УДК 539.3

Дехтярюк Є.С., д-р техн. наук,
Немчинова Л.Ю.,
Отрашевська В.В.

ВПЛИВ РАДІУСА КОРЕЛЯЦІЇ СТОХАСТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА СТРУКТУРУ ОБЛАСТЕЙ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

Розглядається стійкість динамічних систем, у яких зовнішнє навантаження є параметричним. Досліджується можливість стабілізації динамічних станів, обумовлених детермінованим періодичним параметричним навантаженням, за допомогою додаткового випадкового збудження. Випадкове збудження може бути як нормальним білим шумом, так і експоненціально-корельованим випадковим процесом. Аналогічні питання з використанням асимптотичних методів розглядалися у [1]. У [2] досліджувалася динамічна стійкість замкненої кругової циліндричної оболонки при експоненціально-корельованому параметричному навантаженні і на прикладі цієї задачі було показано, що при певних значеннях радіуса кореляції додаткового випадкового навантаження має місце ефект стабілізації. В даній роботі аналогічна задача розглядається для складнішого об‘єкта: досліджуються динамічні стани замкненої кругової циліндричної оболонки з двома прямокутними отворами.

Дискретна динамічна модель тонкостінної конструкції будується за допомогою методу криволінійних сіток [3]. Ця динамічна модель представляється рівняннями

$$M\ddot{\overline{u}} + C\dot{\overline{u}} + K\overline{u} + \varphi(t)K_G\overline{u} = 0 \ , \qquad (1)$$

де M, G, K, K_G – матриці мас, демпфірування, жорсткості і геометричної жорсткості відповідно, $u(t) = (u_1(t), u_2(t),..., u_n(t))^T$ – n-вимірний вектор динамічних змінних, які являють собою переміщення вузлів криволінійної сітки.

Змінне в часі навантаження задається у вигляді

$$\varphi(t) = \mu_1 \sin \omega t + \mu_2 z(t) \, , \qquad (2)$$

де $z(t)$ – нормальний випадковий процес, μ_1, μ_2 – параметри навантаження, ω – частота детерміністичної складової параметричного навантаження.

© Дехтярюк Є.С., Немчинова Л.Ю., Отрашевська В.В.

При певних комбінаціях значень інтенсивності і частоти навантаження втрачається стійкість первісного стану розглядуваної динамічної системи. Цьому стану відповідає тривіальний розв‘язок системи (1). Значення, для яких стійкість зберігається, на площині параметрів утворюють суцільні області – області динамічної стійкості.

Існують різні означення стійкості стохастичних систем, це може бути стійкість за імовірністю, стійкість у середньому, по сукупності моментних функцій другого порядку, третього порядку і т.д. При аналізі стійкості відносно моментних функцій задача зводиться до дослідження стійкості тривіального розв‘язку детерміністичних диференціальних рівнянь. В даній роботі за означення стійкості приймається стійкість відносно моментних функцій другого порядку. Пропоновані методи можуть бути застосовані для дослідження стійкості відносно моментних функцій інших порядків.

Для переходу до рівнянь першого порядку вводяться фазові змінні:

$$\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_{2n}(t))^T = \left(\bar{x}_1(t) \oplus \bar{x}_2(t)\right)^T = \\ = (u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t), \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), ..., \dot{u}_n(t))^T . \quad (3)$$

У нових змінних система (1) набирає вигляду

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \bar{x}_2(t), \; \frac{d\bar{x}_2}{dt} = -\left(M^{-1}K + \varphi(t)M^{-1}K_G\right)\bar{x}_1(t) - M^{-1}C\bar{x}_2(t) . \quad (4)$$

Щоб дістати рівняння для других моментів фазових координат, складається система рівнянь відносно компонент матриці $\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)$. Після усереднення по реалізаціях процесу *z(t)* в силу (2) можна записати систему матричних рівнянь відносно матриці других моментів $\left\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \right\rangle$:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \right\rangle = \left(A + \mu_1 \sin\omega t B\right)\left\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \right\rangle + \left\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \right\rangle\left(A^T + \mu_1 \sin\omega t B^T\right) + \\ \mu_2 B\left\langle z(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \right\rangle + \mu_2\left\langle z(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \right\rangle B^T , \quad (5)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1}K_G & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Оскільки матриця $\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)$ розмірності $2n \times 2n$ симетрична, кількість одержуваних рівнянь є надлишковою. Тому за допомогою взаємно-однозначного відображення, описаного у [2], здійснюється перехід із

множини симетричних матриць у множину $n(2n+1)$-вимірних векторів, що складаються із елементів матриць, розташованих не нижче головної діагоналі.

