

УДК 624.073

Солоний В.А.

ЗАСТОСУВАННЯ СХЕМ ОДНОПРОГІННИХ ЕКВІВАЛЕНТНИХ БАЛОК ДО ЗАДАЧ СТІЙКОСТІ

Розглядається методика розв'язання задачі визначення критичного навантаження центрально стиснутого стояка змінного перетину з однією віссю симетрії (початковий стрижень) (рис. 1, а₁), доводячи його до замінюючого стрижня постійного перетину цієї ж форми нормального поперечного перетину (в подальшому поперечний перетин), довжини, характеру опирання та матеріалу (рис. 1, в) для розрахунків на стійкість за нормативною методикою БНтП або омега-методу. Змінний перетин визначає, що форма поперечного перетину зберігається по всій довжині розглянутого стояка, а площа перетину різна.

Перехід здійснюється заміною початкового стрижня допоміжним стрижнем сходово змінного перетину (рис. 1, б₁). Еквівалентність допоміжного стрижня з початковим досягається наближенням його вигнутої осі при поперечному згині до вигнутої осі початкового стрижня від того ж навантаження.

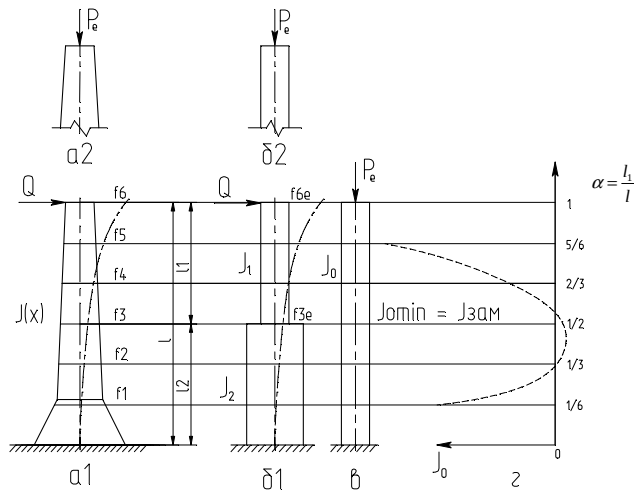


Рис. 1

Еквівалентність визначається (рис. 1, а₁, 1, б₁) рівністю прогину при поперечному згині вільних кінців $f_0 = f_{0e}$ та прогину f_i перерізу

сполученого зі сходиною f_{ie} еквівалентного стрижня, тобто умови $f_i = f_{ie}$. Для кожного $\alpha = l_1/l$ знаходиться J_1 і J_2 . Геометричні параметри заміняючого стрижня (рис. 1,в) знаходимо за умови рівності ейлерового навантаження односхідчатого еквівалента та заміняючого стрижня вважаючи, що відбувається втрата стійкості II-го роду.

Шукаємо найменше критичне навантаження, коли вигнута вісь прийме найпростішу форму при умові, що розглядувані стояки не мають згиннокрутної та місцевої втрати стійкості.

Прогини визначаються в позначених (контрольних) перетинах початкового стрижня (рис. 1,а₁) при поперечному згині від навантаження на вільному кінці.

Критичною умовою втрати стійкості еквівалентного стрижня є рівняння [6]:

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{P_e l_1^2}{E J_1}}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{P_e l_2^2}{E J_2}}\right) = \sqrt{\frac{J_2}{J_1}}. \quad (1)$$

Щоб отримати чисельний зв'язок параметрів жорсткості односходового еквівалента з заміняючим стояком постійного перетину

замість P_e підставляємо значення $P_e = \frac{\pi^2 E J}{4 l^2}$ (2) в (1), що дає

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{l_1}{l} \cdot \sqrt{\frac{J}{J_1}}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{l_2}{l} \cdot \sqrt{\frac{J}{J_2}}\right) = \sqrt{\frac{J_2}{J_1}}. \quad (3)$$

Позначимо

$$\alpha = \frac{l_1}{l}, 1 - \alpha = \frac{l_2}{l}, z = \frac{J}{J_2}, \beta = \frac{J_1}{J_2}, J_1 = \beta \cdot J_2. \quad (4)$$

Тоді

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi \alpha}{2 \sqrt{\beta}} \cdot \sqrt{z}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi (1 - \alpha)}{2} \cdot \sqrt{z}\right) = \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \quad (5)$$

Співвідношення (5) зв'язує параметри жорсткості еквівалентного стрижня з однією сходиною зміни перетину та параметра жорсткості заміняючої консолі постійного перетину. Значення Z знаходиться методом підбору.

