МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА

Методичні вказівки та завдання
до виконання розрахунково-графічних робіт
для студентів спеціальностей
131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»,
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,
192 «Будівництво та цивільна інженерія»
і 192.02 «Міське будівництво та господарство»

Київ 2023

УДК 531.3
Т11

Укладачі: К.Е. Котенко, канд. техн. наук, доцент;
М.В. Лазарева, канд. техн. наук, старш. викладач

Рецензент В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук, професор

Відповідальний за випуск В.В. Гайдайчук, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри теоретичної механіки, протокол № 9 від 18 травня 2023 року.

В авторській редакції.

Теоретична механіка. Кінематика: методичні вказівки та завдання до виконання розрахунково-графічних робіт / уклад.: К.Е. Котенко, М.В. Лазарева. − Київ: КНУБА, 2023. − 69 с.

Т11

Містять завдання до розрахунково-графічних і контрольних робіт з теоретичної механіки із розділу «Кінематика», приклади їх розв’язку, теоретичні відомості та методичні рекомендації до їх виконання.

Призначено для студентів, які навчаються за спеціальностями 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» і 192 «Будівництво та цивільна інженерія».

© КНУБА, 2023

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ 4
1. ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ І ПРИСКОРЕННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПО ЗАДАНИМ РІВНЯННЯМ ЇЇ РУХУ 6
1.1. Короткі відомості з теорії 6
1.2. Порядок розв'яання задач 8
1.3. Умова завдання і приклади розв'язання задач 8
2. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПЛОСКОГО МЕХАНІЗМУ 25
2.1. Короткі відомості з теорії 25
2.2. Порядок розв'язання задач 30
2.3. Умова завдання і приклади розв'язання задач 30
3. КІНЕМАТИКА СКЛАДНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ 51
3.1. Короткі відомості з теорії 51
3.2. Визначення абсолютної швидкості 51
3.3. Визначення абсолютного прискорення 52
3.4. Порядок розв'язування задач 53
3.5. Умова завдання і приклади розв'язання задач 54
4. ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ 64
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 66
ДОДАТОК 67

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

«Теоретична механіка» фундаментальна дисципліна фізико-математичного циклу, яка вивчає закони руху та рівноваги тіл і взаємодію, що виникає між ними. На її матеріалі ґрунтуються такі важливі дисципліни як «Опір матеріалів», «Будівельна механіка», «Теорія машин і механізмів», «Деталі машин» тощо.

Основні положення курсу «Теоретичної механіки» сформульовано в розділах «Статика», «Кінематика», «Динаміка» і доповнено матеріалами, наведеними в розділі «Аналітична механіка».

Кожний розділ курсу відрізняється специфікою теоретичного матеріалу, характером задач, що розв'язуються, і особливостями підготовки фахівця даного профілю.

Метою освоєння навчальної дисципліни є успішне вивчення студентами теоретичного матеріалу, яке сприяє забезпеченню високого рівня професійної майстерності фахівців у галузі розрахунків міцності, жорсткості та стійкості машин, механізмів, будівельних конструкцій, будівель і споруд.

З цього погляду важливим елементом, що сприяє успішному засвоєнню матеріалів дисципліни і набуттю навичок його практичного використання є характер та ефективність методичних матеріалів навчального процесу. Одним із таких елементів є виконання і захист студентами розрахунково-графічних робіт. Цей процес забезпечує:

- систематизацію, закріплення і розширення отриманих теоретичних і практичних знань;
- розвиток навичок самостійної роботи та оволодіння методами системного дослідження під час вирішення проблемних питань;
- виявлення рівня підготовленості студентів до самостійної практичної роботи за фахом.

Сформульовані і наведені в методичних вказівках задачі і приклади їх розв'язку стосуються розділу «Кінематика».

Кінематикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються кінематичні характеристики руху тіл без врахування їх маси і діючих на них сил.

Основним завданням кінематики є визначення на основі законів руху кінематичних характеристик: траєкторії руху, швидкості і прискорення. Необхідною передумовою для виконання такого завдання є математичне моделювання кінематичної поведінки тіла.

Наведені методичні вказівки вміщують завдання на кінематику матеріальної точки, найпростіші і плоскопаралельний рухи твердого тіла, а також складний рух матеріальної точки.

Кожне завдання містить 30 варіантів. Номер варіанта зазначається у відповідній таблиці та/або на рисунку.

Методичні вказівки дадуть змогу студентам самостійно підготуватися до виконання розрахунково-графічних і контрольних робіт.

1. ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ І ПРИСКОРЕННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПО ЗАДАНИМ РІВНЯННЯМ ЇЇ РУХУ

1.1. Короткі відомості з теорії

Категорія задач, передбачених даним завданням, потребує використанням студентами базових положень кінематики матеріальної точки.

Траєкторія руху – це сукупність (послідовність) положень точки у просторі. Якщо траєкторія руху точки є пряма лінія, то рух називається прямолінійним, якщо крива, то рух називається криволінійним. Рух точки в просторі можна задати трьома основними способами: векторним, координатним і натуральним (табл. 1.1).

За векторного способу положення точки задається за допомогою радіуса-вектора, проведеного з заданої нерухомої т. *O* в дану т. *M*, що рухається.

У координатному способі положення т. *M* визначається координатами системи координат, які задаються як функції часу (*t*). При цьому система координат може бути як декартовою, так і полярною, циліндричною або сферичною. Обрана система координат пов’язується з тілом відліку.

Для натурального способу задавання руху вводиться спеціальна природна система координат (η, τ, b), що рухається разом з точкою, та задається напрям руху. Положення точки визначається на траєкторії руху від початку відліку т. *O*.

Швидкість точки – це фізична величина, яка показує напрямок руху точки і як швидко змінюються координати положення точки. Вектор швидкості спрямовано по дотичній до траєкторії руху в бік напрямку руху. За координатного способу завдання руху модуль швидкості визначається через складові вектора швидкості (проекції на координатні осі) як похідні за часом від координат:

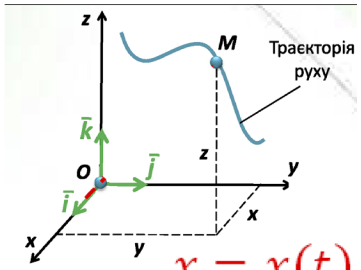
$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Повна величина швидкості дорівнює:

$$V = \sqrt{V_x + V_y + V_z}.$$

Таблиця 1.1

Кінематичні характеристики при різних способах задавання руху точки

Характеристика руху	Спосіб задавання руху матеріальної точки		
	Векторний	Координатний	Натуральний
Рівняння (або закон) руху	$\bar{r} = \bar{r}(t)$	 $x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$	$s = s(t)$
Швидкість	$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}$	$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$ $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$	$v_\tau = \frac{ds}{dt}$
Прискорення	$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}}$	$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$ $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$	$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}$ $a_n = \frac{v_\tau^2}{\rho}$ $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$

Прискорення точки – це фізична величина, яка показує як змінюється значення і напрямок швидкості руху точки.

За координатного способу задавання руху модуль прискорення визначається через складові вектора прискорення як перші похідні за часом від швидкості або другі похідні за часом від координат.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

Повна величина прискорення визначається:

$$a = \sqrt{a_x + a_y + a_z}.$$

1.2. Порядок розв'язування задач

1. Оберіть декартову систему координат, виходячи з умов задачі.

2. За заданими в умові задачі рівняннями руху точки у параметричній формі знайдіть і побудуйте траєкторію руху точки у координатній формі.

3. Визначте положення точки *M* в моменти часу t_0 *і* t_1 і встановіть напрям її руху.

4. За рівняннями руху точки визначте складові вектора швидкості на осі декартової системи координат і величину повної швидкості точки. У вибраному масштабі швидкостей зобразіть знайдені вектори на графіку.

5. За рівняннями руху точки чи за рівняннями проекцій швидкості точки визначте складові вектора прискорення точки. У вибраному масштабі прискорень зобразіть знайдені вектори на графіку.

6. У разі, коли траєкторія руху точки є крива лінія, то визначте дотичне та нормальне прискорення, радіус кривизни. У вибраному масштабі прискорень зобразіть знайдені вектори на графіку.

1.3. Умова завдання і приклади розв'язання задач

Точка *M* рухається у площині XY згідно з параметричними рівняннями, заданими у табл. 1.2.

За заданими рівняннями руху точки знайти рівняння її траєкторії руху у координатному вигляді; величину і напрям її швидкості; величину та напрям повного, дотичного, нормального прискорень і радіус кривизни в заданий момент часу *t*.

Таблиця 1.2

Номер варіанта	***x = x(t)*, м**	***y = y(t)*, м**	***t*, с**
1	**2**	**3**	**4**
1	$6\cos(\frac{\pi}{6}t)-3$	$-6\cos(\frac{\pi}{3}t)$	2
2	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$-3\,sin^2(\frac{\pi}{6}t)$	2
3	$2-3\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$9\,sin(\frac{\pi}{6}t)$	3
4	$6\cos(\frac{\pi}{6}t)-3$	$3\cos(\frac{\pi}{3}t)$	2
5	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$10\cos(\frac{\pi}{6}t)$	2
6	$2-3\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$6\sin^2(\frac{\pi}{6}t)$	2
7	$6\cos(\frac{\pi}{6}t)-3$	$-2\sin(\frac{\pi}{6}t)$	3
8	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$9\cos(\frac{\pi}{3}t)$	2
9	$2-3\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$-6\cos(\frac{\pi}{3}t)$	2
10	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$9\,sin(\frac{\pi}{6}t)$	2
11	$8\sin(\frac{\pi}{6}t)-2$	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)$	3
12	$12\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$4\cos(\frac{\pi}{3}t)$	3
13	$8\sin(\frac{\pi}{6}t)-2$	$6\cos^2(\frac{\pi}{6}t)$	2
14	$12\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$10\cos(\frac{\pi}{6}t)$	2
15	$8\sin(\frac{\pi}{6}t)-2$	$-4\cos^2(\frac{\pi}{6}t)$	2

Закінчення табл. 1.2

1	**2**	**3**	**4**
16	$12\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$12\cos(\frac{\pi}{3}t)$	2
17	$8\sin(\frac{\pi}{6}t)-2$	$-3\cos(\frac{\pi}{6}t)$	3
18	$12\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$-8\cos(\frac{\pi}{3}t)$	3
19	$8\sin(\frac{\pi}{6}t)-2$	$9\cos(\frac{\pi}{6}t)$	2
20	$12\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$-6\cos(\frac{\pi}{3}t)$	2
21	$4-4\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)$	5
22	$2-\sin(\frac{\pi}{3}t)$	$6\cos^2(\frac{\pi}{6}t)$	3
23	$3\sin(\frac{\pi}{3}t)$	$4\cos(\frac{\pi}{3}t)$	2
24	$2\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$10\cos(\frac{\pi}{6}t)$	3
25	$3\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$-4\cos^2(\frac{\pi}{6}t)$	2
26	$-2\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$12\cos(\frac{\pi}{3}t)$	2
27	$-7\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$-7\cos(\frac{\pi}{6}t)$	3
28	$6\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$-8\cos(\frac{\pi}{3}t)$	3
29	$3\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$9\cos(\frac{\pi}{6}t)$	3
30	$4-6\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$-6\cos(\frac{\pi}{3}t)$	3

Приклад 1.