Система (5) містить нові змінні $\left\langle z x_i x_j \right\rangle$ (i=1,2,…n, j=1,2,…n, $j \le i$) і незамкнена відносно других моментів. Ці нові змінні є кореляціями процесу $z(t)$ із компонентами вектора розв‘язку задачі $\bar{x}(t)$. Ця типова для динамічних систем із стохастичним параметричним збудженням проблема вирішується по різному в залежності від типу стохастичного збудження ([4],[5]). Якщо у поданні (2) $z(t)$ – нормальний білий шум у розумінні Стратоновича з нульовим середнім і одиничною дисперсією, то система рівнянь відносно матриці других моментів після усереднення (5) по ансамблю реалізацій процесу $z(t)$ записується у вигляді ([5])

$$\frac{d}{dt}\left\langle \bar{x}(t)\bar{x}(t)^T \right\rangle = \left(A+\mu_1 \sin\omega t B\right)\left\langle \bar{x}(t)\bar{x}(t)^T \right\rangle + \left\langle \bar{x}(t)\bar{x}(t)^T \right\rangle\left(A^T+\mu_1 \sin\omega t B^T\right)+$$
$$\frac{1}{2}\mu_2^2\left(BB\left\langle \bar{x}(t)\bar{x}(t)^T \right\rangle + 2B\left\langle \bar{x}(t)\bar{x}(t)^T \right\rangle B^T + \left\langle \bar{x}(t)\bar{x}(t)^T \right\rangle B^T B^T\right). \qquad (7)$$

Розглядається також випадок, коли $z(t)$ є експоненціально-корельованим нормальним процесом із кореляційною функцією

$$K(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \qquad (8)$$

де α – параметр кореляції, який пов‘язаний з радіусом кореляції ρ цього процесу співвідношенням $\rho = \dfrac{1}{\alpha}$. Таким чином, стохастична складова параметричного збудження $\mu_2 z(t)$ має дисперсію μ_2^2. У цьому разі вказана проблема розв‘язується шляхом розширення фазового простору, у якому розглядається розв‘язок. Це досягається за рахунок за рахунок апроксимації параметричного збудження $z(t)$ у вигляді скінченної суми статистично незалежних телеграфних сигналів ([6]):

$$z(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) + \ldots + \xi_N(t) , \qquad (9)$$

де взаємно-кореляційна матриця телеграфних процесів має вигляд

$$<\xi_i(t)\xi_i(t+\tau)> = \sigma_{ij}\frac{\sigma_0^2}{N}e^{-\alpha|\tau|}. \qquad (10)$$

Відомо, що при $N \to \infty$ $z_N(t) \to z(t)$.

Якщо замінити в (2) $z(t)$ на $z_N(t)$, то, як показано в [6], [2], застосовуючи операцію усереднення, для дослідження стійкості можна скласти послідовність детерміністичних рівнянь відносно моментних функцій

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{m}_{02}(t) = \left\langle x_i(t) x_j(t) \right\rangle, \\ &\boldsymbol{m}_{12}(t) = \left\langle \xi_1(t) x_i(t) x_j(t) \right\rangle, \\ &\boldsymbol{m}_{k2}(t) = \left\langle \xi_1(t)\xi_2(t)...\xi_k(t) x_i(t) x_j(t) \right\rangle, \\ &\boldsymbol{m}_{N2}(t) = \left\langle \xi_1(t)\xi_2(t)...\xi_N(t) x_i(t) x_j(t) \right\rangle. \end{aligned} \tag{11}$$