Використавши (5) знаходимо Z_i , а по Z_i знаходимо J_i заміняючого стояка при положенні сходинок i . Нас цікавить критичне навантаження заміняючого стояка, тому серед багатьох J_i значень шукаємо найменше

$J_i = J_{o \text{ мін}}$ (рис. 1,г). Крім цього, можемо визначити прогини еквівалента та порівняти їх з прогинами контрольних перетинів початкового стрижня.

Геометричні параметри перетину еквівалента визначаємо після знаходження параметрів α , J_1 , J_2 .

Для стояків, навантажених за рис. 1, a_2 , b_2 ейлерове навантаження дозволяють знаходити енергетичні методи: Релея, Тимошенка, Рітца, Галеркіна. Точне (у розумінні P_e) досягається при використанні точного рівняння вигнутої осі. Інакше похибка може бути більшою 5%.

Використання в якості вигнутої осі при поздовжньому згині рівняння вигнутої осі при поперечному згині дає при застосуванні енергетичного методу прийнятний результат та надає широкі можливості у обчисленні розрахункових параметрів. Заміна початкового стрижня еквівалентним з підбором параметрів його вигнутої осі при контролюванні прямим порівнянням прогинів відповідних перетинів початкового стояка та еквівалента дозволяє досягти рівності ейлерового навантаження. Це підтверджують результати розрахунків у стовпчику № 6 табл. 1 виконаних автором.

Еквівалент з одною сходинкою жорсткості дозволяє обмежитись визначенням трьох параметрів: α , J_1 , J_2 . Можна порівняти і за більшою кількістю перетинів. При цьому зростає об'єм розрахунків, а точність росте незначно (див. табл. 1 стовпець 6). Підвищувати точність, коли сам підхід залишається приблизним, не має сенсу.

Звернемося до параметрів заміняючого стрижня (рис. 1,в). Для визначення критичного навантаження відповідно БНтП потрібно знати форму перетину, його площу та радіус інерції заміняючого стрижня.

Застосуємо поняття питомого радіуса інерції [4], який визначається як відношення радіуса інерції до сторони квадратного перетину рівновеликої площі

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{J}}{A}. \quad (6)$$

Для частини еквівалента, що прилягає до закладання

$$\rho_2 = \frac{r_2}{\sqrt{A_2}} = \frac{\sqrt{J_2}}{A_2}.$$

Використовуючи (6), вимагаємо $\rho = \rho_2$.

Тоді

$$\frac{\sqrt{J}}{A} = \frac{\sqrt{J_2}}{A_2}; \frac{r}{\sqrt{A}} = \frac{r_2}{\sqrt{A_2}}, \quad (7)$$

що дозволяє визначити площу і радіус інерції заміняючого стрижня.

$$A = A_2 \cdot \sqrt{\frac{J}{J_2}} \quad \text{або} \quad A = A_2 \sqrt{z}, \quad (8)$$

$$r = r_2 \sqrt{\frac{A}{A_2}} \quad \text{або} \quad r = r_2 \sqrt[4]{z}. \quad (9)$$

Після чого знаходимо $P_{кр} = \varphi AR$.

