МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 1 (ЗМ 1, ЗМ 2)
Лінійна алгебра та векторний аналіз. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних

Методичні вказівки
до виконання самостійних та індивідуальних робіт
для здобувачів ОПП першого рівня вищої освіти
(бакалавр) інженерних та природничих спеціальностей
усіх форм навчання КНУБА

Київ 2024

УДК 512.64,514.12,517.2
В55

Укладачі: О.В. Доля, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
О.В. Забарило, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Ю.А. Коротких, асистент;
Ю.В. Рябчун, д-р філософії, доцент

Рецензент О.І. Баліна, канд.тех.наук, доцент

Відповідальний за випуск О.О. Терентьєв, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри інформаційних технологій проектування та прикладної математики

Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій проектування та прикладної математики, протокол № 8 від 30 травня 2023 року.

В авторській редакції.

Вища математика : Модуль 1 (ЗМ 1, ЗМ 2). Лінійна алгебра та
В55 векторний аналіз. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних: методичні вказівки до виконання самостійних та індивідуальних робіт / уклад.: О.В. Доля та ін. – Київ : КНУБА, 2024.– 92 с.

Містять необхідні практичні відомості для виконання самостійних та індивідуальних завдань зі змістових модулей 1 та 2, що включають завдання з лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії і диференціального числення функції однієї та багатьох змінних. А також приклади виконання типових варіантів змістового модуля 1 та 2 індивідуальної роботи та 30 варіантів для виконання самостійних робіт.

Призначені для студентів ОПП першого рівня вищої освіти (бакалавр) інженерних та природничих спеціальностей всіх форм навчання КНУБА

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Сучасний рівень і темпи будівництва висувають перед молодими спеціалістами важливу вимогу – не тільки мати науковий потенціал в обраній діяльності, але й ефективно застосовувати здобуті знання для розвитку проблем, що виникають в їх практичній діяльності.

Останнім часом використовуються методи математичного програмування і сіткового планування, що базуються на лінійній та векторній алгебрі, аналітичний геометрії, математичному аналізі функцій однієї і багатьох змінних тощо.

В основу методичних вказівок покладено матеріал, що видавався в 2018 році як методичні вказівки укладачів Н.Д.Федоренко, О.В. Долі, С. В. Білощицької, але виправлений, перероблений та доповнений новими вправами і задачами.

Основою навчання є самостійна робота студентів над підручником, навчальним посібником, конспектом лекцій та виконанням індивідуальних завдань.

У цих методичних вказівках наведені вправи і задачі у варіантах для виконання самостійної роботи студентами по Модулю 1 з «Вищої математики», а також приклади розв`язання типових завдань, що відповідають чинній робочій програмі з дисципліни.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ

Завдання 1.1. Задано три матриці А, В та С (де λ – передостання цифра номера залікової книжки, а μ – остання цифра номера залікової книжки). Обчислити значення виразів: $3A+4B$, $A\cdot B$, $B\cdot A$, $A\cdot C$.

Завдання 1.2. Обчислити визначник, використовуючи його властивості.

Завдання 1.3. Дослідити сумісність систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою теореми Кронекера–Капеллі і розв'язати кожну систему методом Крамера, методом Гауса та матричним методом.

Завдання 1.4. Розв'язати матричне рівняння.

Завдання 1.5. Знайти загальний розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Завдання 1.6. Для заданих векторів необхідно:

а) обчислити мішаний добуток трьох даних векторів;

б) знайти модуль векторного добутку двох даних векторів;

в) обчислити скалярний добуток двох даних векторів;

г)перевірити, чи будуть дані вектори колінеарними або ортогональними;

д) з'ясувати, чи компланарні три дані вектори.

Завдання 1.7. Показати, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

Завдання 1.8. Дано координати вершин тетраедра $A_1A_2A_3A_4$. Знайти:

а) довжину ребра A_1A_2;

б) площу грані $A_1A_2A_3$;

в) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

г) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;

д) рівняння прямої A_1A_2;

е) рівняння площини $A_1A_2A_3$;

є) рівняння площини, що проходить через точки A_1 та A_4 і перпендикулярна площині $A_1A_2A_3$;

ж) рівняння і довжину висоти, опущеної з точки A_4 на площину $A_1A_2A_3$;

з) координати точки A_5, що симетрична точці A_4 відносно площини $A_1A_2A_3$;

і) рівняння площини, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої A_1A_4.

Завдання 1.9. Задано вершини трикутника ABC. Знайти:

а) рівняння сторони AB;

б) рівняння висоти CH;

в) рівняння медіани AM;

г) точку N перетину медіани AM та висоти CH;

д) рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно стороні AB;

е) відстань від точки C до прямої AB;

є) точку K перетину медіан трикутника.

Завдання 1.10. Розв'язати задачу.

Завдання 1.11. Розв'язати задачу.

Завдання 1.12. Побудувати криву, задану рівнянням в полярній системі координат.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Завдання 2.1. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

Завдання 2.2. Знайти похідні від заданих функцій:

а) першого порядку;

б) другого порядку.

Завдання 2.3. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

Завдання 2.4. Знайти повні диференціали 1-го та 2-го порядків функції $z=f(x, y)$.

Завдання 2.5. Знайти градієнт функції $z=f(x, y)$ в точці M та похідну за напрямком вектора $\vec{s}$ в цій точці.

Завдання 2.6. Дослідити на екстремум функцію $z=f(x, y)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ ЗМІСТОВОГО МОДУЛЯ 1

Завдання 1.1. Задано три матриці:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 7\\ -4 & 2 & -3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 0\\ 1 & 5 & -1\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 5\end{pmatrix}.$$

Знайти: 1) $2A+3B;\quad A\cdot B;\ B\cdot C$; 2) $det\,A$; 3) $A^{-1};$ 4) $A\cdot A^{-1}$.

Розв'язання:

1. Знаходимо: $$2A+3B=\begin{pmatrix}-6 & 0 & 14\\ -8 & 4 & -6\\ -2 & 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 9 & 3\\ -3 & 12 & 0\\ 3 & 15 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 9 & 17\\ -11 & 16 & -6\\ 1 & 17 & 1\end{pmatrix};$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-3\cdot2+0\cdot(-1)+7\cdot1 & -3\cdot3+0\cdot4+7\cdot5 & -3\cdot1+0\cdot0+7\cdot(-1)\\ -4\cdot2+2\cdot(-1)+(-3)\cdot1 & -4\cdot3+2\cdot4+(-3)\cdot5 & -4\cdot1+2\cdot0+(-3)\cdot(-1)\\ -1\cdot2+1\cdot(-1)+2\cdot1 & -1\cdot3+1\cdot4+2\cdot5 & -1\cdot1+1\cdot0+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 26 & -10\\ -13 & -19 & -1\\ -1 & 11 & -3\end{pmatrix};$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}2\cdot3+3\cdot(-1)+1\cdot5\\ -1\cdot3+4\cdot(-1)+0\cdot5\\ 1\cdot3+5\cdot(-1)+(-1)\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ -7\\ -7\end{pmatrix}.$$

2. $$\det A=\begin{vmatrix}-3 & 0 & 7\\ -4 & 2 & -3\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=-3\cdot2\cdot2+(-4)\cdot1\cdot7+0\cdot(-3)\cdot(-1)-(-1)\cdot2\cdot7-1\cdot(-3)\cdot(-3)-2\cdot(-4)\cdot0=-35.$$

3. Обернена матриця A^{-1} до матриці A має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{det\,A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{23}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Оскільки $det\,A=-35\neq0$, то матриця A^{-1} є не виродженою, отже, існує. Знаходимо:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=7;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}-4 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=11;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-2.$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 7\\ 1 & 2\end{vmatrix}=7;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3.$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 7\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-14;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}-3 & 7\\ -4 & -3\end{vmatrix}=-37;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-6.$$

Тоді: $A^{-1} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} 7 & 7 & -14 \\ 11 & 1 & -37 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{3} \\ -\frac{11}{35} & -\frac{1}{35} & \frac{37}{35} \\ \frac{2}{35} & -\frac{3}{35} & \frac{6}{35} \end{pmatrix}.$

4. Маємо:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}+0+\frac{2}{5} & \frac{3}{5}-0-\frac{3}{5} & -\frac{6}{5}+0+\frac{6}{5} \\ \frac{4}{5}-\frac{22}{35}-\frac{6}{35} & \frac{4}{5}-\frac{2}{35}+\frac{9}{35} & -\frac{8}{5}+\frac{74}{35}-\frac{18}{35} \\ \frac{1}{5}-\frac{11}{35}+\frac{4}{35} & \frac{1}{5}-\frac{1}{35}-\frac{6}{35} & -\frac{2}{5}+\frac{37}{35}+\frac{12}{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, обернена матриця знайдена вірно.

Завдання 1.2. Обчислити визначник, використовуючи його властивості:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

Обчислимо визначник, попередньо отримавши нулі в першому рядку:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 21 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(-1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = 2(-3 + 126 = 36) = 174.$$

Завдання 1.3. Перевірити сумісність системи і розв'язати її:
1. Методом Крамера; 2) методом Гаусса; 3) матричним методом.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

Розв'язання:

Сумісність системи перевіримо за теоремою Кронекера-Капеллі, для цього утворимо основну і розширену матриці даної системи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

Оскільки ранг основної матриці $rangA = 3$, ранг розширеної матриці $rang\tilde{A} = 3$, то задана система рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок:

1. За формулами Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 \dfrac{\Delta_3}{\Delta}.$

Отже, знайдемо визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-3 - 0 + 6) = 6 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(-3 - 6 + 6) = 6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2(6 - 0 - 12) = 12;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 12 - 6 = -12.$$

$$x_1 = \frac{6}{6} = 1; \quad x_2 = \frac{12}{6} = 2; \quad x_3 = \frac{-12}{6} = -2.$$

Відповідь: (1; 2; –2).

2. Виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці даної системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

$$-2x_3 = 4; \quad x_3 = -2$$

Отже, $\quad 3x_2 + 2x_3 = 2; \quad 3x_2 - 4 = 2; \quad x_2 = 2$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \quad x_1 + 2 - 4 = -1; \quad x_1 = 1$$

Відповідь: (1; 2; –2).

3.Запишемо систему рівнянь в матричній формі: $AX = B,$ де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad X = A^{-1}B.$$

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} до матриці A:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix};$$

$A_{11}=-6;\quad A_{21}=-2;\quad A_{31}=4$

$A_{12}=0\quad A_{22}=-4\quad A_{32}=2$; $\mathit{det}\,A=6\neq 0.$

$A_{13}=6\quad A_{23}=3\quad A_{33}=-3$

Тоді

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4\\ 0 & -4 & 2\\ 6 & 3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix};$$

$$X=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1\\ -4\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\cdot(-1) & + & (-\frac{1}{3})\cdot(-4) & + & \frac{2}{3}\cdot(-2)\\ 0\cdot(-1) & + & (-\frac{2}{3})\cdot(-4) & + & \frac{1}{3}\cdot(-2)\\ 1\cdot(-1) & + & \frac{1}{2}\cdot(-4) & + & (-\frac{1}{2})\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}.$$

Відповідь: (1; 2; –2).

2. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1;\\ 2x_1-x_2+2x_3=3\\ 3x_1+x_2+x_3=5\end{cases}$

Перевіримо сумісність системи:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 4\\ 0 & -5 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$ Отже, $\mathit{rang}A=2.$

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 5\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 4 & 1\\ 0 & -5 & 4 & 2\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$ Отже, $\mathit{rang}\tilde{A}=3.$

За теоремою Кронекера-Капеллі дана система рівнянь несумісна.

Завдання 1.4. Розв'язати матричні рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$

Розв'язання: Маємо рівняння виду $AX=B$.

Оскільки $\det A=\begin{vmatrix} 3 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix}=2\neq 0$, то розв'язок рівняння має вигляд $X=A^{-1}B$.

Знайдемо обернену матрицю: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Отже, $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

б) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: Маємо рівняння виду $AX = B$.

Оскільки $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, то розв'язок рівняння має вигляд $X = B \cdot A^{-1}$.

Знайдемо обернену матрицю: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Отже, $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. Знайти загальний розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

Розв'язання: Скористаємося методом Гаусса

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Цій матриці відповідає однорідна система рівнянь, еквівалентна вихідній:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -6x_3 + 5x_4, \\ x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4 \end{cases}.$$

Поклавши x_3=C_1, x_4=C_2, отримаємо x_2=–6C_1+5C_2, x_1=8C_1–7C_2.

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$x_1=8C_1-7C_2,\ x_2=-6C_1+5C_2,\ x_3=C_1,\ x_4=C_2,$$

або $(8C_1-7C_2; -6C_1+5C_2; C_1; C_2)$.

Завдання 1.6. Задано вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$: $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k};\quad \vec{b}=-\vec{i}+2\vec{k};\quad \vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}.$

Необхідно:

1) обчислити мішаний добуток трьох векторів $2\vec{a}$, $\vec{a}-\vec{b}$ і $3\vec{c}$;

2) модуль векторного добутку векторів $2\vec{a}$ і $3\vec{c}$;

3) обчислити скалярний добуток векторів $3\vec{b}$ і $(-2\vec{c})$;

4) перевірити, чи будуть вектори колінеарними або ортогональними;

5) перевірити компланарність векторів $4\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Розв'язання:

1. Оскільки $2\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k};\ \vec{a}-\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k};\ 3\vec{c}=3\vec{i}-6\vec{j}+15\vec{k},$ то

$$(2\vec{a};\vec{a}-\vec{b};3\vec{c})=\begin{vmatrix}2 & 4` & 6\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & -6 & 15\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 5\end{vmatrix}=6(10+2-12-6-20+2)=-144;$$

2. Оскільки

$$2\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k};\ \ 3\vec{c}=3\vec{i}-6\vec{j}+15\vec{k}\text{, то}$$

$$2\vec{a}\times3\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & -6 & 15\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 5\end{vmatrix}=6(16\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}),$$

$$|2\vec{a}\times3\vec{c}|=\sqrt{6^2\left(16^2+(2)^2+(-4)^2\right)}=6\sqrt{256+4+16}=12\sqrt{69};$$

3. Оскільки $3\vec{b}=-3\vec{i}+6\vec{k};\ \ -2\vec{c}=-2\vec{i}+4\vec{j}-10\vec{k}$, то

$$3\vec{b}\cdot(-2\vec{c})=-3\cdot(-2)+0\cdot4+6\cdot(-10)=-54;$$

4. Оскільки $\vec{a}=(1{,}2{,}3)$ і $\vec{b}=(-1{,}0{,}2)$, то $-\frac{1}{1}\neq\frac{0}{2}\neq\frac{2}{3}$, отже, вектори не колінеарні.

Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-1)+2\cdot0+3\cdot2=5\neq0$, то вектори не ортогональні;

5. Вектори $4\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, якщо їх мішаний добуток $4\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0.$ Обчислимо

$$4\vec{a}\vec{b}\vec{c}=4\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=8(8+4)=96\neq0,$$

тобто вектори не компланарні.

Завдання 1.7. Показати, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом, якщо

$$\vec{a}=(2,1,1);\ \ \vec{b}=(1,2,-2);\ \ \vec{c}=(1,1,2);\ \ \vec{d}=(4,3,-2).$$

Розв'язання:

Обчислимо $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=12-4-1=7\neq 0.$

Отже, вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис і вектор $\vec{d}$ в цьому базисі має представлення: $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, або в координатному вигляді

$$\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=4\\ \alpha+2\beta+\gamma=3\\ \alpha-2\beta+2\gamma=-2\end{cases}.$$

Розв'язуємо цю систему за формулами Крамера: $\Delta=7$,

$$\Delta_\alpha=\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2(-12+4+1)=14,$$

$$\Delta_\beta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=16-4-5=7,$$

$$\Delta_\gamma=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & -2\end{vmatrix}=4+5-16=-7.$$

$$\alpha=\frac{\Delta_\alpha}{\Delta}=\frac{17}{7}=2;\ \ \beta=\frac{\Delta_\beta}{\Delta}=\frac{7}{7}=1;\ \ \gamma=\frac{\Delta_\gamma}{\Delta}=\frac{-7}{7}=-1,$$

отже, $\vec{d}=(2,1,-1)=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}.$

Завдання 1.8. Дано координати вершин тетраедра $A_1A_2A_3A_4$:
$A_1(1;2;1);\ \ A_2(3;0;-2);\ \ A_3(5;2;7);\ \ A_4(-6;-5;8).$

Знайти:

а) довжину ребра A_1A_2;

б) площу грані $A_1A_2A_3$;

в) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

г) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;

д) рівняння прямої A_1A_2;

е) рівняння площини $A_1A_2A_3$;

є) рівняння площини, що проходить через точки A_1 та A_4 і перпендикулярна площині $A_1A_2A_3$;

ж) рівняння і довжину висоти, опущеної з точки A_4 на площину $A_1A_2A_3$;

з) координати точки A_5, що симетрична точці A_4 відносно площини $A_1A_2A_3$;

і) рівняння площини, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої A_1A_4.

Розв'язання:

а) вектор $\overrightarrow{A_1A_2}=(2;-2;-3)$, тому його довжина $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{17}$, отже, довжина ребра A_1A_2 дорівнює $\sqrt{17}$;

б) оскільки $S_{A_1A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$, то

$$\overrightarrow{A_1A_3}=(4;0;6),\quad \overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k},$$

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\frac{1}{2}\cdot 28=14\,(\text{од.}^2).$$

в) вектори $\overrightarrow{A_1A_2}=(2;-2;-3)$, $\overrightarrow{A_1A_4}=(-7;-7;7)$, кут φ між ними визначається рівністю: $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}$.

Отже, $\cos\varphi=\dfrac{2\cdot(-7)\_(-2)\cdot(-7)+(-3)\cdot 7}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{(-7)^2+(-7)^2+7^2}}=\dfrac{7(-2+2-3)}{\sqrt{17}\cdot 7\sqrt{3}}=-\dfrac{3\sqrt{51}}{51}$.

Тоді $\varphi=\pi-\arccos\dfrac{3\sqrt{51}}{51}$.

г) оскільки $V_{nip}=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$, то

$$V_{nip}=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\\ -7 & -7 & 7\end{vmatrix}=\frac{7}{3}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}-2 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\frac{7}{3}\left|10+12\right|=\frac{7}{3}\cdot 22=\frac{154}{3}=51\frac{1}{3}\,(\text{од.}^3).$$

д) канонічне рівняння прямої в просторі має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Нехай *M (x,y,z)* довільна точка шуканої прямої. Вектори $\vec{A_1M}$ та $\vec{A_1A_2}$ колінеарні.

$$\vec{A_1M}=(x-1;\quad y-2;\quad z-1).$$

За умови колінеарності, отримаємо таке рівняння прямої A_1A_2:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-3}.$$

е) нехай *M (x,y,z)* довільна точка шуканої площини. Вектори $\vec{A_1M}$, $\vec{A_1A_2}$ та $\vec{A_1A_3}$ компланарні.

Векторне рівняння площини має вигляд: $(\vec{A_1M}\times\vec{A_1A_2})\cdot\vec{A_1A_3}=0$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=0;$$

$$-12(x-1)-24(y-2)+8(z-1)=0;$$

$$3(x-1)+8(y-2)-2(z-1)=0;$$

$$3x+8y-2z-17=0.$$

Нормальний вектор площини $\vec{N}=(3;8;-2)$.