Ця система має вигляд

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_{02} \\ \boldsymbol{m}_{12} \\ \vdots \\ \boldsymbol{m}_{N2} \end{pmatrix} = S_1 \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_{02} \\ \boldsymbol{m}_{12} \\ \vdots \\ \boldsymbol{m}_{N2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_{02} \\ \boldsymbol{m}_{12} \\ \vdots \\ \boldsymbol{m}_{N2} \end{pmatrix}^T \times S_2, \tag{12}$$

де S_1 і S_2 блокові тридіагональні матриці, що мають вигляд

$$S_1 = \begin{pmatrix} s_{11}^{(1)} & s_{12}^{(1)} & 0 & 0 & . & 0 \\ s_{21}^{(1)} & s_{22}^{(1)} & s_{23}^{(1)} & 0 & . & 0 \\ 0 & s_{32}^{(1)} & s_{33}^{(1)} & s_{34}^{(1)} & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{N+1,N}^{(1)} & s_{N+1,N+1}^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} s_{11}^{(2)} & s_{12}^{(2)} & 0 & 0 & . & 0 \\ s_{21}^{(2)} & s_{22}^{(2)} & s_{23}^{(2)} & 0 & . & 0 \\ 0 & s_{32}^{(2)} & s_{33}^{(2)} & s_{34}^{(2)} & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{N+1,N}^{(2)} & s_{N+1,N+1}^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Для запису елементів матриць S_1 і S_2 введені позначення

$$s_{ii}^{(1)} = A - N\alpha E + \mu_1 \sin \omega t B \;,\; s_{i,i+1}^{(1)} = (N-i+1)B \,,\; s_{i,i-1}^{(1)} = \frac{(i-1)\sigma_0^2}{N} B \,,$$

$$s_{ii}^{(2)} = A^T - N\alpha E + \mu_1 \sin \omega t B^T \;,\; s_{i,i+1}^{(2)} = (N-i+1)B^T \,, \qquad (14)$$

$$s_{i,i-1}^{(1)} = \frac{(i-1)\sigma_0^2}{N} B^T \;.$$

Таким чином, задача про стійкість тривіального розв‘язку системи (1) зводиться до задачі про стійкість тривіального розв‘язку детерміністичної системи (12) із $\frac{2\pi}{\omega}$-періодичними коефіцієнтами. Систему (11) можна подати у вигляді

$$\frac{d\overline{w}}{dt} = G(t)\overline{w} \,, \qquad (15)$$

де

$$G(t) = G_0 + H \sin \omega t \,. \qquad (16)$$

Вектор $\overline{w} = (w_1, w_2, ..., w_l)^T$ складається із компонент матриць $\boldsymbol{m}_{02}$, $\boldsymbol{m}_{12}$, ..., $\boldsymbol{m}_{N2}$ і має розмірність $p = (N+1)\frac{n(n+1)}{2}$.

Система (15) досліджується методом узагальнених показників Хілла. Розв‘язок шукається у вигляді

$$\overline{w}(t) = e^{\lambda t}(w_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(v_k \sin k\omega t + w_k \cos k\omega t)). \qquad (17)$$

За допомогою редукції здійснюється перехід до задачі на власні значення для системи скінченного порядку. Характеристичні показники λ знаходяться як корені алгебричного рівняння

$$\det(R^* - \lambda E^*) = 0 \,, \qquad (18)$$

де R^* і E^* – редуковані матриці.. Тривіальний розв‘язок буде асимптотично стійким, якщо всі характеристичні показники мають від‘ємну дійсну частину і асимптотично нестійким, якщо серед характеристичних показників є хоча б один з додатньою дійсною частиною.

Уточнення границь зон динамічної стійкості здійснюється шляхом збільшення числа доданків у скінченному представленні (9).