Щоб оцінити придатність отриманих результатів з БНТП перейдемо до розрахункових параметрів l_1 .

$$\frac{P_{кр}}{A_1} = \sigma_1 \rightarrow \frac{\sigma_1}{R} = \varphi_1 \rightarrow \mu_1 l_1 = r_1 \lambda_1 \rightarrow \mu_1 = \frac{r_1 \lambda_1}{l_1}.$$

Аналогічно для відрізка l_2 . Ці ж параметри можна визначити аналітично. Приклад, наведений в [2], використаний для створення контрольної серії. Наведемо повну умову цієї задачі. Це консоль з двома сходами зміни жорсткості. При цьому

$$i_1 = \frac{1}{2} i_2 = \frac{1}{3} i_3; l_1 = h_1; l_2 = 2h_1; l_3 = 3h_1; J_1 = \frac{1}{9} J; J_2 = \frac{4}{9} J; J_3 = J.$$

Знаходимо ейлерове навантаження використавши схему стояка (див. табл. 1, рядок 1, стовпець 2).

$$P_e = \frac{v^2 EJ_1}{h_1^2},$$

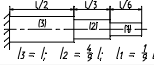
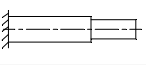
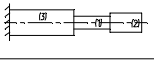
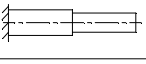
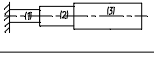
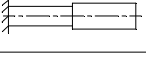
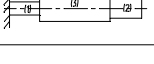
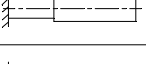
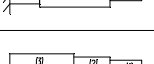
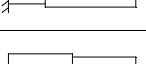
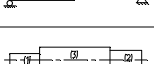
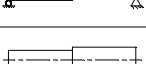
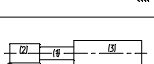
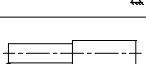
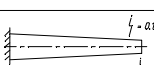
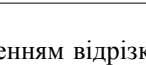
де $h_1 = \frac{l}{6}$ і $v = \arccos \sqrt{0.6} = 39^\circ 13,5' = 0,6845$ [2]. Позначимо всю

довжину стояка l і $J_1 = \frac{1}{9} J$, тоді $P_e = \frac{4v^2 EJ}{l^2}$ (а).

Для заміняючого стояка $P_e = \frac{\pi^2 EJ_0}{4l^2}$ (б). Звідси для прикладу 1,

порівнявши (а) і (б), отримаємо $\frac{J_0}{J} = \frac{16v^2}{\pi^2} = 0,760055$.

Таблиця 1

	Початкова стійка	J_0	Односходинковий еквівалент	$J_{зам}$	$\delta, \%$
1	 $l_1 = l; l_2 = \frac{1}{3}l; l_3 = \frac{1}{6}l$	0.760055		0.76244	0.3
2		0.444444		0.42863	-3.6
3		0.226506		0.22578	-0.3
4		0.256407		0.25671	0.1
5		0.286697		0.27458	-4.2
6		0.544674		0.54483	0.3
7		0.496789		0.49635	-0.1
8		0.632291		0.63229	0
9		0.25		0.25	0
10	 зрізаний конус	0.487		0.48637	-0.2

Приклади 2÷9 складені переставленням відрізків з різною жорсткістю та заміною опирання. Аналогічно знайдені відповідні відношення у стовпчику 3 таблиці для прикладів 2÷9. У випадку 10 використовуємо табл. 28 [1]. Похибка підрахована як

$$\delta\% = \frac{J_{зам} - J_0}{J_0} \cdot 100\%,$$

де $J_{зам}$ – момент інерції замінюючого стояка постійного перетину, знайдений по запропонованому методу.

Для сходинкових стояків та деяких форм зміни перетину є методики та таблиці, за якими можна знайти P_e , але нема засобів знаходження

критичного навантаження, тому порівняння зроблено на рівні моментів інерції замінюючого стрижня постійного перетину.

Для прикладів 1, 5, 10 табл. 1 на рис. 2 наведені графіки зміни похибки від параметрів сходового еквівалента. Всі графіки в інтервалі $0 \div 1$ мають абсолютний мінімум, знаходження якого не було метою.