Точка рухається у площині *XY* згідно з рівняннями:

$$\begin{cases} x = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 1 \\ y = -4\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \end{cases}$$

Визначити рівняння траєкторії руху точки; величину і напрям її швидкості; величину і напрям повного, дотичного, нормального прискорення і радіус кривизни для моменту часу t = 1с.

Дано:

$$\begin{cases} x = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 1 \\ y = -4\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \end{cases}$$; м

$t = 1$с

$y(x) - ?; V - ?; a - ?; a_\tau - ?; a_n - ?; \rho - ?$

Запишемо вихідні рівняння наступним чином:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{-4} = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \\ \frac{y}{-4} = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \end{cases}$$

Рух точки задано координатним способом у декартових координатах. Вихідні рівняння руху точки можна трактувати як параметричні рівняння траєкторії руху точки.

Для того, щоб знайти рівняння траєкторії у координатному вигляді, виключаємо час t. Для цього використовуємо відоме співвідношення з тригонометрії:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

і враховуючи:

$$\sin^2\alpha = \left(\frac{y}{-4}\right)^2; \quad \cos^2\alpha = \left(\frac{x+1}{-4}\right)^2$$

визначаємо, що траєкторією руху точки є рівняння кола з радіусом R = 4, центр якого знаходиться у точці O_1 з координатами (-1; 0):

$$y^2 + (x+1)^2 = 4^2$$

Зобразимо траєкторію руху точки на графіку (рис.1.1) і покажемо положення точки *M*.

В момент часу $t_0 = 0$ точка *M* знаходиться у положенні точки M_0 з ккоординатами M_0 (-5; 0):

$$\begin{cases} x_0 = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 1 = -5 \\ y_0 = -4\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) = 0 \end{cases},$$

а в момент часу $t_1 = 1$с точка *M* буде знаходитися в положенні M_1 відповідно з координатами (-3; -3,46):

$$\begin{cases} x_1 = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 1 = -3 \\ y_1 = -4\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) = -3{,}46 \end{cases}$$

Таким чином напрямок руху точки відбувається від M_0 до M_1.

Для визначення швидкості точки візьмемо похідну за часом від рівнянь руху:

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{4\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{3} \\ V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{-4\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{3} \end{cases};$$

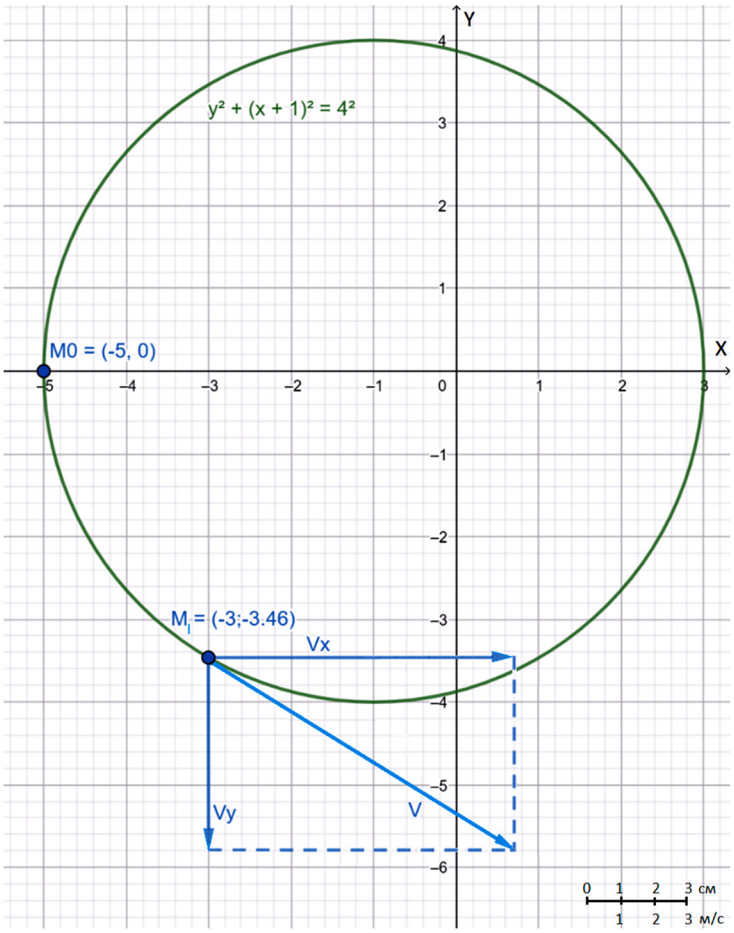
Проекції швидкості направлені паралельно відповідним осям координат і їхні модулі в момент часу $t_1 = 1$с дорівнюють:

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{4\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{3} = \frac{4\pi\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3} = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot\sin(60^\circ)}{3} = 3{,}63 \\ V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{-4\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{3} = -\frac{4\pi\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3} = -\frac{4\pi\cos(60^\circ)}{3} = -\frac{4\cdot 3{,}14\cdot\cos(60^\circ)}{3} = -2{,}09 \end{cases}$$

$$V_x = 3{,}63\ \frac{м}{с};\ V_y = -2{,}09\ \frac{м}{с}$$

Знайдемо величину повної швидкості точки:

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = \sqrt{(3{,}63)^2 + (-2{,}09)^2} = 4{,}19\ \frac{м}{c^2};$$



Масштаб

$$1см : 1\frac{м}{c}$$

Рис. 1.1. Траєкторія руху точки. Вектори швидкості

Прискорення точки будемо визначати за формулою:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

Проекції прискорення на осі визначаємо як першу похідну від відповідної проекції швидкості на вісь за часом, м/с^2

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{4\pi^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)}{9} \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{4\pi^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)}{9} \end{cases}$$

При t_1 =1с;

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{4\pi^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)}{9} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot \cos(60^\circ)}{9} = 2{,}19 \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{4\pi^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{3}t\right)}{9} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot \sin(60^\circ)}{9} = \dfrac{4\pi \cos(60^\circ)}{3} = 3{,}80 \end{cases}$$

$$a_x = 2{,}19\ \frac{м}{c^2};\ \ a_y = 3{,}80\ \frac{м}{c^2}$$

$$a = \sqrt{\left(a_x\right)^2 + \left(a_y\right)^2} = \sqrt{\left(2{,}19\right)^2 + \left(3{,}80\right)^2} = 4{,}39\ \frac{м}{c^2}$$

$$a^\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \frac{3{,}63 \cdot 2{,}19 - 2{,}09 \cdot 3{,}80}{4{,}19} = 0$$

$$a^n = \left|\frac{V_x a_y - V_y a_x}{V}\right| = \left|\frac{3{,}63 \cdot 3{,}80 + 2{,}09 \cdot 2{,}19}{4{,}19}\right| = 4{,}39\ \frac{м}{c^2}$$

Вектор дотичного прискорення повинен спрямовуватися по дотичній до траєкторії руху точки в напрямку вектора повної швидкості (враховуючи знак «+»), але його модуль дорівнює 0, тому на рисунку вектор дотичного прискорення не показується.

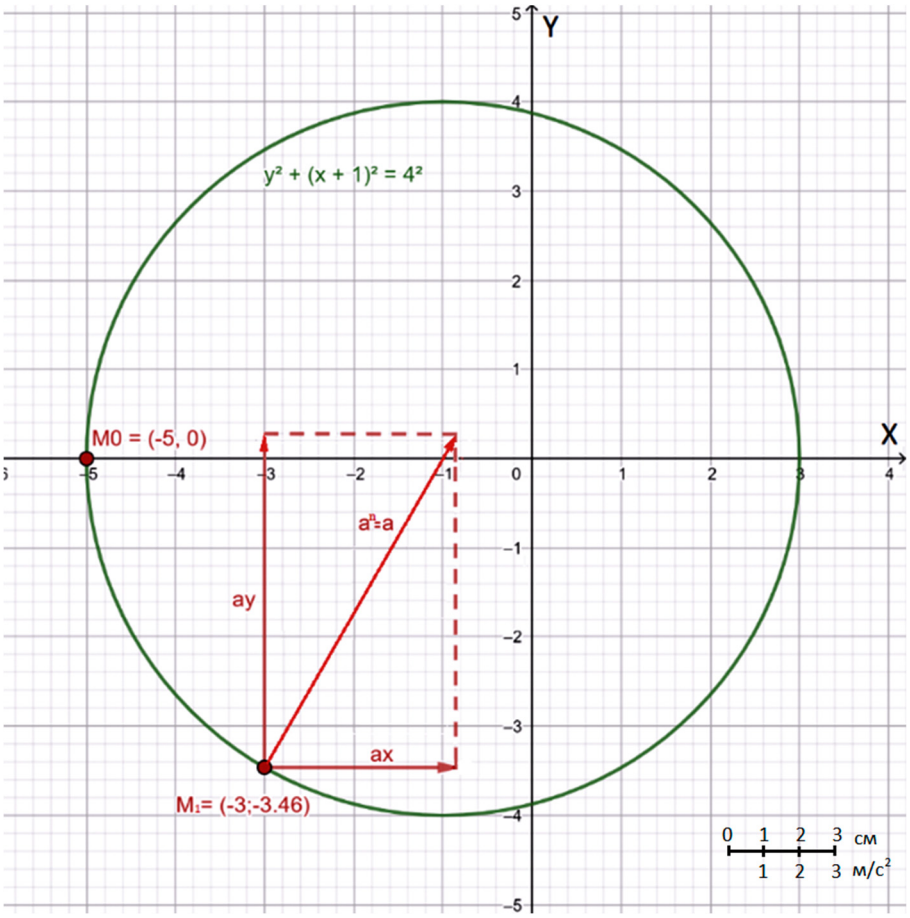
Вектор нормального прискорення спрямовуємо до центру кривизни (рис.1.2).

Перевіряємо величину повного прискорення за формулою:

$$a = \sqrt{\left(a^\tau\right)^2 + \left(a^n\right)^2} = \sqrt{\left(0\right)^2 + \left(4{,}39\right)^2} = 4{,}39\ \frac{м}{c^2}$$

Визначаємо радіус кривизни:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{4{,}19^2}{4{,}39} = 4\ м$$



Масштаб

$1см : 1\frac{м}{с^2}$

Рис. 1.2. Траєкторія руху точки. Вектори прискорень

Відповідь: траєкторією руху матеріальної точки є коло, задане рівнянням $y^2 + (x+1)^2 = 4^2$;

$$V_x = 3{,}63\,\frac{м}{с};\quad V_y = -2{,}09\,\frac{м}{с};\quad a_x = 2{,}19\frac{м}{с};\quad a_y = 3{,}8\frac{м}{с}$$

$$a^\tau = 0;\quad a^n = 4{,}39\frac{м}{с};\quad a = 4{,}39\frac{м}{с};\quad \rho = 4м$$

Приклад 2.