Для адекватного моделювання пружних сил, що виникають в оболонці при параметричному навантаженні, дискретна динамічна модель (1), яка

будується за допомогою методу криволінійних сіток, повинна мати велику розмірність. Пряме використання такої моделі при аналізі динамічної стійкості пов'язане із значними обчислювальними труднощами. Для безпосередньої побудови границь областей динамічної стійкості проводиться редукція вихідної дискретної моделі (1) за допомогою методу нормальних координат. Розв'язок системи (1) представляється у вигляді суперпозиції власних форм коливань

$$\bar{u}(t) = \Phi \bar{y}(t), \tag{19}$$

де матриця Φ ортонормованих по кінетичній енергії власних форм $\bar{\varphi}_i$ (i=1,2,…, m) має розмірність $n \times m$

$$\Phi = \left(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_m\right), \tag{20}$$

$\bar{y}(t) = \left(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)\right)^T$ – m-вимірний вектор узагальнених координат. Виходячи з (1) і (19) відносно компонент вектора $\bar{y}$ записується система рівнянь

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + 2\varepsilon_i \omega_i \frac{dy_i}{dt} + \omega_i^2 y_i + \varphi(t) \sum_{k=1}^{m} g_{ik} y_k = 0, \quad i=1,2,\ldots, m, \tag{21}$$

де ω_i (i=1,2,…, m) – відповідні власні частоти оболонки, матриця

$$K_g^* = \Phi^T K_g \Phi = \{g_{ik}\}_{i,k=1}^{m} \tag{22}$$

– редукована матриця геометричної жорсткості. У (1) вважається, що сили опору руху, які визначаються матрицею C, що відповідають i-тій формі коливань, ортогональні j-тій формі коливань $(j \neq i)$. Вважається, що модальні параметри затухання $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots \varepsilon_m = \dfrac{\delta}{2\pi}$, де δ – логарифмічний декремент.

Для редукованої системи (21) матриці A і B в представленні типу (5) відносно компонент вектора $\bar{y}(t)$ мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ K^* & C^* \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_g^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

де $K^* = diag\left(\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_m^2\right)$, $C^* = diag\left(2\varepsilon\omega_1, 2\varepsilon\omega_2, \ldots, 2\varepsilon\omega_m\right)$.

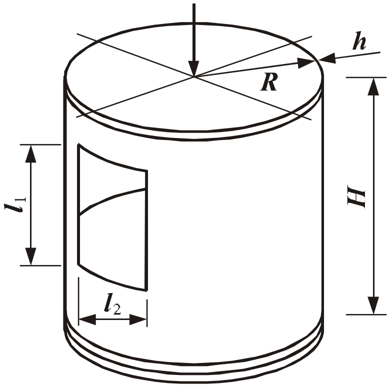


Рис. 1

Описаний підхід застосований для дослідження стійкості кругової циліндричної оболонки з двома прямокутними отворами при осьовому стисненні, яке реалізується торцевими дисками, жорстко з'єднаними з оболонкою (рис. 1). Фізичні характеристики і розміри оболонки: модуль пружності $E=6898\frac{кН}{см^2}$, коефіцієнт Пуассона $\nu=0{,}34$, радіус R=15,39 см, висота H=22,46 см, товщина h=0,03556 см, висота отвору l_1=8,256 см, ширина отвору l_2=12,087 см, логарифмічний декремент $\delta = 0.05$. Таким чином, $\varepsilon \approx 0{,}007957747$. При редукуванні системи (1) у поданні (19) використовуються три перші власні форми коливань, що відповідають частотам $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, які мають значення $218\frac{рад}{с}$, $385\frac{рад}{с}$, $393\frac{рад}{с}$ відповідно (див. рис. 2).

Досліджується можливість стабілізації динамічних станів оболонки, обумовлених гармонійним навантаженням, частота якого лежить в межах головного простого резонансу, який відповідає мінімальній частоті власних коливань, при додатковому стохастичному навантаженні.

Розглядаються два випадки: стабілізація за допомогою нормального білого шуму і за допомогою нормального експоненціально-корельованого збудження. Спочатку для визначення рівня збудження, при якому можлива поява стабілізуючого ефекту, досліджується динамічна стійкість оболонки тільки при стохастичному навантаженні, тобто вважається що у поданні (2) $\mu_1 = 0$ і визначається значення $\mu_2 = \mu_{2кр}$, при якому оболонка втрачає стійкість.