є) нехай *M (x,y,z)* довільна точка шуканої площини. Нормальний вектор $\vec{N}=(3;8;-2)$ площини $A_1A_2A_3$ паралельний шуканій площині. Якщо перенести його на площину, то вектори $\vec{A_1M}$, $\vec{A_1A_2}$ та $\vec{N}$ будуть компланарними, тобто $(\vec{A_1M}\times\vec{A_1A_2})\cdot\vec{N}=0$.

Отже, $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=0;$

$$28(x-1)-5(y-2)+22(z-1)=0;$$

$$28x-5y+22z-40=0.$$

ж) канонічне рівняння прямої в просторі має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

$$x_0=-6;\quad y_0=-5;\quad z_0=8.$$

З умови перпендикулярності прямої A_4A_0 і площини $(A_1A_2A_3)$ випливає, що напрямний вектор прямої $\vec{S}$ співпадає з нормальним вектором площини $\vec{N}$, тобто, $\vec{S}=\vec{N}$ =(3;8;–2). Тоді рівняння висоти A_4A_0:

$$\frac{x+6}{3}=\frac{y+5}{8}=\frac{z-8}{-2}.$$

Довжину висоти знайдемо як відстань від точки A_4 до площини $(A_1A_2A_3)$ за формулою $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\cdot(-6)+8\cdot(-5)-2\cdot 8-17|}{\sqrt{3^2+8^2+(-2)^2}}=\frac{|-91|}{\sqrt{77}}=13\sqrt{\frac{7}{11}}.$

з) знайдемо точку перетину A_0 висоти та площини $(A_1A_2A_3)$.

Параметричне рівняння висоти A_4A_0: $\begin{cases} x=3t-6, \\ y=8t-5, \\ z=-2t+8. \end{cases}$

Рівняння площини $(A_1A_2A_3)$: $3x+8y-2z-17=0$,

Отже, A_0: $3(3t-6)+8(8t-5)-2(-2t+8)-17=0$;

$9t+64t+4t-18-40-16-17=0$;

$77t-91=0$; $\quad t=\frac{91}{77}=\frac{13}{11}$.

$\begin{cases} x_0=3\frac{13}{11}-6=-\frac{27}{11}, \\ y_0=8\frac{13}{11}-5=\frac{49}{11}, \\ z_0=-2\frac{13}{11}+8=\frac{62}{11}. \end{cases}$ $\quad A_0\left(-\frac{27}{11};\frac{49}{11};\frac{62}{11}\right)$.

Оскільки $A_4A_5\perp(A_1A_2A_3)$ і A_0 – середина відрізка A_4A_5, то маємо:

$-\frac{27}{11}=\frac{-6+x}{2}$; $\quad \frac{49}{11}=\frac{-5+y}{2}$; $\quad \frac{62}{11}=\frac{8+z}{2}$;

$x=\frac{12}{11}$; $\quad y=\frac{153}{11}$; $\quad z=\frac{36}{11}$; $\quad A_5\left(\frac{12}{11};\frac{153}{11};\frac{36}{11}\right)$.

і) нормальний вектор $\vec{N}$ шуканої площини збігається з напрямним вектором $\vec{S}=(1;1;-1)$ прямої A_1A_4, тобто $\vec{S}\parallel\vec{N}$.

Тому рівняння площини має вигляд:

1(x+6) –1(y+5) –8(z–8)=0;

x+y–z+19=0.

Завдання 1.9. Задано вершини трикутника ABC:

A(–3; 2); B (–5;–2); C(3;2). Знайти:

а) рівняння сторони AB;

б) рівняння висоти CH;

в) рівняння медіани AM;

г) точку N перетину медіани AM та висоти CH;

д) рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно стороні AB;

е) відстань від точки C до прямої AB;

є) точку K перетину медіан трикутника.

Розв'язання:

а) рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

$$\frac{x-(-3)}{-5-(-3)}=\frac{y-2}{-2-2}; \quad \frac{x+3}{-2}=\frac{y-2}{-4}; \quad \frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{2};$$

$$2x+6=y-2; \quad y=2x+8.$$

б) кутовий коефіцієнт прямої AB: $k_{AB}=2$.

Оскільки $AB\perp CH$, то $k_{CH}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{2}$, тому рівняння висоти CH:

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-3);$$

$$2y-4=-x+3; \quad x+2y-7=0;$$

в) знаходимо координати т. M – середини відрізка BC:

$x_M=\frac{-5+3}{2}=-1;$ $y_M=\frac{-2+2}{2}=0,$ тобто M (–1; 0). Тоді рівняння медіани AM:

$$\frac{x+3}{-1+3}=\frac{y-2}{0-2}; \quad \frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-2}; \quad -(x+3)=y-2 \quad ; \quad x+y+1=0;$$

г) для знаходження точки N – перетину медіани AM і висоти CH, утворюємо і розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ x+2y-7=0, \end{cases}; \quad \begin{cases} y=8, \\ x=-9, \end{cases} \quad N\,(-9;8)$$

д) оскільки прямі паралельні, то $k_1=k_2$, тобто $k=2$, тоді рівняння прямої, що проходить через точку C, паралельно до AB: $y-2=2(x-3); \quad 2x-y-4=0.$

е) Відстань від точки C до прямої AB:

$$d=|CH|=\frac{|2\cdot 3+(-1)\cdot 2+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{12}{\sqrt{5}}\approx 5{,}4.$$

є) медіани точкою перетину діляться у відношенні 2:1 рахуючи від вершини. Отже, $x_K=\frac{-3+2\cdot(-1)}{1+2}=-\frac{5}{3};$ $y_K=\frac{2+2\cdot 0}{1+2}=\frac{2}{3},$ тобто $K(-\frac{5}{3};\frac{2}{3})$.

Завдання 1.10. Дано площину: 3x–2y+4z–12=0. Необхідно:

а) побудувати цю площину;

б) знайти відстань від точки M(2;–5;–7) до цієї площини.

Розв'язання:

а) запишемо це рівняння у відрізках на осях. Для цього перенесемо у праву частину вільний член і поділимо на нього обидві частини рівняння:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1, \qquad \text{звідки} \qquad a=4;\ b=–6;\ c=3.$$

Знаючи відрізки, які відтинає площина на осях координат, легко побудувати площину (рис.1):

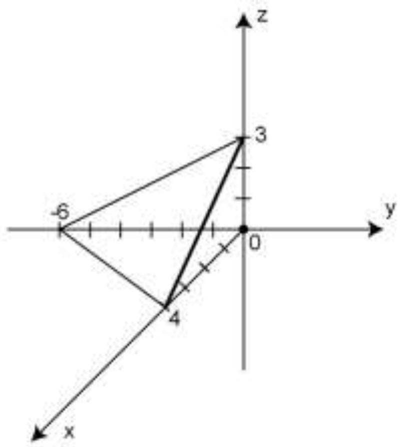

Рис.1

б) відстань від точки M до площини знайдемо за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$$d=\frac{|3\cdot 2+(-2)(-5)+4\cdot(-7)-12\ |}{\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{24}{\sqrt{29}}\approx 4{,}5.$$

Завдання 1.11. Медіани BM і CN трикутника ABC мають відповідно рівняння: $x+y-3=0$ і $2x+3y-1=0,$ а точка A(1;1) – вершина трикутника. Скласти рівняння сторони BC.

Розв'язання:

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+3y=1, \end{cases}$ знаходимо точку перетину медіан: O (8;–5). З відношення $\frac{AO}{OP}=\frac{2}{1}=\lambda,$ дістанемо координати середини відрізка BC – точки P: $8=\frac{1+2x_p}{1+2};$ $\quad -5=\frac{1+2y_p}{1+2};$ $\quad x_p=\frac{23}{2};$ $\quad y_p=-8.$

Оскільки точки B і C лежать на заданих прямих, то їхні координати задовольняють задані рівняння. Точка P – середина BC, отже, маємо

$$\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{23}{2}; \qquad \frac{y_B + y_C}{2} = -8;$$

$$x_B + x_C = 23; \qquad x_B + y_B = 3; \qquad \begin{cases} x_C = 11, \\ y_C = -7. \end{cases}$$

$$y_B + y_C = -16; \qquad 2x_C + 3y_C = 1;$$

Пряма BC проходить через точки P $\left(\frac{23}{2}; -8\right)$ і C (11;–7), тому дістанемо:

$$\frac{x - \frac{23}{2}}{11 - \frac{23}{2}} = \frac{y+8}{-7+8}; \qquad \frac{2x-23}{22-23} = \frac{y+8}{1},$$

$$2x - 23 = -y - 8,$$

$$2x + y - 15 = 0.$$

Завдання 1.12. Побудувати криву, задану рівнянням в полярній системі координат: $\rho = 2 + \cos^2 \varphi$.

Розв'язання:

Складемо таблицю, в якій наведені значення полярного кута φ і відповідні їм значення полярного радіуса ρ:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	3	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3

У полярній системі координат побудуємо кожну отриману точку, а потім плавно з'єднаємо всі такі точки. Отримаємо криву (рис. 2)

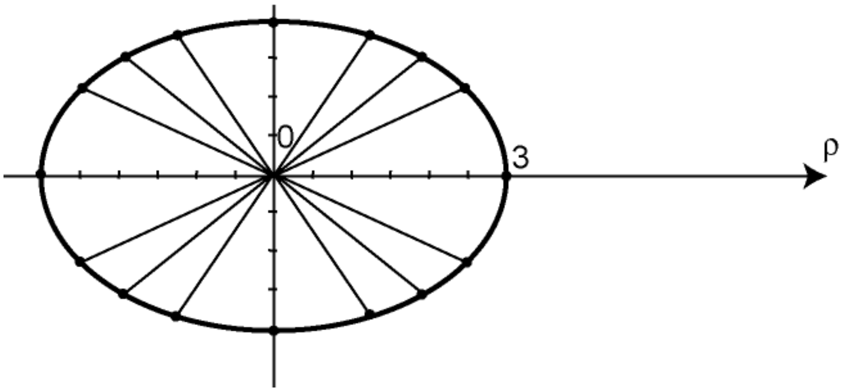

Рис. 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1 Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8x^2+1}{x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3}{3x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x-2}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3}{1+5x^2-4x^3}$;

є) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-3x+1}{2x^4+3x^2+5}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

Розв'язання:

а) За теоремами про границі маємо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8x^2+1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-8x^2+1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+3)}=\frac{8-32+1}{2+3}=\frac{-23}{5};$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3}{3x-1}=\dfrac{1+3}{3-1}=2;$

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{1}{6};$

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x-2}=\infty$, оскільки $x^2\to 4$ при $x\to 2$ і $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$, як добуток нескінченно великої величини на обмежену величину, яка не є нескінченно малою.

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(x^2-9\right)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{-3(x-3)}=-\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})=$

$=-\dfrac{1}{3}\cdot 6\cdot 8=-16;$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3}{1+5x^2-4x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^3}}{\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x}-4}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$;

є) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5-3x+1}{2x^4+3x^2+5}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}+\frac{5}{x^5}}=-\infty$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x\sin(-x)}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{x}=$

$=2\cdot4\cdot(-1)=-8$;

з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x=\left|\begin{matrix}y=x-\frac{\pi}{2}\\ x=y+\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=\lim\limits_{y\to0}y\,tg\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=-\lim\limits_{y\to0}y\,ctgy=$

$=-\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y=-1\cdot1=-1$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{2x+3}-1\right)^{1-5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+3}\cdot\frac{1-5x}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x-4}{2x+3}}=e^{10}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+(\cos 2x-1)\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}=\lim\limits_{x\to0}$

$\left(1+\left(-2\sin^2 x\right)\right)^{\frac{-1}{2\sin^2 x}\cdot\frac{-2\sin^2 x}{\sin^2 3x}}=$

$=e^{-2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 3x}}=e^{-\frac{2}{9}}=\frac{1}{\sqrt[9]{e^2}}$.

Завдання 2.2 Знайти похідні від функцій

а) $y=3x^5-\dfrac{2}{x^4}-\dfrac{1}{x^2}+5\sqrt{x^3}$;

б) $y=\sqrt[3]{4x^2-3x+1}+\dfrac{2}{(x-5)^4}$;

в) $y=\sin^3\dfrac{x}{4}\cos 2x^5$;

г) $y=arctg^2 3x\cdot\ln(x+1)$;

д) $y=tg^4 5x\cdot\arccos 3x^2$;

е) $y=\sqrt{\sin x}\cdot 5^{\sqrt{\sin x}}$;

є) $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{e^{\arcsin^2 x}}$;

ж) $y=\dfrac{\log_4(3x+2)}{tg5x^3}$;

з) $y=\dfrac{x^3\left(x^2+1\right)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$;

і) $y=\left(cth\sqrt{3x}\right)^{\arcsin x}$;

к) $y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}$;

л) $y=(\lg x)^{4x}$;

м) $xy=\arcsin(x+y)$;

н) $x\ln y=\cos xy^2$;

о) $\begin{cases}x=e^{2t}\sin 3t\\ y=e^{2t}\cos 3t\end{cases}$;

п) $\begin{cases}x=\dfrac{1-\sqrt{t}}{\cos t}\\ y=t\ln t\end{cases}$.

Розв’язання:

а) $y=3x^5-\dfrac{2}{x^4}-\dfrac{1}{x^2}+5\sqrt{x^3}$;

$$y'=15x^4-2(-4)x^{-5}-(-2)x^{-3}+5\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=15x^4+\frac{8}{x^5}+\frac{2}{x^3}+\frac{15}{2}\sqrt{x};$$

б) $y=\sqrt[3]{4x^2-3x+1}+\dfrac{2}{(x-5)^4}$;

$$y'=\frac{1}{3}\left(4x^2-3x+1\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(8x-3)+2\cdot(-4)(x-5)^{-5}$$

$$=\frac{8x-3}{3\sqrt[3]{\left(4x^2-3x+1\right)^2}}-\frac{8}{(x-5)^5};$$

в) $y=\sin^3\dfrac{x}{4}\cos 2x^5$;

$$y'=3\sin^2\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{4}\cos 2x^5+\sin^3\frac{x}{4}\cdot\left(-\sin 2x^5\right)\cdot 10x^4=$$

$$=\frac{3}{4}\sin^2\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos 2x^5-10x^4\sin^3\frac{x}{4}\sin 2x^5;$$

г) $y=arctg^2 3x\cdot\ln(x+1)$;

$$y' = 2arctg3x \cdot \frac{1}{1+9x^2} \cdot 3\ln(x+1) + arctg^2 3x \cdot \frac{1}{x+1} =$$

$$= \frac{6\ln(x+1)arctg3x}{1+9x^2} + \frac{arctg^2 3x}{x+1};$$

д) $y = tg^4 5x \cdot \arccos 3x^2$;

$$y' = 4tg^3 5x \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5\arccos 3x^2 + tg^4 5x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\right) \cdot 6x =$$

$$= \frac{20tg^3 5x \arccos 3x^2}{\cos^2 5x} - \frac{6xtg^4 5x}{\sqrt{1-9x^4}};$$

е) $y = \sqrt{\sin x} \cdot 5^{\sqrt{\sin x}}$;

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x \cdot 5^{\sqrt{\sin x}} + \sqrt{\sin x} \cdot 5^{\sqrt{\sin x}} \ln 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x =$$

$$= \frac{5^{\sqrt{\sin x}} \cos x}{2\sqrt{\sin x}} \left(1 + \ln 5\sqrt{\sin x}\right);$$

є) $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{e^{\arcsin^2 x}}$;

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot 2e^{\arcsin^2 x} - \sqrt{2x-1} \cdot e^{\arcsin^2 x} \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{e^{2\arcsin^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x-1}e^{\arcsin^2 x}} - \frac{2\sqrt{2x-1}\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin^2 x}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - 2(2x-1)\arcsin x}{\sqrt{(2x-1)\left(1-x^2\right)}e^{\arcsin^2 x}};$$

ж) $y = \dfrac{\log_4(3x+2)}{tg5x^3}$;

$$y' = \frac{\frac{3}{(3x+2)\ln 4} tg5x^3 - \log_4(3x+2) \cdot \frac{1}{\cos^2 5x^3} \cdot 15x^2}{tg^2 5x^3} =$$

$$= \frac{3}{(3x+2)\ln 4 tg5x^3} - \frac{15x^2 \log_4(3x+2)}{\sin^2 5x^3};$$

з) $y = \dfrac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$; застосуємо логарифмічне диференціювання, маємо:

$\ln y = 3\ln x + \ln(x^2+1) + x - \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln|3x+5|$;

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)};$$

$$y' = \frac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}} \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)} \right);$$

і) $y = (ctg\sqrt{3x})^{\arcsin x}$; прологарифмуємо цю функцію:

$\ln y = \arcsin \cdot \ln(cth\sqrt{3x})$,тоді

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln(cth\sqrt{3x}) + \arcsin \cdot \frac{1}{cth\sqrt{3x}} \cdot \left(-\frac{1}{sh^2\sqrt{3x}} \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3 \;;$$

$$y' = (cth\sqrt{3x})^{\arcsin x} \cdot \left(\frac{\ln(cth\sqrt{3x})}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3\arcsin x}{2\sqrt{3x} \cdot cth\sqrt{3x} \cdot sh^2\sqrt{3x}} \right);$$

к) $y = (\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}}$; маємо : $\ln y = \sqrt{x} \cdot \ln\sqrt[3]{x}$,тоді

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \;;$$

$$y' = (\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}} \right) = \frac{(\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}}(\ln x + 2)}{6\sqrt{x}};$$

л) $y = (\lg x)^{4x}$; маємо $\ln y = 4x \cdot \ln(\lg x)$,тоді

$$\frac{1}{y}y' = 4\ln\cdot(\lg x) + 4x \cdot \frac{1}{\lg x} \cdot \frac{1}{x\ln 10},$$

$$y' = (\lg x)^{4x} \cdot \left(\ln\cdot(\lg^4 x) + \frac{4}{\lg x \ln 10} \right);$$

м) ця функція задана неявно : $xy = \arcsin(x+y)$, диференціюючи, маємо рівність: $y + xy' = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} \cdot (1+y')$; тоді

$$xy' - \frac{y'}{\sqrt{1-(x+y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} - y \;;$$

$$y' \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} - y \quad i \quad y' = \frac{1 - y\sqrt{1-(x+y)^2}}{x\sqrt{1-(x+y)^2} - 1}$$

н) $x\cdot\ln y=\cos(xy^2)$; маємо рівність $\ln y+\frac{x}{y}\cdot y'=-\sin(xy^2)\cdot(y^2+2xyy')$;

$$\frac{x}{y}y'+2xyy'\sin(xy^2)=-(\ln y+y^2\sin(xy^2))$$

$\sin(xy^2)=-(\ln y+y^2\sin(xy^2))$;

$y'(\frac{x}{y}+2xy\sin(xy^2))=-(\ln y+y^2\sin(xy^2))$;

$$y'=-y\cdot\frac{\ln y+y^2\sin(xy^2)}{x+2xy^2\sin(xy^2)};$$

о) $\begin{cases} x=e^{2t}\sin 3t; \\ y=e^{2t}\cos 3t; \end{cases}$ – функція задана параметрично. Використаємо формули:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}; \qquad y''_{xx}=\frac{(y_x')'_t}{x'_t}.$$

Оскільки $x'_t=2e^{2t}\sin 3t+e^{2t}\cos 3t\ 3=e^{2t}(2\sin 3t+3\cos 3t)$,

$y'_t=2e^{2t}\cos 3t-3e^{2t}\sin 3t=e^{2t}(2\cos 3t-3\sin 3t)$,

то $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{e^{2t}(2\cos 3t-3\sin 3t)}{e^{2t}(2\sin 3t+3\cos 3t)}=\frac{2\cos 3t-3\sin 3t}{2\sin 3t+3\cos 3t}$;

$$(y_x')'_t=\frac{(-6\sin 3t-9\cos 3t)(2\sin 3t+3\cos 3t)-(2\cos 3t-3\sin 3t)(6\cos 3t-9\sin 3t)}{(2\sin 3t+3\cos 3t)^2}=$$

$$=\frac{-39}{(2\sin 3t+3\cos 3t)^2};$$

$$y''_{xx}=\frac{-39}{(2\sin 3t+3\cos 3t)^3e^{2t}}.$$

п) $\begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{t}}{\cos t}; \\ y=t\ln t; \end{cases}$

Маємо: $x'_t = \dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cos t + (1-\sqrt{t})\sin t}{\cos^2 t} = \dfrac{(2\sqrt{t}-2t)\cdot\sin t - \cos t}{2\sqrt{t}\cos^2 t}$;

$y'_t = \ln t + t\,\dfrac{1}{t} = \ln t + 1$;

$y'_x = \dfrac{2(\ln t+1)\sqrt{t}\cos^2 t}{(2\sqrt{2-2t})\sin t - \cos t}$

Завдання 2.3. Провести повне дослідження функції за допомогою диференціального числення та побудувати її графік:

а) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$; б) $y=x+\ln(x^2-1)$.