Точка рухається у площині *XY* згідно з параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = -4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 1 \\ y = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) \end{cases}$$

Визначити рівняння траєкторії руху точки; величину і напрям її швидкості; величину і напрям повного, дотичного, нормального прискорення і радіус кривизни для моменту часу t = 1с.

Дано:

$$\begin{cases} x = -4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+1 \\ y = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) \end{cases}; \text{ м}$$

$t = 3\text{с}$

$y(x) - ?; V - ?;\ a - ?;\ a_\tau - ?;\ a_n - ?;\ \rho - ?$

Для рівняння траєкторії у координатному вигляді, виключаємо час t. Для цього використовуємо відоме тригонометричне співвідношення:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha + 1$$

тобто

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right)$$

Із параметричних рівнянь руху знаходимо відповідні функції

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{1-x}{4}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y}{4},$$

отже,

$$\frac{1-x}{4} = 1 - 2\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{y^2}{8}$$

Таким чином рівняння траєкторії руху точки у координатному вигляді має вид:

$$y^2 - 2x - 6 = 0 \text{ або } x = \frac{y^2}{2} - 3$$

Це рівняння параболи.

Зобразимо траєкторію руху точки на графіку (рис.1.10) і покажемо положення точки *M*.

В момент часу $t_0 = 0$ точка *M* знаходиться у положенні точки M_0 з координатами M_0 (-3; 0):

$$\begin{cases} x_0 = -4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+1 = -3 \\ y_0 = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = 0 \end{cases},$$

а в момент часу $t_1 = 3\text{с}$ точка *M* буде перебувати в положенні M_1 відповідно

з координатами (3,83; 3,69):

$$\begin{cases} x_1 = -4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 1 = 3{,}83 \\ y_1 = 4\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = 3{,}69 \end{cases}$$

Таким чином напрямок руху точки відбувається від M_0 до M_1.

Для визначення швидкості точки візьмемо похідну за часом від рівнянь руху:

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = \pi\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \\ V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right) \end{cases};$$

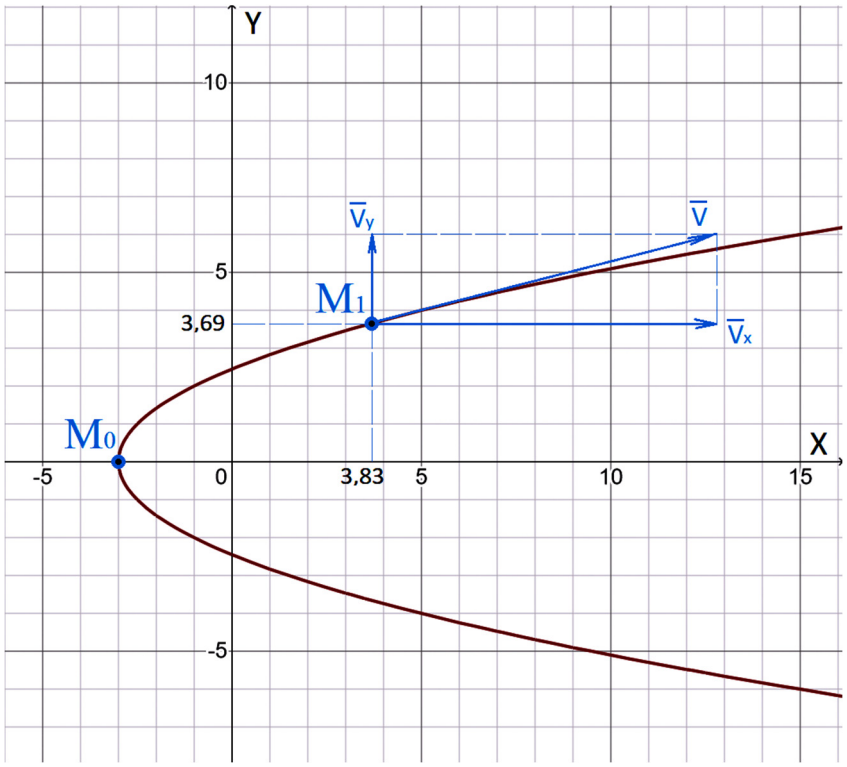
Проекції швидкості направлені паралельно відповідним осям координат і їхні модулі в момент часу t_1 =3с дорівнюють:

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = \pi\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \pi\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3\right) = \pi\sin\left(135°\right) = 2{,}22 \\ V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\cdot 3\right) = \frac{\pi}{2}\cos\left(67{,}5°\right) = 0{,}60 \end{cases};$$

$$V_x = 2{,}22\ \frac{м}{с};\ V_y = 0{,}60\ \frac{м}{с}$$

Знайдемо величину повної швидкості точки:

$$V = \sqrt{\left(V_x\right)^2 + \left(V_y\right)^2} = \sqrt{\left(2{,}22\right)^2 + \left(0{,}60\right)^2} = 2{,}30\ \frac{м}{с}$$



Масштаб

$1см : 0,5\frac{м}{с}$

Рис. 1.3. Траєкторія руху точки. Вектори швидкості

Прискорення точки будемо визначати за формулою:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

Проекції прискорення на осі визначаємо як першу похідну від відповідної проекції швидкості на вісь за часом, м/с^2

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{\pi^2}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t\right) \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = -\dfrac{\pi^2}{8}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}t\right) \end{cases}$$

При t_1 =3с;

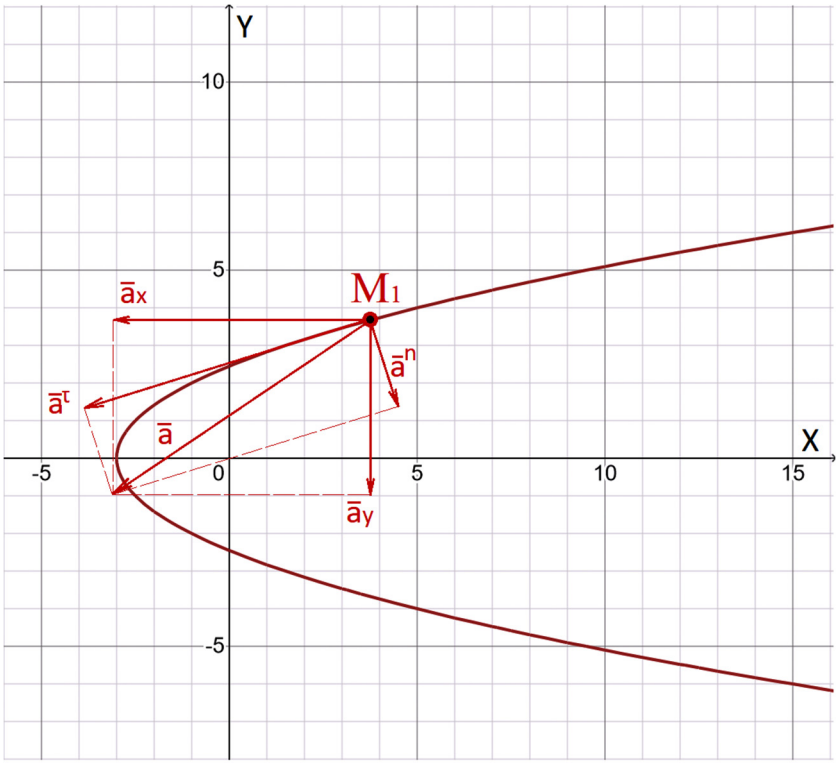
$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{\pi^2}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}t\right) = \dfrac{3{,}14^2}{4}\cos(135°) = -1{,}74 \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = -\dfrac{\pi^2}{8}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}t\right) = -\dfrac{3{,}14^2}{8}\sin(67{,}5°) = -1{,}14 \end{cases}$$

$$a_x = -1,74\ \frac{м}{с^2};\quad a_y = -1,14\ \frac{м}{с^2}$$

$$a = \sqrt{\left(a_x\right)^2 + \left(a_y\right)^2} = \sqrt{\left(-1,74\right)^2 + \left(-1,14\right)^2} = 2,08\ \frac{м}{c^2}$$

$$a^{\tau} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \frac{2,22 \cdot \left(-1,74\right) + 0,6 \cdot \left(-1,14\right)}{2,30} = -1,98 \frac{м}{c^2}$$

$$a^{n} = \left| \frac{V_x a_y - V_y a_x}{V} \right| = \left| \frac{2,22 \cdot \left(-1,14\right) - 0,6 \cdot \left(-1,74\right)}{2,30} \right| = 0,65 \frac{м}{c^2}$$



Масштаб

$1см : 0,5 \frac{м}{c^2}$

Рис. 1.4. Траєкторія руху точки. Вектори прискорень

Визначаємо радіус кривизни:

$$\rho = \frac{V^2}{a^n} = \frac{2,30^2}{0,65} = 8,138\ м$$

Відповідь:

траєкторією руху матеріальної точки є парабола задана рівнянням

$x = \frac{y^2}{2} - 3$;

$$V_x = 2,22\ \frac{м}{c};\ V_y = 0,60\ \frac{м}{c};\ V = 2,30\ \frac{м}{c}; a_x = -1,74\frac{м}{c^2};\ a_y = -1,14\frac{м}{c^2}$$

$$a^\tau = -1,98\frac{м}{c^2};\ a^n = 0,65\frac{м}{c^2};\ a = 4,39\frac{м}{c^2};\ \rho = 8,138м$$

Приклад 3.

Точка рухається у площині *XY* згідно з параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y = \cos(\pi t) \end{cases}$$

Визначити рівняння траєкторії руху точки; величину і напрям її швидкості; величину і напрям повного, дотичного, нормального прискорення і радіус кривизни для моменту часу t = 1с.

Дано:

$\begin{cases} x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y = \cos(\pi t) \end{cases}$; м

t = 1с

$y(x)$ – ?; V – ?; a – ?; a_τ – ?; a_n – ?

Для рівняння траєкторії у координатному вигляді, виключаємо час t.

Для цього рівняння $x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ піднесемо до квадрату, тобто:

$$x^2 = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

І відповідно задана система отримає вид:

$$\begin{cases} x^2 = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y = \cos(\pi t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 - \cos(\pi t) \\ y = \cos(\pi t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = \cos(\pi t) \\ y = \cos(\pi t) \end{cases}$$

Із отриманих рівнянь системи запишемо рівняння траєкторії у координатному вигляді

$y = 1 - x^2$ – це рівняння параболи

Побудуємо дану параболу у відповідності до рівняння і визначимо напрям руху т. M (рис. 1.5). Для цього знаходимо початкове положення точки при $t_0 = 0$ с на траєкторії та положення при $t_1 = 1$ с.

При $t_0 = 0\text{с} - \text{т.}\, M_0(0;1)$:

$$\begin{cases} x_0 = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) = \sqrt{2}\sin(0) = 0 \\ y_0 = \cos(\pi t) = \cos(0) = 1 \end{cases}$$

При $t_1 = 1\text{с} - \text{т.}\, M_1(\sqrt{2};-1)$:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \\ y_1 = \cos(\pi t) = \cos(\pi) = -1 \end{cases}$$

Отримаємо: $M_0(0;1); M_1\ (\sqrt{2};-1)$

Зобразимо ці точки на траєкторії руху.

