

УДК 539.3

Пошивач Д. В.

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЗА ІМОВІРНІСТЮ ВИПАДКОВИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ З ГОФРОВАНОЮ СТІНКОЮ

Методом Монте-Карло досліджується стійкість за імовірністю параметричних коливань двотаврової балки з гофрованою стінкою під дією випадкового динамічного згинального навантаження. Побудовано границі стійкості за статистичною частотою таких коливань.

Динамічне поздовжнє навантаження на конструкцію не тільки змушує поздовжні коливання, але також є параметричним по відношенню до поперечних коливань. Коливання під дією параметричного навантаження, тобто параметричні коливання найчастіше не стабілізуються, а розвиваються шляхом згасання або необмеженого зростання. Постає питання про їхню динамічну стійкість. Дослідження динамічної стійкості полягає у визначенні зон стійкості в просторі амплітудних і частотних параметрів навантаження. При стохастичному навантаженні параметричні коливання є випадковим процесом. Їхня стійкість розуміється як стійкість за імовірністю стохастичної системи. Таке означення дозволяє дослідження стійкості методом Монте-Карло.

Для певного набору точок у просторі амплітудних і частотних параметрів навантаження проводиться дослідження стійкості коливань. Для кожної з цих точок проводиться серія випробувань, що полягають у чисельному моделюванні випадкових коливань. За результатами серії випробувань з'ясовується статистична частота втрати стійкості. Між дослідженими точками може бути побудоване сімейство ліній, що з певною точністю відображають границі стійкості за імовірністю.

При розгляді реальних конструкцій постає питання про формування математичних моделей, придатних для дослідження методом Монте-Карло. Одним зі шляхів створення таких моделей може бути редукування скінченноелементних моделей конструкцій.

Розглядається сталевая двотаврова зварена балка зі синусоїдально гофрованою стінкою (рис. 1), завантажена навантаженням $q(t)$, рівномірно розподіленим уздовж серединної лінії стінки. Балка закріплена на кінцях в'язями, що перешкоджають лінійним переміщенням та повороту навколо поздовжньої осі. Динамічне змінювання навантаження змушуватиме згинальні коливання балки у площині xu . Водночас, по

відношенню до деформацій балки із цієї площини таке навантаження буде параметричним.

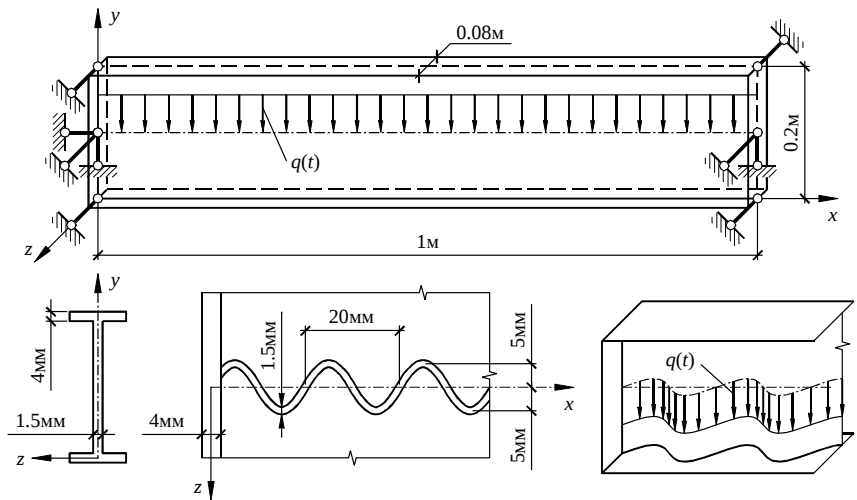


Рис. 1

Засобами програмного комплексу "NASTRAN 4" створено скінченноелементну модель балки, що складається з пластинчатих та стержньових елементів та містить 8020 елементів і 7227 вузлів. Визначені частоти та форми власних коливань конструкції. Визначено також критичне значення статичного навантаження $q_{cr} = 3.6551 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$.

Скінченноелементна модель підлягає редукуванню шляхом розкладання вектора вузлових переміщень по формах власних коливань. Рівняння динамічної рівноваги редукованої моделі після введення в нього доданків, що враховують сили опору рухові, матиме наступний вигляд:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + [\mathbf{K} + \mathbf{G}q(t)]\mathbf{u}(t) = 0,$$

де $\mathbf{u}(t)$ — вектор узагальнених координат, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{G}$ — матриці відповідно демпфірування, жорсткості та геометричної жорсткості редукованої моделі.

У подальшому досліджуватиметься редукована модель, обмежена двома ступенями вільності, що відповідають першим формам власних коливань конструкції. Ці форми представляють собою переважно згинання балки із площини xu та кручення навколо поздовжньої осі.

Відповідні власні частоти дорівнюють $\omega_1 = 888.14 \text{ рад/с}$, $\omega_2 = 1046.9 \text{ рад/с}$.