Розв'язання:

а) $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

1. Область визначення : $x \neq \pm1$, D: $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$;

2. Оскільки $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{1-(-x)^2}=-\dfrac{x^3}{1-x^2}=-f(x)$, то функція непарна, тому досліджуватимемо її лише для $x \geq 0$. Графік функції симетричний відносно початку координат.

3. Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік перетинає осі координат в точці (0;0); знакосталість функції :

$y>0$, якщо $x\in (-\infty:-1)\cup (0;1)$;

$y<0$, якщо $x\in (-1;0)\cup (1;\infty)$.

4. *Асимптоти*.

Функція в точці $x = 1$ має розрив 2–го роду:

$$\lim_{x\to1+0} f(x) = \lim_{\alpha\to0}\frac{(1+\alpha)^3}{1-1-2\alpha-\alpha^2} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{\alpha\to0}\frac{(1-\alpha)^3}{2\alpha-\alpha^2} = +\infty.$$

Отже, $x=1$ – вертикальна асимптота.

Похила асимптота: $y = kx + b$ функції $y = f(x)$. За означенням асимптоти матимемо: $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

Оскільки $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{(1-x^2)x} = -1$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{1-x^2} - (-1)x \right) = 0$,

то $y=-x$ − похила асимптота графіка.

5. Дослідимо на монотонність та екстремуми. Знайдемо критичні точки. Необхідна умова: $f'(x) = 0$ або $f'(x) = \infty$, за умови, що отримані точки належать D(x).

Похідна $y' = \dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ дорівнює 0, якщо $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$ і не існує в точках $x = \pm 1$. Отже, критичні точки функції : $\left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$.

На інтервалі (0;∞) маємо:

$f(x)\uparrow$, якщо $x \in (0;1)$ і $(1;\sqrt{3})$,так як $f'(x)$>0;

$f(x)\downarrow$, якщо $x \in (\sqrt{3};+\infty)$, так як $f'(x)$<0;

в точці $x = \sqrt{3}$ − функція має локальний максимум: $y_{\max} = f(\sqrt{3}) \approx -2{,}6$.

6. Знайдемо характер опуклості та точки перегину графіка функції. Необхідна умова $f''(x) = 0$ або $f''(x) = \infty$, за умови, що отримані точки належать D(x).

Знаходимо другу похідну:

$y'' = \dfrac{2x(x^2+3)}{(1-x)^3}$, $f''(x) = 0$ при $x = 0$ і не існує при $x = \pm 1$,

отже, єдина критична точка x=0; маємо:

при $x \in (-1;0)$ $f''(x) < 0$ – крива опукла,

при $x \in (0;1)$ $f''(x) > 0$ – крива угнута,

при $x \in (1;\infty)$ $f''(x) < 0$ – крива опукла;

точка $(0;0)$ – точка перегину;

7. Враховуючи проведене дослідження і непарність функції, будуємо графік (рис. 3).

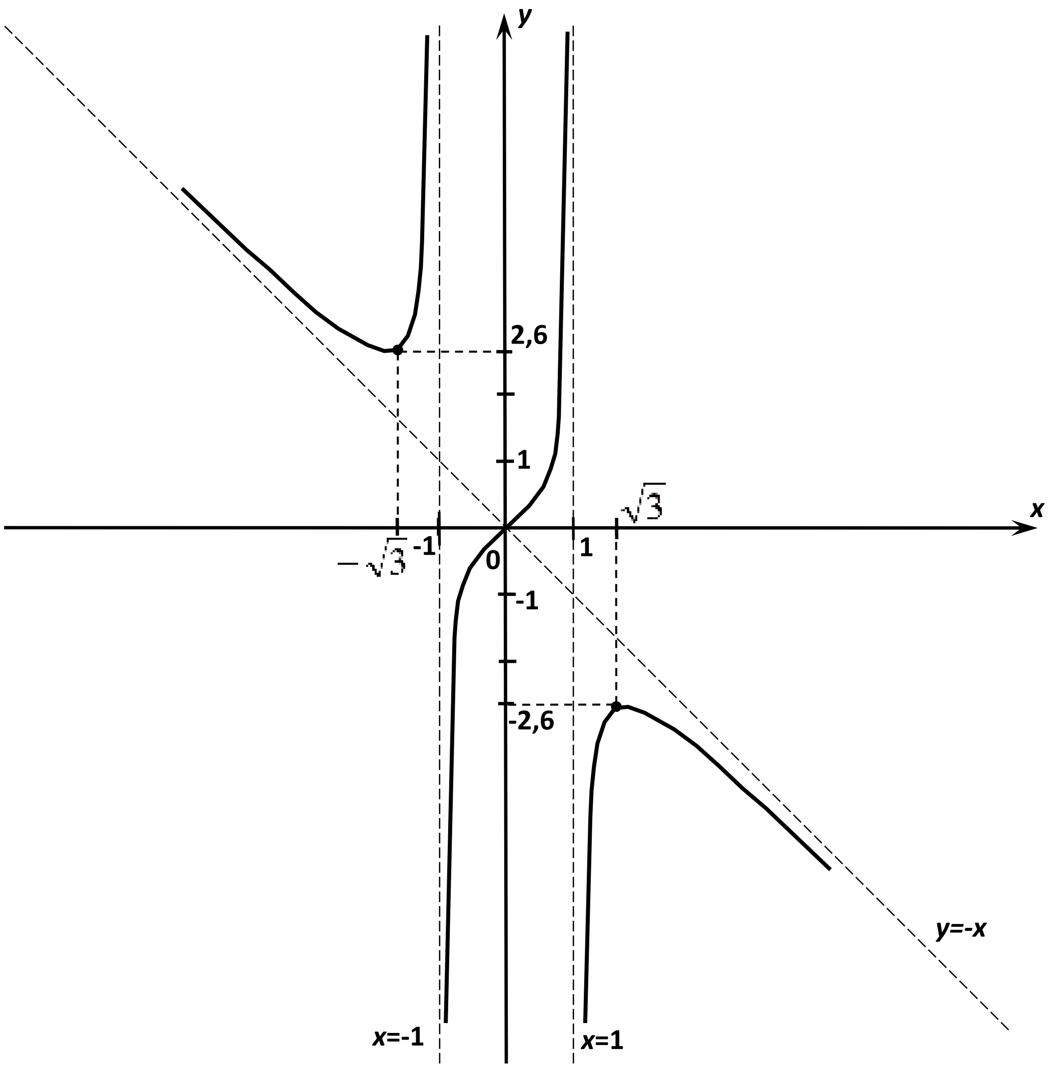

Рис. 3

б) $y = x + \ln\left(x^2 - 1\right)$

1. Область визначення функції: $x^2 - 1 > 0, \quad |x| > 1,$ отже, $D: (-\infty;-1) \cup (1;+\infty);$

2. Оскільки $f(-x) = -x + \ln\left(x^2 - 1\right), \; f(-x) \neq -f(x), \; f(-x) \neq f(x),$ то функція загального вигляду.

3. Оскільки $x \neq 0$, то перетину з OY немає; якщо y=0, то маємо:

$$x + \ln\left(x^2 - 1\right) = 0, \quad \ln\left(x^2 - 1\right) = -x, \quad x^2 - 1 = \frac{1}{e^x}, \quad x \approx 1{,}2,$$

отже, графік перетинає OX в точці (1,2; 0); проміжки знакосталості функції:

при $x \in (-\infty;-1)$ $y < 0;$ при $x \in (1; 1{,}2)$ $y < 0;$ при $x \in (1{,}2; +\infty)$ $y > 0.$

4. *Вертикальна асимптота*: $x = a$ маємо: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$,

або хоча б при $x \to a - 0$ чи $x \to a + 0$.

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha+\ln(1+2\alpha+\alpha^2-1)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{\alpha\to 0}(-1-\alpha+\ln(1+2\alpha+\alpha^2-1)=-\infty,$$

отже, $x=-1$ *і* $x=1$ – вертикальн і асимптоти.

Похила асимптота: $y=kx+b$ функції $y=f(x)$. За означенням асимптоти матимемо: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+\ln\left(x^2-1\right)\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}\right)=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1}=$$

$$=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=1+0=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(x+\ln(x^2-1)-x)=+\infty,$$

Горизонтальна асимптота: $y=b$, де $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(x+\ln(x^2-1))=\infty.$$

Отже, похилі і горизонтальні асимптоти відсутні.

5. Дослідимо на монотонність та екстремуми. Знайдемо критичні точки, необхідна умова: $f'(x)=0$ або $f'(x)=\infty$, за умови, що отримані точки належать D(x).

Знайдемо похідну: $f'(x)=1+\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-1}$, похідна дорівнює нулю, якщо $x=-1+\sqrt{2}$ і якщо $x=-1-\sqrt{2}$, похідна існує, якщо $x=\pm 1$, отже, єдина критична точка $x=-1-\sqrt{2}$,

$f(x)\uparrow$ при $x\in\left(-\infty;-1-\sqrt{2}\right)\cup(1;+\infty)$, так як $f'(x)>0$,

$f(x)\downarrow$ при $x\in\left(-1-\sqrt{2;-1}\right)$, так як $f'(x)<0$,

в точці $x=-1-\sqrt{2}$ функція має локальний максимум; $y_{\max}\approx -0{,}9$

6. Знайдемо опуклість, угнутість та точки перегину графіка функції. Необхідна умова $f''(x)=0$ або $f''(x)=\infty$, за умови, що отримані точки належать D(x).

Знайдемо другу похідну: $f''(x) = -\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$, якщо $x \in D(x)$ $f''(x) < 0$, отже, графік функції опуклий на всій області визначення;

7. Враховуючи проведене дослідження, будуємо графік функції (рис. 4).

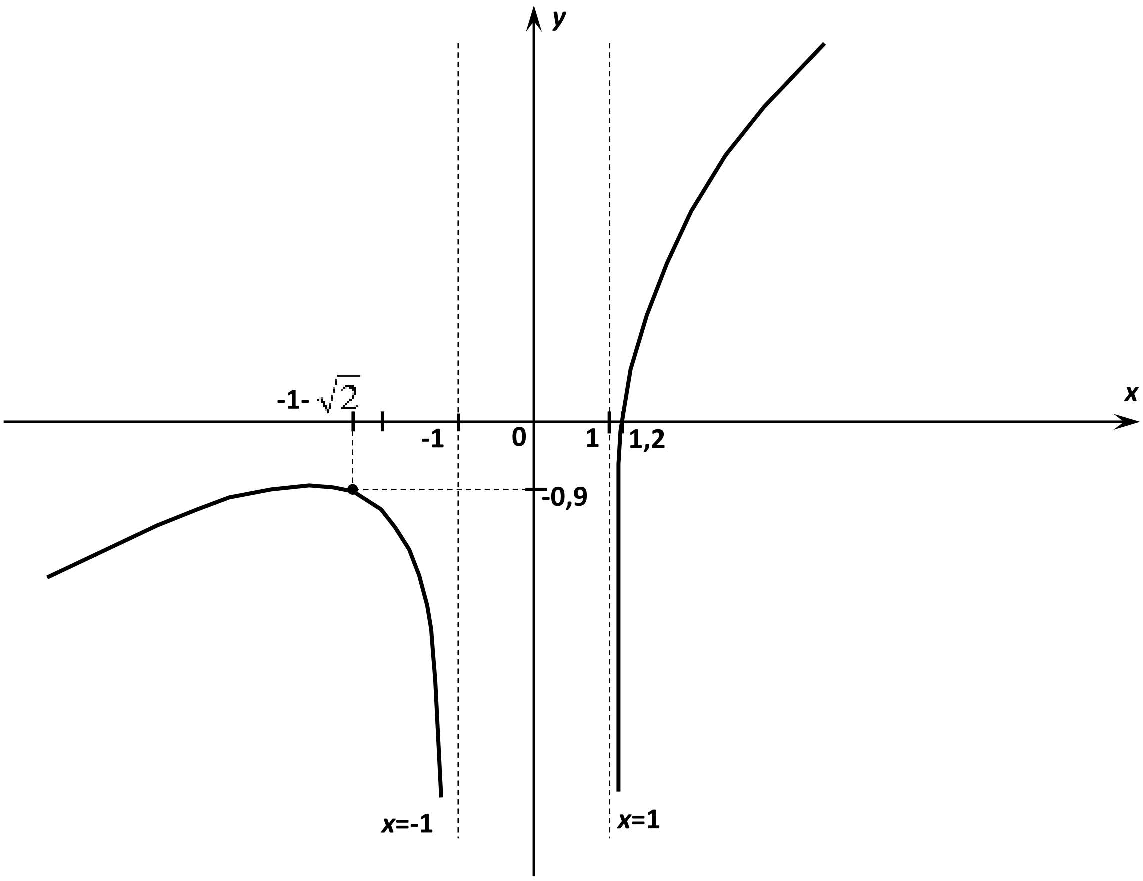

Рис. 4

Завдання 2.4 Знайти повні диференціали 1–го та 2–го порядків функції $z = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 5y^2$.

Розв'язання:

Функція z є функцією двох змінних x і y.

Її частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 - 4x; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 10y.$$

Тоді повний диференціал цієї функції:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (x^2 - 4x)dx + 10ydy.$$

Частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2x - 4; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 10.$$

Тому повний диференціал 2-го порядку:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = (2x-4)dx^2 + 10dy^2.$$

Завдання 2.5. Знайти градієнт функції $z=f(x, y)$ в точці М та похідну за напрямком вектора $\vec{s}$ в цій точці, якщо $z=x^2-xy+2y^2$, M(–1; 2), $\vec{s}=\{3;4\}$.

Розв'язання:

Знайдемо частинні похідні в точці М:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 2\cdot(-1) - 2 = -4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -(-1) + 4\cdot 2 = 9.$$

Тоді $grad\ z(M) = -4\vec{i} + 9\vec{j} = \{-4;9\}$.

Відомо, що $\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$,

де $\cos\alpha$ і $\cos\beta$ – напрямні косинуси вектора $\vec{s}$. Маємо

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}; \quad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4}{5}.$$

Отже, $\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}\right|_M = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M \cos\beta = -4\cdot\frac{3}{5} + 9\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$.

Завдання 2.6. Дослідити на екстремум функцію:
$z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

Розв'язання:

Знайдемо частинні похідні: $\frac{\partial z}{\partial x} = 4(x^3 - x + y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4(y^3 + x - y).$

Критичні точки функції визначимо із системи: $\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}.$

Отже, $x^3 + y^3 = 0$, звідки $y = -x$.

Маємо $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$, тоді $y_1 = 0$, $y_2 = -\sqrt{2}$, $y_3 = \sqrt{2}$.

Отже, функція має три критичні точки : $M_1(0; 0)$, $M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $M_3(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Оскільки $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4;$ $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4;$ $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4$, маємо $\Delta = AC - B^2$, $\Delta = 16(9x^2\ y^2 - 3x^2 - 3y^2)$, за достатньою умовою екстремуму функції маємо:

$\Delta(M_1) = 0$, $\Delta(M_2) = \Delta(M_3) = 384 > 0$, $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_3} = 20 > 0$, отже, точки M_2 і M_3 – точки мінімуму. В цих точках $z_{\min} = -8$.

Переконаємося, що в точці $M_1(0; 0)$ екстремум відсутній. Дійсно, якщо $y = 0$, то $z = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$, в околі точки M_1. Якщо $y = x$, то $z = 2x^4 > 0$. Отже, в околі точки M_1 значення z можуть бути як додатні, так і від'ємні, а це означає, що точка M_1 не є екстремальною.

Інших екстремумів функція не має, оскільки точки, в яких похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y}$ не існують, відсутні.

ВАРІАНТ №1
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 2\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & -6 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & \mu\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\ 4\\ -3\end{pmatrix}.$

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}1 & -4 & 6 & 8\\ 2 & 5 & 3 & -9\\ -1 & 0 & 5 & 1\\ -3 & -6 & 4 & 2\end{vmatrix}.$

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}-2x_1-x_2+x_3=-7\\ x_1-x_2+x_3=8\\ 4x_1-5x_2-3x_3=19\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=7\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 3x_1+2x_2+x_3=6\end{cases}$.

Завдання 1.4. $X\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}.$

Завдання 1.5. $\begin{cases}x_1+3x_2-4x_3+x_4=0;\\ -3x_1+2x_2+3x_3-4x_4=0;\\ 2x_1-5x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a**=2**i**–3**j**+**k**, **b**=**j**+4**k**, **c**=5**i**+2**j**–3**k**.
а) **a,** 3**b, c**; б) 3**a,** 2**c**; в) **b,** –4**c**; г) **a, c**; д) **a,** 2**b,** 3**c**.

Завдання 1.7. **a** = (5, 4, 1), **b**= (–3, 5, 2), **c** = (2, –1, 3), **d** = (7, 23, 4).

Завдання 1.8. A_1(2;5;–3), A_2(–7;8;0), A_3(4;–2;5), A_4(6;3;–1).

Завдання 1.9. A(–2, 4), B(3, 1), C(10, 7).

Завдання 1.10. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $3x–2y–7=0$ і $x+3y–6=0$ і відсікає на осі абсцис відрізок, рівний 3.

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки M(2; 3; –5) та K(–1; 1; –6) паралельно вектору **a**=(4; 4; 3).