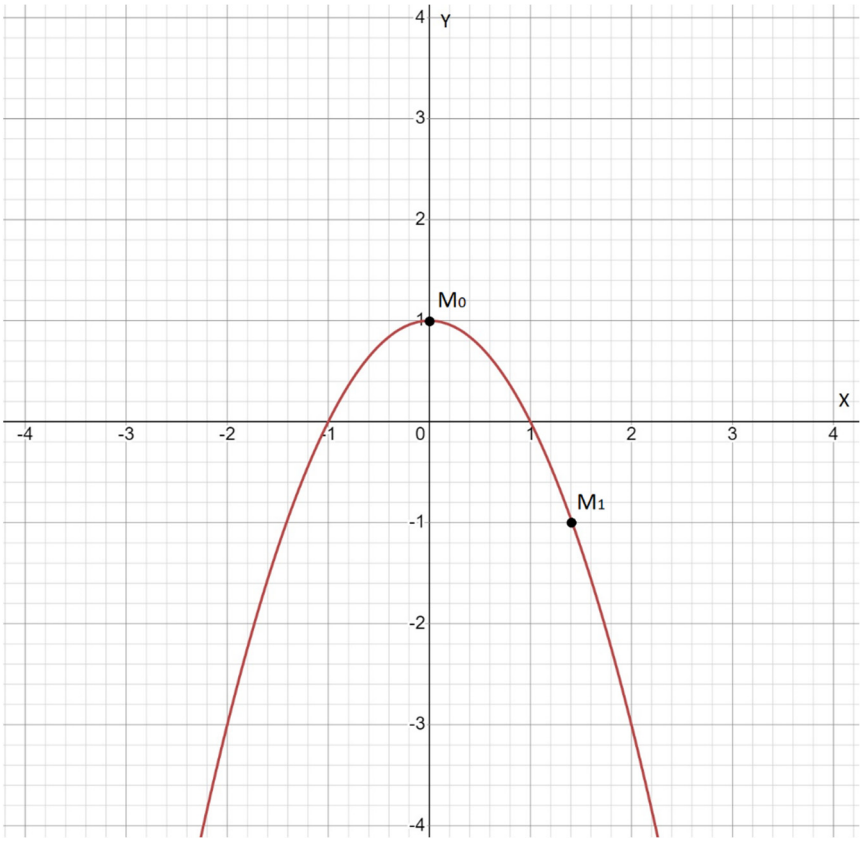


Рис. 1.5. Траєкторія руху точки

Для визначення швидкості точки візьмемо похідну за часом від параметричних рівнянь руху:

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\pi\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)}{2} \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = -\pi\sin(\pi t) \end{cases}$$

При $t_1 = 1$с складові вектора швидкості:

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} = -\pi\sin(\pi) = 0 \end{cases}$$

Знайдемо повну швидкість точки:

$$V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2} = 0\ \frac{м}{с}$$

Прискорення точки будемо визначати за формулою:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

Проекції прискорення на осі визначаємо як першу похідну від відповідної проекції швидкості на вісь за часом, м/с^2

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = -\dfrac{\pi^2}{4}\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = -\pi^2\cos(\pi t) \end{cases}$$

При $t_1 = 1$ с $\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = -\dfrac{\pi^2}{4}\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -3,489 \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = -\pi^2\cos(\pi) = 9,869 \end{cases}$

$$a_x = -3,489\ \frac{м}{с^2};\ \ a_y = 9,869\frac{м}{с^2}$$

$$a=\sqrt{\left(a_x\right)^2+\left(a_y\right)^2}=\sqrt{\left(-3,489\right)^2+\left(9,869\right)^2}=10,467\ \frac{м}{c^2}$$

Дотичне прискорення:

$$a^\tau=\frac{V_x a_x+V_y a_y}{V}$$

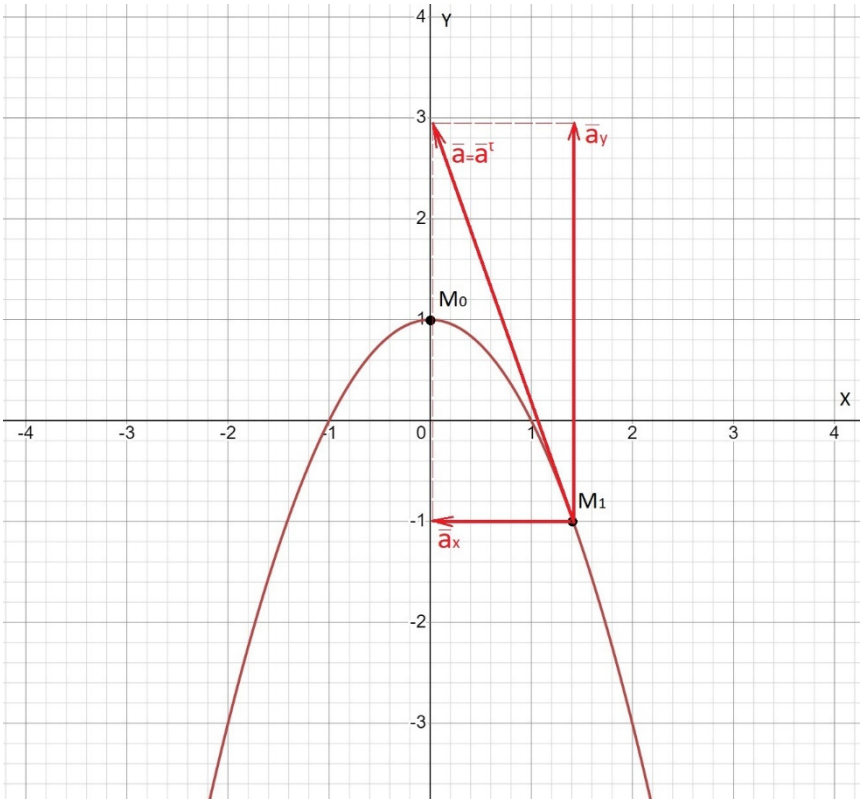
$$a^\tau=\frac{\left(\frac{\pi\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{2}\right)\left(-\frac{\pi^2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{4}\right)+\left(-\pi\sin\left(\pi t\right)\right)\left(-\pi^2\cos\left(\pi t\right)\right)}{\pi\sqrt{\frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)+\sin^2\left(\pi t\right)}}=$$

$$=\frac{\pi^2\left(\sin\left(2\pi t\right)-\frac{1}{4}\sin\left(\pi t\right)\right)}{2\sqrt{\frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)+\sin^2\left(\pi t\right)}}=\frac{\pi^2\cdot\sin\left(\pi t\right)\cdot\left(2\cos\left(\pi t\right)-\frac{1}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}+4\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}}=$$

$$=\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\frac{2\cos\left(\pi t\right)-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2}+4\sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)}}$$

При $t_1=1$ с

$$a^\tau=\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{2\cos\left(\pi\right)-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2}+4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}}=9,86\cdot\frac{-2-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2}+4}}=10,467\ \frac{м}{c^2}$$



Масштаб

$$1см : 1\frac{м}{с^2}$$

Рис. 1.6. Траєкторія руху точки. Вектори прискорень

Нормальне прискорення:

$$a^n = \sqrt{(a)^2 - \left(a^\tau\right)^2} = \sqrt{(10,467)^2 - (10,467)^2} = 0\ \frac{м}{с^2}$$

Відповідь:

рівняння траєкторії руху $y = 1 - x^2$;

$$V_x = V_y = V = 0\ \frac{м}{с};\ \ a_x = -3,489\ \frac{м}{с^2};\ \ a_y = 9,869\ \frac{м}{с^2};\ \ a^\tau = 10,467\frac{м}{с^2};$$

$$a^n = 0\ \frac{м}{с^2}$$

2. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПЛОСКОГО МЕХАНІЗМУ

2.1. Короткі відомості з теорії

Поступальним називається такий рух твердого тіла, за якого довільна пряма, що незмінно пов'язана з тілом, увесь час залишається паралельною своєму початковому положенню (або паралельною самій собі), а всі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями та прискореннями.

Для визначення кінематичних характеристик поступального руху твердого тіла достатньо визначити характеристики руху однієї якої-небудь точки даного тіла. Зазвичай за цю точку приймають центр ваги тіла т. *C*.

Обертовим називається такий рух твердого тіла навколо нерухомої осі, за якого будь-які дві точки тіла залишаються нерухомими, а всі інші описують траєкторії кола. Пряма, що проходить через дві нерухомі точки, називається віссю обертання.

Кінематика плоскопаралельного руху твердого тіла

Плоскопаралельним називається такий рух твердого тіла, за якого всі його точки рухаються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині. При такому русі, для того щоб охарактеризувати рух всього твердого тіла, достатньо розглянути рух однієї із таких паралельних площин у межах тіла (плоскої фігури). Плоскопаралельний рух тіла повністю визначається рухом перетину *S* (плоскої фігури). Тобто задача визначення кінематики тіла зводиться від тривимірної до двомірної. А кінетичні рівняння такого руху мають вигляд:

$$\begin{aligned} X_A &= X(t); \\ Y_A &= Y(t); \\ \varphi &= \varphi\ (t) \end{aligned}, \qquad (2.1)$$

де $X_A; Y_A$ – координати точки *A-полюса*; φ – кут повороту навколо полюса.

За полюс приймається точка, що лежить на твердому тілі, швидкість і прискорення якої відомі, або можуть бути легко обчислені.

Характерним прикладом такого руху може бути рух шатуна у кривошипно-шатунному механізмі, рух колеса, що котиться по прямолінійній ділянці шляху та ін.

Плоскопаралельний рух твердого тіла можна розглядати як суму двох рухів: поступального разом з полюсом і обертального навколо осі, яка проходить через полюс перпендикулярно площині руху.

Кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху твердого тіла є швидкість V_A і прискорення a_A полюса та кутова швидкість ω і кутове прискорення тіла ε навколо полюса.

Визначення швидкостей точок тіла при плоскопаралельному русі тіла

Існують два способи визначення швидкості точок за плоскопаралельного руху тіла:

- векторний (з графічним і аналітичним варіантами);
- використання миттєвого центру швидкостей;

За першого способу швидкість будь-якої точки тіла визначається геометричною (векторною) сумою:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \qquad (2.2)$$

де $\vec{V}_B$ – швидкість т. *B*, що визначається; $\vec{V}_A$ – швидкість полюса (т. *A*); $\vec{V}_{BA}$ – швидкість т. *B* у разі обертового руху плоскої фігури навколо полюса.

Швидкість будь-якої точки тіла за плоскопаралельного руху можна зобразити як геометричну суму швидкості полюса та лінійної швидкості точки в разі обертового руху плоскої фігури навколо полюса.