Для визначення критичного рівня стохастичного навантаження використовуються системи (7) і (12), які при $\mu_1 = 0$ є системами із сталими коефіцієнтами. Система (7) використовується, якщо стохастичне навантаження є нормальним білим шумом, система (12) – при експоненціально-корельованому навантаженні.

Як показують дослідження в зоні головного резонансу при комбінованому навантаженні, якщо $\mu_2 > \mu_{2кр}$ у системі завжди

спостерігається втрата стійкості. Тому, розглядаючи комбіноване навантаження, природно вибирати значення μ_2, менші ніж $\mu_{2кр}$.

Спочатку дослідження проводяться із застосуванням розрахункової моделі, побудованої за допомогою подання (19), в якому використовується тільки перша форма власних коливань $\overline{\varphi}_1$. Тобто замість системи (21) розглядається рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\varepsilon\omega_1\frac{dy}{dt}+\omega_1^2y+\varphi(t)g_{11}y=0\,. \tag{24}$$

Першим розглядається випадок, коли у поданні (2) $z(t)$ є нормальним білим шумом одиничної інтенсивності. Відомо ([6]), що в цьому випадку $\mu_{2кр}$ обчислюється за формулою

$$\mu_2^2=\frac{4\varepsilon\omega_1^3}{g_{11}^2}\,. \tag{25}$$

Отже, при використанні розрахункової моделі (24) $\mu_{2кр}=0{,}1511\cdot10^{-5}$.

В результаті проведених досліджень встановлено, що для значень $\mu_2<\mu_{2кр}$ при комбінованому навантаженні в зоні головного параметричного резонансу рівні втрати стійкості не перевищують рівня втрати стійкості тільки при детермінованому навантаженні, яке обчислюється за формулою ([7])

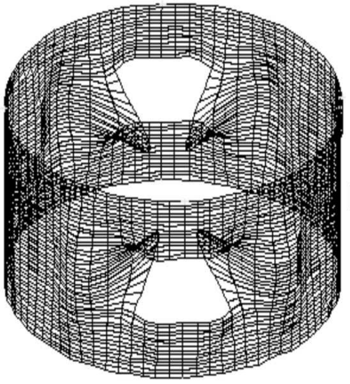
$$\mu_1=2\cdot\sqrt{\frac{\left(\omega^2-4\omega_0^2\right)^2}{16\omega_0^4}+4\varepsilon^2} \tag{26}$$

і для розглядуваної оболонки дорівнює $3{,}974\cdot10^{-6}$.

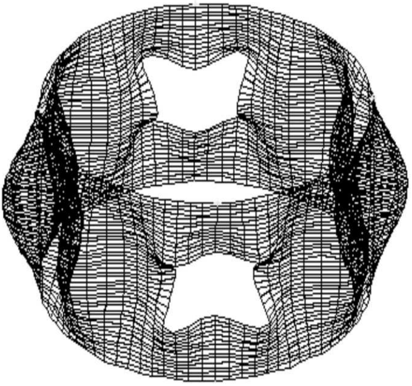
На рис. 3 показана залежність значень $\mu_{1кр}$, для яких оболонка втрачає стійкість, від μ_2 при $\omega=2\omega_1$. Видно, що із збільшенням μ_2 до значення $\mu_{2кр}=0{,}1511\cdot10^{-5}$ критичні значення μ_1 зменшуються. Отже у випадку, коли стохастична складова параметричного навантаження являє собою білий шум, ефект стабілізації не спостерігається.

Далі розглядається випадок, коли випадкова складова $\mu_2 z(t)$ у поданні (2) являє собою експоненціально-корельований випадковий процес, який визначається двома параметрами: стандартом корельованого сигнала μ_2 і