Завдання 1.12. $\rho = 2\sin 4\varphi$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=2x^5-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x}+3\sqrt{x}$	$y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$	$y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$
$y=arcctg^2 5x\cdot\ln(x-4)$	$y=tg^4 3x\cdot\arcsin 2x^3$	$y=\dfrac{\log_5(3x-7)}{ctg\,7x^3}$
$y=\dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$	$y=(x-3)^4\arccos 5x^3$	$y=\dfrac{arcctg^4 5x}{sh\sqrt{x}}$
$y=\dfrac{9arctg(x+7)}{(x-1)^2}$	$y=\sqrt{\dfrac{2x+1}{2x-1}}\log_2(x-3x^2)$	$y=e^{-x}\cdot\sin 3x$
$y=(\arccos(x+2))^{tg3x}$	$y=\dfrac{\sqrt{x+7}\,(x-3)^4}{(x+2)^5}$	$y=(cth3x)^{\arcsin x}$
б)		
$y=tgx-\dfrac{1}{3}ctg^7 3x$	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$	$\begin{cases}x=\sin^3 2t\\ y=t^2\cdot\ln^2 t\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$; б) $y=xe^{-x^2}$.

Завдання 2.4. $z=x^2+xy^2-17$.

Завдання 2.5. $z=x^2+2xy+y^2$, M(1; 2), $\vec{s}\{3;4\}$.

Завдання 2.6. $z=x^2+y^2+xy-2x-y$.

ВАРІАНТ №2
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -3 \\ -7 & -4 & \lambda \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -8 \\ 3 & -9 & \mu \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 5 & -8 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -9 & 6 & -5 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -9 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 3**i** + 4**j** + **k**, **b** = **i**–2**j**+7**k**, **c** = 3**i** – 6**j** + 21**k**.
а) 5**a**, 2**b**, **c**; б) 4**b**, 2**c**; в) **a**, **c**; г) **b**, **c**; д) 2**a**, –3**b**, **c**.

Завдання 1.7. **a** = (2, –1, 4), **b** = (– 3, 0, –2), **c** =(4, 5, –3),**d** = (0, 11, –14).

Завдання 1.8. A_1(1;–5;4), A_2(–3;6;–1), A_3(3;–2;3), A_4(0;9;–11).

Завдання 1.9. A(–3, –2), B(14, 4), C(6, 8).

Завдання 1.10. Знайти проекцію точки A(– 8, 12) на пряму, що проходить через точки B(2, –3) і C(– 5, 1).

Завдання 1.11. Знайти величини відрізків, що відсікаються на осях координат площиною, яка проходить через точку M(2, –3, 3) паралельно площині $3x+y-3z=0$.

Завдання 1.12. $\rho = 2(1 - \sin 2\varphi)$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$; д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$; е) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{5x}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=\frac{3}{x}+\sqrt[5]{x^2}-4x^3+\frac{2}{x^4}$	$y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\frac{3}{2x^3-3x+1}$	$y=tg^4x\cdot\arcsin 4x^5$
$y=arctg^3 2x\cdot\ln(x+5)$	$y=(x-2)^4\arcsin 5x^4$	$y=\frac{(x-4)^2}{e^{arcctgx}}$
$y=(3x-4)^3\arccos 3x^{2.}$	$y=\frac{\ln(5x-3)}{4tg3x^4}$	$y=\frac{arctg^3 2x}{ch(1/x)}$
$y=\frac{8arctg(2x+3)}{(x+1)^3}$	$y=\sqrt[3]{\frac{2x-5}{2x+3}}\lg(4x+7)$	$y=(\cos(x+2))^{\ln x}$
$y=(\arcsin 2x)^{ctg(x+1)}$	$y=\frac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$	$y=e^{ctg3x}$
б)		
$y=\frac{1}{\ln x^2}$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases}x=3t^5+\cos t\\ y=tg2t\cdot\sqrt{1-t}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\frac{4x}{4+x^2}$; б) $y=\ln\frac{x}{x-1}$.

Завдання 2.4. $z=x^2+xy-y^2-9$.

Завдання 2.5. $z=ln(5x^2+4y^2)$, M(1; 1), $\vec{s}\{2;-1\}$.

Завдання 2.6. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.

ВАРІАНТ №3
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 3 & -8 & -1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & \mu & -2 \\ -5 & -3 & 9 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} -1 & 7 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 0 & 7 \\ -9 & 3 & 8 & 9 \\ 10 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -19 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 10 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0; \\ -x_1 + 8x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 2**i** – 4**j** – 2**k**, **b** = 7**i** + 3**j**, **c** = 3**i** + 5**j** –7**k**.
а) **a**, 2**b**, 3**c**; б) 3**a**, –7**b**; в) **c**, –2**a**; г) **a, c**; д) 3**a**, 2 **b**, 3**c**.

Завдання 1.7. **a**=(–1, 1,2), **b**=(2, –3, –5), **c**=(–6, 3, –1), **d**=(28, –19, –7).

Завдання 1.8. A_1(1;–5;–6), A_2(2;4;–7), A_3(3;–2;–5), A_4(–6;9;–3).

Завдання 1.9. A(1, 7), B(–3, –1), C(11, –3).

Завдання 1.10. Дано дві вершини трикутника ABC: A(– 4, 4), B(4, –12) і точка M(4, 2) перетину його висот. Знайти третю вершину C.

Завдання 1.11. Визначити при якому значенні параметра C площини $3x–5y+Cz–3=0$ та $x–3y+2z+5=0$ будуть перпендикулярними.

Завдання 1.12. $\rho = 2 \sin 2\varphi$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=3x^4+\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}$	$y=\sqrt{(x-4)^5}+\dfrac{5}{(2x^2+4x-1)^2}$	$y=\cos^5 3x\cdot tg(4x+1)^3$
$y=\arccos^4 x\cdot\ln(x^2+x-1)$	$y=2^{-x^3}\,arctg7x^4$	$y=sh^3 4x\cdot\arccos\sqrt{x}$
$y=\dfrac{e^{-x^3}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$	$y=\dfrac{\ln(7x+2)}{5\cos 42x}$	$y=\dfrac{\arccos 3x^4}{th^2 x}$
$y=\dfrac{7\arccos(4x-1)}{(x+2)^4}$	$y=\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{x-3}}\ln(5x^2-2x+1)$	$y\sin x=\cos(x-y)$
$y=(arctg(x+7))^{\cos 2x}$	$y=\dfrac{(x-2)^3\sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^2}$	$y=x^5\ln x$
б)		
$y=e^{-x}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$	$y=(\sin 3x)^{\arccos x}$	$\begin{cases}x=\cos^3 5t\\ y=ctg^2 t\cdot t^2\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$; б) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

Завдання 2.4. $z=x^3+2xy-2$.

Завдання 2.5. $z=2xy-y^3+x$, M(–1; 2), $\vec{s}\{-3;4\}$.

Завдання 2.6. $z = e^{\frac{y}{2}}(x^2 + y)$.

ВАРІАНТ №4
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}5 & 9 & -6\\ -1 & 4 & 7\\ 3 & -9 & \lambda\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 6 & -2\\ 0 & \mu & 1\\ 5 & 3 & -8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}0 & 6 & -7 & 3\\ -1 & 10 & 8 & 5\\ -4 & -2 & 4 & 7\\ 9 & -5 & 3 & 8\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=-1\\ 3x_1+2x_2+x_3=6\\ 3x_1-3x_2-4x_3=11\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=-4\\ x_1+3x_2-x_3=11\\ x_1-2x_2+2x_3=-7\end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}2x_1-3x_2+4x_3+x_4=0;\\ x_1+x_2-11x_3+3x_4=0;\\ 3x_1-2x_2-7x_3+4x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = –7**i** + 2**k**, **b** = 2**i** – 6**j** + 4**k**, **c** = **i** – 3**j** + 2**k**.
а) **a**, –2**b**, –7**c**; б) 4**b**, 3**c**; в) 2**a**, –7**c**; г) **b, c**; д) 2**a**, 4**b**, 3**c**.

Завдання 1.7. **a** = (1, 3, 4), **b** = (–2, 5, 0), **c** = (3, –2, –4), **d** = (13, –5, –4).

Завдання 1.8. $A_1(–2;0;–4)$, $A_2(1;5;5)$, $A_3(1;–12;3)$, $A_4(2;8;–9)$.

Завдання 1.9. A(1, 0), B (–l, 4), C(9, 5).

Завдання 1.10. Знайти рівняння прямої, що відсікає на осі ординат відрізок, рівний 2, і паралельна прямій $2y-x=3$.

Завдання 1.11. При яких значеннях параметрів A та B площина $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна до прямої $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z+1}{3}$?

Завдання 1.12. $\rho = 3\sin 6\varphi$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$; е) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$; з) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,3x}{2\sin x}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=7\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^5}-3x^3+\dfrac{4}{x}$	$y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}$	$y=\arcsin^3 2x\cdot ctg7x^4$
$y=\sqrt{\arccos 2x}\cdot 3^{-x}$	$y=(x+6)^5 arcctg3x^5$	$y=th^2\sqrt[5]{x}\cdot arcctg3x^2$
$y=\dfrac{e^{-ctg5x}}{(3x^2-4x+2)}$	$y=\dfrac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)}$	$y=\dfrac{\sqrt{\arccos 3x}}{sh^2x}$
$y=\dfrac{6\arcsin(x+5)}{(x-2)^5}$	$y=\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}\log_3(x^2+x+4)$	$y=(th5x)^{\arcsin(x+1)}$
$y=(arcctg(x-3))^{\sin 4x}$	$y=\dfrac{(x+3)\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7}$	$y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$
б)		
$y=\ln\sin 3x$	$tg(\dfrac{y}{x})=3x$	$\begin{cases}x=tg^2 4t\\ y=\ln^3 t\cdot t^5\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{x^2+1}{2}$; б) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Завдання 2.4. $z=3x^2-xy+x+y+1$.

Завдання 2.5. $z=\arcsin\dfrac{x^2}{y}$, M(1; 2), $\vec{s}\{5;-12\}$.

Завдання 2.6. $z=x^3+y^3-3xy$.

ВАРІАНТ №5
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix} 8 & -6 & 4 \\ -1 & \lambda & 3 \\ 2 & 5 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 9 \\ 4 & -1 & 0 \\ \mu & -4 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 & 3 \\ -2 & 6 & -1 & 8 \\ 0 & 6 & -5 & -4 \\ 8 & 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} -4x_1+5x_2+4x_3=-20 \\ -2x_1+x_2+5x_3=-22 \\ x_1-2x_2-4x_3=17 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=12 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=6 \\ 2x_1-x_2-x_3=-9 \end{cases}$.

Завдання 1.4. $X\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+4x_4=0; \\ -3x_1+2x_2+4x_3+2x_4=0; \\ 2x_1+x_2-5x_3-6x_4=0. \end{cases}$

Завдання 1.6. **a**=–4**i** + 2**j**–**k**, **b** = 3**i** + 5**j** – 2**k**, **c** = **j** + 5**k**.
а) **a**, 6**b**, 3**c**; б) 2**b**, **a**; в) **a**, –4**c**; г) **a, b**; д) **a**, 6**b**, 3**c**.

Завдання 1.7. **a**=(1,–1,1), **b**=(–5,–3,1), **c**=(2 –1,0), **d**=(–15,–10,5).

Завдання 1.8. A_1(3;–6;–11), A_2(5;8;1), A_3(– 4;1;8), A_4(–6;5;0).

Завдання 1.9. A (1, –2), B(7, 1), C(3, 7).

Завдання 1.10. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A(2, –3)
та точку перетину прямих *2x–y=5* і *x+y=1*.

Завдання 1.11. Знайти проекцію точки P(3;1;–1) на площину
x+2y+3z–1=0.

Завдання 1.12. $\rho=\dfrac{2}{1+\cos\varphi}$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4+1}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{3x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=7x+\dfrac{5}{x^2}-\sqrt[7]{x^4}+\dfrac{6}{x}$	$y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\dfrac{3}{(x-5)^4}$	$y=ctg3x\cdot\arccos 3x^2$
$y=tg^4 3x\cdot arctg7x^2$	$y=3^{\cos x}\ln\left(x^2-3x+7\right)$	$y=ch\dfrac{1}{x}\cdot arctg(7x+2)$
$y=\dfrac{\sqrt{7x^3-5x+2}}{e^{\cos x}}$	$y=\dfrac{\cos^2 3x}{\lg(3x-4)}$	$y=\dfrac{\arcsin 5x^3}{ch\sqrt{x}}$
$y=\dfrac{3arcctg(2x-5)}{(x+1)^4}$	$y=\sqrt[6]{\dfrac{7x-4}{7x+4}}\log_5(3x^2+2x)$	$y=(sh(x+2))^{\arcsin 2x}$
$y=(ctg(3x-2))^{\arcsin 3x}$	$y=\dfrac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$	$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[6]{x^7+1}$
б)		
$y=\dfrac{\sin^3 x}{\sin x^2}$	$y=3x\cdot arctg\dfrac{y}{x}$	$\begin{cases} x=ctg^3 t \\ y=\arcsin 5t\cdot\sqrt[3]{t^2+1}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; б) $y=xe^{-x}$.

Завдання 2.4. $z=2x^2+xy^2-3$.

Завдання 2.5. $z=arctg(x^2y)$, M(–2; 1), $\vec{s}\{6;8\}$.

Завдання 2.6. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.

ВАРІАНТ №6
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-7 & 4 & -3\\ 6 & 5 & 2\\ \lambda & 1 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\mu & 7 & -4\\ 0 & 5 & -2\\ 6 & 3 & 8\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-4\\ 8\\ 2\end{pmatrix}.$

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}0 & -7 & 4 & -8\\ 3 & 9 & 2 & -5\\ 6 & 2 & -1 & 1\\ 7 & 9 & 1 & 5\end{vmatrix}.$

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}4x_1+x_2-5x_3=-27\\ -3x_1-x_2+2x_3=17\\ x_1+3x_2-4x_3=-15\end{cases}$; б) $\begin{cases}8x_1+2x_2-6x_3=-4\\ x_1+x_2-x_3=2\\ 4x_1+x_2-3x_3=-5\end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$

Завдання 1.5. $\begin{cases}4x_1-4x_2+2x_3+x_4=0;\\ -2x_1+5x_2-8x_3-6x_4=0;\\ 2x_1+x_2-6x_3-5x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 3**i** – 2**j** + **k**, **b** = 2**j** –3**k**, **c**= –3**i** + 2**j** –**k**.
а) **a**, – 3**b**, 2**c**; б) 5**a**, 3**c**; в) –2**a**, 4b; г) **a, c**; д) 5**a**, 4**b**, 3**c**.

Завдання 1.7. **a** = (3, 1, 2), **b** = (–7, –2, –4), **c** = (–4, 0, 3), **d** = (16, 6, 15).

Завдання 1.8. A_1(5;5;–7), A_2(–3;–8;1), A_3(4; 2; 2), A_4(1;–3;–1).

Завдання 1.9. A(–2, –3), B(1, 6), C(6, 1).

Завдання 1.10. Довести, що чотирикутник ABCD – трапеція, якщо A(3, 6), B(5, 2), C(–1, –3), D(–5,5).

Завдання 1.11. Знайти рівняння площини, що проходить через вісь Ox та точку A(2; –1; 3).

Завдання 1.12. $\rho = 3(1+\sin\varphi)$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{5}{x}$	$y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\dfrac{4}{(x+2)^3}$	$y=\arccos^2 4x\cdot 1n(x-3)$
$y=\dfrac{e^{tg3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$	$y=ch^3 4x\cdot\arccos 4x^2$	$y=\dfrac{cth^3(x+1)}{\arccos 2x}$
$y=\dfrac{2arctg(3x+2)}{(x-3)^2}$	$y=\sqrt[7]{\dfrac{2x-3}{2x+1}}\lg(7x-10)$	$y=(\cos 5x)^{arctg\sqrt{x}}$
$y=(tg(4x-3))^{\arccos 2x}$	$y=\dfrac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$	$y=arctge^{2x}$
$y=\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^2$	$y=2x\cdot arctg\dfrac{y}{x}$	$y=\dfrac{tg^3 2x}{\lg(5x+1)}$
б)		
$y=5^{-x^2}\arcsin 3x^3$	$y=\log_2(x-7)\cdot arctg\sqrt{x}$	$\begin{cases}x=\arccos^3 2t\\ y=\dfrac{1}{t^6}\cdot\sin^2 t\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; б) $y=\ln(2x^2+3)$.

Завдання 2.4. $z=x^2+3xy-6(y+4)$.

Завдання 2.5. $z=ln(3x^2+4y^2)$, M(1; 3), $\vec{s}\{2;-1\}$.

Завдання 2.6. $z=5xy+\dfrac{10}{x}+\dfrac{20}{y}$.

ВАРІАНТ №7
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-2 & -7 & 8\\ 1 & 4 & \lambda\\ 11 & 6 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & -\mu & 3\\ 0 & 3 & 1\\ -5 & 9 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6\\ -5\\ 5\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}7 & -6 & 4 & -1\\ 5 & 4 & 3 & -2\\ 8 & -9 & 1 & 5\\ 0 & 6 & -3 & -5\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}3x_1+x_2+5x_3=-6\\ 2x_1+x_2+3x_3=-3\\ 4x_1-x_2-4x_3=15\end{cases}$; б) $\begin{cases}4x_1+x_2-3x_3=9\\ x_1+x_2-x_3=-2\\ 8x_1+3x_2-6x_3=12\end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} X=\begin{pmatrix}7 & -6\\ 4 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}x_1-x_2+6x_3+3x_4=0;\\ 2x_1-4x_2+10x_3+8x_4=0;\\ x_1+x_2+8x_3+x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 4**i** –**j** + 3**k**, **b** = 2**i** + 3**j**–5**k**, **c** = 7**i** + 2**j** + 4**k**.
а) 7**a**, –4**b**, 2**c**; б) 3**a**, 5**c**; в) 2**b**, 4**c**; г) **b**, **c**; д) 7**a**, 2**b**, 5**c**.

Завдання 1.7. **a**=(–3, 0, 1), **b**=(2, 7, –3), **c**=(–4, 3, 5), **d**=(–16, 33, 13).

Завдання 1.8. A_1(0;3;–7), A_2(10;–4;8), A_3(–9; 4;3), A_4(7;–3;2).

Завдання 1.9. A(–4, 2), B(– 6, 6), C(6, 2).

Завдання 1.10. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку A(3, 1) перпендикулярно прямій BC, якщо B(2, 5), C(1, 0).

Завдання 1.11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}$ і площини $3x-y+2z-8=0$.

Завдання 1.12. $\rho = 2(1-\cos\varphi)$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+3}{5x^2+3x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$; е) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$; з) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$; і) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,tg\,\dfrac{\pi x}{2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=3x^5-\dfrac{3}{x}-\sqrt{x^3}+\dfrac{10}{x^5}$	$y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\dfrac{5}{4x^2+3x-5}$	$y=\arccos^3 5x\cdot tgx^4$
$y=\dfrac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$	$y=\dfrac{\log_3(4x+5)}{2ctg\sqrt{x}}$	$y=\dfrac{th3x^5}{arctg^2 3x}$
$y=\dfrac{4\arccos 3x}{(x+2)^5}$	$y=\sqrt[8]{\dfrac{5x+1}{5x-1}}\ln(3x-x^2)$	$y=(\sqrt{3x+2})^{arcctg\,3x}$
$y=(\cos(2x-5))^{arctg\,5x}$	$y=\dfrac{(x-3)^2\sqrt{x+4}}{(x+2)^7}$	$y=x^3\ln x$
$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$	$y^2x=e^{\frac{y}{x}}$	$y=sh^3 3x\cdot arcctg5x^2$

б)		
$y=\arcsin^3 2x\cdot ctg7x^4$	$y=arctg^5 x\cdot\log_2(x-3)$	$\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{1+t}{2+t^3}}\\ y=arctg\,t\cdot\dfrac{1}{\sqrt{t}}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; б) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

Завдання 2.4. $z=2xy-y^2+2$.