Спроектувавши векторне рівняння (2.2) на дві перпендикулярні осі і визначивши величину $V_{BA} = \omega \cdot BA$, знаходимо значення швидкості V_B через проекції V_{Bx}, V_{By} за теоремою Піфагора $V_B = \sqrt{V_{Bx} + V_{By}}$.

Аналітичний варіант векторного способу ґрунтується на теоремі про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, яка формулюється: проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що сполучає точки, рівні між собою.

$$V_A \cdot \cos\alpha = V_B \cdot \cos\beta;$$

$$V_B = \frac{V_A \cdot \cos\alpha}{\cos\beta},$$

де V_A – відома швидкість т. *A*; V_B – швидкість т. *B*, що визначається; α і β – відповідні кути між векторами швидкостей точок *A* і *B* та прямою що сполучає ці точки.

Такий варіант векторного способу рекомендується використовувати у разі відомих напрямків векторів швидкостей та відомої величини однієї із швидкостей точок.

Другий спосіб визначення швидкості точки за плоскопаралельного руху тіла використовує поняття миттєвого центру швидкостей. *МЦШ* – це точка рухомої плоскої фігури, швидкість якої у дану мить дорівнює нулю, і навколо якої відбувається обертання тіла. *МЦШ* позначається буквою *P*.

Швидкість будь-якої точки тіла за цим способом визначається:

$$\begin{aligned} V_A &= \omega \cdot PA; \\ V_B &= \omega \cdot PB \text{ і т. д.}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

де ω – кутова швидкість тіла; PA, PB – найкоротші відстані (перпендикуляри) від векторів $\vec{V}_A$ та $\vec{V}_B$ до *МЦШ*.

Із рівності (2.3) можна записати:

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB} = \cdots = \omega, \tag{2.4}$$

Отже, швидкості точок тіла пропорційні їх відстанням до миттєвого центру швидкостей.

За обертального руху положення *МЦШ* є постійним і збігається з центром обертання. За поступального руху - *МЦШ* прямує до нескінченності. А за плоскопаралельного руху існують способи визначення *МЦШ*.

Способи визначення миттєвого центру швидкостей

Загалом *МЦШ* знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених від векторів швидкостей точок.

В окремих випадках:

- якщо вектори швидкостей двох точок паралельні $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$ та модулі їх рівні між собою, то МЦШ віддаляється на нескінченну велику відстань. У цьому разі відбувається миттєво-поступальний рух;

- якщо вектори швидкостей двох точок направлені в один бік і перпендикулярні до відрізка, що їх з'єднує, а модулі швидкостей не рівні між собою, то *МЦШ* лежить у точці перетину зазначеної перпендикулярної прямої з іншою прямою, яка з'єднує кінці векторів швидкостей точок;

- якщо вектори швидкостей двох точок направлені в різні боки і перпендикулярні до відрізка, що їх з'єднує, то *МЦШ* лежить у точці перетину прямої, яка з'єднує кінці векторів швидкостей з наведеним вище відрізком;

- у разі кочення (без ковзання) тіла по нерухомій поверхні, *МЦШ* знаходиться в точці контакту тіла і поверхні.

Іншою важливою кінематичною характеристикою плоскопаралельного руху твердого тіла є прискорення.

Визначення прискорень точок тіла

Найбільш поширені два способи визначення прискорення точок за плоскопаралельного руху тіла:

- векторний;
- з використанням миттєвого центру прискорень (МЦП).

Векторний спосіб визначення прискорень точок тіла ґрунтується на векторній формулі розподілу прискорень точок плоскої фігури:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau(\varepsilon)} + \vec{a}_{BA}^{n(\omega)}, \qquad (2.5)$$

де $\vec{a}_B$ – прискорення точки, що визначається; $\vec{a}_A$ – прискорення полюсу; $\vec{a}_{BA}^{\tau(\varepsilon)}$ – обертове прискорення т. *B* в обертовому русі разом з тілом навколо полюса *A*; $\vec{a}_{BA}^{n(\omega)}$ – доцентрове прискорення т. *B* в обертовому русі разом з тілом навколо полюса *A*.

Прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення точки, яку обрано за полюс, та обертового (дотичного) $\vec{a}_{BA}^{\tau(\varepsilon)}$ і прискорення доцентрового (нормального) $\vec{a}_{BA}^{n(\omega)}$ цієї точки в разі обертового руху плоскої фігури навколо полюса.

Оскільки в разі абсолютного руху т. *B* складові її прискорення $\vec{a}_{BA}^{n(\omega)}$ і $\vec{a}_{BA}^{\tau(\varepsilon)}$ зовсім не спрямовані по головній нормалі та дотичній до абсолютної траєкторії т. *B*, у теоретичній механіці ці складові частіше називають обертовим і доцентровим прискореннями.

Величини обертового та доцентрового прискорення розраховується:

$$a_{BA}^{\tau(\varepsilon)} = \varepsilon \cdot AB;$$
$$a_{BA}^{n(\omega)} = \omega^2 \cdot AB,$$

де ε – кутове прискорення тіла; ω – кутова швидкість тіла.

Для визначення величини шуканого прискорення $\vec{a}_B$ необхідно спроектувати всі вектори, що записані у формулі (2.5) на осі декартової системи координат і розв'язати рівняння.

Миттєвий центр прискорень (*МЦП*) – це точка рухомої плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю. *МЦП* позначається буквою *Q* і знаходиться на промені, проведеному з т. *A* під кутом μ (2.8), відкладеного за напрямом кутового прискорення ε.

Розрахунок прискорення точки за допомогою миттєвого центру прискорень потребує, щоб у вихідних даних крім прискорення полюсу $\vec{a}_A$ були відомі: кутова швидкість ω та кутове прискорення ε плоскої фігури. Визначається прискорення т. *B* цим способом як геометрична сума прискорень полюса $\vec{a}_A$ і прискорення $\vec{a}_{BA}$ (2.6):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \qquad (2.6)$$

Вектор $\vec{a}_{BA}$ спрямовується у т. *B* паралельно вектору $\vec{a}_A$ у протилежну сторону, а його модуль пропорційний віддалі *AB* (2.7):

$$a_{BA} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (2.7)$$

Промінь, на якому знаходиться т. *B*, проводиться з т. *A* під кутом μ (2.8) так, щоб напрям повороту вектора $\vec{a}_A$ до цього променя збігався з напрямом ε.

$$\mu = arctg \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \tag{2.8}$$

2.2. Порядок розв'язання задач

1. Визначте види рухів окремих ланок плоского механізму.

2. Викреслить у масштабі кінематичну схему плоского механізму згідно із заданих геометричних розмірів (табл. 2.1).

3. Покажіть на кінематичній схемі вектори швидкостей точок ланок механізму, які здійснюють поступальні та обертові рухи.

4. Використовуючи теорему про проекції або спосіб МЦШ, визначте величини швидкостей точок ланок, що здійснюють плоскопаралельні рухи.

5. Використовуючи формулу розподілу прискорень точок плоскої фігури, визначте необхідні прискорення точок механізму.

2.3. Умова завдання і приклади розв'язання задач

Кривошипно-шатунний механізм має один ступень вільності і складається з ланок, з'єднаних між собою шарнірно. Ланки механізму рухаються в площині аркуша. Розрахункові кінематичні схеми механізмів до відповідних варіантів завдань показано на рис. 2.2 - 2.6. Геометричні розміри і початкові значення кутів повороту відповідних ланок наведено в табл. 2.1. Ланки у вигляді трикутної пластини мають відповідні кути 30°, 60°, 90°, а гіпотенуза трикутника дорівнює 0,6 м. Кутова швидкість і кутове прискорення першої ланки *OA* вважаються відомими і дорівнюють відповідно ω_1 = 10 рад/с та ε_1 = 5 рад/с^2.

Для заданого на схемі положення кривошипно-шатуного механізму за допомогою миттєвих центрів швидкостей ланки визначити швидкості всіх точок механізму і кутові швидкості ланок.

За допомогою теореми про додавання прискорень визначити прискорення точок *A*, *B*, *C* і кутові прискорення ланок механізму.

Примітка: за вказівкою викладача умова завдання може бути корегована.

Таблиця 2.1

Вихідні дані для розрахунку

Варіант	Довжина ланки, (м)					Початкові кути, (градус)			
	l_1	l_2	l_3	l_4	R	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
1	0,6	-	0,65	0,8	-	110	17	160	120
2	0,25	0,8	0,55	1,3	-	70	20	110	200
3	0,25	0,6	0,9	1,0	-	110	60	25	270
4	0,25	0,9	1,0	0,8	0,25	270	160	210	315
5	0,25	0,6	0,8	1,0	0,25	200	320	250	200
6	0,2	1,1	0,6	0,7	-	80	20	160	270
7	0,25	1,2	1,25	0,25	-	130	20	150	70
8	0,25	0,8	1,0	0,8	0,2	70	40	145	220
9	0,55	0,6	-	0,75	0,2	140	170	35	220
10	0,25	0,5	0,9	0,7	-	70	190	230	170
11	0,25	0,75	-	0,85	0,15	110	15	95	-
12	0,25	0,5	-	0,55	-	70	110	17	160
13	0,2	0,5	0,4	0,25	-	70	140	75	30
14	0,2	1,1	0,65	-	0,25	45	95	10	220
15	0,2	1,0	-	0,65	0,2	110	20	145	160
16	0,35	0,3	0,4	0,5	-	155	75	145	45
17	0,2	0,45	0,9	0,45	-	70	155	225	160
18	0,2	0,4	0,4	-	0,2	70	100	20	260
19	0,2	1,0	1,1	1,1	-	70	220	35	220
20	0,2	0,4	0,6	0,9	-	110	35	70	150
21	0,2	0,7	0,8	0,75	-	70	160	300	150
22	0,2	0,7	0,45	0,8	-	70	20	65	285
23	0,2	0,7	-	0,6	0,15	70	20	40	35
24	0,2	0,65	0,9	1,7	-	70	155	225	135
25	0,2	0,4	-	0,35	-	40	75	345	125
26	0,2	0,35	-	0,35	-	40	350	75	70
27	0,2	0,3	0,35	0,4	-	40	350	15	265
28	0,2	0,4	0,4	0,25	0,2	65	10	35	60
29	0,2	0,5	0,6	1,2	-	110	25	75	150
30	0,2	0,7	0,5	-	0,2	65	20	160	-

Приклад 1.

