. Незміщена оцінка генеральної середньої є вибірковою середньою:

$$\bar{x}_B = \frac{92,4 + 82,5 + 96,7 + 79,4 + 87,7 + 90,1}{6} = 88,1.$$

Для оцінювання дисперсії знаходимо виправлену дисперсію за формулою (12.1), яка через те, що $n_i = 1$ ($i = \overline{1,6}$), набуває вигляду:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1} = \frac{(92,4 - 88,1)^2 + (82,5 - 88,1)^2 + (96,7 - 88,1)^2}{5} + \frac{(79,4 - 88,1)^2 + (87,7 - 88,1)^2 + (90,1 - 88,1)^2}{5} = 40,7.$$

12.3. Інтервальні оцінки

Точкові оцінки, знайдені за вибірками малого об'єму, можуть значно відрізнятись від оцінюваних параметрів. У такому разі потрібно використовувати інтервальні оцінки.

Інтервальною називається оцінка, що визначається двома числами – кінцями інтервалу, який покриває оцінюваний параметр.

Нехай θ – оцінюваний параметр, θ^* – його статистична оцінка. Якщо δ – деяке додатне число (таке, що $|\theta - \theta^*| < \delta$), то, очевидно, що чим менше δ , тим менше $|\theta - \theta^*|$, отже, тим точніше θ^* визначає параметр θ . Таким чином, δ характеризує точність оцінки.

Ймовірністю довіри (надійністю) оцінки θ за θ^* називають ймовірність γ , з якою справджується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$.

Ймовірність довіри звичайно задають, причому за γ беруть число, близьке до одиниці: 0.95, 0.99, 0.999 та ін.

Число $\alpha = 1 - \gamma$ називають *рівнем значущості*.

Інтервалом довіри називають інтервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, який із заданою надійністю γ покриває оцінюваний параметр.

Інтервал довіри для оцінювання математичного очікування нормального розподілу

Нехай випадкову величину X розподілено нормально, причому середнє квадратичне відхилення σ цього розподілу відоме.

Потрібно оцінити невідоме математичне очікування a за вибірковою середньою \bar{x}_B , тобто знайти інтервал довіри, який покриває параметр a з надійністю γ .

Визначуваний інтервал довіри має такий вигляд:

$$(\bar{x}_B - t\sigma\sqrt{n}; \bar{x}_B + t\sigma\sqrt{n}),$$

де $t\sigma\sqrt{n} = \delta$ – точність оцінки; n – об'єм вибірки; t – таке значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$ додатку 1 [6], за якого $\Phi(t) = \gamma / 2$.

Приклад 12.2

Середній вміст компонента у пробах, аналізованого за чотирма незалежними серіями вимірів, становить 87,5 %. Похибка виміру дорівнює 2,3 %. Знайти з надійністю 95 % границі довіри, в яких знаходиться дійсне значення вмісту визначуваного компонента.

Розв'язок. Дійсне значення вимірюваної випадкової величини – вміст визначуваного компонента дорівнює її математичному очікуванню. Тому задача зводиться до оцінювання математичного очікування (за відомого $\sigma=2,3$) за допомогою інтервалу довіри:

$$(\bar{x}_B - t\sigma\sqrt{n} < a < \bar{x}_B + t\sigma\sqrt{n} \tag{12.4}$$

(при цьому припускаємо, що випадкова величина X розподілена нормально).

Використовуючи табл. дод. 1 [6], знайдемо t ; із співвідношення $2\Phi(t) = 0,95$ отримаємо $\Phi(t) = 0,475$, тоді $t=1,96$.

Підставивши $\bar{x}_B = 87,5$; $\sigma=2,3$; $n=4$; $t=1,96$ у вираз (12.4), з'ясуємо, що з надійністю 0,95 дійсне значення оцінюваної величини знаходиться в інтервалі довіри $85,3 < a < 89,8$.

Сенс заданої надійності $\gamma=0,95$ полягає в такому: якщо зробити достатньо велику кількість вибірок, то 95% з них визначають такі інтервали довіри, у яких параметр a дійсно знаходиться, і тільки в 5% випадків він може вийти за межі інтервалу довіри.

З формули:

$$t\sigma\sqrt{n} = \delta, \tag{12.5}$$

яка визначає точність оцінки, впливає:

1) у міру збільшення об'єму вибірки n число δ зменшується, отже, точність оцінки збільшується;

2) у міру збільшення надійності γ оцінки θ^* збільшується $t(\gamma)=2\Phi(t)$, $\Phi(t)$ – функція, що зростає, отже, зростає і δ ; тобто в міру збільшення надійності оцінки впливає зменшення її точності (інтервал довіри збільшується);

3) за заданої точності δ та надійності γ оцінки θ^* мінімальний об'єм вибірки, за якої досягають цієї точності, дорівнює $n=t^2\sigma^2/\delta^2$.

Приклад 12.3

За вибіркою ($n=100$) результатів аналізу повітря, виконаного автоматичним газоаналізатором, обчислено вибіркочну середню вмісту СО. Знайти з надійністю $\gamma = 0,95$ точність δ , з якою вибіркоче середнє квадратичне відхилення його вмісту у пробах становлять $\sigma=0,0025$ мг/м³.

Розв'язок. Точність δ визначаємо за формулою (12.5) попередньо знайшовши t . Із співвідношення $2\Phi(t) = 0,95$, одержуємо $\Phi(t)=0,475$. За табл. дод. 1 [6] знаходимо $t = 1,96$. Тоді точність буде: $\delta = t\sigma/\sqrt{n} = 1,96 \cdot 0,0025/10 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ мг/м³.

Для оцінювання математичного очікування a нормального розподілу випадкової величини X з вибірковою середньою \bar{x}_B , за невідомого середнього квадратичного відхилення σ генеральної сукупності, використовують інтервал довіри:

$$\bar{x}_B - t_\gamma s / \sqrt{n} < a < \bar{x}_B + t_\gamma s / \sqrt{n}$$

де s – невиправлене середнє квадратичне відхилення;

t_γ – знаходять за табл. дод. 2 [6] за заданими n та γ .

Приклад 12.4

За інтервальним статистичним розподілом, наведеним у вигляді таблиці, треба оцінити з надійністю 0,95 за допомогою інтервалу довіри математичне очікування нормального розподілу випадкової величини X – вмісту компонента у пробі.

Розв'язок. Беремо як варіант x_i середини інтервалів і запишемо статистичний розподіл у вигляді табл. 12.1.

Таблиця 12.1

Варіанти x_i	76,25	78,75	81,25	83,76	86,25
Частоти n_i	2	10	15	18	20
Варіанти x_i	88,75	91,25	93,75	96,25	98,75
Частоти n_i	22	24	20	13	6

Вибіркова середня дорівнює:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i}{n} = \frac{2 \cdot 76,25 + 10 \cdot 78,75 + \dots + 6 \cdot 98,75}{150} = 88,38.$$

Виправлене середнє квадратичне відхилення (за формулою (12.3)) $s=5.6$. Використовуючи табл. дод. 2 [6], за $\gamma=0,95$ та $n=150$ знаходимо $t_\gamma = 1,96$. Інтервал довіри має такий вигляд:

$$\bar{x}_B - t_\gamma s / \sqrt{n} < a < \bar{x}_B + t_\gamma s / \sqrt{n}$$

Підставивши розраховані значення величин \bar{x}_B , t_γ , s та n , знаходимо інтервал $87,45 < a < 89,25$, який покриває математичне очікування з надійністю $\gamma = 0,95$.

Інтервали довіри для оцінювання середнього квадратичного відхилення нормального розподілу

Для оцінювання середнього квадратичного відхилення σ нормального розподілу випадкової величини X з надійністю γ за виправленим вибіркоvim середнім відхиленням s використовують інтервали довіри:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \text{ (при } q < 1);$$

$$0 < \sigma < s(1+q) \text{ (при } q > 1),$$

де q знаходять за табл. дод. 3 [6] за заданими n та γ .

Приклад 12.5

За допомогою приладу (систематична похибка приладу є неможливою) виконано 12 вимірювань проб одного і того самого ґрунту. Причому виправлене середнє квадратичне відхилення s випадкових

помилку вимірювання дорівнює $0,4 \cdot 10^{-3}$ см·м². Знайти точність приладу з надійністю 0,95.

Розв'язок. Точність приладу характеризується середнім квадратичним відхиленням σ випадкових помилок вимірювання. Задача зводиться до знайдення інтервалу довіри, що покриває σ із заданою надійністю $\gamma = 0,95$. За даними $\gamma = 0,95$ та $n=12$, використовуючи дод. 3 [6], знайдемо $q = 0,55$. Оскільки $q < 1$, інтервал довіри визначається у вигляді $s(1 - q) < \sigma < s(1+q)$. Підставимо $s = 0,4 \cdot 10^{-3}$ та $n = 0,55$, одержимо шуканий інтервал довіри, тобто

$$0,4 \cdot 10^{-3} (1-0,55) < \sigma < 0,4 \cdot 10^{-3} (1+0,55)$$

чи $0,18 \cdot 10^{-3} < \sigma < 0,62 \cdot 10^{-3}$.