Завдання 2.5. $z=x^3-2xy+y^2$, M(–2; –1), $\vec{s}\{-6;8\}$.

Завдання 2.6. $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

ВАРІАНТ №8
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix} \lambda & 9 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ \mu & 4 & -3 \\ 8 & 2 & 9 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -6 \\ -9 & 7 & -5 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 10 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 7x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 4**i** + 2**j**–3**k**, **b** = 2**i** + **k**, **c** =–12**i** – 6**j**+9**k**.
а) 2**a**, 3**b**, **c**; б) 4**a**, 3**b**; в) **b**, –4**c**; г) **a, c**; д) 2**a**, 3**b**, –4**c**.

Завдання 1.7. **a** = (5, 1, 2), **b** = (–2, 1, –3), **c** = (4, –3, 5), **d** = (15, –15, 24).

Завдання 1.8. A_1(1;2;–3), A_2(–4;6;5), A_3(7;–12;5), A_4(1;8;–8).

Завдання 1.9. A(4, –3), B(7, 3), C(1, 10).

Завдання 1.10. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку A(–2, 1) паралельно прямій MN, якщо M(– 3, –2), N(l, 6).

Завдання 1.11. Скласти загальне рівняння прямої, що утворена перетином площини *3x–y–7z+9=0* з площиною, що проходить через вісь *Ox* та точку A(3, 2, –5).

Завдання 1.12. $\rho = 3(1 - \cos 2\varphi)$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$; е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$; і) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{3}{x}-4x^6+\dfrac{4}{x^5}$	$y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\dfrac{2}{2x^2-3x+7}$	$y=arctg^3 4x\cdot 3^{\sin x}$
$y=\log_3(x+5)\cdot \arccos 3x$	$y=(x-5)^7 arcctg 7x^3$	$y=th^5 3x\cdot \arcsin\sqrt{x}$
$y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$	$y=\dfrac{\ln(7x-3)}{3tg^2 4x}$	$y=\dfrac{\arccos^7 2x}{thx^5}$
$y=\dfrac{\arcsin(3x+8)}{(x-7)^3}$	$y=\sqrt[9]{\dfrac{x+3}{x-3}}\log_5(2x-3)$	$y=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$
$y=(\sin(7x+4))^{arcctgx}$	$y=\dfrac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}$	$y=e^{\cos x}$
б)		
$x^2-2xy-y^2=2x$	$y=\left(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\ln x$	$\begin{cases} x=\sqrt{t^3+2} \\ arcctg^2 t\cdot \ln t\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

Завдання 2.4. $z=x^2-y^2+6(x-2)+3y$.

Завдання 2.5. $z=x^2+xy-y^3$, M(1; –2), $\vec{s}\{-6;-8\}$.

Завдання 2.6. $z=(x^2+y^2)\,e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

ВАРІАНТ №9
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 7\\ -2 & \lambda & -1\\ 7 & 9 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 8 & -3\\ -6 & 8 & \mu\\ -5 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}9\\ 8\\ 7\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}6 & 9 & -2 & 0\\ 7 & -3 & -4 & 2\\ 7 & 6 & 3 & 10\\ 3 & 9 & 1 & -5\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}x_1-3x_2-4x_3=-15\\ -4x_1+4x_2+2x_3=2\\ -5x_1+x_2+5x_3=2\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=12\\ 7x_1-5x_2+x_3=-33\\ 4x_1+x_3=-7\end{cases}$.

Завдання 1.4. $X\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}x_1-3x_2-2x_3+x_4=0;\\ -x_1+6x_2+7x_3-5x_4=0;\\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = – **i** + 5**k**, **b**= – 3**i** + 2**j**+2**k**, **c**= –2**i** –4**j** + **k**.
а) 3**a**, –4**b**, 2**c**; б) 7**a**, –3**c**; в) 2**b**, 3**a**; г) **b**, **c**; д) 7**a**, 2**b**, –3**c**.

Завдання 1.7. **a**=(0, 2, –3), **b**=(4, –3, –2), **c**=(–5, –4, 0), **d**=(–19, –5, –4).

Завдання 1.8. $A_1(-2;-5;3)$, $A_2(3;-8;10)$, $A_3(9;-2;3)$, $A_4(6;6;-2)$.

Завдання 1.9. A (4, –4), B(8, 2), C(3, 8).

Завдання 1.10. Знайти точку, симетричну точці M(2, –1) відносно прямої $x–2y+3=0$.

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві точки $M_1(1,-1,-2)$ і $M_2(3,1,1)$ перпендикулярно до площини $x-2y-3z-6=0$.

Завдання 1.12. $\rho = 4\sin 3\varphi$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2-3x}\right)^{3x}$; з) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$; і) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,2x-\sin2x}{x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=8x^2+\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^3}$	$y=2^{\cos x}\cdot arcctg5x^3$	$y=e^{-x}\cdot\arcsin^2 5x$
$y=\arccos x^2\cdot ctg7x^3$	$y=\dfrac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$	$y=\dfrac{\arcsin^3 4x}{sh(3x+1)}$
$y=\dfrac{\sqrt{x^2+4x-5}}{e^{x^3}}$	$y=cth^2(x+1)\cdot\arccos\dfrac{1}{x}$	$y=\dfrac{\lg(11x+3)}{\cos^2 5x}$
$y=\dfrac{7arctg(4x+1)}{(x-4)^2}$	$y=\sqrt{\dfrac{6x+5}{6x-5}}\lg(4x+7)$	$y=x\sqrt{1+x^3}$
$y=(\arcsin2x)^{\ln(x+3)}$	$y=\dfrac{(x+1)^8(x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}}$	$y=(\log_2(x+4))^{ctg7x}$
б)		
$y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\cos x^2}$	$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$	$\begin{cases}x=\ln\ln t\\ y=\arccos7t\cdot\sqrt{t^4+5}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$; б) $y=\ln(x^2-4)$.

Завдання 2.4. $z=xy^2+2x^2-4$.

Завдання 2.5. $z=13\ln(x^3y^2+1)$, M(1; –1), $\vec{s}\{5;12\}$.

Завдання 2.6. $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

ВАРІАНТ №10
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix} 6 & \lambda & -4 \\ 8 & -7 & 2 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & \mu \\ 9 & -2 & -6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 7 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & -9 & 4 \\ -3 & 10 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} -2x_1+x_2-2x_3=-5 \\ 3x_1+2x_2-4x_3=25 \\ x_1-5x_2-3x_3=-7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=6 \\ 5x_2+4x_3=-20 \\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22 \end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+2x_4=0; \\ 4x_1-x_2+9x_3+3x_4=0; \\ 2x_1+3x_2+7x_3-x_4=0. \end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 6**i** – 4**j**+6**k**, **b** = 9**i** – 6**j**+9**k**, **c** = **i** –8**k**.
а) 2**a**, –4**b**, 3**c**; б) 3**b**, –9**c**; в) 3**a**, –5**c**; г) **a**, **b**; д) 3**a**, –4**b**, –9**c**.

Завдання 1.7. **a** = (3, – 1, 2), **b** = (–2, 3, 1), **c** = (4, –5, –3), **d** = (–3, 2, –3).

Завдання 1.8. A_1(6;5;23), A_2(–6;11;3), A_3(5;–6;5), A_4(1;3;–1).

Завдання 1.9. A(–3, –3), B(5, –7), C(7, 7).

Завдання 1.10. Знайти точку O перетину діагоналей чотирикутника ABCD, якщо A(– 1, –3), B(3, 5), C(5, 2), D(3, –5).

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до площин $3x-y-7z+9=0$ і $x-4y+2z-5=0$.

Завдання 1.12. $\rho = 4\sin 4\varphi$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3+2}$; е) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=4x^6+\dfrac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{7}{x^4}$	$y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\dfrac{2}{(x-3)^5}$	$y=4^{-x}\cdot 1n^5(x+2)$
$y=\log_4(x-1)\cdot\arcsin^4 x$	$y=5^{-x^2}\arccos 5x^4$	$y=sh^4 2x\cdot\arccos x^2$
$y=\dfrac{e^{ctg\,5x}}{(x+4)^3}$	$y=\dfrac{ctg^2 5x}{\ln(7x-2)}$	$y=\dfrac{th^4(2x+5)}{\arccos 3x}$
$y=\dfrac{3\arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$	$y=\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{4x+1}}\ln(2x^3-3)$	$y=(sh3x)^{arctg(x+2)}$
$y=(\arccos 3x)^{\lg(5x-1)}$	$y=\dfrac{(x+2)(x-7)^4}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$	$y=\dfrac{(2-x^2)\cdot(x-1)}{1-x^3}$
б)		
$y=arctg\sin\sqrt{x}$	$tg\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$	$\begin{cases} x=e^{5t}+2t^7 \\ y=\ln^3 t\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}} \end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{x}{3-x^2}$; б) $y=x\ln x$.

Завдання 2.4. $z=x^2+2xy+3y^2+1$.

Завдання 2.5. $z=x^2+xy+y^2$, M(1; 1), $\vec{s}\{2;-1\}$.

Завдання 2.6. $z=x^3+y^3-6xy$.

ВАРІАНТ №11
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -8 & \lambda & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & \mu & 9 \\ 3 & -3 & 1 \\ -7 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 & 6 \\ -5 & 4 & -6 & 8 \\ -2 & 10 & 7 & 4 \\ -8 & 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Завдання 1.5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0; \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 5**i** – 3**j**+4**k**, **b** = 2**i** – 4**j** – 2**k**, **c** = 3**i** + 5**j** –7**k**.
а) **a**, –4**b**, 2**c**; б) –2**b**, 4**c**; в) –3**a**, 6**c**; г) **b**, **c**; д) **a**, –2**b**, 6**c**.

Завдання 1.7. **a** = (5, 3, 1), **b** = (–1, 2, –3), **c** = (3, –4, 2), **d**=(–9, 34, –20).

Завдання 1.8. A_1(–5;–5;2), A_2(–7;1;0), A_3(6;2;–9), A_4(10;–1;–1).

Завдання 1.9. A(1, –6), B(3, 4), C(–3, 3).

Завдання 1.10. Через точку перетину прямих *6x – 4y + 5 = 0, 2x + 5y + 8 = 0* провести пряму, паралельну осі абсцис.

Завдання 1.11. Знайти рівняння площини, точки якої однаково віддалені від точок A(1, –4, 2) та B(7, 1, –5).

Завдання 1.12. $\rho = 3(\cos\varphi + 1)$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{tg\,x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=2\sqrt{x^3}-\dfrac{7}{x}+3x^2-\dfrac{2}{x^5}$	$y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$	$y=3^{tgx}\cdot\arcsin 7x^4$
$y=(x-4)^5\cdot arcctg3x^2$	$y=arctg^4x\cdot\cos 7x^4$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{arctg2x}}{sh^2x}$
$y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$	$y=\dfrac{\sin^3(4x+3)}{\ln(7x+1)}$	$y=ch^3(3x+2)\cdot arctg3x$
$y=\dfrac{2\lg(4x+5)}{(x+6)^4}$	$y=\sqrt[4]{\dfrac{x+6}{x-6}}\sin(3x^2+1)$	$y=(ch3xx)^{ctg1/x}$
$y=(arctg5x)^{\log_2(x+4)}$	$y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$	$y=5^{\arcsin x}$
б)		
$y=\sin(tg^3x)$	$y=\sin(x+y)$	$\begin{cases}x=tg^3t^2\\ y=2^{3t}\cdot\sin^4 t\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{1}{x^2+2x}$; б) $y=(x+4)e^{2x}$.

Завдання 2.4. $z=x^2y+y^3+1$.

Завдання 2.5. $z=2x^2+3xy+y^2$, M(2; 1), $\vec{s}\{3;4\}$.

Завдання 2.6. $z=4x^2+y^2+2xy-4x-y$.

ВАРІАНТ №12
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A = \begin{pmatrix} 7 & -9 & 10 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ \mu & -2 & -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -5 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & -9 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 8 & -6 & -9 & 2 \end{vmatrix}.$

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = -13 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 4 \\ -5x_1 + x_2 - 3x_3 = -13 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}.$

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$

Завдання 1.5. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ -2x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 0; \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = – 4**i** + 3**j** –7**k**, **b** = 4**i** + 6**j** – 2**k**, **c** = 6**i** + 9**j** – 3 **k**.
а) –2**a**, **b**, –2**c**; б) 4**b**, 7**c**; в) 5**a**, –3**b**; г) **b**, **c**; д) –2**a**, 4**b**, 7**c**.

Завдання 1.7. **a** = (3, 1, –3), **b** = (–2, 4, 1), **c** = (l, –2, 5), **d** = (l, 12, –20).

Завдання 1.8. A_1(–1;5;7), A_2(3;–6;–10), A_3(5;2;–3), A_4(1;9;–1).

Завдання 1.9. A(–4, 2), B(8, –6), C(2, 6).

Завдання 1.10. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC *4x+y=12*, його висот BH *5x–4y=12* і AM *x+y=6*. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника ABC.

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини у відрізках, якщо відомо, що вона проходить через точку M(6; –10; 1) і відтинає на осі *Ox* відрізок a=–3, а на осі *Oz* відрізок c=2.

Завдання 1.12. $\rho = \dfrac{1}{2 - \sin\varphi}.$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=4x^3-\dfrac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\dfrac{6}{x^2}$	$y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\dfrac{4}{(x-4)^4}$	$y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5$
$y=ctg^3 4x\cdot arctg 2x^3$	$y=4(x-7)^6\arcsin 3x^5$	$y=th^3 4x\cdot arcctg 3x^4$
$y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$	$y=\dfrac{ctg^3(2x-3)}{\log_3(x+2)}$	$y=\dfrac{\arcsin 4x^5}{th^3 x}$
$y=\dfrac{5\ln(5x+7)}{(x-1)^5}$	$y=\sqrt[5]{\dfrac{x-7}{x+7}}\cos(2x^3+x)$	$y=(\arcsin 5x)^{tg\sqrt{x}}.$
$y=(arctg 7x)^{\lg(x+1)}$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5(x-5)^3}$	$y=x^2\sin x^3$
б)		
$y=\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$	$x^2+2xy+y^2=2x$	$\begin{cases}x=ctg^2 t\\ y=\ln^2 t\cdot 5^{3t}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; б) $y=\ln(x^2-4x+8)$.

Завдання 2.4. $z=x^2+y^2+2x+y-7$.

Завдання 2.5. $z=\ln(x^2+y^2)$, M(1; 1), $\vec{s}\{1;1\}$.

Завдання 2.6. $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

ВАРІАНТ №13
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-6 & 3 & 9\\ \lambda & -4 & 5\\ -2 & 9 & 10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -7 & 3\\ 9 & -5 & \mu\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}4 & -9 & 3 & -2\\ 6 & -8 & 4 & -1\\ 7 & 10 & 5 & 3\\ 8 & -5 & 2 & 8\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=-1\\ x_1-x_2-x_3=-6\\ 2x_1-4x_2+4x_3=8\end{cases}$; б) $\begin{cases}4x_1+x_2+4x_3=19\\ 2x_1-x_2+2x_3=11\\ x_1+x_2+2x_3=8\end{cases}$.

Завдання 1.4. $X\begin{pmatrix}-4 & 1 & 0\\ 3 & -1 & -4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0;\\ 4x_1-3x_2-4x_3-6x_4=0;\\ -2x_1+4x_2+7x_3+5x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a**= – 5**i** + 2**j** – 2**k**, **b** = 7**i** – 5**k**, **c** = 2**i** + 3**j** – 2**k**.
а) 2**a**, 4**b**, –5**c**; б) –3**b**, 11**c**; в) 8**a**, –6**c**; г) **a**, **c**; д) 8**a**, –3**b**, 11**c**.

Завдання 1.7. **a** = (6, 1, –3), **b** = (–3, 2, 1), **c** = (–l, –3, 4), **d** = (15, 6, –17).

Завдання 1.8. A_1(–4;2;–3), A_2(6;–7;4), A_3(–7;2;3), A_4(8;9;1).

Завдання 1.9. A(–5, 2), B(0, –4), C(5, 7).

Завдання 1.10. Дано дві вершини трикутника ABC: A(– 6, 2), B(2, –2) і точка перетину його висот H(1,2). Знайти координати точки M – перетину сторони AC і висоти BH.

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ та $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

Завдання 1.12. $\rho = 5(1-\sin 2\varphi)$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2-x}{x+1}\right)^{2x-3}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$	$y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\dfrac{8}{(x-5)^2}$	$y=\sin^4 3x\cdot arctg 2x^3$
$y=e^{-\cos x} arctg 7x^5$	$y=(x+5)^2\arccos^3 5x$	$y=cth^4 7x\cdot\arcsin\sqrt{x}$
$y=\dfrac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$	$y=\dfrac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}$	$y=\dfrac{arctg^3(2x+1)}{ch\sqrt{x}}$
$y=\dfrac{4\log_3(3x+1)}{(x+1)^2}$	$y=\sqrt[6]{\dfrac{x-9}{x+9}}tg(3x^2-4x+1)$	$y=(\arccos 5x)^{\ln x}$
$y=(\log_4(2x+3))^{\arcsin x}$	$y=\dfrac{\sqrt{(x+2)^3}(x-1)^4}{(x+2)^7}$	$y=6^{2x}\cos x$
б)		
$y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin 3x}$	$x-y=arctg y$	$\begin{cases}x=10^{8t^2}\\ y=\sqrt[3]{1+t^4}\cdot\arcsin^2 t\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Завдання 2.4. $z=x^3+2xy-10$.

Завдання 2.5. $z=13arctg(xy^3)$, M(3; 1), $\vec{s}\{-5;12\}$.

Завдання 2.6. $z=x^3+8y^2-6xy+1$.

ВАРІАНТ №14
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -3\\ 7 & 8 & 1\\ 9 & -6 & \lambda\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 8 & 3\\ -8 & \mu & 1\\ -4 & 2 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}-7 & 4 & -9 & 1\\ 0 & 8 & -5 & 4\\ -3 & 2 & 6 & 8\\ 10 & -6 & 4 & 1\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3=-1\\ 2x_1-3x_2-5x_3=22\\ 3x_1+4x_2+5x_3=-13\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=0\\ 4x_1+x_2+4x_3=6\\ x_1+x_2+2x_3=4\end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 12\\ -3 & 8\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}x_1-4x_2+x_3-7x_4=0;\\ -x_1+x_2+2x_3-4x_4=0;\\ 2x_1-5x_2-x_3-3x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a**= –4**i**–6**j**+2**k**, **b** = 2**i** + 3**j** – **k**, **c**= –**i** + 5**j** – 3**k**.
а) 5**a**, 7**b**, 2**c**; б) –4**b**, 11**a**; в) 3**a**, –7**c**; г) **a**, **b**; д) 3**a**, 7**b**, –2**c**.