Дано:

$\angle\varphi_1 = 50^\circ, \angle\varphi_2 = 15^\circ, \angle\varphi_3 = 135^\circ,$

$OA = l_1 = 1,0 м, AC = l_2 = 0,9 м,$

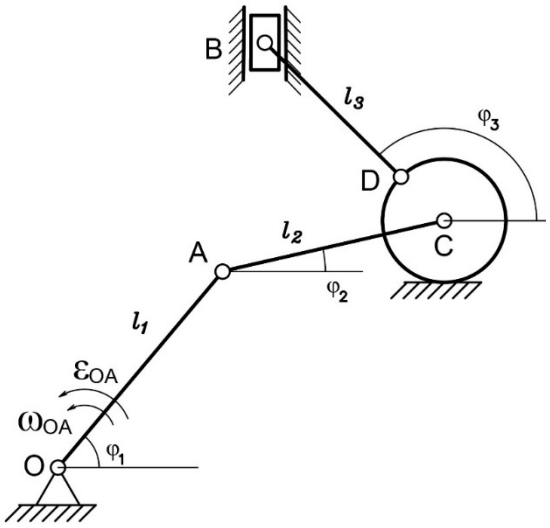
$BD = l_3 = 1,0 м, R = CD = 0,2 м,$

$\omega_{OA} = 1,0\ рад/с,$

$\varepsilon_{OA} = 1,0\ рад/с$

V_A, V_B, V_C -?; $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ -?;

a_A, a_B, a_C -?; $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ -?



1. Визначаємо види рухів окремих ланок плоского механізму.

Даний кривошипно-шатунний механізм складається із п’яти ланок:

- кривошип *OA* виконує обертовий рух;
- шатуни *AB* та *DE* і колесо *CD* – плоскопаралельний;
- повзун – поступальний рух.

2. Викреслюємо у масштабі кінематичну схему механізму і показуємо вектори швидкостей точок ланок, що визначаються, які здійснюють поступальні та обертові рухи.

3. Визначаємо величини швидкостей точок ланок (рис. 2.1).

Швидкість точки *A* знаходиться за формулою Ейлера:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1,0 \cdot 1,0 = 1,0 \text{ м/с.}$$

Загальним способом знаходимо миттєві центри швидкостей ланок механізму-точки $\mathrm{P_{AC}}$, $\mathrm{P_{BD}}$. Для цього проводимо перпендикуляри до векторів швидкостей. На перетині перпендикулярів знаходяться точки *МЦШ* ланок. Точка P_{CD} знаходиться у місці конакту колеса з поверхнею. Далі потрібно визначити відстані $A\mathrm{P_{AC}}$ CP_{AC}, DP_{BD}, BP_{BD}. Ці відстані знаходимо із трикутників $\Delta\mathrm{ACP}_{AC}$ і $\Delta\mathrm{BDP}_{BD}$.

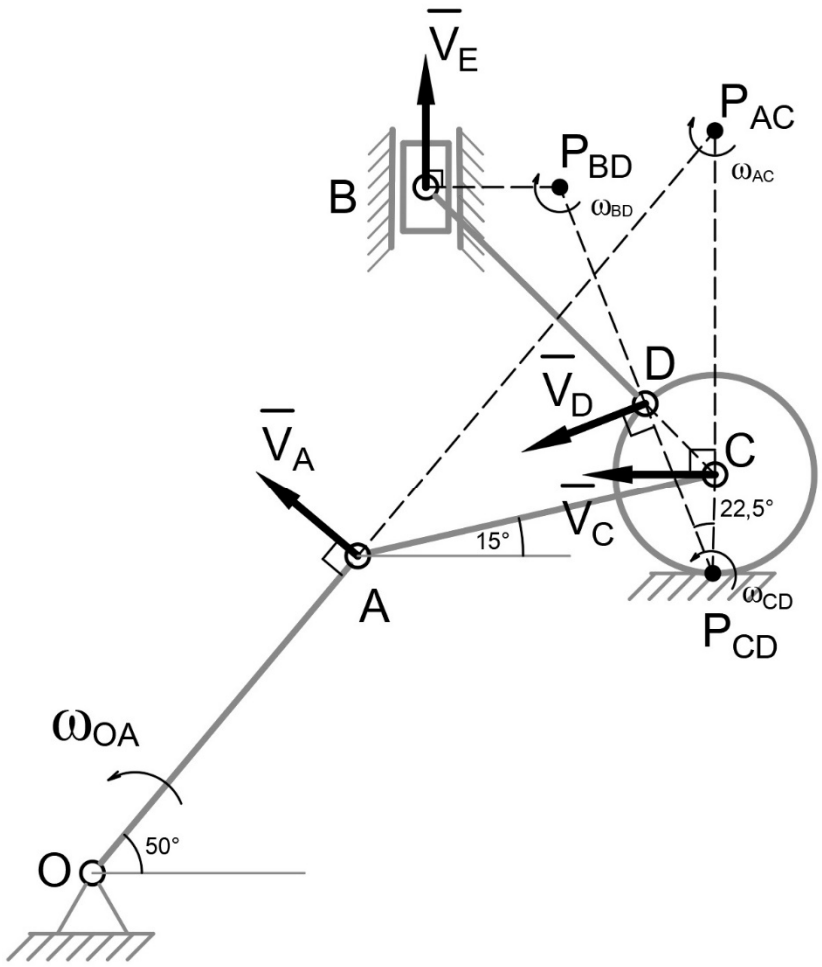


Рис. 2.1. Визначення величин швидкостей точок способом *МЦШ*

Розглянемо ΔACP_{AC} і визначимо кути:

$\angle A = 50° - 15° = 35°$;

$\angle C = \frac{\pi}{2} + \angle b = 90° + 15° = 105°$ $\angle P_{AC} = \pi - \angle A - \angle C = 180° - 35° - 105° = 40°$.

За теоремою синусів отримаємо:

$$\frac{AC}{\sin(\angle P_{AC})} = \frac{AP_{AC}}{\sin(\angle C)} = \frac{CP_{AC}}{\sin(\angle A)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AP_{AC} = AC \cdot \dfrac{\sin(\angle C)}{\sin(\angle P_{AC})} = l_2 \cdot \dfrac{\sin(\angle C)}{\sin(\angle P_{AC})} = 0{,}9 \cdot \dfrac{\sin(105^\circ)}{\sin(40^\circ)} \\ CP_{AC} = AC \cdot \dfrac{\sin(\angle A)}{\sin(\angle P_{AC})} = l_2 \cdot \dfrac{\sin(\angle A)}{\sin(\angle P_{AC})} = 0{,}9 \cdot \dfrac{\sin(35^\circ)}{\sin(40^\circ)} \end{cases}$$

Отримуємо: AP_{AC} = 1,352 м; CP_{AC} = 0,803 м.