Запитання для самоперевірки

1. Охарактеризуйте незміщену статистичну оцінку.
2. Яку статистичну оцінку називають ефективною?
3. Яку статистичну оцінку називають спроможною?
4. Що таке точкова статистична оцінка?
5. Що таке імовірність довіри (надійність)?

13. Ознайомлення з випадковими процесами

Випадковість – одна з найхарактерніших рис більшості процесів, що відбуваються у навколишньому середовищі. Що ж таке випадковий процес? Кажуть, що у системі X відбувається *випадковий процес*, якщо вона з часом може під впливом випадкових факторів переходити від одного стану до іншого.

Наприклад, процес переходу екологічної системи із стану в стан під дією техногенно-антропогенного навантаження є одним з

найяскравіших прикладів випадкових процесів, що відбуваються у природному середовищі.

Випадковими факторами, що впливають на цей процес в реальних умовах, є кількість локальних змін, а також послідовність появи та їхній характер.

Система X називається системою з дискретним станом, якщо вона має множину можливих станів, які можуть бути перераховані (в окремому випадку – кінцеву множину), і перехід з одного стану до іншого відбувається стрибком.

Граф – це фігура на площині, яка складається з непорожньої скінченної множини V точок (вершин) і скінченної множини E орієнтованих чи не орієнтованих ліній (ребер), що з'єднують деякі пари вершин.

Вершини v_1 та v_2 називають *суміжними*, якщо вони з'єднані ребром e . В такому разі кажуть, що вершини v_1 та v_2 *інцидентні* ребру e , а ребро e *інцидентне* вершинам v_1 та v_2 . Ребра e_1 та e_2 називають *суміжними*, якщо вони *інцидентні* вершині v .

Граф, який містить тільки ребра, називається *неорієнтованим*, граф, який містить тільки дуги – *орієнтованим*. Граф, що має і ребра, і дуги, називають *мішаним*.

Іноді є потреба пару вершин з'єднати більше, ніж одним ребром. Ребра чи дуги одного напрямку, які з'єднують ту саму пару вершин, називають *кратними* (паралельними) ребрами.

Дугу чи ребро, що сполучає вершину саму із собою, називають *петлею*.

Граф без кратних дуг і петель називається *простим*.

Вершини, сполучені ребром чи дугою, називають *суміжними*, також суміжними називають ребра, що мають спільну вершину. Ребро (чи дугу) і її вершину називають *інцидентними*. Ребро (u, v) з'єднує вершини u і v , дуга (u, v) починається у вершині u і закінчується у вершині v .

Кожен граф можна відобразити в евклідовому просторі множиною відповідних вершинам точок, сполучених лініями, що відповідні ребрам (дугам).

Об'єкти розглядають як *вершини*, або *вузли*, графа, а зв'язки – як *дуги*, або *ребра*. Для різних галузей види графів можуть відрізнятися орієнтованістю, обмеженнями на кількість зв'язків і додатковими даними про вершини або ребра.

Ребра графа можуть бути напрямленими або ненапрямленими. Наприклад, якщо вершини будуть представляти людей на вечірці, й існуватиме ребро між двома людьми, якщо вони потиснули руки, тоді ребра цього графа не матимуть напрямку, оскільки будь-яка особа A може потиснути руки із особою B , лише якщо B також потисне руки із A . На противагу цьому, якщо будь-яке ребро від особи A до особи B означатиме, що особі A подобається B , то ребра матимуть напрям, оскільки таке вподобання не обов'язково буде взаємним. Граф першого типу називається *неорієнтованим графом*, а ребра – *неорієнтованими ребрами*, тоді як граф другого типу називається *орієнтованим графом*, а ребра – *орієнтованими ребрами*, або *дугами*.

Велика кількість структур, які мають практичну цінність у математиці та інформатиці, можуть бути подані графами. Граф є основним предметом вивчення в теорії графів.

Можливі стани системи X наочно відображаються за допомогою так званого *графу станів* (рис. 13.1), на якому переходи системи з стану в стан показані стрілками, що з'єднують прямокутники.

На рис. 13.2 наведено граф станів системи, що має чотири можливих стани X_1, X_2, X_3, X_4 . Із стану X_1 можливі переходи у X_2 чи X_3 ; з X_2 – у X_4 та назад у X_1 ; із стану X_3 у X_4 .

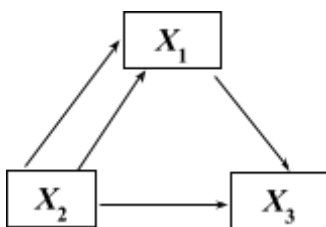


Рис. 13.1. Граф станів

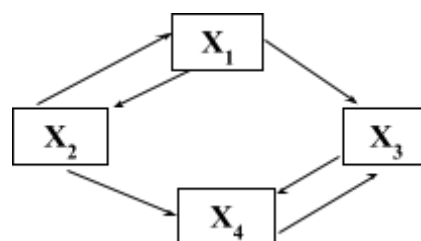


Рис. 13.2. Граф станів (4 стани)

Стан системи називається «*станом без виходу*», якщо з нього є неможливим перехід у жоден інший стан.

Для опису випадкового процесу в системі з дискретними станами x_1, x_2, \dots, x_n часто використовують ймовірності станів $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$, де $p_k(t)$ – ймовірність того, що в момент t система перебуває в стані x_k . Ймовірність $p_k(t)$ задовольняє умову:

$$\sum_{k=1}^n p_k(t) = 1.$$

Випадковий процес, що відбувається у системі X , називається *процесом з дискретним часом*, якщо перехід системи із стану в стан можливий тільки у певні моменти часу t_1, t_2, \dots . Якщо переходи можливі у будь-який момент часу, процес називають *процесом з неперервним часом*.

Якщо в системі X з дискретними станами відбувається випадковий процес з неперервним часом, то перехід системи із стану в стан можна розглядати як такий, що відбувається під впливом деяких потоків подій.

Потоком подій називають послідовність подій, що настають одна за одною у випадкові моменти часу.

Щільністю (інтенсивністю) потоку називається середня кількість подій за одиницю часу.

Потік подій називають *поток без наслідків*, якщо ймовірність появи на будь-якій ділянці часу тієї чи іншої кількості подій не залежить від того, яка кількість подій потрапила на інші, що не перетинаються з цією ділянкою.

Потік подій характеризують як ординарний, якщо ймовірність появи на елементарній ділянці Δt двох чи більше подій дуже мала порівняно з ймовірністю появи однієї події.

Ординарний потік без наслідків називають *пуассонівським*.

Якщо події утворюють пуассонівський потік, то кількість подій, що потрапили на будь-яку ділянку часу $(t_0, t_0 + \tau)$, розподілено за законом Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

де a – математичне очікування точок, що попадають на ділянку:

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) dt,$$

де $\lambda(t)$ – щільність потоку.

Якщо $\lambda(t)=\text{const}$, пуассонівський потік називається *стаціонарним пуассонівським, чи найпростішим, потоком*.

Для найпростішого потоку кількість подій, що потрапляють на будь-яку ділянку завдовжки τ , розподілена за законом Пуассона з параметром $a = \lambda\tau$.

Відстань T між двома сусідніми подіями в простому потоці є неперервною випадковою величиною, розподіленою за показниковим розподілом з такою щільністю:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{за } t < 0; \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{за } t > 0. \end{cases}$$

Випадковий процес з дискретними станами називають *марковським*, якщо всі ймовірності характеристик процесу в майбутньому залежать лише від того, в якому стані цей процес перебуває у теперішньому моменті часу, і не залежить від того, яким чином цей процес відбувався у минулому («майбутнє залежить від минулого через теперішнє»).

Наприклад, якщо відомо, що в екосистемі, що функціонує протягом часу t , є задана антропогенна змінна з постійною інтенсивністю появи антропогенних змін й екологічно екстремальних ситуацій, то цей процес може бути формалізований за допомогою марковського процесу.

Якщо процес марковський, то всі потоки подій, що переводять систему із стану в стан, є пуассонівськими.

Якщо процес у системі з дискретними станами і неперервним часом є марковським, то для ймовірностей станів $p_1(t), \dots, p_n(t)$ можна скласти систему лінійних диференціальних рівнянь (рівняння Колмогорова).