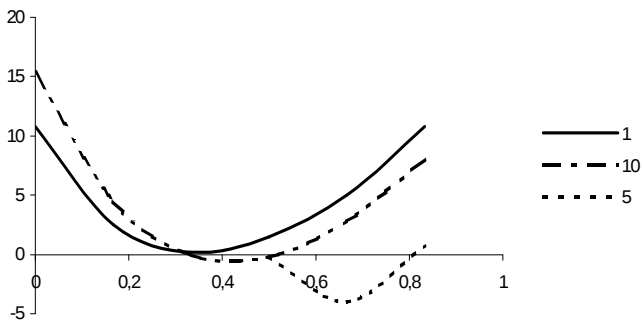


Рис. 2. Графік зміни похибки $\delta, \%$ від положення сходинки еквівалента α

В якості вирішення приймалися параметри сходового еквівалента найближче до мінімального значення жорсткості його замінюючого стрижня при обумовленому кроці місцезнаходження сходинки.

Можливі витoki похибок:

1. Приблизне виконання зближення вигнутих осей.
2. Визначення положення сходинки і відношення моментів інерції замінюючого стояка близьке до мінімуму.
3. Шукані величини — корені трансцендентних рівнянь визначаються наближено.
4. Потрапляємо на ділянку пружно-пластичних деформацій при визначенні $P_{кр}$ по еквіваленту постійного перетину.
5. Точність визначення коефіцієнта φ та розрахункового опору матеріалу по таблицях. За результатами розрахунків (останній стовпчик табл. 1) похибка була не більше 5%.

Методика складна та громіздка, але реалізується на персональному комп'ютері. Приклади на рис. 3 вирішені автором з використанням всього або частини арсеналу засобів наведеного прикладу. На рис. 4 наведені деякі приклади, вирішення яких можливе по наведеній методиці, але на цьому далеко не обмежуються її можливості.

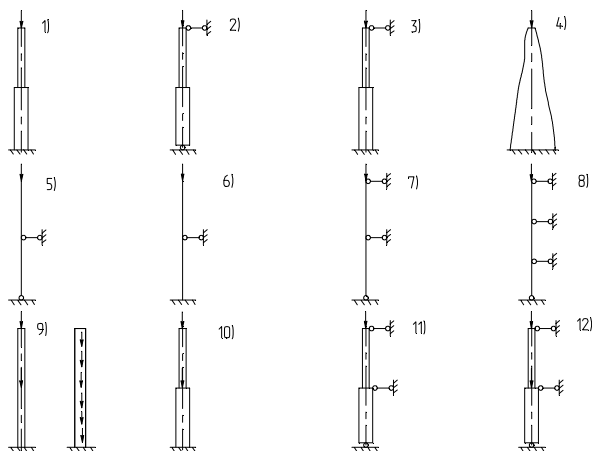


Рис. 3. Схеми задач, які вирішені з використанням розглянутої методики

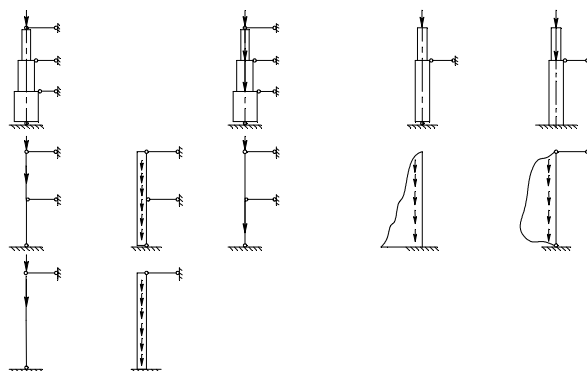


Рис. 4. Деякі варіанти задач, що вирішуються з використанням даної методики

1. Динник А.Н. Продольный изгиб. Кручение. – Академия Наук СССР, 1955.
2. Корноухов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1949.
3. Пиковский А.А. Статика стержневых систем со сжатыми элементами. – М.: Физматгиз, 1961.
4. Строительная механика и расчет сооружений. 1984.-№3. стр.69.
5. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов. Том 1.– М.: Физматгиз, 1960.
6. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов. Том 2. – М.: Наука, 1965.

Матеріал надійшов до редакції 15.11.04.