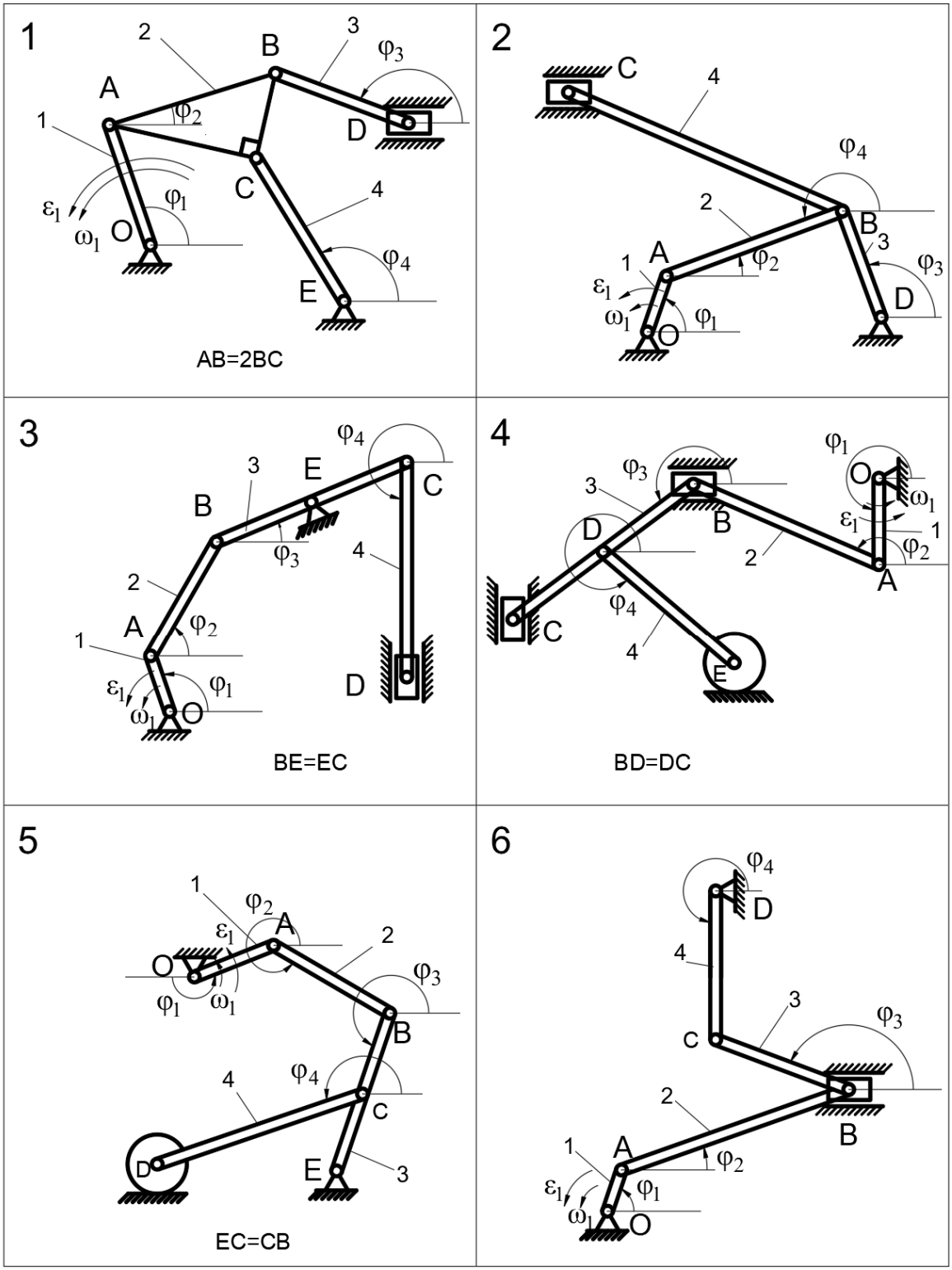


Рис. 2.2

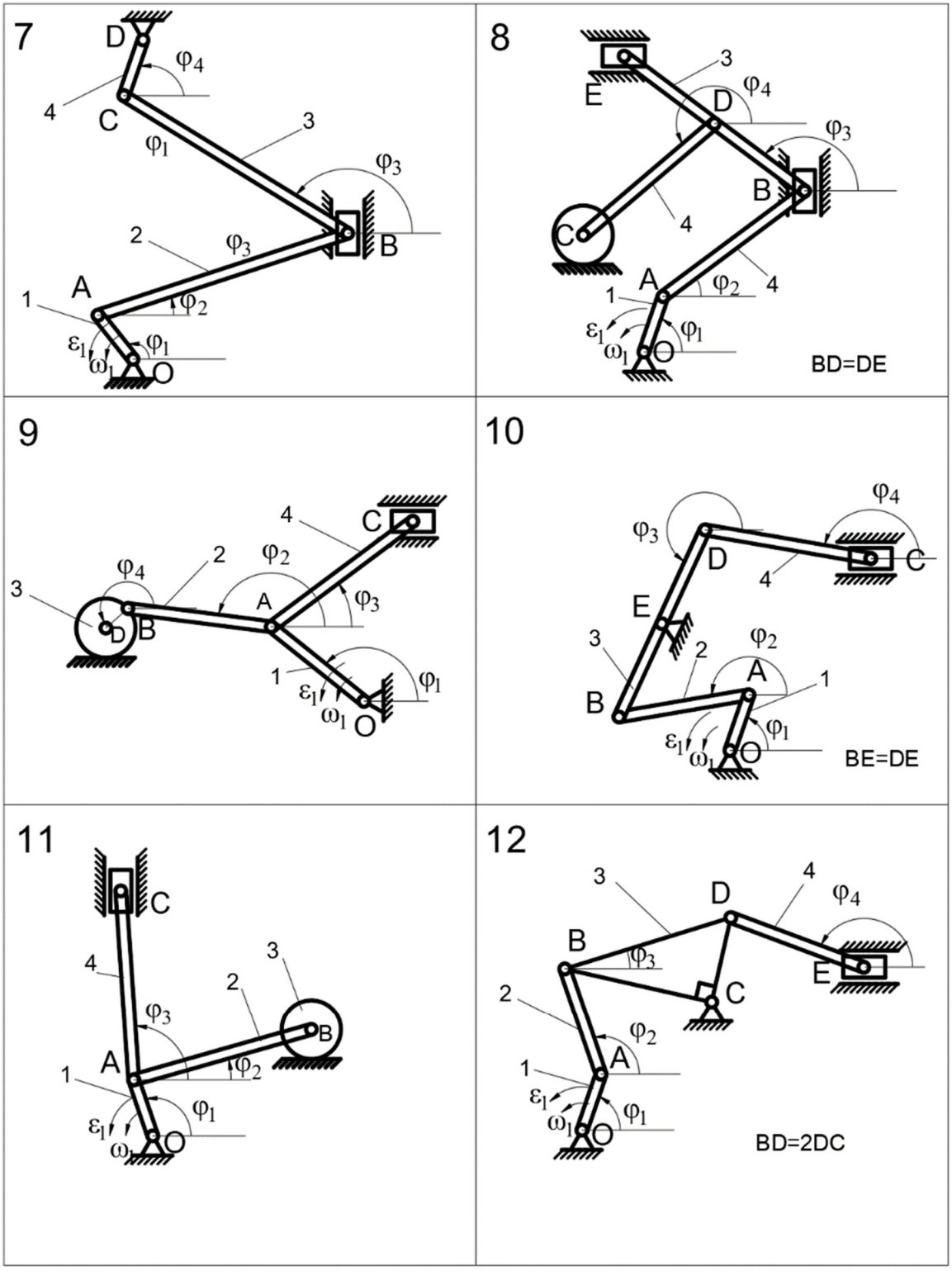

7
D
φ4
4
C
φ1
3
φ3
2
φ3
B
A
1
φ2
ε1
φ1
ω1
O
8
3
E
φ4
D
φ3
B
4
C
A
φ2
4
1
ε1
φ1
ω1
O
BD=DE
9
4
C
2
φ2
φ4
3
A
φ3
D
B
1
ε1
φ1
ω1
O
10
φ4
φ3
D
C
4
E
3
φ2
2
A
1
B
φ1
ε1
ω1
O
BE=DE
11
C
4
3
2
φ3
B
A
φ2
1
φ1
ε1
ω1
O
12
3
D
4
φ4
B
φ3
E
C
2
φ2
A
1
ε1
φ1
ω1
O
BD=2DC

Рис. 2.3

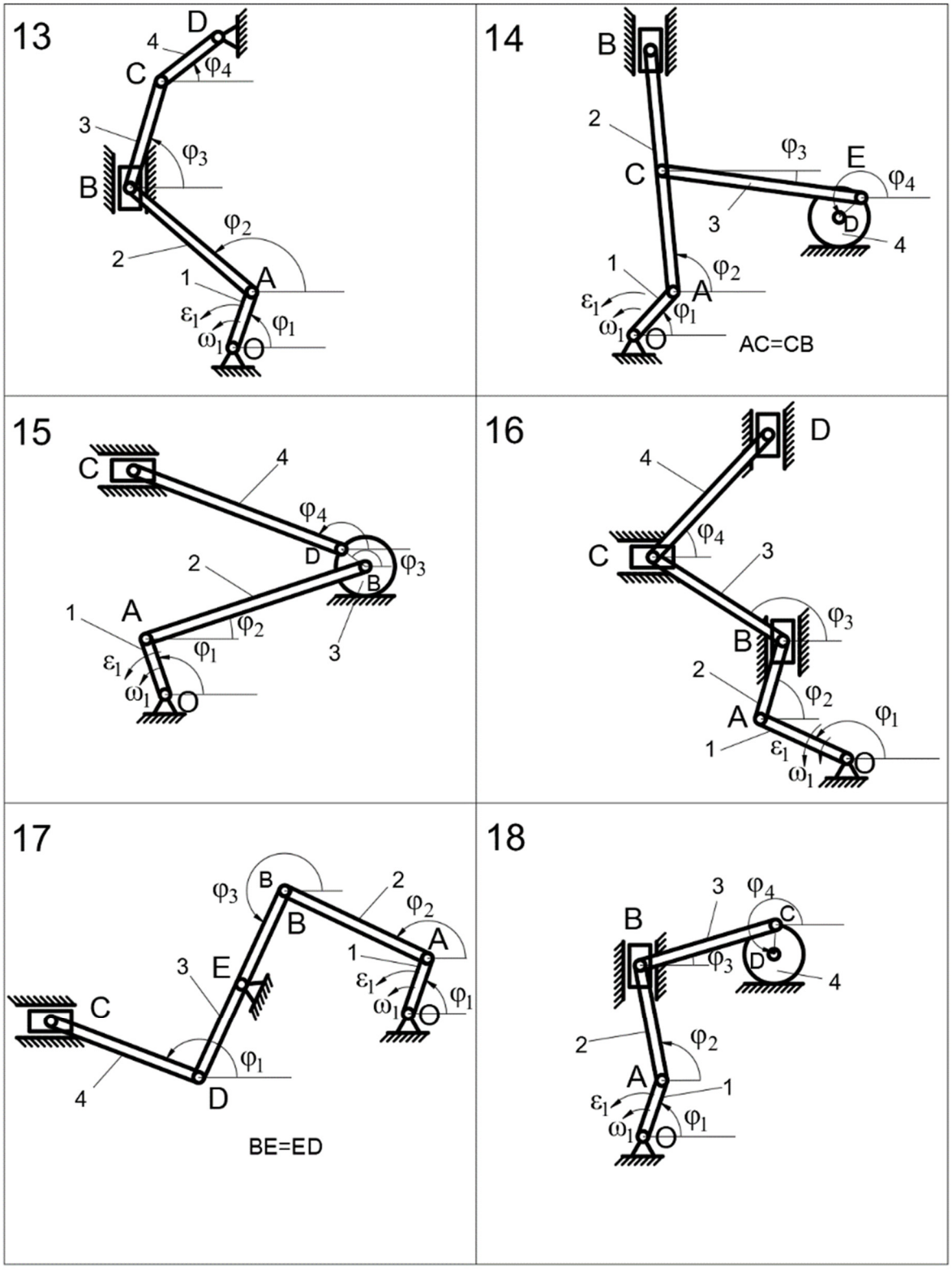

13
D
4
C
φ4
3
φ3
B
φ2
2
1
A
ε1
φ1
ω1
O
14
B
2
C
φ3
E
φ4
3
D
4
1
φ2
ε1
A
ω1
φ1
O
AC=CB
15
C
4
φ4
D
φ3
2
B
1
A
φ2
φ1
3
ε1
ω1
O
16
D
4
φ4
C
3
φ3
B
2
φ2
φ1
A
1
ε1
ω1
O
17
φ3
B
2
φ2
B
A
1
3
E
ε1
ω1
φ1
O
C
φ1
4
D
BE=ED
18
3
φ4
C
B
φ3
D
4
2
φ2
A
1
ε1
ω1
φ1
O

Рис. 2.4

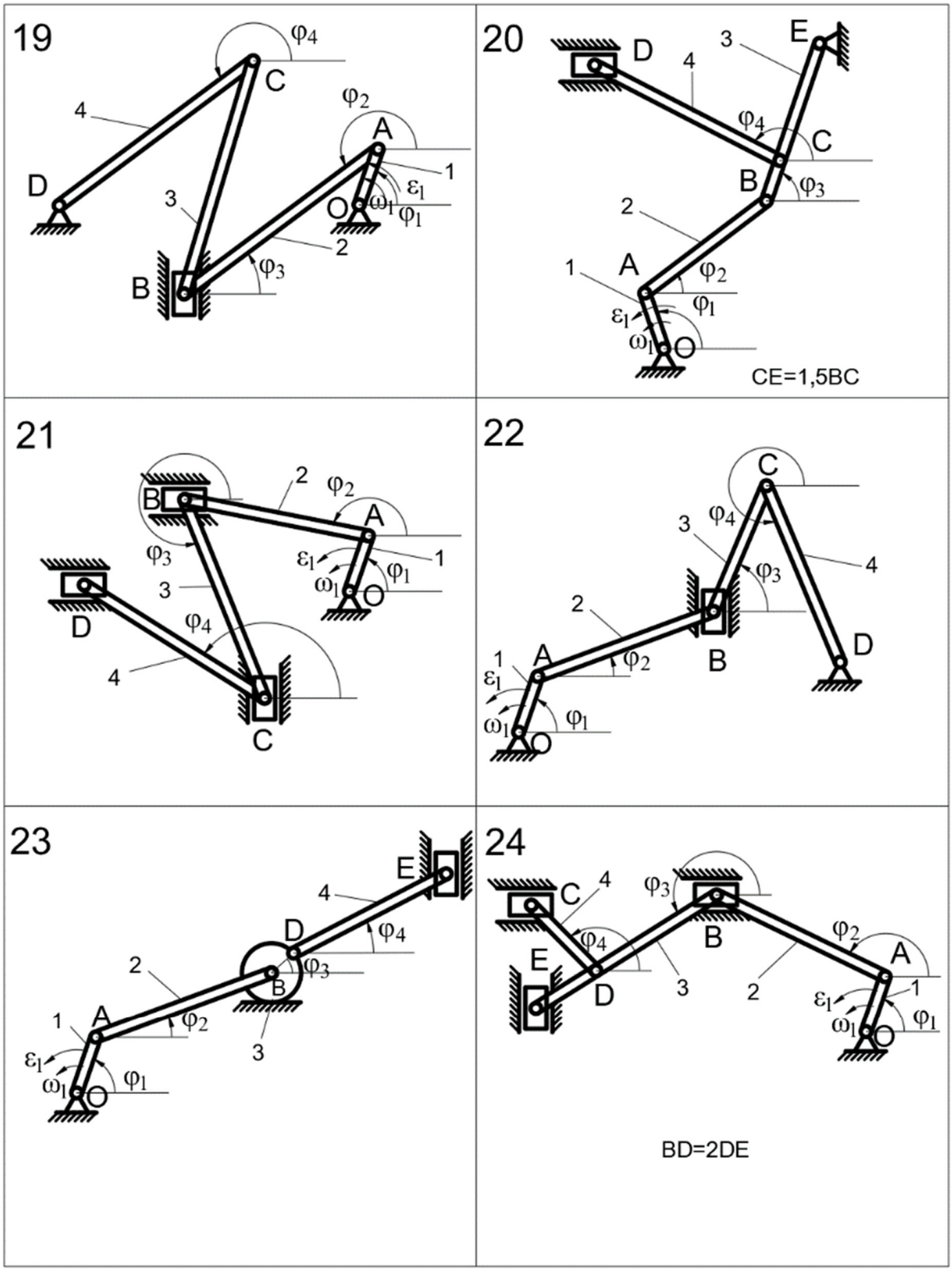

19
φ4
C
φ2
4
A
D
1
ε1
3
O
ω1
φ1
2
B
φ3
20
D
3
E
4
φ4
C
B
φ3
2
1
A
φ2
φ1
ε1
ω1
O
CE=1,5BC
21
2
φ2
B
A
φ3
ε1
1
ω1
φ1
3
O
D
φ4
4
C
22
C
φ4
3
φ3
4
2
A
φ2
B
D
1
ε1
ω1
φ1
O
23
E
4
D
φ4
2
φ3
B
1
A
φ2
3
ε1
ω1
φ1
O
24
C
4
φ3
φ4
B
φ2
A
E
D
3
2
ε1
1
ω1
φ1
O
BD=2DE