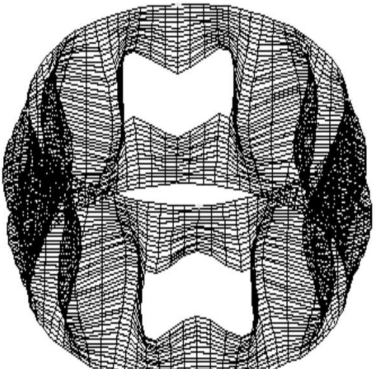
радіусом кореляції $\rho = \dfrac{1}{\alpha}$. Критичне значення $\mu_{2\text{кр}}$, яке визначається при $\mu_1 = 0$, залежить від радіуса кореляції. Дослідження проводилися для значень радіуса кореляції, менших від $\dfrac{2}{\omega_1}$. Для таких експоненціально-корельованих сигналів $\mu_{2\text{кр}}$ не менше $\mu_{2\text{кр}} = 0{,}31046 \cdot 10^{-4}$, що відповідає значенню $\rho = \dfrac{1}{2\omega_1}$.



$\omega_1 = 218 \ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$



$\omega_2 = 385 \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$



$\omega_3 = 393 \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$

Рис. 2

Досліджується вплив радіуса кореляції для різних значень $\mu_{2кр}$. На рисунках 4, 5 і 6 наведені результати досліджень при $\mu_2 = 0{,}168 \cdot 10^{-4}$, $\mu_2 = 0{,}25 \cdot 10^{-4}$ і $\mu_2 = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$ відповідно.

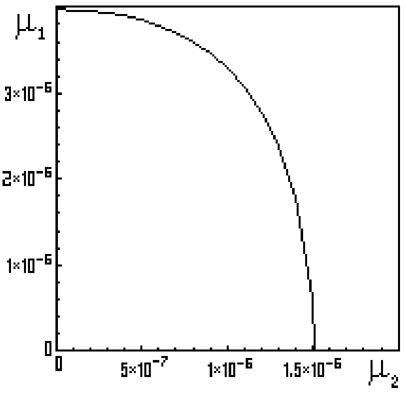


Рис. 3

Для всіх кривих вказане відповідне значення радіуса кореляції. Кожна крива поділяє область площини (μ_1, ω) на дві частини, причому область стійкості параметричних коливань при комбінованому навантаженні знаходиться зліва. Товстою лінією позначена границя, побудована при відсутності стохастичної складової навантаження $(\mu_2 = 0)$. Якщо для деякого діапазону частот крива, що відповідає певному радіусу кореляції, знаходиться правіше товстої лінії, тобто додавання випадкового навантаження підвищує критичне значення μ_1, то має місце ефект стабілізації. З рисунків видно, що така ситуація для певних значень радіуса кореляції має місце при всіх трьох розглядуваних значеннях μ_2. Наприклад, при $\mu_2 = 0{,}168 \cdot 10^{-4}$ (рис. 4) стабілізація для певного діапазону частот спостерігається при

$$\rho = \frac{2}{\omega_1}, \qquad \rho = \frac{1}{\omega_1}, \qquad \rho = \frac{2}{3\omega_1},$$

$\rho = \dfrac{1}{2\omega_1}$, тобто для цих значень радіуса кореляції відповідна границя області стійкості розташована правіше товстої лінії. Для менших значень радіуса кореляції криві розташовані лівіше товстої лінії і стабілізації немає. Для $\mu_2 = 0{,}25 \cdot 10^{-4}$ (рис. 5) стабілізація має місце при $\rho = \dfrac{2}{\omega_1}$ і $\rho = \dfrac{1}{\omega_1}$, для

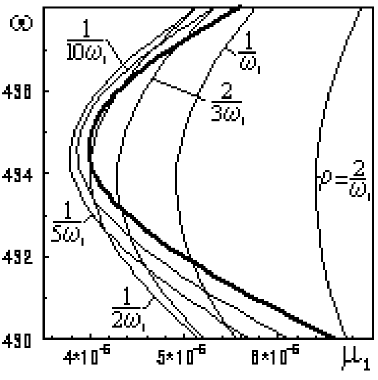


Рис. 4

$\mu_2 = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$ (рис. 6) стабілізація спостерігається при $\rho = \frac{2}{\omega_1}$. При розглядуваних значеннях μ_2 критичні амплітуди гармонійної складової при фіксованому значенні ω немонотонно залежать від радіуса кореляції стохастичної складової.