Для складання цих рівнянь зручно використовувати граф станів системи, на якому навпроти кожної стрілки, котра веде зі стану в стан стоїть щільність (інтенсивність) потоку подій, що переводить систему із

стану в стан по цій стрілці (розмічений граф станів). Наприклад, граф, що поданий на рис. 13.3.

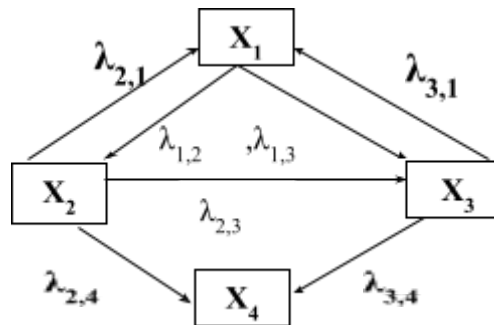


Рис. 13.3. Граф станів системи з інтенсивністю потоків подій

Тут $\lambda_{i,j}$ позначає щільність потоку подій, що переводить систему зі стану x_i у стан x_j .

Якщо є розмічений граф станів системи X , то систему диференціальних рівнянь для ймовірностей станів $p_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ можна одразу записати, використовуючи таке просте правило: у лівій частині кожного рівняння стоїть похідна $\frac{dp_k(t)}{dt}$, а в правій частині стільки членів, скільки стрілок, пов'язаних безпосередньо з цим станом; якщо стрілка веде у цей стан, член має знак «плюс», а якщо зі стану – має знак «мінус». Кожний член дорівнює щільності потоку подій, який переводить систему по цій стрілці, помноженій на ймовірність того стану, з котрого виходить стрілка.

Наприклад, для системи X , розмічений граф станів якої поданий на рис. 13.3, система диференціальних рівнянь матиме такий вигляд:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{2,1} p_2(t) + \lambda_{3,1} p_3(t) - (\lambda_{1,2} + \lambda_{1,3}) p_1(t);$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{1,2} p_1(t) - (\lambda_{2,1} + \lambda_{2,3} + \lambda_{2,4}) p_2(t);$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{1,3} p_1(t) + \lambda_{2,3} p_2(t) - (\lambda_{3,1} + \lambda_{3,4}) p_3(t);$$

$$\frac{dp_4(t)}{dt} = \lambda_{2,4} p_2(t) + \lambda_{3,4} p_3(t)$$

(рівняння Колмогорова).

Кількість рівнянь може бути зменшена на одиницю, якщо мати на увазі умову для будь-якого t

$$p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)+p_4(t)=1.$$

Початкові умови для інтегрування такої системи відображають стани системи у початковий момент. Якщо, наприклад, система за $t = 0$ буде у стані x_k , то вважають, що

$$p_k(0) = 1;$$

$$p_i(0) = 0 \text{ за } i \neq k.$$

Граничним режимом (процесом) для системи називається випадковий процес, встановлюваний у системі за $t \rightarrow \infty$.

Якщо серед станів системи є стани без виходу, то за $t \rightarrow \infty$ система з практичною достовірністю виявиться в одному з них.

Якщо всі потоки подій, що переводять систему із стану в стан, є стаціонарними ($\lambda_{i,j} = \text{const}$), загальна кількість станів скінченна величина і станів без виходу немає, то граничний процес (режим) існує і характеризується граничними ймовірностями станів p_1, p_2, \dots, p_n

$\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Для знаходження цієї ймовірності прирівнюють до нуля ліві частини рівнянь для ймовірностей станів (вважають всі ймовірності $\frac{dp_k(t)}{dt}$ рівними нулю) та розв'язують одержану систему лінійних

алгебраїчних рівнянь. До них додається нормувальна умова $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

Наприклад, для системи X , розмічений граф станів якої наведено на рис. 13.3, система алгебраїчних рівнянь, що визначає граничний режим, матиме такий вигляд:

$$\{\lambda_{2,1}p_2 + \lambda_{3,1}p_3 - (\lambda_{1,2} + \lambda_{1,3})p_1 = 0; \lambda_{1,2}p_1 - (\lambda_{2,1} + \lambda_{2,3} + \lambda_{2,4})p_2 = 0; \lambda_{1,3}p_1 +$$

Потоком з обмеженими наслідками (поток Пальма) називають потік подій, у якого проміжки між сусідніми подіями є незалежними випадковими величинами.

Якщо ці випадкові величини розподіленні однаково, то потік Пальма називають *стаціонарним*.

Найпростіший (стаціонарний пуассонівський) потік є потоком Пальма.

Нестационарний пуассонівський потік не є потоком Пальма.

Потоком Ерлінга k -го порядку називається потік подій, одержуваний з найпростішого шляхом операції «розрядження», коли вилучається з потоку k точок поспіль, а залишаються лише $(k+1)$.

Найпростіший потік – це потік Ерлінга першого порядку.

Проміжок часу T між двома сусідніми подіями в потоці Ерлінга k -ого порядку – невід’ємна випадкова величина з щільністю розподілу

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, (t > 0) \text{ (закон Ерлінга)}$$

та функцією розподілу

$$F_k(t) = P(T < t) = 1 - \sum_{s=0}^k \frac{(\lambda t)^s}{s!} e^{-\lambda t}, (t > 0).$$

Якщо $k=0$ (найпростіший потік), одержуємо:

$$f_0(t) = \lambda e^{-\lambda t}, (t > 0) \text{ (показниковий закон).}$$

Як щільність розподілу $f_k(t)$, так і функцію розподілу $F_k(t)$ для закону Ерлінга будь-якого порядку можна визначити, використовуючи таблиці пуассонівського розподілу:

$$P(k, a) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

В цих позначеннях:

$$f_k(t) = \lambda P(k, \lambda t), (t > 0);$$

$$F_k(t) = 1 - R(k, \lambda t);$$

$$R(k, \lambda t) = \sum_{s=0}^k \frac{(\lambda t)^s}{s!} e^{-\lambda t};$$

табульована функція

$$Q(m, a) = 1 - R(m, a).$$

Функцію $P(k, a)$ можна обчислити за тими самими таблицями $R(k, a)$:

$$P(k, a) = R(k, a) - R(k - 1, a) = Q(k - 1, a) - Q(k, a).$$

Між функціями $P(k, a)$ та $R(k, a)$ є такі співвідношення:

$$\frac{\partial}{\partial a} R(k, a) = -P(k, a).$$

Корисно знати граничні співвідношення:

$$R(k, a) = 1;$$

$$P(k, a) = 0.$$

Регулярним потоком подій називається потік, у якому події йдуть одна за одною через певні проміжки часу.

У разі збільшення порядку k (та одночасного зменшення масштабу на осі $0t$ діленням на $k+1$) потік Ерлінга наближається до регулярного.

Запитання для самоперевірки

1. Що називають випадковістю?
2. Що таке граф станів?
3. Що таке потік подій і чим він характеризується?
4. Що таке марковський потік подій?
5. Що описує система рівнянь Колмогорова – Чепмена?

14. Введення в аналіз часових рядів

14.1. Задачі з аналізу часових рядів

У практиці застосування статистичного аналізу для виявлення тієї чи іншої закономірності у дослідженнях довікля фахівець з екології стикається з тим, що похідні дані, які він одержує, подані у вигляді часових (динамічних рядів). Такі ряди описують зміну деякої характеристики досліджуваної компоненти в часі. Кожний член (рівень) такого ряду пов'язаний з відповідним моментом часу чи часовим інтервалом. Безумовно, рівні ряду повинні бути зіставні за змістом.

Показники часових рядів формуються під сукупним впливом множини довгочасних та короточасних чинників, зокрема різноманітних випадковостей. Зміна умов розвитку явища призводить до більш-менш інтенсивної зміни самих факторів, до зміни сили та результативності їхніх дій і, зрештою, до варіювання рівня явища, досліджуваного в часі. Тільки у виняткових випадках на практиці трапляються суто стаціонарні ряди, тобто ряди, в яких не спостерігається систематична зміна в середніх значеннях рівня відліку часу. В таких випадках варіацію рівнів можна вивчати за допомогою спеціального розділу математичної статистики – теорії стаціонарних

процесів. Найчастіше часові ряди, з якими мають справу в екологічних дослідженнях, є нестационарними. Послідовність розміщення даних, досліджуваних у часі, у таких рядах має суттєве значення для аналізу, тобто час виступає як одна з визначальних умов у вивченні явищ, факторів. Задачі та засоби аналізу таких рядів відрізняються від того, з чим має справу класична математична статистика у вивченні рядів розподілу. Разом з тим методи, які застосовують в обробці часових рядів, багато в чому спираються на методи, розроблені математичною статистикою.

У деяких випадках висновки, які одержують в процесі математично-статистичній обробки конкретних даних, мають умовний характер, оскільки методи математичної статистики ґрунтуються на жорстких вимогах до якості оброблюваних даних (наприклад, до їхньої однорідності) та строгих гіпотезах щодо характеру поведінки аналізованих величин (наприклад, їхніх розподілів). На практиці еколог найчастіше стикається з інформацією, якість якої щодо висунутих вимог залишає бажати кращого.