Завдання 1.7. **a**=(4, 2, 3), **b**=(–3, 1, –8), **c**=(2, –4, 5), **d**=(–12, 14, –31).

Завдання 1.8. A_1(7;–5;2), A_2(–5;2;–12), A_3(13;–2;0), A_4(3;–4;8).

Завдання 1.9. A(4, –4), B(6, 2), ' C(–1, 8).

Завдання 1.10. Знайти рівняння висот трикутника ABC, що проходять через вершини A та B, якщо A(– 4, 2), B(3, –5), C(5, 0).

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, що проходить через точку A(2; 3; – 4) паралельно двом векторам $\vec{a}$=(4; 1; –1) та $\vec{b}$=(2; –1; 2).

Завдання 1.12. ρ = 3(2–*cos*2φ).

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=\dfrac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{2}{x}+5x^4$	$y=\dfrac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$	$y=\dfrac{\arccos 4x^3}{sh^4 x}$
$y=(x+1)\arccos 3x^4$	$y=2^{-\sin x}\arcsin^3 2x$	$y=sh^3 2x\cdot\arcsin 7x^2$
$y=\dfrac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$	$y=\dfrac{\ln^2(x+1)}{\cos 3x^4}$	$y=\cos^3 4x\cdot arcctg\sqrt{x}$
$y=\dfrac{7\log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$	$y=\sqrt[7]{\dfrac{x-4}{x+4}}ctg(2x+5)$	$y=(arctg 2x)^{\sin x}$
$y=(\log_5(3x+2))^{\arccos x}$	$y=\dfrac{\sqrt{(x+2)^3}(x-1)^4}{(x+2)^7}$	$y=\arcsin\sqrt{1-3x}$
б)		
$y=\sqrt[3]{x^2-1}/\sqrt{x^5}$	$x-y=a\sin y$	$\begin{cases}x=\sqrt{t^2+7t+10}\\ y=e^{7t}\cdot ctg^3 2t\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$; б) $y=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$.

Завдання 2.4. $z=2x^2y+3y^2-12$.

Завдання 2.5. $z=ln(4x^2+5y^2)$, M(1; 1), $\vec{s}\{1;-2\}$.

Завдання 2.6. $z=4x+2y-4x^2-y^2$.

ВАРІАНТ №15
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}6 & -4 & 2\\ 8 & 1 & -9\\ \lambda & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -9 & -8\\ 7 & 6 & -1\\ 6 & \mu & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7\\ -9\\ 3\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}4 & -6 & 0 & 8\\ -3 & 5 & 6 & -7\\ 2 & -8 & 1 & -10\\ 7 & 3 & 9 & -2\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}-2x_1+x_2-2x_3=-7\\ 5x_1+3x_2+5x_3=23\\ -x_1+2x_2-3x_3=-10\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=8\\ x_1+x_2+2x_3=11\\ 4x_1+x_2+4x_3=22\end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix}5 & 1 & -3\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}2x_1-7x_2+x_3-4x_4=0;\\ -2x_1+x_2-3x_3+8x_4=0;\\ x_1-2x_2+x_3-3x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a**= –4**i** + 2**j** –3**k**, **b** = –3**j** + 5**k**, **c** = 6**i** + 6**j** – 4**k**.
а) 5**a**, – **b**, 3**c**; б) –7**a**, 4**c**; в) 3**a**, 9**b**; г) **a**, **c**; д) 3**a**, 9**b**, 4**c**.

Завдання 1.7. **a**=(–2, 1, 3), **b**=(3, –6, 2), **c**=(–5, –3, –1), **d**=(31, –6, 22).

Завдання 1.8. A_1(6;–10;0), A_2(–8;–4;–1), A_3(3;3;3), A_4(1;9;–4).

Завдання 1.9. A(–3, 8), B(– 6, 2), C(0, –5).

Завдання 1.10. Обчислити координати точки перетину перпендикулярів, проведених через середини сторін трикутника, вершинами якого є точки A(2, 3), B(0, –3), C(6,–3).

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, що проходить через точки A(2;–4;8) та B(2;–1;–1) перпендикулярно до площини $5x+2y+3z-7=0$.

Завдання 1.12. $\rho = 6\sin 4\varphi$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x+7}{2-3x+4x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{8-x}-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=\frac{4}{x^5}-\frac{9}{x}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$	$y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\frac{4}{7x^2-3x+2}$	$y=tg^3 2x\cdot \arcsin x^5$
$y=2^{\sin x} arcctgx^4$	$y=(x+2)^7 \arccos\sqrt{x}$	$y=\frac{cth^2(x-2)}{\arccos 3x}$
$y=\frac{(2x+5)^3}{e^{tgx}}$	$y=\frac{\log_2(7x-5)}{tg\sqrt{x}}$	$y=th^5 4x\cdot \arccos 3x^4$
$y=\frac{\ln(7x+2)}{(x-6)^4}$	$y=\sqrt[8]{\frac{x-2}{x+2}}\sin(4x^2-7x+2)$	$y=(\ln(x+7))^{ctg 2x}$
$y=(\lg(7x-5))^{arctg 2x}$	$y=\frac{\sqrt[3]{(x-2)^5}(x+3)^2}{(x-7)^3}$	$y=\ln\sin(2x+5)$
б)		
$y=arctg\sqrt{1+4x}$	$ctg(y/x)=3x^3$	$\begin{cases} x=2^{5t}+\frac{1}{t} \\ y=arctg 8t\cdot e^t \end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$; б) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

Завдання 2.4. $z=3x^2+2y^2-xy+2$.

Завдання 2.5. $z=5x^2+6xy$, M(2; 1), $\vec{s}\{1;2\}$.

Завдання 2.6. $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$.

ВАРІАНТ №16
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}7 & -2 & 6\\ 4 & -1 & \lambda\\ 8 & 5 & -3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}9 & -5 & 3\\ 8 & \mu & 1\\ -9 & 4 & 3\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix}8\\ 0\\ -3\end{pmatrix}.$

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}5 & -8 & 3 & 9\\ 10 & -3 & -2 & 7\\ 1 & 0 & 9 & 3\\ 2 & 7 & 5 & -6\end{vmatrix}.$

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}-3x_1-2x_2+x_3=-10\\ -5x_1+2x_2+x_3=-8\\ -2x_1-2x_2-3x_3=-19\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=-9\\ x_1+5x_2+x_3=20\\ 3x_1+4x_2+2x_3=15\end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 8\\ 2 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 4\end{pmatrix}.$

Завдання 1.5. $\begin{cases}2x_1-5x_2+x_3-2x_4=0;\\ x_2-5x_3+6x_4=0;\\ x_1-3x_2+3x_3-4x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = –3**i** + 8**j**, **b** = 2**i** + 3**j** – 2**k**, **c** = 8**i** + 12**j** – 8**k**.
а) 4**a**, –6**b**, 5**c**; б) –7**a**, 9**c**; в) 3**b**, –8**c**; г) **b**, **c**; д) 4**a**, –6**b**, 9**c**.

Завдання 1.7. **a** = (l, 3, 6), **b** = (–3, 4, –5), **c** = (l, –7, 2), **d** = (– 2, 17, 5).

Завдання 1.8. $A_1(8;-2;4)$, $A_2(9;-6;6)$, $A_3(2;8;-3)$, $A_4(-5;9;-7)$.

Завдання 1.9. A(6, –9), B(10, –1), C(–4, 1).

Завдання 1.10. Скласти рівняння висоти, проведеної через вершину А трикутника АВС, якщо дано рівняння його сторін: АВ : *2x–y–3=0*, АС : *x+5y–7=0*, ВС: *3x–2y+13=0*.

Завдання 1.11. Через точку М(3; –5; 1) провести площину, паралельну площині *2x–3y+5z–4=0.*

Завдання 1.12. $\rho = 2\cos 6\varphi$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^2-5x+2}{3x^2-4x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{tg\,3x}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{3}{x}-4\sqrt{x^3}+2x^7$	$y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\dfrac{3}{7x^3-x^2-4}$	$y=\dfrac{th^3(2x+2)}{\arcsin 5x}$
$y=3^{-x^3}arctg2x^5$	$y=(x-7)^5\arcsin 7x^4$	$y=ch^2 5x\cdot arctg\sqrt{x}$
$y=\dfrac{e^{-tg3x}}{4x^2-3x+5}$	$y=\dfrac{\log_3(4x-2)}{ctg2x}$	$y=ctg^7 x\cdot\arccos 2x^3$
$y=\sqrt[9]{\dfrac{x-3}{x+3}}\cos(x^2-3x+2)$	$y=\dfrac{4\lg(3x+7)}{(x+1)^7}$	$y=(ctg(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$
$y=(\ln(5x-4))^{arcctgx}$	$y=\dfrac{\sqrt[4]{x-8}(x+2)^6}{(x-1)^5}$	$y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$
б)		
$y=\dfrac{\ln 3\sin x+\cos x}{3^x}$	$tg(y/x)=3x$	$\begin{cases}x=28\arcsin^3 t\\ y=\cos^5 t\cdot\sqrt{t^3-7}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=x-\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=e^{2x-x^2}$.

Завдання 2.4. $z=x^2-y^2+5(x-3)+4(y+1)$.

Завдання 2.5. $z=\arcsin\dfrac{y^2}{x}$, M(2; 1), $\vec{s}\{12;-5\}$.

Завдання 2.6. $z=x^2-2xy+4y^2-4y+1$.

ВАРІАНТ №17
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-2 & \lambda & 9\\ -8 & 4 & -3\\ 6 & 2 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 0\\ 1 & -8 & -4\\ 2 & -1 & \mu\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\ 0\\ -6\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}-6 & 2 & -8 & 2\\ 7 & 3 & 7 & -10\\ 4 & 8 & 1 & 7\\ -3 & 9 & 0 & 1\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}5x_1+5x_2+x_3=23\\ -2x_1+x_2+x_3=10\\ 4x_1-3x_2+x_3=-16\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=0\\ 3x_1+4x_2+2x_3=1\\ x_1+5x_2+x_3=-3\end{cases}$.

Завдання 1.4. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}4x_1-3x_2-x_3+3x_4=0;\\ -x_1+2x_2+3x_3-2x_4=0;\\ 2x_1+x_2+5x_3-x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 2**i** – 4**j** – 2**k**, **b**= –9**i** + 2**k**, **c** = 3**i** + 5**j** – 7**k**.
а) 7**a**, 5**b**, –**c**; б) –5**a**, 4**b**; в) 3**b**, –8**c**; г) **a**, **c**; д) 7**a**, 5**b**, –**c**.

Завдання 1.7. **a** = (7, 2, 1), **b** = (5, 1, –2), **c** = (–3, 4, 5), **d** = (26, 11, 1).

Завдання 1.8. A_1(0;–3;6), A_2(–8;2;–1), A_3(9;–2;3), A_4(3;9;–1).

Завдання 1.9. A(4, 1), B(–3, –1), C(7, –3).

Завдання 1.10. Дано трикутник з вершинами A (3,1), B(–3,–1) і C(5, –7). Знайти рівняння й обчислити довжину його медіани, проведеної з вершини C.

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M(2; 3; –1) і пряму $x = t - 3,\ y = 2t + 5,\ z = -3t + 1$.

Завдання 1.12. $\rho = \dfrac{3}{1-\cos 2\varphi}$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,3x-\sin 3x}{2x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=5x^2+\dfrac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6$	$y=\dfrac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$	$y=e^{-\sin x}tg7x^6$
$y=3^{\cos x}\arcsin^2 3x$	$y=\ln(x-3)\cdot\arccos 3x^4$	$y=cth^4 2x\cdot arctgx^3$
$y=\dfrac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$	$y=\dfrac{\ln^3(x-5)}{tg(1/x)}$	$y=\dfrac{cth^2(3x-1)}{\arccos x^2}$
$y=\dfrac{5\log_2(x^2+1)}{(x-3)^4}$	$y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{3x+2}}tg(2x^2-9)$	$y=(th\sqrt{x+1})^{arctg\,2x}$
$y=(\log_2(6x+5))^{\arcsin 2x}$	$y=\dfrac{\sqrt[5]{x+1}(x-3)^7}{(x+8)^3}$	$y=tg\ln\dfrac{1}{x}$
б)		
$y=4\sqrt[3]{ctg^2 x}$	$x^3+y^3=3xy$	$\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{t^2-7}{2-t^5}} \\ y=(3t^2-5t-7)\cdot ctg10t \end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $y=\ln(x^2+4x)$.

Завдання 2.4. $z=x^2+xy^2+11$.

Завдання 2.5. $z=ln(xy^2)+1$, M(1; 1), $\vec{s}\{-3;-4\}$.

Завдання 2.6. $z=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$.

ВАРІАНТ №18
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 2 & 3 & -8\\ 4 & \lambda & -9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6 & -8 & 5\\ -1 & 2 & \mu\\ 7 & -3 & 4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5\\ 1\\ -6\end{pmatrix}.$

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}8 & 1 & -8 & 3\\ 6 & -5 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 9 & 10\\ 5 & -4 & 3 & 1\end{vmatrix}.$

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}4x_1-x_2+3x_3=-8\\ x_1-4x_2+4x_3=13\\ 2x_1+5x_2+4x_3=-26\end{cases}$; б) $\begin{cases}-3x_1+5x_2+6x_3=-8\\ 3x_1+x_2+x_3=-4\\ x_1-4x_2-2x_3=-9\end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$

Завдання 1.5. $\begin{cases}3x_1-3x_2+x_3-2x_4=0;\\ x_1+2x_2-2x_3+5x_4=0;\\ -4x_1+x_2+x_3-3x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 9**i** –3**j** + **k**, **b** = 3**i**– 15**j** + 21**k**, **c** = **i** – 5**j** + 7**k**.
а) 2**a**, – 7**b**, 3**c**; б) –6**a**, 4**c**; в) 5**b**, 7**a**; г) **b**, **c**; д) 2**a**, –7**b**, 4**c**.

Завдання 1.7. **a** = (3, 5, 4), **b** = (–2, 7, –5), **c** = (6, –2, 1), **d** = (6, –9, 22).

Завдання 1.8. A_1(–3; 5;–6), A_2(11;0;–5), A_3(7;–8;9), A_4(2;3;–8).

Завдання 1.9. A(–4, 2), B(6, –4), C(4, 10).

Завдання 1.10. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку перетину прямих $2x+5y-8=0$ і $2x+3y+4=0$.

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, що проходить через точку A(3; 4; 0) і пряму $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

Завдання 1.12. $\rho = 2(1-\cos 3\varphi)$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^4-3x^2}{1+2x+3x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$; і) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^4}$	$y=\dfrac{2}{(x-1)^3}-\dfrac{8}{6x^2+3x-7}$	$y=e^{\cos x}ctg8x^3$
$y=\ln(x-10)\cdot\arccos^2 4x$	$y=\log_2(x-4)\cdot arctg^3 4x$	$y=\dfrac{sh^5 x}{\arccos 4x}$
$y=\dfrac{3x^2-5x+10}{e^{-x^4}}$	$y=\dfrac{\lg(x+2)}{\sin 2x^5}$	$y=sh^4 5x\cdot\arccos 3x^2$
$y=\dfrac{6\log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$	$y=\sqrt{\dfrac{2x+3}{2x-3}}ctg(3x^2+5)$	$y=(cth\dfrac{1}{x})^{\arcsin 7x}$
$y=(\lg(4x-3))^{\arccos 4x}$	$y=\dfrac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2(x-6)^5}$	$y=e^x(x^2-3^x)$
б)		
$y=\sqrt[3]{(1+x^2)\ln x}$	$(e^x-1)(e^y-1)=1$	$\begin{cases}x=\ln^5 7t\\ y=\dfrac{t^3-5t^2}{t^7}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{1}{x-9}$; б) $y=x^2-2\ln x$.

Завдання 2.4. $z=2xy+3y^2-5(x+1)$.

Завдання 2.5. $z=x^3+2xy$, M(1; 2), $\vec{s}\{-1;2\}$.

Завдання 2.6. $z=x^3+\dfrac{y^3}{27}-xy$.

ВАРІАНТ №19
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 6\\ 3 & -7 & \lambda\\ 9 & 2 & -8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & -1 & 5\\ 9 & 3 & -7\\ \mu & 9 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ -7\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & -7\\ 4 & -6 & 2 & 8\\ -10 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 8 & -4 & 9\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}-3x_1+5x_2+2x_3=-19\\ 2x_1-x_2-5x_3=13\\ -5x_1-3x_2+x_3=7\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=-4\\ -3x_1+5x_2+6x_3=36\\ x_1-4x_2-2x_3=-19\end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & -1 & 7\\ 2 & 5 & 1 & 2 & 8\\ 3 & 6 & 0 & 1 & 9\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}5x_1-2x_2+3x_3+4x_4=0;\\ 2x_1+3x_2-2x_3+2x_4=0;\\ 7x_1+x_2-5x_3+6x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = – 2**i** + 4**j** – 3**k**, **b** = 5**i** + **j** – 2**k**, **c** = 7**i** + 4**j** – **k**.
а) **a**, – 6**b**, 2**c**; б) – 8**b**, 5с; в) –9**a**, 7**c**; г) **a**, **b**; д) **a**, –6**b**, 5**c**.

Завдання 1.7. **a** = (5, 3, 2), **b** = (2, –5, 1), **c** = (–7, 4, –3), **d** = (36, 1, 15).

Завдання 1.8. $A_1(7;-6;4)$, $A_2(9;2;-5)$, $A_3(7;-2;1)$, $A_4(5;-8;-10)$.

Завдання 1.9. A(3, –1), B(11, 3), C(–6, 2).

Завдання 1.10. Знайти рівняння перпендикулярів до прямої $3x+5y-15=0$, проведених через точки перетину даної прямої з осями координат.

Завдання 1.11. Через пряму $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}$ провести площину, що паралельна до площини $x+y-z+15=0$.

Завдання 1.12. $\rho = 3(1-\cos 4\varphi)$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=\sqrt{x^5}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^3}-3x^3$	$y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\dfrac{3}{(x-3)^4}$	$y=\cos^5 x\cdot\arccos 4x$
$y=\lg(x-2)\cdot\arcsin^5 x$	$y=(x-7)^4 arcctg^2 7x$	$y=\dfrac{\sqrt{ch^3x}}{arctg 5x}$
$y=\dfrac{e^{-x}}{(2x^2-x+4)^2}$	$y=\dfrac{tg^3 7x}{\ln(3x+2)}$	$y=ch^3 9x\cdot arctg(5x-1)$
$y=\dfrac{3\log_2(5x-4)}{(x-3)^5}$	$y=\sqrt[4]{\dfrac{x+5}{x-5}}\sin(3x^2-x+4)$	$y=(\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$
$y=\ln(7x-3))^{arctg 5x}$	$y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^4(x-4)^3}$	$y=15\cdot\sqrt[5]{1+x^2}$
б)		
$y=\sin(\cos^2 x)$	$y=\sin(x-y)$	$\begin{cases} x=ctg^2 5t \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t}}\cdot 10^{t^3}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{2x^2}{4x^2-1}$; б) $y=x^2e^{-2x}$.

Завдання 2.4. $z=x^2-2xy^2+3$.

Завдання 2.5. $z=3x^4+2x^2y^3$, M(–1; 2), $\vec{s}\{4;-3\}$.