Таким чином, для розглянутих значень μ_2 при $\rho \in \left(\rho_{\min}(\mu_2), \frac{2}{\omega_1}\right)$ є стабілізація, а при $\rho \le \rho_{\min}(\mu_2)$ має місце дестабілізація. Дестабілізуючий ефект більше позначається із зростанням значення μ_2. Дослідження показують, що у випадку, коли стандарт стохастичної складової μ_2 менше певного рівня, стабілізація не має місця при будь-яких радіусах кореляції, менших $\frac{2}{\omega_1}$. Так, наприклад, при $\mu_2 = 0{,}67 \cdot 10^{-5}$ границі всіх областей стійкості практично співпадають з границею, обчисленою при $\mu_2 = 0$.

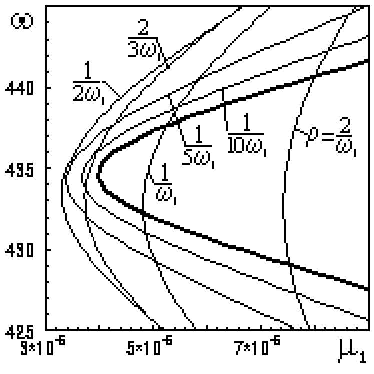


Рис. 5

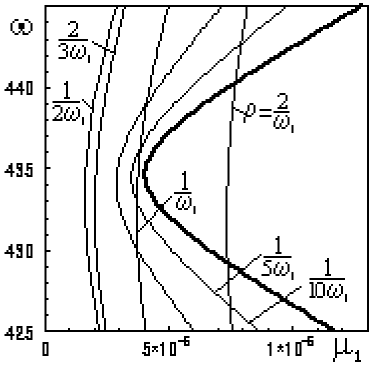


Рис. 6

Наведений вище аналіз можливості стабілізації динамічних станів оболонки, обумовлених гармонійним навантаженням, частота якого лежить в околі частоти $2\omega_1$, проводився за допомогою рівняння (24). Використання другої і третьої форми власних коливань в апроксимації (19) істотно не впливає на критичні значення μ_1, які відповідають певним параметрам μ_2 і ρ. Це пояснюється особливостями першої форми власних коливань $\overline{\varphi}_1$ розглядуваної оболонки. Як видно з рис. 2 при вільних коливаннях по першій формі максимальні переміщення мають місце в околі отворів. Інший характер

має поле переміщень, що відповідає другій і третій формі власних коливань (рис. 2). Як показали обчислення, відношення $\frac{g_{12}}{g_{11}} = \frac{\overline{\varphi}_1^T K_g \overline{\varphi}_2}{\overline{\varphi}_1^T K_g \overline{\varphi}_1}$ і $\frac{g_{13}}{g_{11}} = \frac{\overline{\varphi}_1^T K_g \overline{\varphi}_3}{\overline{\varphi}_1^T K_g \overline{\varphi}_1}$ дуже малі і тому врахування власних форм $\overline{\varphi}_2$ і $\overline{\varphi}_3$ у поданні (19) не вносить істотних поправок в оцінку критичних значень амплітуди μ_1 гармонійної складової параметричних збуджень, яка лежить в околі частоти $2\omega_1$.

1. *Ariaratnam S.T., Tam D.S.* Parametric random excitation of a damped Mathieu oscillator// ZAMM, 56, 1976. – p.449-452.
2. *Баженов В.А., Дехтярюк Є.С., Отрашевська В.В., Гончаренко М.В.* Стабілізація стійкості сталих коливальних режимів динамічних систем при комбінованому збудженні.//Авиационно-космическая техника и технология. Харьков “ХАИ”. – 2004.- с.51-58.
3. *Гоцуляк Е.А.*, О сеточной дискретизации векторных соотношений теории оболочек в криволинейной системе координат.//Прикладная механика: Междунар. научн. журнал. –2001. –Т.37. – №6. –С.89-94.
4. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336с.
5. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 175с.
6. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. – М.: Наука, 1980. – 336с.
7. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах, том 1. Колебания линейных систем//Под ред. В.В.Болотина. – М.: Машиностроение, 1978, 352с.

Матеріал надійшов до редакції 28.05.04.