Нині в статистиці застосовують різні методи аналізу часових рядів. Всі вони так чи інакше покликані охарактеризувати, у деякому аспекті, розвиток досліджуваного явища в часі.

Розрізняють три основні задачі дослідження часових рядів. *Перша задача* – це опис змін відповідного показника в часі та вивчення тих чи інших властивостей досліджуваного ряду. Для розв'язання цієї задачі застосовують такі способи:

- розрахунок узагальненого показника змін рівнів ряду в часі – середнього темпу зростання;
- застосування різних згладжувальних фільтрів, що зменшують коливання рівнів у часі та дають змогу чіткіше подати тенденцію розвитку;
- добір кривих, що характеризують тенденцію розвитку;
- виявлення сезонних та інших випадкових коливань;
- виявлення зміни залежності між членами ряду (автокореляції).

Методами опису будь-якої властивості динаміки ряду можна вважати методи перевірки наявності чи відсутності довготривалих тенденцій.

Другою важливою задачею аналізу є пояснення механізму змін рівнів ряду. Для її розв'язання звичайно використовують регресійний аналіз.

Третя задача складається з опису змін часового ряду та пояснення механізму формування ряду, що часто застосовують у статистичному прогнозуванні, яке у більшості випадків зводиться до екстраполювання визначених тенденцій розвитку.

Для розв'язання всіх цих задач можна застосувати методи, які так чи інакше пов'язані з апаратом математичної статистики. Під тенденцією розвитку розуміють тривалу еволюцію. Її прагнуть подати у вигляді більш-менш гладкої кривої, якій відповідна функція часу. Така крива називається *трендом*. Вона характеризує основну закономірність руху в часі і значною мірою (але не в повному обсязі) вільна від випадкових дій. Тренд описує деяку усереднену щодо достатньо тривалого періоду спостережень тенденцію розвитку у часі. Припускають, що за допомогою змінної часу можна виявити вплив усіх основних факторів. Механізму їхнього впливу в явному вигляді не беруть до уваги. Виходячи з цього, під трендом розуміють регресію за часом (на часі). Іноді тренд подають як детерміновану компоненту змінної (причому не обов'язково зміну цієї компоненти пов'язують з часом).

14.2. Елементарні способи опису часових рядів.

Темп зростання

Середній темп зростання – один з показників, за допомогою якого в узагальненому вигляді характеризують зміни ряду. Його отримують як геометричну середню з ряду послідовних (ланцюгових) темпів зростання.

Ланцюговий темп зростання характеризує відношення деякого рівня ряду до попереднього. Він виражається у відсотках чи частках одиниці. Його ще називають коефіцієнтом темпу зростання.

Якщо ряд складається з рівнів $y_1, y_2, y_i, \dots, y_n$, то ланцюгові темпи зростання τ_i рівні відношенням:

$$\tau_1 = y_2/y_1, \tau_2 = y_3/y_2, \dots, \tau_{n-1} = y_n/y_{n-1},$$

а середнє геометричне з них τ буде

$$\bar{\tau} = \sqrt[n-1]{\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_{n-1}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}, i = \bar{1}, n \quad (14.1)$$

Звідки

$$y_n = y_1 \tau^{n-1} \quad (14.2)$$

Розглянемо один з модифікованих методів визначення середнього темпу, відповідно до якого у розрахунку беруть участь всі члени ряду, тобто використовується вся інформація, що міститься у часовому ряду.

Розрахунок ґрунтується на припущенні, що сума фактичних рівнів ряду повинна дорівнювати сумі рівнів, які одержані шляхом розрахунку на основі початкового рівня ряду та середнього темпу зростання.

Середній темп, розрахований таким чином, називають *середнім кумулятивним темпом зростання* та позначають як τ_k . Для його визначення знаходять спочатку суму рівнів ряду, починаючи з другого, використавши τ_k :

$$\sum_{i=2}^n y_i = y_1 \tau_k + y_1 \tau_k^2 + \dots + y_1 \tau_k^{n-1} = y_1 \sum_{i=1}^n \tau_k^{i-1} \quad (14.3)$$

На основі співвідношення (14.3) можна легко отримати таке співвідношення:

$$R = \frac{\sum_{i=2}^n y_i}{y_1},$$

яке беруть за основу для розрахунку τ_k . Зважаючи на те, що R – це сума членів геометричної прогресії, маємо:

$$R = \tau_k + \tau_k^2 + \dots + \tau_k^{n-1} = \frac{\tau_k^n - \tau_k}{\tau_k - 1} \quad (14.4)$$

Таким чином, $\tau_k = f(R)$. Визначення τ_k на підставі виразу є (14.4) достатньо трудомістким, але можна скористатися таблицями значень τ_k відносно R для заданої кількості років.

Приклад 14.1

Маємо таблицю щомісячних спостережень за вмістом тритію (Бк/л) у свердловині, що велись протягом року – тобто деякий часовий ряд (табл. 14.1).

Таблиця 14.1

Спостереження за вмістом тритію

t , час	1	2	3	4	5	6
Вміст y_t , Бк/л	87,7	97,7	108,5	107,9	111,0	112,7
t , час	7	8	9	10	11	12
Вміст y_t , Бк/л	135,4	143,5	132,5	133,7	134,2	142,4

Потрібно знайти середній кумулятивний темп зростання. Для його розрахунку використовуємо формули (14.3), (14.4), $\tau = 1,0576$.

Слід взяти до уваги, що τ_k – усталений показник, він не змінює свого значення за зміни рівнів, якщо при ньому не змінюється співвідношення R . Але ця усталеність порушується в разі зміни значення y_t . Тобто випадкове коливання цього рівня суттєво вплине на τ_k .

Середній темп зростання можна також одержати за допомогою аналітичного вирівнювання відповідно ряду за експонентою (добору кривих за емпіричними даними відповідно до деяких критеріїв). Нехай за таку апроксимувальну криву взято експоненту

$$\hat{y}_t = ab^t, \quad (14.5)$$

де \bar{y}_t – ордината експоненти (вирівняний чи розрахунковий рівень ряду) в момент t ;

a та b – параметри, значення яких одержують за даними спостережень. Параметри мають такий сенс: a – розрахункове (вирівняне) значення першого рівня ряду, тобто $a = \bar{y}_0$; b – середній темп зростання. За рівнянням (14.5) за умови $t = n$ одержуємо:

$$b = \sqrt[n]{\frac{\bar{y}_n}{a}} = \sqrt[n]{\frac{\bar{y}_n}{\bar{y}_0}}. \quad (14.6)$$

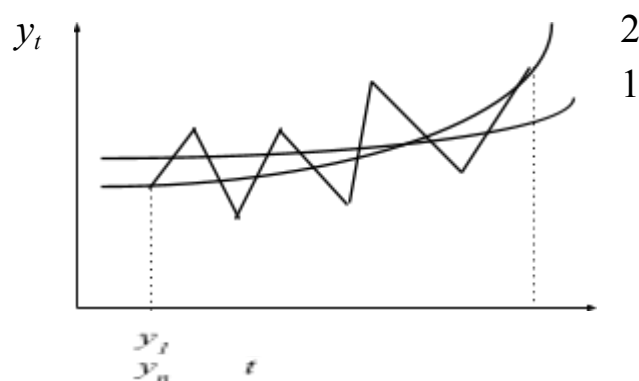
Якщо час характеризується послідовністю $t = \overline{1, n}$, то замість (14.5) та (14.6) маємо:

$$\bar{y}_t = ab^{t-1} \text{ та } b = \sqrt[n-1]{\frac{\bar{y}_n}{\bar{y}_1}}.$$

Наприклад, для часового ряду з табл. 14.1 отримаємо $b = 1,046$, для цього ж ряду $\bar{t} = 1,046$ та $\tau_k = 1,058$.

Порівнюючи параметр b із середнім темпом τ , легко зрозуміти, чим один середній темп відрізняється від іншого: параметр b оснований на відношенні не фактичних рівнів ряду, а розрахованих, вирівняних за експонентою. На рис. 14.1 наведено дві експоненціальні криві (параметр кривої 1 дорівнює b , а кривої

2 – $\bar{\tau}$), тренди, одержані вирівнюванням за експонентою (крива 1) та за середнім темпом (крива 2).