За допомогою методики, описаної в роботах [1, 2], отримано матриці жорсткості та геометричної жорсткості для редукованої моделі з двома ступенями вільності:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 7.888 & 0 \\ 0 & 10.96 \end{bmatrix} \frac{10^5}{\text{с}^2}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -1.6925 \\ -1.6298 & 0 \end{bmatrix} \frac{\text{м}}{\text{Н} \cdot \text{с}^2}.$$

Відповідна матриця демпфірування при параметрі згасання $\xi = 0.02$ дорівнює

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_1 & 0 \\ 0 & 2\xi\omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.5256 & 0 \\ 0 & 41.876 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{с}}.$$

Динамічне навантаження виражається формулою

$$q(t) = q_0 \zeta(t), \quad (1)$$

де $\zeta(t)$ — випадкова функція, задана своєю однобічною спектральною щільністю

$$G_{\zeta}(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha(\omega^2 + \theta^2)}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}, \quad (2)$$

де α — параметр кореляції, θ — характерна частота. Досліджується вплив амплітудного параметра навантаження q_0 і частотного — θ на стійкість параметричних коливань конструкції.

Навантаження як випадковий процес являється вузькосмуговим.

Ширина його спектра характеризується величиною $\alpha_0 = \frac{2\alpha}{\omega_1 + \omega_2} = 10^{-6} \text{ с}^{-1}$.

Стійкість за імовірністю параметричних коливань редукованої моделі досліджено чисельно методом Монте-Карло. Методику такого дослідження описано в роботах [3, 4]. На рис. 2 побудовано сімейство границь стійкості за статистичною частотою в координатах

$$\eta = \frac{\theta}{\omega_1 + \omega_2}, \quad \mu = \frac{q_0}{q_{\text{cr}}}.$$

Досліджено точки у вузлах координатної сітки. Для кожної точки

проведено серію з 20 випробувань. Білими маркерами позначені точки, де спостерігалися лише стійкі реалізації переміщень, тобто статистична частота втрати стійкості дорівнює 0, чорними — жодної стійкої реалізації — частота дорівнює 1. Суцільними ламаними лініями показані границі стійкості за статистичною частотою, відповідні до значень 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. Ці границі побудовані шляхом лінійної інтерполяції між сусідніми вузлами сітки.

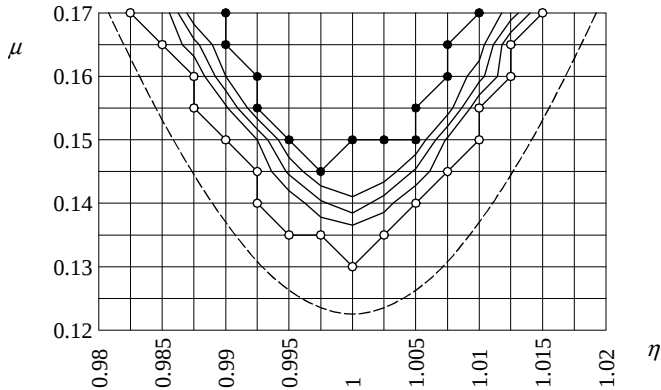


Рис. 2

Отримані результати демонструють збіжність з відомою аналітичною формулою наближеної теорії для випадку детермінованого гармонічного навантаження. Вузькосмуговий випадковий процес, визначений формулами (1), (2), має подібність до простого гармонічного процесу $q(t) = q_0 \cos(\theta t)$, для котрого в довіднику [5] наведено наступне рівняння границі комбінаційного головного параметричного резонансу сумарного типу:

$$\eta = 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{g_{12} g_{21} \left(\frac{q_{cr}}{2\omega_1 \omega_2} \right)^2 \mu^2 - 4\xi^2}, \quad (3)$$

де g_{12} , g_{21} — коефіцієнти матриці геометричної жорсткості. Крива, побудована за формулою (3), показана на рис. 2 штриховою лінією.

1. Гоцуляк Є. О., Дехтярюк Є. С., Лук'янченко О. О., Борисенко В. Г. Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. — Вип. 74. — К.: КНУБА, 2004.
2. Гоцуляк Є. О., Дехтярюк Є. С., Лук'янченко О. О., Борисенко В. Г. Побудова редукованих рівнянь динамічної стійкості плоскої форми згину пружних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. — Вип. 77. — К.: КНУБА, 2005.
3. Пошивач Д. В. Чисельний аналіз динамічної стійкості кругової циліндричної оболонки при випадковому параметричному збудженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. — Вип. 71. — К.: КНУБА, 2002. — С. 115-124.
4. Гончаренко М. В., Пошивач Д. В. Дослідження умов динамічної стійкості пружних систем при стохастичному параметричному впливі // Вібрації в техніці та технологіях. — 2006, №2 (44). — С. 14-19.
5. *Вибрации* в технике: Справочник. В 6-ти т. — Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. — М.: Машиностроение, 1978. — 352 с.