Завдання 2.6. $z=xy(1-x)(2-y)$.

ВАРІАНТ №20
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -7 & \lambda & -1 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -8 & \mu & 2 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 & 10 \\ 2 & -8 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ 9 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3=0 \\ 5x_1-4x_2-5x_3=-19 \\ x_1-4x_2-3x_3=-7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=-11 \\ 5x_1+x_2+2x_3=8 \\ x_1+2x_2+4x_3=16 \end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases} x_1+4x_2+x_3-2x_4=0; \\ -2x_1+3x_2-5x_3+x_4=0; \\ 3x_1+x_2+6x_3-3x_4=0. \end{cases}$

Завдання 1.6. **a**= – 9**i** + 4**j** – 5**k**, **b** = **i** – 2**j** + 4**k**, **c**= –5**i** + 10**j** – 20**k**.
а) –2**a**, 7**b**, 5**c**; б) – 6**b**, 7**c**; в) 9**a**, 4**c**; г) **b**, **c**; д) –2**a**, 7**b**, 4**c**.

Завдання 1.7. **a** = (11, 1, 2), **b** = (–3, 3, 4), **c** = (–4,–2, 7), **d** = (–5, 11,–15).

Завдання 1.8. A_1(–2;8;6), A_2(3;–3;9), A_3(1;–10;4), A_4(7;–5;–2).

Завдання 1.9. A(–7, –2), B(–7, 4), C(5, –5).

Завдання 1.10. Задані рівняння сторін чотирикутника: *x–y=0*, *x+3y=0*, *x–y–4=0, 3x+y–12=0*. Знайти рівняння його діагоналей.

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, що проходить на відстані 6 одиниць від початку координат та відсікає на осях координат відрізки, пов’язані співвідношенням: a:b:c=1:3:2.

Завдання 1.12. ρ = 5(2–*sin*φ).

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-3x+2}{x^2-x-12}$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{tg\ 2x}\right)$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=9x^3+\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}$	$y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\dfrac{5}{(x+1)^3}$	$y=\dfrac{th^2(x+3)}{arcctg\sqrt{x}}$
$y=\log_3(x+1)\cdot arctg^5 7x$	$y=\sqrt[3]{x-3}\arccos^4 2x$	$y=\sin^3 7x\cdot arcctg 5x^2$
$y=\dfrac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$	$y=\dfrac{ctg\sqrt{x-2}}{\lg(3x+5)}$	$y=ch^3 9x\cdot arctg(5x-1)$
$y=\dfrac{7\log_5(x^2+x)}{(x+3)^3}$	$y=\sqrt[5]{\dfrac{x-6}{x+6}}\cos(7x+2)$	$y=(\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$
$y=(\log_5(2x+5))^{arctgx}$	$y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+3)^7(x-4)^2}$	$y=\arcsin\dfrac{1}{x}$
б)		
$y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$	$y\sin x=\cos(x+y)$	$\begin{cases} x=\ln\dfrac{t^3}{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{t^2-2}}{5}\cdot\sin 3t^2 \end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$; б) $y=xe^{2x-1}$.

Завдання 2.4. $z=xy+2y^2-2(x-y)$.

Завдання 2.5. $z=x^2-y^2$, M(1; 1), $\vec{s}\{\sqrt{3};1\}$.

Завдання 2.6. $z=(x-1)^2+y^2-3$.

ВАРІАНТ №21
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A = \begin{pmatrix} -6 & \lambda & -4 \\ 8 & 7 & 2 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \\ 6 & \mu & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 8 & 10 & 5 \\ -4 & 6 & 8 & -1 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 11 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 27 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases} -3x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 2**i** – 7**j** + 5**k**, **b**= – **i** + 2**j** – 6**k**, **c** = 3**i** + 2**j** – 4**k**.
а) –3**a**, 6**b**, –**c**; б) 5**b**, 3**c**; в) 7**a**, –4**b**; г) **b**, **c**;д) 7**a**, –4**b**, 3**c**.

Завдання 1.7. **a** = (9, 5, 3), **b** = (–3, 2, 1), **c** = (4, –7, 4), **d** = (–10, –13, 8).

Завдання 1.8. A_1(–1;–6;2), A_2(3;7;–8), A_3(1;–12;13), A_4(6;2;1).

Завдання 1.9. A(–1, –4), B(9, 6), C(–5, 4).

Завдання 1.10. Скласти рівняння медіани CM і висоти CK трикутника ABC, якщо A(4, 6), B(– 4, 0), C(– 1, –4).

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M (2; –2; 4) перпендикулярно до площин $3x - 2y + z + 7 = 0$ та $5x-4y+3z+1=0$.

Завдання 1.12. $\rho = 3\sin 4\varphi$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^x$; з) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=3\sqrt{x}+\dfrac{4}{x^5}+\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{7}{x}$	$y=\sqrt[4]{5x^2-4x+1}-\dfrac{7}{(x-5)^2}$	$y=\dfrac{arcctg^3 x}{sh(2x-5)}$
$y=\ln(x+9)\cdot arcctg^3 2x$	$y=(x-3)^5\arccos 3x^6$	$y=\sin^2 3x\cdot arcctg 3x^5$
$y=\dfrac{(2x-3)^7}{e^{-2x}}$	$y=\dfrac{\cos^2 x}{\lg(x^2-2x+1)}$	$y=cth^3 4x\cdot\arcsin(3x+1)$
$y=\dfrac{2\ln(3x-10)}{(x+5)^7}$	$y=\sqrt[7]{\dfrac{x-8}{x+8}}\arccos(3x-5)$	$y=(tg 3x^4)^{\sqrt{x+3}}$
$y=(\cos(3x+8))^{th(x-7)}$	$y=\dfrac{(x+4)^3(x-2)^4}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$	$y=x\cdot\sqrt{(1+x^3)\cdot\dfrac{1}{x}}$
б)		
$y=e^x(1+ctg\dfrac{x}{2})$	$x-y=-arctg y$	$\begin{cases}x=7^{\sqrt{t}}\\ y=\ln\dfrac{1}{\sqrt{t}}\cdot(t^3-10t+1)\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$; б) $y=\ln(x^2+2x+2)$.

Завдання 2.4. $z=x^2+2xy+y^2+4$.

Завдання 2.5. $z=ln(5x^2+3y^2)$, M(1; 1), $\vec{s}\{3;2\}$.

Завдання 2.6. $z=2(x+y)-x^2-y^2$.

ВАРІАНТ №22
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & -5\\ 1 & -3 & 8\\ 10 & -6 & \lambda\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & \mu\\ 5 & -9 & 4\\ 0 & 6 & -7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\ 8\\ -1\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1 & 5\\ -8 & 6 & -6 & 4\\ 2 & -9 & 2 & 5\\ 1 & 0 & -1 & 4\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}2x_1+2x_2+4x_3=4\\ -2x_1-3x_2-4x_3=-9\\ x_1+2x_2-2x_3=15\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=4\\ 2x_1+x_2+3x_3=0\\ 3x_1+2x_2+x_3=1\end{cases}$.

Завдання 1.4. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ -7 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+3x_4=0;\\ 2x_1+4x_2-3x_3+x_4=0;\\ -3x_1-3x_2+x_3-4x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 7**i** –4**j** – 5**k**, **b** = **i** –11**j** + 3**k**, **c** = 5**i** + 5**j** + 3**k**.
а) 3**a**, –7**b**, 2**c**; б) 2**b**, 6**c**; в) –4**a**, –5**c**; г) **a**, **c**; д) –4**a**, 2**b**, 6**c**.

Завдання 1.7. **a** = (7, 2, 1), **b** = (3, –5, 6), **c** = (–4, 3, –4), **d** = (–l, 18, –16).

Завдання 1.8. A_1(–1;–5;6), A_2(2;8;–1), A_3(–4;2;–9), A_4(10;2;–2).

Завдання 1.9. A(10, –2), B(4, –5), C(–3, 1).

Завдання 1.10. Записати рівняння прямих, що проходять через точку A(–2, 3) і утворюють з віссю Ох кути: а) 45°, б) 90°, в) 0°.

Завдання 1.11. З точки M(2;4;–5) на координатні осі опущені перпендикуляри. Знайти рівняння площини, що проходить через їх основи.

Завдання 1.12. $\rho = 2\cos 4\varphi$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{x^2-1/4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$; д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2-x}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=\sqrt{x^3}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^5}-5x^3$	$y=\sqrt[5]{3-7x+x^2}-\dfrac{4}{(x-7)^5}$	$y=\cos\sqrt[5]{x}\cdot arctgx^4$
$y=\lg(x+2)\cdot\arcsin^2 3x$	$y=\sqrt[3]{x-4}\arcsin^4 5x$	$y=th^4x\cdot arcctg\,\dfrac{1}{x}$
$y=\dfrac{e^{ctg5x}}{(3x-5)^4}$	$y=\dfrac{tg(3x-5)}{\ln^2(x+3)}$	$y=\dfrac{\arcsin^2 3x}{ch(x-5)}$
$y=\dfrac{\log_7(2x^2+5)}{(x-4)^2}$	$y=\sqrt[6]{\dfrac{x-7}{x+7}}\arcsin(2x+3)$	$y=(\sin 4x)^{arctg1/x}$
$y=(\sin(8x-7))^{cth(x+3)}$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5)(x+1)^7}$	$y=arctg\sqrt{1+4x}$
б)		
$y=\ln\sin(2x+5)$	$tg(y/x)=3x$	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^5-t} \\ y=\dfrac{\ln^2 t}{t}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y=x^3e^{-x}$.

Завдання 2.4. $z=2xy-y^3+x-3$.

Завдання 2.5. $z=3x^2y^2+5xy^2$, M(1; 1), $\vec{s}\{2;1\}$.

Завдання 2.6. $z=27x^3+y^3-9xy$.

ВАРІАНТ №23
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}\lambda & -8 & 5\\ -1 & 3 & 7\\ 4 & -6 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ -8 & -9 & 10\\ 0 & 4 & \mu\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6\\ 8\\ -2\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}5 & -7 & 3 & 0\\ 4 & -1 & 8 & 5\\ 10 & 4 & -6 & -8\\ 3 & -1 & 6 & 2\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}-3x_1-2x_2+4x_3=-25\\ 4x_1-4x_2+3x_3=-20\\ -4x_1+x_2-x_3=3\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=12\\ 2x_1+x_2+3x_3=16\\ 3x_1+2x_2+x_3=8\end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -6 & 4\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}3x_1+2x_2-5x_3-2x_4=0;\\ -5x_1+x_3-4x_4=0;\\ 4x_1+x_2-3x_3+x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 4**i** – 6**j** – 2**k**, **b** = –2**i** + 3**j** + **k** , **c** = 3**i** – 5**j** + 7**k**.
а) 6**a**, 3**b**, 8**c**; б) –7**b**, 6**a**;в) –5**a**, 4**c**; г) **a**, **b**;д) –5**a**, 3**b**, 4**c**.

Завдання 1.7. **a** = (l, 2, 3), **b** = (–5, 3, –1), **c** = (–6, 4, 5), **d** = (–4, 11, 20).

Завдання 1.8. A_1(–10;6;0), A_2(4;8;–6), A_3(2;9;11), A_4(1;3;–1).

Завдання 1.9. A(–3, –1), B(–4, –5), C(8, 1).

Завдання 1.10. Яку ординату має точка С, що лежить на одній прямій з точками А(–6,–6) і В(–3,–1) і має абсцису, рівну 3?

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, що проходить через точку К(1; –4; 6) і перпендикулярна вектору a=4**i** + 3**j**+2**k**.

Завдання 1.12. ρ = 4(1+cos2φ).

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+3x-7}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$; е) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=7x^2+\dfrac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{8}{x^3}$	$y=\sqrt{(x-3)^7}+\dfrac{9}{7x^2-5x-8}$	$y=tg^6 2x\cdot\cos 7x^2$
$y=4^{-\sin x}\,arctg 3x$	$y=\sqrt{(x+3)^5}\,\arcsin 2x^3$	$y=ch^2 5x\cdot arctg x^4$
$y=\dfrac{(3x+1)^4}{e^{4x}}$	$y=\dfrac{\arccos^3 5x}{th(x-2)}$	$y=\dfrac{\sqrt{\arccos 3x}}{sh^2 x}$
$y=\dfrac{8\lg(4x+5)}{(x-1)^5}$	$y=\sqrt[8]{\dfrac{x-4}{x+4}}\,arctg(5x+1)$	$y=(ctg\,2x^3)^{\sin\sqrt{x}}$
$y=(tg(9x+2))^{ch(2x-1)}$	$y=\dfrac{(x-1)^6(x+2)}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}$	$y=ctg 3x-x\cos\pi$
б)		
$y=\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$	$\ln y=arctg\,\dfrac{x}{y}$	$\begin{cases} x=arctg(t^3+7t) \\ y=\dfrac{ctg 7t}{e^{2t}} \end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$; б) $y=x+\ln(x^2-1)$.

Завдання 2.4. $z=x^3-2xy+y^2+1$.

Завдання 2.5. $z=arctg(xy^2)$, M(2; 3), $\vec{s}\{4;-3\}$.

Завдання 2.6. $z=e^{-x^2-y^2}\cdot(4x^2+y^2)$.

ВАРІАНТ №24
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 1\\ 9 & 7 & \lambda\\ -4 & 8 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -8 & 4\\ -1 & \mu & 5\\ 9 & -6 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\ -8\\ 1\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}5 & 9 & -4 & -3\\ 2 & 1 & -1 & 5\\ 8 & -9 & 3 & -6\\ 2 & 0 & 5 & 7\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}-2x_1-5x_2+x_3=20\\ -5x_1+x_2+3x_3=-4\\ 4x_1+2x_2-3x_3=-8\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=14\\ 2x_1+3x_2-4x_3=-16\\ 3x_1-2x_2-5x_3=-8\end{cases}$.

Завдання 1.4. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}4x_1+6x_2-x_3-5x_4=0;\\ 2x_1+2x_2+13x_3-8x_4=0;\\ x_1+2x_2-7x_3+x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 3**i** – **j** + 2**k**, **b**= –**i** + 5**j** – 4**k**, **c** = 6**i** – 2**j**+ 4**k**.
а) 4**a**, –7**b**, –2**c**; б) 6**a**, –4**c**; в) –2**a**, 5**b**; г) **a**, **c**; д) 6**a**, –7**b**, –2**c**.

Завдання 1.7. **a** = (–2, 5, 1), **b** = (3, 2, –7), **c** = (4, –3, 2), **d** = (–4, 22, –13).

Завдання 1.8. A_1(3;–4;4), A_2(5;–7;–1), A_3(8;12;0), A_4(3;–9;6).

Завдання 1.9. A(–2, –6), B(–3, 5), ' C(4, 0).

Завдання 1.10. Через точку перетину прямих $2x–5y–1=0$ і $x+4y–7=0$ провести пряму, що ділить відрізок між точками A(4, –3) і B(–1, 2) у відношенні λ= 2/3.

Завдання 1.11. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки M(–2; 3; –5) на площину $x+2y+5z–1=0$.

Завдання 1.12. $\rho=\dfrac{1}{2-\cos 2\varphi}$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{x^2-5x+14}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{14x^2+3x}{7x^2+2x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^3+x^2-7}{2x^2-5x+3}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2-x-3x^2}{x^3-16}$; е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=8x^3-\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^2}$	$y=\sqrt[3]{(x-8)^4}-\dfrac{2}{1+3x-4x^2}$	$y=\dfrac{tg^2(x-2)}{\lg(x+3)}$
$y=2^{\cos x}arcctg^3 x$	$y=\sqrt[3]{(x+1)^2}\arccos 3x$	$y=th^4 7x\cdot\arccos x^3$
$y=\dfrac{5x^2+4x-2}{e^{-x}}$	$y=\dfrac{\arcsin^2 4x}{th(5x-3)}$	$y=ctg^3 4x\cdot\arcsin\sqrt{x}$
$y=\dfrac{2\log_3(4x-7)}{(x+3)^4}$	$y=\sqrt[9]{\dfrac{x-1}{x+1}}arcctg(7x+2)$	$y=(tg 7x^5)^{\sqrt{x+2}}$
$y=(ctg(7x+5))^{sh3x}$	$y=\dfrac{(x-1)^4(x-7)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}$	$y=(3-x)\cos 4x$
б)		
$y=\ln\cos(5x)$	$(x^3-y^3)=3xy$	$\begin{cases} x=e^{-3t^3} \\ y=\dfrac{t^2}{2\ln^2 t}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{3x^2-7x-16}{x^2-x-6}$; б) $y=\ln(1+x^2)$.

Завдання 2.4. $z=\frac{1}{3}x^3+x^2-3y^2-3$.

Завдання 2.5. $z=2x^2+y^2x-4y$, M(2; 2), $\vec{s}\{6;-8\}$.

Завдання 2.6. $z=2\sqrt{x^2+y^2}-1$.

ВАРІАНТ №25
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -5 \\ 6 & -7 & 3 \\ 9 & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 9 & 3 & 8 \\ \mu & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 5 & -8 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ -5 & -8 & 2 & 9 \\ -3 & 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -6 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

Завдання 1.5. $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Завдання 1.6. **a**= –3**i** –j–5**k**, **b** = 2**i** – 4**j** + 8**k**, **c** = 3**i** + 7**j** – **k**.
а) 2**a**, –**b**, 3**c**; б) –9**a**, 4**c**;в) 5**b**, –6**c**;г) **b**, **c**; д) 2**a**, 5**b**, –6**c**.

Завдання 1.7. **a** = (3, 1, 2), **b** = (–4, 3, –1), **c** = (2, 3, 4), **d** = (14, 14, 20).

Завдання 1.8. A_1(–1;–8;6), A_2(4;–6;5), A_3(3;7;10), A_4(2;4;–9).

Завдання 1.9. A(–7, –2), B(3, –8), C(– 4, 6).

Завдання 1.10. Відомі рівняння двох сторін ромба *2x–5y–1=0* і *2x–5y–34=0* та рівняння однієї з його діагоналей: *x+3y–6=0*. Знайти рівняння другої діагоналі.

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин *x+2y+5z–1=0* і *3x+3y–z+4=0* та через точку К(–3; 2 4).

Завдання 1.12. ρ = 4(1–*sin*φ).

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-8}{8x^3-4x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=8x-\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{1}{x}-\sqrt[5]{x^4}$	$y=\dfrac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{(x+1)^5}$	$y=ctg\,\dfrac{1}{x}\cdot\arccos x^4$
$y=\lg(x-3)\cdot\arcsin^2 5x$	$y=tg^3x\cdot arcctg3x$	$y=cth4x^5\cdot\arccos 2x$
$y=\dfrac{\sqrt{5x^2-x+1}}{e^{3x}}$	$y=\dfrac{ch^2(4x+2)}{arcctgx^3}$	$y=\dfrac{\cos^4(7x-1)}{\lg(2x+5)}$
$y=\dfrac{3\log_4(2x+9)}{(x-7)^2}$	$y=\sqrt{\dfrac{7x-4}{7x+4}}\arcsin(x^2+1)$	$y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$
$y=(sh(3x-7))^{\cos(x+4)}$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{x-3}(x+7)^5}{(x-4)^2}$	$y=x^{-3}\arcsin\sqrt{\ln x}$
б)		
$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(e^x+1)(e^y+1)=2$	$\begin{cases}x=e^{5t}+\cos 8y\\ y=arcctgt^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{x^3-8}{2x^2}$; б) $y=x^2e^{-x}$.