Згладжування часових рядів

Найбільш поширеним і простим шляхом виявлення тенденції розвитку є *згладжування* часового ряду. Суть різних засобів, за допомогою яких виконують згладжування, зводиться до заміни фактичних рівнів розрахунковими, що мають значно менші коливання, ніж похідні дані. Зменшення коливальності дає тенденції розвитку змогу проявити себе чіткіше. Останнім часом такі операції стали називати фільтруванням, а оператора, за допомогою якого їх виконують, – *фільтром*. У деяких випадках згладжування ряду можна розглядати як важливий запобіжний засіб, який полегшує застосування інших методів статистичного аналізу часових рядів.

Частіше за інші на практиці застосовують *лінійні фільтри*. Загальна формула лінійного фільтра має такий вигляд:

$$\bar{y}_t = \sum_{r=-q}^s a_r y_{t+r}, \quad (14.7)$$

де \bar{y}_t – згладжене (відфільтроване) значення рівня на момент t ;

a_r – вага, що її приписують рівню ряду, який знаходиться на відстані r від моменту t . Фільтр (14.7) охоплює S рівнів після моменту t та q рівнів до нього.

Якщо вважати, що $\sum a_r = 1$ та $a_r = \text{const}$, то фільтр (14.7) буде відповідним середній (арифметичній) величині, яку в такому разі називають *ковзною середньою*.

Нехай динамічний ряд складається з m послідовних рівнів $y_{t,m} = \overline{1, n}$. Для кожних m послідовних рівнів цього ряду ($m < n$) можна обчислити середню величину. Розрахувавши середню з перших m рівнів, переходять до обчислення середньої для рівнів y_2, \dots, y_{m+1} , потім y_3, \dots, y_{m+2} тощо.

Таким чином інтервал згладжування, тобто інтервал, для якого підраховують середню, наче ковзає по динамічному ряду з кроком, що дорівнює одиниці.

Нехай m – непарне число (а за краще брати непарну кількість рівнів), оскільки в такому разі значення рівня, що його розраховуємо, є відповідним моменту часу, для якого маємо фактично спостережуваний рівень таким, що заміна y_t на \bar{y}_t , відбувається без будь-яких додаткових ускладнень. Для визначення \bar{y}_t , спираючись на вираз (14.7), легко записати формулу, вважаючи, що $a_r = 1/(2p + 1)$, $r = -p, \dots, p$:

$$\bar{y}_t = \frac{1}{2p+1} \sum_{i=t-p}^{t+p} y_i, \quad (14.8)$$

де \bar{y}_t – ковзна середня для моменту t ; y_i – фактичне значення рівня в момент i ; i – порядковий номер рівня в інтервалі згладжування; $m=2p+1$, звідки $p=(m-1)/2$.

Приклад 14.2

Маємо дані (Бк/л) спостережень (часовий ряд) стану за вмістом тритію у воді озера, що знаходиться недалеко від АЕС, за десять місяців.

Розв'язок. Забруднення будемо обчислювати за допомогою тримісячної ковзної. Розрахунок ведемо за формулою (14.8). Похідні дані та результати згладжування наведено в табл. 14.2.

Таблиця 14.2.

Дані спостережень за 10 місяців

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	16,3	20,2	17,1	7,7	15,3	16,3	19,9	14,4	18,7	20,7
\bar{y}_t	-	17,53	15,00	13,37	13,10	17,17	16,87	17,67	17,94	-

Найчастіше згладжування проводиться за трьома, п'ятьма та сімома періодичними ковзними середніми: чим вище коливальність ряду, тим ширше беруть інтервал згладжування.

Розрахунок ковзної середньої за $m > 3$ та великої протяжності ряду можна спростити, якщо застосувати рекурентну формулу

$$\bar{y}_t = \bar{y}_{t-1} + \frac{y_{t+p} - y_{t-(p+1)}}{2p+1} \quad (14.9)$$

Що більший інтервал згладжування, то значніше усереднення і більшою мірою поглинаються коливання, тому тенденція розвитку, що виділяється, стає більш плавною. При цьому дисперсія дорівнює σ^2/m (де σ^2 – дисперсія похідних показників в інтервалі згладжування).

Якщо ряд має періодичні коливання з жорсткою довготривалістю циклу, то вони повністю ліквідуються в процесі згладжування за допомогою ковзної середньої за інтервалу згладжування, який дорівнює критичному циклу.

У деяких випадках згладжування за допомогою простої ковзної середньої настільки сильне, що тенденція розвитку виявляється тільки у найбільш загальному випадку, а окремі важливі для екологічного аналізу подробиці зникають. У такому разі краще обрати інший спосіб згладжування, що полягає в застосуванні *зважених ковзних середніх*.

У такому разі кожному рівню у межах інтервалу згладжування приписують вагу, яка залежить від відстані, виміряної від певного рівня до середини інтервалу згладжування.

Другий підхід полягає у доборі полінома до даних, які містяться в інтервалі згладжування, та у визначенні розрахункового значення полінома для центральної точки інтервалу.

Помічено, що якщо відлік часу у межах інтервалу згладжування ведеться зсередини, то шукане розрахункове значення полінома, потрібне для згладжування, дорівнює вільному члену полінома. Але ця операція трансформує (фільтрує) головний ряд більшою мірою, ніж це здається на перший погляд. Якщо до згладжування рівні ряду були незалежні, то після цього перетворення послідовні розрахункові рівні опиняються у деякій залежності між собою.

Застосування експоненційних середніх. Лінійні фільтри (прості та зважені ковзні середні) симетричні. Завдяки розвитку методів прогнозування у статистиці розроблено й *асиметричні фільтри*.

Найпростішим з них може слугувати ковзне середнє, яке замінює не центральний, а останній рівень ряду в інтервалі згладжування:

$$\bar{y}_t = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^m y_{t-r} \quad (14.10)$$

Перетворюючи вираз (14.10), одержуємо рекурентну формулу:

$$\bar{y}_t = \bar{y}_{t-1} + \frac{y_t - y_{t-m}}{m} \quad (14.11)$$

Якщо перший член суми у формулі (14.11) несе в собі «тягар минулого» і характеризує інерцію розвитку, то другий член грає роль елемента, що адаптує середнє до нових умов: середина з кожним кроком в часі наче оновлюється, вбираючи в себе нову інформацію про фактичний процес, що триває.

До визначення асиметричних ковзних середніх можна підійти, беручи до уваги ступінь «старіння» даних. Ця задача може бути розв'язана за допомогою застосування системи ваг, у якій інформації приписують вагу відповідно до ступеня її новизни.

Один з засобів згладжування ряду такого типу полягає у розрахунку *експоненційних* середніх за формулою, яку легко одержати на основі загального закону асиметричного лінійного фільтра (14.10), де

$$m = t, \quad a_r = \alpha(1 - \alpha)^r, \quad \text{тобто:}$$

$$\bar{y}_t = Q_t = \sum_{r=0}^t \alpha(1 - \alpha)^r y_{t-r},$$

де Q_t – експоненційна середня (згладжене значення рівня ряду) на момент t , α – коефіцієнт, що характеризує вагу поточного спостереження (параметр згладжування); $0 < \alpha < 1$.

Експоненційна середня має одну важливу властивість. Вона постійно адаптується до нових умов (рухаючись в часі) та виступає як узагальнення ковзної середньої.

Метод послідовних різниць. Особливим виглядом згладжування, яке дає змогу виділити випадкові коливання, якщо тренд наслідує поліноміальну тенденцію, є розрахунок послідовних різниць. Метод

основано на припущенні, що рівень ряду може бути подано як суму двох компонент:

$$\bar{y}_t = \overset{\text{W}}{y}_t + \varepsilon_t, \quad (14.12)$$

де $\overset{\text{W}}{y}_t$ – систематична, а ε_t – випадкова компонента.

Систематична компонента визначається поліномом $\hat{y} = f(t)$.

Випадкові складові ε_t – некорельовані, мають нульові середні та дисперсію σ^2 . Нехай тренд строю наслідуює поліном ступеня x . Різниці ординат порядку λ тоді дорівнюють одна одній, а різниці ординат $\lambda+1$ дорівнюють нулю.

Наприклад, якщо $\lambda = 1$, то

$$\begin{aligned} \overset{\text{W}}{y}_2 - \overset{\text{W}}{y}_1 &= a + 2b - (a + b) = b; \\ \overset{\text{W}}{y}_3 - \overset{\text{W}}{y}_2 &= a + 3b - (a + 2b) = b \end{aligned}$$

Тим часом послідовні різниці рівнів, що спостерігалась, за лінійного тренду будуть такими:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= b + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1); \\ y_3 - y_2 &= b + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Аналогічні за змістом вирази можна записати для випадків, коли $f(t)$ – поліноми більш високого ступеня.

Тобто з попереднього випливає, що приблизна рівність послідовних різниць рівнів ряду розглядається як симптом того, що y_t наслідуює у своєму розвитку поліном відповідного ступеня.

Застосовуючи цей метод, розраховують перші, другі і т. д. різниці рівнів ряду, тобто

$$u_t = y_t - y_{t-1}; \quad u_t^{(2)} = u_t - u_{t-1}; \quad u_t^{(3)} = u_t^{(2)} - u_{t-1}^{(2)} \quad \text{і т. п.}$$

Розрахунок ведуть до того часу, поки різниці не будуть приблизно дорівнювати одна одній. Порядок різниць беруть за ступінь вирівнювального полінома. Такий перехід далеко не універсальний, він дає непогані результати у доборі тільки кривих, описуваних

багаточленами. Крім того, його передумови можуть і не бути адекватними розглядуваному процесу.

14.3. Аналітичне вирівнювання часових рядів

Згладжування ряду за допомогою того чи іншого фільтра дає можливість з відомим наближенням виявити тренд розвитку. При цьому одержують ряд чисел – згладжених рівнів. Однак часто виникає потреба узагальнити тенденцію розвитку у вигляді деякої функції часу та кривої, яка їй відповідна. Криві, що описують закономірності розвитку явищ у часі, одержують шляхом *аналітичного вирівнювання часових рядів*. Вирівнювання ряду за допомогою тих чи інших функцій (тобто їх «підгонка» до даних) у більшості випадків є зручним засобом опису емпіричних даних, які характеризують розвиток у часі досліджуваного явища.

Знайдена функція дає змогу одержати вирівняні (розрахункові), чи як їх ще називають, теоретичні значення рівнів динамічного ряду. Процес вирівнювання складається з двох основних етапів: вибору типу кривої, формула якої відповідна характеру зміни часового ряду, та визначення числових значень (статистичне оцінювання) параметрів кривої. Питання вибору типу кривої – основне питання у вирівнюванні ряду. За всіх інших однакових умов похибка у вирішенні цього питання має істотніший вплив на наслідки процесу (особливо у прогнозуванні), ніж похибки, пов'язані зі статичним оцінюванням параметрів. Застосовують декілька практичних засобів (прийомів), які дають змогу більш-менш задовільно обрати адекватну дійсному розвитку форму кривої. Найпростіший шлях – візуальний вибір форми на підставі графічного зображення часового ряду. Ризик суб'єктивного та довільного вибору буде досить великим. Результат вибору значною мірою залежить від масштабу графічного зображення. За досить простої конфігурації тенденції розвитку та незначних коливань візуальний підхід дає непогані результати. Другий шлях полягає у застосуванні методу послідовних різниць, які були розглянуті раніше.

До вибору форми кривої можна підійти й інакше, наприклад, виходячи із значення обраного критерію. Звичайно як критерій беруть

суму квадратів відхилень фактичних значень рівня від розрахункових, які одержані вирівнюванням.

Застосування критерію для вибору форми кривої дає практично задовільні результати у тому випадку, коли вибір відбуватиметься у два етапи. На першому етапі відбирають залежності, придатні з погляду змісту застосованого підходу до задачі, далі накладають обмеження області потенційно прийнятних функцій. На другому етапі для цих функцій обраховують значення критерію та обирають з-поміж кривих ту, якій відповідне мінімальне значення. Для оцінювання параметрів поліномів застосовують метод найменших квадратів.

Нехай розвиток явищ апроксимується за допомогою поліноміального тренду, тобто залежну змінну y_t подано як функцію часу у вигляді багаточлена:

$$y_t = \overset{\mathbb{M}}{y}_t + \varepsilon_t, \quad (14.14)$$

де $\overset{\mathbb{M}}{y}_t$ – системна (структурна) складова, яка характеризує основну тенденцію щодо зміни явища в часі.

Нехай ця змінна може бути охарактеризована рівняннями тренду. Якщо вона формується під впливом основних чинників щодо досліджуваного явища, то друга складова віддзеркалює вплив другорядних часових факторів. Така дія призводить до відхилення від основної тенденції. У ряді випадків ці відхилення можна розглядати як суто випадкові збурення. Тобто якщо одна із складових y_t – випадкова величина ε_t і є підстава стверджувати, що якщо рівність (14.14) не буде відрізнятися від звичайної функції регресії, то основна тенденція може бути досліджена методами регресійного аналізу. В такому разі рівняння тренду можна оцінювати за допомогою методу найменших квадратів (МНК).

Нехай розвиток явища треба апроксимувати за допомогою поліноміального тренду, тобто подати залежну змінну y , як функцію часу у вигляді полінома:

$$\overset{\mathbb{M}}{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_\lambda t^\lambda.$$

Оцінка параметрів a_0, \dots, a_λ може бути здобута за допомогою МНК. Система нормальних рівнянь для оцінювання параметрів прямої має такий вигляд:

$$\begin{aligned}\sum y_t &= an + b\sum t; \\ \sum y_t t &= a\sum t + b\sum t^2.\end{aligned}$$

У всіх формулах сумування виконують від $t=1$ до $t=n$, де n – кількість членів динамічного ряду. Розв'язавши систему відносно невідомих параметрів, одержуємо значення оцінюваних параметрів.

Для прямої одержуємо співвідношення:

$$a = \frac{\sum y_t}{n}; \quad b = \frac{\sum y_t t}{\sum t^2}.$$

14.4. Інтервали довіри тренду

Вирівнювання часового ряду та знаходження тренду дають можливість для визначення основної тенденції розвитку явища в часі. Але оцінки параметрів тренду не вільні від похибок, які пов'язані, по-перше, з тим, що обсяг інформації, на основі якої виконувалось оцінювання, обмежений і в деякому сенсі цю інформацію можна розглядати як вибірку. По-друге, кожний член ряду містить випадкову компоненту. Отже, значення y_t несуть на собі тягар невизначеності, пов'язаний з помилками параметрів. Відповідно визначення тренду y_t у більшості випадків може супроводжуватися визначенням інтервалів довіри (аналогічно регресії). Характеристика тренду при цьому суттєво уточнюється.

Методи визначення інтервалу довіри одержано перенесенням результатів, знайдених для регресії вибірових показників, на аналіз динамічних рядів. У загальному вигляді інтервал довіри для тренду визначається так:

$$\hat{y}_t \pm t_\alpha S_y,$$

де $\overset{\boxtimes}{y}_t$ – розрахункове (трендове) значення y_t ; t_a – значення t – статистики;

$S_{\overset{\boxtimes}{y}}$ – середня квадратична похибка тренду.

Оскільки в основі $S_{\overset{\boxtimes}{y}}$ лежить середнє квадратичне відхилення членів ряду від тренду (s), тобто відхилення фактичних спостережень від розрахункових, одержаних як результат вирівнювання ряду, спочатку знаходимо s . За визначенням:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \overset{\boxtimes}{y}_t)^2}{v}}, \quad (14.15)$$

де y_t , $\overset{\boxtimes}{y}_t$ – фактичне та трендове значення членів ряду; v – кількість ступенів свободи, визначувана залежно від кількості спостережень (n) та кількості параметрів оцінюваної кривої z , $v = n - z$.

Для прямої – $v = n - 2$, для параболи другого порядку – $v = n - 3$ тощо.

За великої протяжності ряду розрахунок $\sum (\overset{\boxtimes}{y}_t - \bar{y})^2$ достатньо трудомісткий, тому краще застосувати спосіб, що не потребує розрахунку відхилень для кожного моменту часу. Він оснований на такому: нехай Q_0 – сума квадратів відхилень від середньої, Q_1 – сума квадратів відхилень від тренду. Тоді $Q_1 = Q_0 - \sum (\overset{\boxtimes}{y}_t - \bar{y})^2$, де $(\overset{\boxtimes}{y}_t - \bar{y})$ – різниця між значеннями тренду в точці t та середньої.

Нехай тренд описується рівнянням прямої $\overset{\boxtimes}{y}_t = a + bt$. Визначимо

величину $\sum (\overset{\boxtimes}{y}_t - \bar{y})^2$ для цього тренду. Зважаючи на те, що після

перенесення початку координат у середину ряду $\sum_{-p}^p t = 0$ і відповідно $a =$

\bar{y} , знаходимо $\overset{\boxtimes}{y}_t - \bar{y} = a + bt - \bar{y} = bt$.

Звідки після перетворень одержуємо:

$$\sum_{-p}^p (y_t - \bar{y})^2 = b \frac{(n-1)n(n+1)}{12};$$

$$Q_1 = Q_0 - b^2 \sum_{-p}^p t^2. \quad (14.16)$$

До тренду, що характеризується прямою, дисперсія s_y^2 може бути визначена за формулою

$$s_y^2 = s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{t_L^2}{\sum t^2} \right), \quad (14.17)$$

де t_L та t вимірюються від середини ряду.