Завдання 2.4. $z=\frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{3}y^3+4.$

Завдання 2.5. $z=ln(x^3-y^3)$, M(2; 1), $\vec{s}\{3;-4\}$.

Завдання 2.6. $z=(2x-x^2)\cdot(2y-y^2)$.

ВАРІАНТ №26
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda\\ 4 & 3 & -3\\ 2 & -6 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 3\\ \mu & 8 & -2\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -3\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}1 & -4 & 7 & 8\\ 3 & 5 & 2 & -9\\ -1 & 0 & 5 & 6\\ -3 & 6 & -4 & 2\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}x_1+5x_2-6x_3=-15\\ 3x_1+x_2+4x_3=13\\ 2x_1-3x_2+x_3=9\end{cases}$; б) $\begin{cases}5x_1-x_2-2x_3=1\\ 3x_1-4x_2+x_3=7\\ 2x_1+3x_2-3x_3=4\end{cases}$.

Завдання 1.4. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 3\\ 1 & 8 & -2\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}3x_1+5x_2-3x_3-x_4=0;\\ x_1-x_2+3x_3+4x_4=0;\\ 2x_1+6x_2-6x_3-5x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = –3**i** – **j** + 7**k**, **b** = **i** – 5**k**, **c** = 6**i** + 4**j** – **k**.
а) –2**a**, **b**, 7**c**; б) 5**a**, –2**c**; в) 3**b**, **c**; г) **a**, **c**; д) –2**a**, 3**b**, 7**c**.

Завдання 1.7. **a** = (3, –1, 2), **b** = (–2, 4, 1), **c** = (4, –5 ,–1), **d** = (–5, 11, 1).

Завдання 1.8. A_1(1;3;–6), A_2(5;–7;2), A_3(0;2;–55), A_4(6;3;–1).

Завдання 1.9. A(3, –4), B(5, –7), C(–4, 7).

Завдання 1.10. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку *A*(2, 6) і утворює з осями координат трикутник, який знаходиться у другій чверті і має площу 3 кв. од.

Завдання 1.11. Скласти загальне рівняння площини, що проходить точку A(3; –4; 1) паралельно координатній площині *Oxz*.

Завдання 1.12. $\rho = 3(1+\cos 2\varphi)$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{4}{x}+3x$	$y=\dfrac{3}{x-4}+\sqrt[6]{(2x^2-3x+1)^5}$	$y=\dfrac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{th\,x}}$
$y=\log_2(x+3)\cdot\arccos^2 x$	$y=\sqrt{(x-2)^3}\,arctg\,3x$	$y=cth3x\cdot\arcsin^4 2x$
$y=\dfrac{e^{-x^2}}{(2x-5)^7}$	$y-\dfrac{\log_2(3x+7)}{tg\,3x}$	$y=tg\sqrt{x}\cdot arcctg\,3x^5$
$y=\dfrac{\lg(x^2+2x)}{(x+8)^4}$	$y=\sqrt[3]{\dfrac{8x-3}{8x+3}}\arccos(x^2-5)$	$y=(ctg7x)^{sh(x+3)}$
$y=(ch(2x-3))^{tg(x+5)}$	$y=\dfrac{\sqrt{x+10}(x-8)^3}{(x-1)^5}$	$y=e^{-x}\cdot\sin3x$
б)		
$y=tgx-\dfrac{1}{3}ctg^7 3x$	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$	$\begin{cases}x=\ln(7t^2+2t)\\ y=\dfrac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$; б) $y=xe^{-x^2}$.

Завдання 2.4. $z=x^3+5xy^2+7x$.

Завдання 2.5. $z=4x^3+2x^3y^2$, M(–1; 2), $\vec{s}\{4;-3\}$.

Завдання 2.6. $z=xy^2(1-x-y)$.

ВАРІАНТ №27
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & \lambda \\ 8 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \mu & 5 & 3 \\ -7 & 2 & 1 \\ -9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} -1 & 8 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & -2 & 7 \\ 1 & 9 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$.

Завдання 1.4. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0; \\ 6x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \\ 5x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = –3**i** – **j** + 5**k**, **b** = 2**i** – 4**j** + 6**k**, **c** = **i** – 2**j** + 3**k**.
а) – 3**a**, 4**b**, –5**c**; б) 6**b**, 3**c**; в) **a**, 4**c**;г) **b**, **c**; д) –3**a**, 4**b**, 5**c**.

Завдання 1.7. **a** = (4, 5, 1), **b** = (1, 3, 1), **c** = (–3, –6, 7), **d** = (19, 33, 0).

Завдання 1.8. A_1(6; 2; –4), A_2(0; –6; 6), A_3(5 ;–8;–3), A_4(–5;9;–7).

Завдання 1.9. A(7, –8), B(5, 4), C(–3, –9).

Завдання 1.10. Знайти точку Е перетину медіан трикутника, вершинами якого є точки А (–3, 1), В(7, 5) та С(5, –3).

Завдання 1.11. Скласти рівняння площини, що проходить через середину відрізку АВ перпендикулярно до цього відрізку, якщо А(–1; 4; 7), В (2;–3; 5).

Завдання 1.12. $\rho = 3\cos 2\varphi$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7x^3-2x+4}{2x^2+x-5}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x-13}{x^7-3x^5-4}$; е) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$; і) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=4x^3+\dfrac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{2}{x^4}$	$y=\dfrac{4}{(x-7)^3}-\sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}$	$y=\dfrac{arctg^2 5x}{\sqrt[3]{cth\ x}}$
$y=2^{-x}arctg^3 4x$	$y=\sqrt[5]{(x+4)^2}\arcsin 7x^2$	$y=th^5 3x\cdot arcctg\sqrt{x}$
$y=\dfrac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}$	$y=\dfrac{\ln^3 x}{ctg(x-3)}$	$y=tg^3 2x\cdot\arccos 2x^3$
$y=\dfrac{3\ln(x^2+5)}{(x-7)^3}$	$y=\sqrt[4]{\dfrac{2x-5}{2x+5}}arctg(3x+2)$	$y=(sh\,5x)^{arctg(x+2)}$
$y=(th(7x-5))^{\sin(x+2)}$	$y=\dfrac{\sqrt[5]{(x-2)^3}\,(x-1)}{(x+3)^4}$	$y=x\sqrt{\arcsin x}$
б)		
$y=\dfrac{1}{2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2(1+x)}$	$y^2x=e^{\frac{y}{x}}$	$\begin{cases}x=\sqrt[3]{(1-t)^2}\\ y=\dfrac{\cos 6t}{\sqrt{3t+t^3}}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $y=\ln(x^2+4x)$;

Завдання 2.4. $z=xy^3+2x^2+3y$.

Завдання 2.5. $z=ln(x^2\,y+6x)$, M(1; 1), $\vec{s}\{3;2\}$.

Завдання 2.6. $z=x^3+y^3-15xy$.

ВАРІАНТ №28
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 6\\ -8 & -3 & \lambda\\ -9 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & -5 & 1\\ -2 & \mu & 4\\ 6 & -8 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}-8 & -4 & 5 & -4\\ 1 & 1 & -2 & -7\\ -3 & 0 & 10 & -5\\ 4 & 6 & 1 & -1\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}5x_1+2x_2-4x_3=-16\\ x_1+3x_3=-6\\ 2x_1-3x_2+x_3=9\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3=2\\ x_1+5x_2-3x_3=4\\ 2x_1-x_2+4x_3=5\end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 7 & -6\\ 4 & -2\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3-3x_4=0;\\ -4x_1-7x_2+2x_3-x_4=0;\\ 3x_1+3x_2-4x_3+4x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 4**i** – 5**j** – 4**k**, **b**= 5**i** – 2**j**, **c** = 2**i** + 4**j** – 3**k**.
а) **a**, 7**b**, –2**c**; б) –5**a**, 4**b**; в) 8**c**, –3**a**; г) **a**, **c**; д) –3**a**, 4**b**, 8**c**.

Завдання 1.7. **a** = (1,–3, 1), **b** = (–2,–4, 3), **c** = (0,–2, 3), **d** = (–8,–10, 13).

Завдання 1.8. A_1(1;–6;–2), A_2(5; 4; –7), A_3(1;–2;9), A_4(6;–2;1).

Завдання 1.9. A(7, –5), B(–9, 6), C(–3, 0).

Завдання 1.10. Записати рівняння прямих, що проходять через точку A(–1,1) під кутом 45° до прямої $2x + 3y=6$

Завдання 1.11. Знайти величини відрізків, які відсікає на осях координат площина, що проходить через точку A(2; –3; 3) паралельно площині $3x+y-3z=0$.

Завдання 1.12. $\rho = 2\sin 3\varphi$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to -8}\frac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to -6}\frac{x^2+2x-24}{2x^3+15x+18}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x^2-3x}{3x^2+x-10}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^2-3x+1}{x^3+2x^2+5}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-2}{\sqrt{8+x}-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$; і) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi/2-x)\,tg\,x$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=4x^5-\frac{5}{x}-\sqrt{x^3}+\frac{2}{x^3}$	$y=\sqrt{(x-4)^7}-\frac{10}{3x^2-5x+1}$	$y=2^{tgx}arctg^5 3x$
$y=\ln(x-4)\cdot arcctg^4 3x$	$y=\arcsin^3 4x\cdot ctg3x$	$y=sh^4 3x\cdot\arccos 5x^4$
$y=\frac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$	$y=\frac{tg^4 5x}{\ln(xs+7)}$	$y=\frac{arctg^2 5x}{th(x+3)}$
$y=\frac{4\log_2(3x-5)}{(x-2)^2}$	$y=\sqrt[5]{\frac{3x-4}{3x+4}}\,arcctg(2x+5)$	$y=(arctg\ x)^{th(3x+1)}$
$y=(ch(3x+2))^{\cos(x+4)}$	$y=\frac{\sqrt[4]{(x+1)^3}\,(x-2)^5}{(x-3)^2}$	$y=x^2\sin x^3$
б)		
$y=\frac{1}{\sqrt{\ln x}}$;	$x^2+2xy+y^2=2x$;	$\begin{cases}x=\sqrt[4]{(1-t)^3}\\ y=t\cdot e^{-7t^2}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=x-\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=e^{2x-x^2}$.

Завдання 2.4. $z=x^2y-3y^2+4x$.

Завдання 2.5. $z=arctg(x^2y^2)$, M(2; 3), $\vec{s}\{4;-3\}$.

Завдання 2.6. $z=4-(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$.

ВАРІАНТ №29
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -6 & 7 & 3 \\ \lambda & -8 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -6 & -3 & 4 \\ \mu & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 5 & -8 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -8 & 2 & -4 \\ -3 & 6 & 9 & 1 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=-9 \\ 4x_1-x_2+5x_3=-2 \\ 3x_2-7x_3=-6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=5 \\ 3x_1+4x_2-7x_3=2 \\ 5x_1+x_2-5x_3=9 \end{cases}$.

Завдання 1.4. $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+2x_4=0; \\ 7x_1-x_2+2x_3+3x_4=0; \\ 4x_1-5x_2+7x_3+1x_4=0. \end{cases}$

Завдання 1.6. **a**= –9**i** +4**k**, **b** = 2**i** – 4**j** + 6**k**, **c** = 3**i** – 6**j** + 9**k**.
а) 3**a**, –5**b**, 4**c**; б) 6**b**, 2**c**; в) 2**a**, 8**c**; г) **b**, **c**; д) 3**a**, 6**b**, –**c**.

Завдання 1.7. **a** = (5, 7, –2), **b** = (–3, 1, 3), **c** = (1, –4, 6), **d** = (14, 9, –1).

Завдання 1.8. $A_1(-1;8;-5)$, $A_2(-4;6;5)$, $A_3(2;-7;9)$, $A_4(2;-4;-9)$.

Завдання 1.9. A(7, 2), B(–3, –8), C(–4, 8).

Завдання 1.10. Задано рівняння висот трикутника ABC: $2x-3y+1=0$, x+2y+1=0 і координати його вершини A(2, 3). Знайти рівняння сторін AB та AC трикутника.

Завдання 1.11. Довести, що пряма $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ паралельна площині $2x+y-z=0$, а пряма $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ лежить в цій площині.

Завдання 1.12. $\rho=\dfrac{2}{2-\cos\varphi}$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-81}{3x^2+4x+2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{9x-4}\right)^{2x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=\dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{x^3}-\sqrt[5]{x^3}-2x^6$	$y=\dfrac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}$	$y=\dfrac{\sqrt{sh^3x}}{arcctg\,5x}$
$y=\lg(x+3)\cdot arcctg^2 5x$	$y=e^{-\cos x}\arcsin 2x$	$y=\sin^5 3x\cdot arctg\sqrt{x}$
$y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-7}}{e^{-x^3}}$	$y=\dfrac{\log_3(x+4)}{\cos^5 x}$	$y=cth^2 4x\cdot\arcsin x^3$
$y=\dfrac{2\ln(2x^2+3)}{(x-7)^4}$	$y=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}\arcsin 2x$	$y=(cth\sqrt{x})^{\sin(x+3)}$
$y=(\ln(7x+4))^{tgx}$	$y=\dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}$	$y=2^x e^{-x}$
б)		
$y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$	$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{a}$	$\begin{cases}x=arctg(21t+e^{-t})\\ y=(7t-5)^7\cdot\sqrt{\ln t}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Завдання 2.4. $z=4x^3+5xy^2-7x$.

Завдання 2.5. $z=2x^3+5y^2x-7y$, M(2; 2), $\vec{s}\{6;-8\}$.

Завдання 2.6. $z=x^2+xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

ВАРІАНТ №30
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & \lambda & 2\\ 8 & 2 & -9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 0 & 5\\ \mu & 3 & -7\\ 2 & 9 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -6\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 5 & -7\\ 4 & -6 & -2 & 5\\ -1 & -3 & 4 & 1\\ 0 & 8 & -4 & 9\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}7x_1+4x_2-x_3=13\\ 3x_1+2x_2+3x_3=3\\ 2x_1-3x_2+x_3=-10\end{cases}$; б) $\begin{cases}4x_1-9x_2+5x_3=1\\ 7x_1-4x_2+x_3=11\\ 3x_1+5x_2-4x_3=5\end{cases}$.

Завдання 1.4. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$.

Завдання 1.5. $\begin{cases}3x_1+7x_2-2x_3+x_4=0;\\ x_1+6x_2-7x_3-3x_4=0;\\ 2x_1+x_2+5x_3-2x_4=0.\end{cases}$

Завдання 1.6. **a** = 5**i** – 6**j** – 4**k**, **b** = 4**i** + 8**j** – 7**k**, **c** = 3**j** – 4**k**.

а) 5**a**, 3**b**, – 4**c**; б) 4**b**, **a**; в) 7**a**, –2**c**; г) **a**, **b**;д) 5**a**, 4**b**, –2**c**.

Завдання 1.7. **a** = (–1, 4, 3), **b** = (3, 2, –4), **c** = (–2, –7, 1), **d** = (6, 20, –3).

Завдання 1.8. A_1(–5;6;4), A_2(8;–2;5), A_3(–7;–3;2), A_4(–5;7;–1).

Завдання 1.9. A(3, –5), B(–8, 3), C(0, 7).

Завдання 1.10. Задано рівняння двох сторін паралелограма: $x–2y=0$, $x–y–1=0$ та точка перетину його діагоналей M(3,–1). Знайти рівняння двох інших сторін.

Завдання 1.11. Знайти відстань від точки M(2,3,–1) до прямої $x=t+1,\ y=t+2,\ z=4t+13$.

Завдання 1.12. $\rho = 2-\cos 2\varphi$.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

Завдання 2.1.

а) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+3x-4}{2x^2-5x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{7x+4}{3x^3-5x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$; і) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$.

Завдання 2.2.

а)		
$y=\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}$	$y=\sqrt[3]{(x-1)^5}+\frac{5}{2x^2-4x+7}$	$y=\frac{\sqrt[5]{ch3x}}{arctg(x+2)}$
$y=\log_5(x+1)\cdot arctg^2x^3$	$y=\sqrt{(x+5)^3}\arccos^4 x$	$y=\cos^4 3x\cdot\arcsin 3x^2$
$y=\frac{e^{-tgx}}{4x^2+7x-5}$	$y=\frac{tg^4 3x}{\lg(x^2-x+4)}$	$y=th^3 5x\cdot arcctg(2x-5)$
$y=\frac{4\lg(3x+7)}{(x-5)^3}$	$y=\sqrt[7]{\frac{x^2+3}{x^2-3}}\arccos 4x$	$y=(sh3x)^{arctg\,2x}$
$y=(\lg(8x+3))^{tg5x}$	$y=\frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}$	$y=5^{2x}\sin x$
б)		
$y=\lg^3 x^2$	$y=5x\,arctg\frac{y}{x}$	$\begin{cases}x=3(\sin t-\cos t)\\ y=\frac{7^{3t+2}}{arcctg^2 t}\end{cases}$

Завдання 2.3. а) $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$; б) $y=e^{\frac{1}{3-x}}$.

Завдання 2.4. $z=4xy-x^3+y^2+11$.

Завдання 2.5. $z=2x^5+2xy^3$, M(–1; 2), $\vec{s}\{4;-3\}$.

Завдання 2.6. $z=2x^3-xy^2+5y^2+y$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2006. – 647 с.

2. Дубовик В. П. Вища математика: збірник задач: навч. посіб. / В.П. Дубовик та ін. – Київ : Ігнатекс-Україна, 2011. – 480 с.

3. Турчанінова Л.І. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. / Л.І. Турчанінова, О.В. Доля. – К. : Ліра-К, 2021. – 348 с.

4. Турчанінова Л.І. Практикум з вищої математики: навч. посіб., видання друге, доп. і перер. / Л.І. Турчанінова, О.В. Доля. – К. : Кондор, 2010. – 246 с.

5. Федоренко Н.Д. Вища математика: методичні вказівки до виконання інд. завдань. / Н.Д. Федоренко, С.В. Білощицька, О.В. Доля. – Київ : КНУБА, 2018. – 94 с.

6. Доля О.В. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра і векторний аналіз: методичні вказівки до практичних завдань / уклад.: О.В. Доля, Ю.А. Коротких. – Київ : КНУБА, 2014. – 40с.

Для нотаток

Для нотаток

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 1 (ЗМ 1, ЗМ 2)
Лінійна алгебра та векторний аналіз. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних

Методичні вказівки
до виконання самостійних та індивідуальних робіт
для здобувачів ОПП першого рівня вищої освіти
(бакалавр) інженерних та природничих спеціальностей
усіх форм навчання КНУБА

Укладачі: **ДОЛЯ** Олена Вікторівна;
ЗАБАРИЛО Олексій Віталійович;
КОРОТКИХ Юлія Анатоліївна;
РЯБЧУН Юлія Володимирівна

Випусковий редактор *Ю. М. Долгополова*
Комп'ютерне верстання *Ю. М. Долгополової*

Підписано до друку 04.03.2024. Формат 60 × 84 $_{1/16}$.
Ум. друк. арк. 5,58. Обл.-вид. арк. 6,0.
Електронний документ. Вид. № 19/ІІІ-24

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002