Якщо кількість членів ряду непарне число, то:

$$s_y^2 = s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{12}{n(n^2-1)} t_L^2 \right).$$

Визначимо s_y^2 для деяких значень t_L . Нехай $t_L=0$ (це означає, що визначається значення дисперсії в точці, відповідній середині ряду). В такому разі

$$s_y^2 = \frac{s^2}{n}.$$

Якщо $t_L = \frac{n-1}{2}$, тобто s_y^2 визначається для моменту, яким закінчується інтервал спостережень, тоді

$$s_y^2 = s^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{3(n-1)}{n(n+1)} \right].$$

Нехай $t_L = \frac{n-1}{2} + L$, $L > 0$, тобто дисперсія тренду визначається для моменту часу поза інтервалом спостереження, тоді:

$$s_{\bar{y}}^2 = s^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{3(n-1)}{n(n+1)} + \frac{12}{n^2-1} \left((n-1)L + L^2 \right) \right].$$

Якщо $L = n$ (практично граничний випадок), то

$$s_{\bar{y}}^2 = s^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{3(n-1)}{n(n+1)} + \frac{12n(2n-1)}{n^2-1} \right].$$

Наприклад, нехай ряд охоплює 25 членів. Тоді $s_{\bar{y}}^2 = 0,04s^2$ для $t_L=0$;

$$s_{\bar{y}}^2 = 0,1508s^2 \text{ для } t_L=12; \quad s_{\bar{y}}^2 = 1,0931s^2 \text{ для } t_L=12+25.$$

Загалом квадратична похибка збільшується в міру зростання t_L , відповідно розширюються границі довіри тренду.

14.5. Екстраполювання часових рядів

Екстраполювання тенденції розвитку часових рядів досить широко застосовують на практиці завдяки простоті виконання на основі досить невеликого обсягу інформації, якості прийнятих допущень, відсутності іншої інформації. Брак іншої інформації, крім часового ряду, що його окремо розглядають, часто стає вирішальним у виборі цього методу для прогнозування. За такого підходу до прогнозування припускають, що розмір ознаки, яка характеризує явище, формується під дією множини факторів. При цьому немає можливості виявити нарізно їхній вплив. У зв'язку з цим зміна розвитку пов'язана не з будь-якими конкретними факторами, а тільки з плином часу.

Екстраполювання ґрунтується на таких припущеннях:

- 1) розвиток явища може бути з достатньою підставою охарактеризований плавною (еволютарною) траєкторією – трендом;
- 2) загальні умови, які визначають тенденцію розвитку у минулому, не зазнають суттєвих змін у майбутньому.

Таким чином, екстраполювання дає опис деякого загального майбутнього розвитку об'єкта прогнозування у випадку, коли є підстава вважати наявність відомої інерційності у розвитку явища, отже, гіпотеза

про майбутній розвиток може значною мірою ґрунтуватися на аналізі минулого.

У разі визначення прогностичних значень того чи іншого явища за допомогою екстраполювання тренду найбільш цікавою є не сама екстраполяція – це більш-менш механічний засіб. Екстраполювання часового ряду дає можливість одержати точкову статистичну оцінку. Але оскільки екологічні змінні, як правило, неперервні, то ці точкові значення, строго кажучи, не мають значення, оскільки «попадання в точку» має нульову ймовірність. Прогноз повинен бути виданий у вигляді деяких границь значень. Один із шляхів до з'ясування таких меж полягає у визначенні інтервалу довіри прогнозу. Інтервали довіри можуть бути визначені формально та неформально. Щодо останнього, то це сфера експертного визначення, можливого в разі якісного осмислення результатів прогнозу, зіставлення їх з іншими даними, що є в експерта, тощо. Формальний інтервал довіри охоплює лише ту невизначеність, яка пов'язана з обмеженістю кількості спостережень і відповідною неточністю знайдених оцінок параметрів. Основне питання – якою мірою у майбутньому збережеться знайдена тенденція, отже, не може бути вирішене за допомогою інтервалу довіри. Це сфера змістовного екологічного аналізу і, ймовірно, експертної оцінки.

Інтервали довіри прогнозів для трендів

Оскільки фактичні дані коливаються навколо трендів, то інтервал довіри прогнозу повинен бути ширшим за інтервал довіри тренду і відображати вказане додаткове джерело коливання.

Відповідно інтервал визначається так:

$$\overset{W}{y}_{t+L} + t \overset{s}{a}_p,$$

де s_p – середня квадратична похибка прогнозу.

Для лінійного тренду знаходимо

$$s_p = s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_L^2}{t^2}},$$

де t та t_L вимірюються від середини ряду.

Запитання для самоперевірки

1. Як формуються показники часових рядів?
2. Що описують часові ряди?
3. Які основні задачі дослідження часових рядів вам відомі?
4. Які способи застосовують для розв'язання першої задачі дослідження?
5. Які методи застосовують для розв'язання другої задачі?
6. У чому сутність третьої задачі і які методи застосовують для її вирішення?
7. Що таке темп зростання і які його види вам відомі?
8. Які елементарні способи опису часових рядів вам відомі?

15. Стохастична модель забруднення атмосфери

Під газовим зависом (аерозолем) зазвичай розуміють ансамбль (тобто велику кількість) частинок, завислих або таких, що переносяться потоком газу. Іншими словами, газовий завис – це потік газу разом з завислими або перенесеними твердими або рідкими частинками. Приклади атмосферних газових зависів: тумани (тобто рідкі крапельки у повітрі); заметілі; піщані бурі; промислові забруднення.

Розглянемо *монодисперсний газовий завис*, тобто такий, в якому всі частинки однакової форми, однакового розміру і з одного матеріалу, а в завислому стані вони переносяться потоком простого (наприклад, повітря) або одноатомного газу.

Включення будемо вважати твердими шорсткими частинками, осередненими за всіма можливими орієнтаціями. Процес їхнього співударяння будемо моделювати деякими ефективними сферами, а вплив несферичності форми на аеродинамічний опір частинок у

проміжку між співударяннями будемо враховувати за допомогою коефіцієнта:

$$f^a = \begin{cases} 3a18R/dg(052385 f_c) < \\ f_c^{-0.9} Re^n (Re = 0.02\sqrt{2/f_c^0-1}) \in (\cdot 3) \\ 3a1R6(12\sqrt{f_c})/\sqrt{f_c} > \cdot 3. \end{cases}$$

Останній діапазон значень чисел $Re = \rho_f |v_f - u| d_p / (\epsilon \mu_f)$ (де v_f

та u_p – швидкості потоку і частинки відповідно; ϵ – частка елементарного об'єму, що не зайнята включеннями) є відповідним турбулентному режиму обтікання частинки. За невеликої швидкості фаз

$Re = \rho_f a_p d_p / (\epsilon \mu_f)$ (a_p – найбільш імовірна швидкість завислих частинок), а за малої енергії хаотичного руху включень ($a_p \rightarrow 0$) $Re = \rho_f |w| d_p / (\epsilon \mu_f)$.

Нехай несним потоком буде повітря, яке розглядається як простий газ (тобто однокомпонентний газ з ефективними теплофізичними властивостями). Його молекули вважають осередненими за всіма можливими орієнтаціями й обертаннями.

Виділимо фізично нескінченно малий об'єм газового завису:

$$\Delta V = \Delta V_g + \Delta V_p,$$

де ΔV_g – частина об'єму ΔV , зайнятого газом, а ΔV_p – частинками.

Тоді

$$c = \Delta V_p / \Delta V, \epsilon = 1 - c = \Delta V_g / \Delta V,$$

де c – об'ємна частка, а ϵ – пористість (порозність) середовища. Це відносні об'єми фаз.

Молекули газу характеризуються випадковим положенням їхнього центра мас $r \in \Delta V$ і випадковим значенням їхньої швидкості u_g в момент часу t . Це дає змогу для молекул газу ввести функцію розподілення f таку, що величина:

$$dn_g = f(r, u_g, t) d\Omega_g,$$

де $d\Omega_g = \Delta V du_g$ – математичне очікування кількості молекул в об'ємі ΔV , що рухаються зі швидкістю, значення яких належить до інтервалу $[u_g, u_g + du_g]$.

Вважатимемо, що випадковим нагріванням частинок у потоці і сорбцією ними молекул можна знехтувати. Тоді частинки будуть мати такі самі, як і молекули, випадкові змінні (r, u_p) , а також випадкову кутову швидкість (ω_p) або кутовий момент (m_p) . Отже, можна ввести функцію розподілення для однієї частинки завислих частинок h таку, що величина:

$$dn_p = h(r, u_p, \omega_p, t) d\Omega_p,$$

де $d\Omega_p = \Delta V d\gamma_p$, $d\gamma_p = du_p \cdot d\omega_p$, дає аналогічне математичне очікування кількості частинок.

Систему кінетичних рівнянь газового завису виводять за таких припущень.

1. Зіткнення молекул газу в проміжку між твердими частинками є парними.

2. Рух газу в проміжках між твердими частинками (тобто всередині об'єму ΔV_g) можна описати за допомогою локальних функцій розподілення f_i^* для однієї частинки, що підпорядковуються

рівнянням Больцманового типу. Це означає, що в розгляді не беруть до уваги дуже густий газ.

3. Зіткнення частинок і їхня взаємодія в проміжку між зіткненнями – парні.

4. Повільна взаємодія (як і взаємодії на відстані і в часі, що перевищують довжину і час співударання) моделюються оператором Фоккера – Планка.

5. Потрапляння частинки в будь-яку частку всього об'єму ΔV

рівноймовірне, тобто ймовірність такої події дорівнює $\tau_p / \Delta V$ (τ_p – об'єм завислої частинки).

В абсолютній системі координат до молекули газу в проміжку між співудараннями прикладено тільки сили тяжіння. Силами взаємного тяжіння між молекулами на великих відстанях можна знехтувати, якщо величина $c_g \varepsilon / (kT) \ll 1$, де c_g – частка елементарного об'єму, що припадає на власний об'єм молекул газу (*параметр Ван-дер-Ваальса*); k – стала Больцмана; ε – глибина потенціальної ями. Для не дуже густого газу за не дуже низької температури ця умова дотримується. Тому в розглядуваних умовах для індивідуальних ознак молекули справедливими є такі співвідношення:

$$\mathbb{M} = u_g, \mathbb{M}_g = F_g = -gk.$$

Тут g і k – прискорення сили тяжіння і орт, спрямований проти цих сил.

На завислу частинку діють сили тяжіння, сили притягування фону інших частинок, аеродинамічна сила, аеродинамічний момент.

Аеродинамічна сила поділяється на дві частини: регулярну (R_p) і

випадкову \mathbb{M}_p^{st} . Аналогічним чином поділяється на дві частини

$(L_p$ і $\mathbb{M}_p^{st})$ аеродинамічний момент. Тоді можна стверджувати, що для частинок:

$$\bar{u} = \bar{u}_p, \quad \bar{u}_p = \bar{u}_p^r - \bar{u}_p^{st}, \quad \bar{m}_p = \bar{m}_p^r - \bar{m}_p^{st}.$$

У зв'язку з припущенням про повільні взаємодії регулярна (\bar{u}_p^r) і стохастична (\bar{u}_p^{st}) частини прискорення частинки можуть бути представлені у такому вигляді:

$$\bar{u}_p^r = F_p + \frac{1}{m_p} R_p + \frac{\tau_p}{m_p} \nabla \Pi_g, \quad F_g = -gk;$$

$$\bar{u}_p^{st} = \left\{ \frac{1}{h} \left\{ \square (B_p^u h) + \partial / \partial u_p (C_p^u h) + \partial / \partial \omega_p (G_p^u h) \right\} \right\}.$$

Як Π_g позначено тензор напруги в несному середовищі. З тих самих міркувань:

$$\bar{m}_p^r = L_p + \tau_p \left\{ \nabla \pi_g + C(\Pi_g) \right\}, \quad C(\Pi_g) = e_i \times (e_i \Pi_g);$$

$$\bar{m}_p^{st} = \left\{ \frac{1}{h} \left\{ \square (B_p^m h) + \partial / \partial u_p (C_p^m h) + \partial / \partial \omega_p (G_p^m h) \right\} \right\}.$$

Тензори B_p^u і B_p^m розраховують за допомогою парного потенціалу міжчастинних взаємодій. У випадку центрального потенціалу B_p^u – діагональний тензор, а $B_p^m = 0$. Тензори C_p^u, C_p^m, G_p^u і G_p^m розраховують за допомогою регулярних частин векторів прискорення частинки і \bar{m}_p – з умов задоволення рівноважного стану системі кінетичних рівнянь газового завису, π_g – тензор моментних напруг в несній фазі.

Кінетичне рівняння завислої фази може бути записане у такому вигляді:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla(u_p h) + \frac{\partial}{\partial u_p} \cdot (u_p h) + \frac{\partial}{\partial \omega_p} \cdot (\omega_p h) = J_{pp} \quad (15.1)$$

Права частина описує прибуток частинок зі значеннями випадкових величин u_p і ω_p . Розрахуємо її.

Оскільки ми обмежуємося парними взаємодіями, то достатньо окрім одночастинкових функцій розподілення (h) ввести в розгляд ще й двочастинкові:

$$h^{(2)}(r, r_2; u_p, u_2; \omega_p, \omega_2; t) = h(r, u_p, \omega_p, t) h(r_2, u_2, \omega_2, t) \chi_p -$$

функції розподілення твердих частинок. Функція χ_p має назву *парної кореляційної функції*. Якщо кореляцій немає, то $\chi_p = 1$. Із значення (h^2) впливає, що величина

$$dn_p^{(2)} = h^2 d\Omega_p d\Omega_2$$

дає математичне очікування в момент часу t кількості пар частинок із заданих інтервалів значень їхніх координат, швидкостей і кутових швидкостей.

Співударяння відбудеться, якщо центр мас однієї частинки опиниться в точці $r \in \Delta V$, а іншої частинки – в об'ємі співударяння з першою, тобто якщо

$$d\Omega_p = \Delta V du_p d\omega_p, \quad d\Omega_2 = u_{12} \sigma_{pp} du_2 d\omega_2 dt,$$

(σ_{pp} – інтегральний перетин розсіювання, u_{12} – величина відносної швидкості двох частинок).

Якщо r – центр мас першої частинки, то можна визначити центр мас іншої частинки.

Якщо поширити принцип детального балансу на концентровані середовища, то можна записати:

$$J_{pp} = \iint \left\{ h(r_1 \gamma_1 t) h(r_2 \gamma_2 t) \chi_p^-(r_c) - h(r_1 \gamma_1 t) h(r_2 \gamma_2 t) \chi_p^-(r_c) \right\} u_{21}^{p-} d\Omega_p d\phi_2, \quad (15.2)$$

де $u_{21}^p = u_2 - u_p \chi u_{21}^p \approx \left| u_{21}^p \right| \chi_p^- = (r_c)_p$.

Рівняння (15.1) і (15.2) являють собою замкнену (з точністю до перетину розсіювання, парної кореляційної функції і коефіцієнтів відновлення імпульсу) систему кінетичних рівнянь.

Запитання для самоперевірки

1. Які види забруднення розглядають у моделюванні?
2. Що таке «монодисперсний газовий завис»?
3. Які сили та взаємодії розглядають у наведених модельних рівняннях?
4. Які сили прикладено між співударантами до моделі газу?
5. За яких припущень виводили систему кінетичних рівнянь газового завису?

Список літератури

1. *Заграй Я.М.* Моделювання і прогнозування стану довкілля : навч. посіб. / Я.М. Заграй, О.А. Котовенко. – Київ : КНУБА, 2007. – 120 с.
2. *Кучеров К. І.* Сучасні наукові методи дослідження оцінки та прогнозування впливу техногенного забруднення на безпечне функціонування навколишнього природного середовища / К.І. Кучеров // *Людина та довкілля. Проблеми неоекології.* – 2008. – № 1–2. – С. 104–112.

3. *Принципи* моделювання та прогнозування в екології: підручник / В.В. Богобоящий, К.Р. Чурбанов, П.Б. Палій, В.М. Шмандій. – Київ : Центр навч. літ-ри, 2004. – 216 с.

4. *Лаврик В.І.* Методи математичного моделювання в екології. : навч. посіб. / В.І. Лаврик; Національний ун-т «Києво-Могилянська академія». – Київ : КМ Академія, 2002. – 203 с.

5. *Брановицька С.В.* Обчислювальна математика та програмування : Обчислювальна математика в хімії і хімічній технології : підручник /С.В. Брановицька, Р.Б. Медведєв, Ю.Я. Фіалков. – Київ : Політехніка НТУУ КПІ, 2004. – 220 с.

6. *Заграй Я.М.* Статистичний аналіз в екології : навч. посіб. / Я.М. Заграй, О.А. Котовенко, В.О. Карасьова. – Київ : КНУБА, 2001. – 132 с.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

**КОТОВЕНКО Олена Андріївна,
МІРОШНИЧЕНКО Олена Юріївна**

**МОДЕЛЮВАННЯ
ТА ПРОГНОЗУВАННЯ
СТАНУ ДОВКІЛЛЯ**

Навчальний посібник

Редагування та коректура *Г.В. Кобриної*
Комп'ютерне верстання *Т.І. Кукарєвої*

Підписано до друку 05.01.2026. Формат 60 × 84_{1/16}
Ум. друк. арк. 10,93. Обл.-вид. арк. 11,75.
Тираж 25 прим. Вид. № 3/І-26. Зам. № 3/1-26.

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.