Рис. 2.5

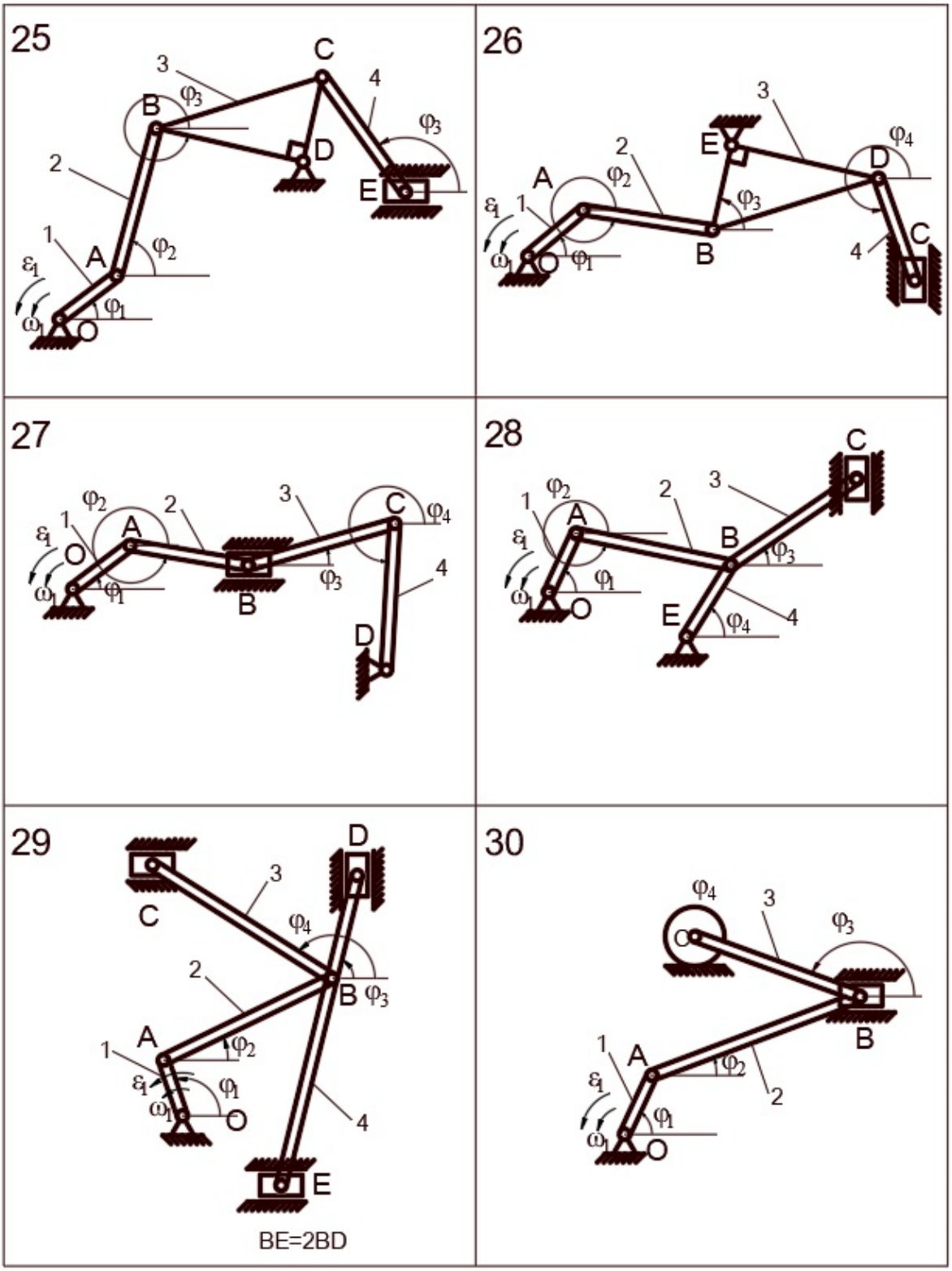


Рис. 2.6

Кутова швидкість ланки AC:

$$\omega_{AC} = \frac{V_A}{AP_{AC}} = \frac{1}{1,352} = 0,740 \text{ рад/с.}$$

Швидкість точки C:

$$V_C = \omega_{AC} \cdot CP_{AC} = 0,740 \cdot 0,803 = 0,594 \text{ м/с.}$$

Кутова швидкість колеса CD:

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_{CD}} = \frac{V_C}{R} = \frac{0,594}{0,2} = 2,970 \text{ рад/с.}$$

Швидкість точки D:

$$V_D = \omega_{CD} \cdot DP_{CD} = \left| \begin{array}{l} \angle BCP_{CD} = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \angle C = 270^\circ - 135^\circ = 135^\circ \\ \angle CDP_{CD} = \frac{1}{2}\left(\pi - \angle DCP_{CD}\right) = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22,5^\circ \\ DP_{CD} = 2R \cdot \cos(\angle CDP_{CD}) = 0,370 м \end{array} \right| =$$

$$= 2,970 \cdot 0,370 = 1,099 \text{ м/с.}$$

Отже, швидкість точки *D*: $V_D = 1,099$ м/с.

Розглянемо ΔBDP_{BD} і визначимо кути:

$\angle D = \angle CDP_{BD} = 22,5°$;

$\angle B = 180° - \angle C = 180° - 135° = 45°$;

$\angle P_{BD} = 180° - \angle D - \angle E = 180° - 22,5° - 45° = 112,5°$.

За теоремою синусів:

$$\frac{BD}{\sin(\angle P_{BD})}=\frac{DP_{BD}}{\sin(\angle B)}=\frac{BP_{BD}}{\sin(\angle D)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} BP_{BD}=BD\cdot\dfrac{\sin(\angle D)}{\sin(\angle P_{BD})}=l_3\cdot\dfrac{\sin(\angle D)}{\sin(\angle P_{BD})}=1,0\cdot\dfrac{\sin(22,5^\circ)}{\sin(112,5^\circ)} \\ DP_{BD}=BD\cdot\dfrac{\sin(\angle B)}{\sin(\angle P_{BD})}=l_3\cdot\dfrac{\sin(\angle B)}{\sin(\angle P_{BD})}=1,0\cdot\dfrac{\sin(45^\circ)}{\sin(112,5^\circ)} \end{cases}$$

Отримаємо:

$$BP_{BD}=1,0\cdot\frac{\sin(22,5^\circ)}{\sin(112,5^\circ)}=0,414\text{м};$$

$$DP_{BD}=1,0\cdot\frac{\sin(45^\circ)}{\sin(112,5^\circ)}=0,765\text{м}.$$

Кутова швидкість ланки BD:

$$\omega_{BD}=\frac{V_C}{DP_{BD}}=\frac{1,099}{0,765}=1,437\text{ рад/с}.$$

Швидкість точки B:

$$V_B=\omega_{BD}\cdot BP_{BD}=1,437\cdot0,414=0,595\text{ м/с}.$$

4. Визначаємо величини прискорень точок ланок механізму.
Кривошип *OA* виконує обертовий рух, тому прискорення точки A:

$$\vec{a}_A=\vec{a}^{\,\tau}_A+\vec{a}^{\,n}_A,$$

де $a^{\tau}_A=\varepsilon_{O_1A}\cdot l_1\Big|=$ на рисунку напрям ε_{OA} позначено $=\Big|1.0$ м/с^2 відповідно до умови задачі $a^n_A=(\omega_{O_1A})^2\cdot l_1=(1,0)^2\cdot1,0=1,0$ м/с^2.

Таким чином:

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{(1,0)^2 + (1,0)^2} = 1,414 \text{ м/с}^2.$$

Шатун AC здійснює плоскопаралельний рух, і прискорення точки С знаходимо, використовуючи векторну формулу розподілу прискорень точок тіла при плоскопаралельному русі (2.9 і 2.10):

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{CA} + \vec{a}^{n}_{CA}; \tag{2.9}$$

$$\vec{a}^{\tau}_C + \vec{a}^{n}_C = \vec{a}^{\tau}_A + \vec{a}^{n}_A + \vec{a}^{\tau}_{CA} + \vec{a}^{n}_{CA}, \tag{2.10}$$

де $a_C^n = (\omega_{CD})^2 \cdot R = (2,97)^2 \cdot 0,2 = 1,764$ м/с;

$a_{CA}^n = (\omega_{AC})^2 \cdot l_2 = (0,740)^2 \cdot 0,9 = 0,493$ м/с^2

Проектуємо рівняння (2.9) на осі C_y та C_x (див. рис. 2.2):

На ось C_y:

$$-a_C^n = -a_A^n \cdot \sin(50°) - a_A^\tau \cdot \cos(50°) - a_{CA}^n \cdot \sin(15°) - a_{CA}^\tau \cdot \cos(15°) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{CA}^\tau = -\frac{a_A^n \cdot \sin(50°) + a_A^\tau \cdot \cos(50°) + a_{CA}^n \cdot \sin(15°) - a_C^n}{\cos(15°)}$$

Отримаємо:

$$a_{CA}^\tau = -\frac{1,0 \cdot \sin(50^\circ) + 1,0 \cdot \cos(50^\circ) + 0,493 \cdot \sin(15^\circ) - 1,764}{\cos(15^\circ)}.$$

Отже: $a_{CA}^\tau = 0,228$ м/с^2.

Кутове прискорення колеса АС:

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\left|a_{CA}^\tau\right|}{AC} = \frac{1,591}{0,9} = 0,253 \text{ рад/с}^2 \text{ (співпадає з напрямом } \omega_{AC})$$

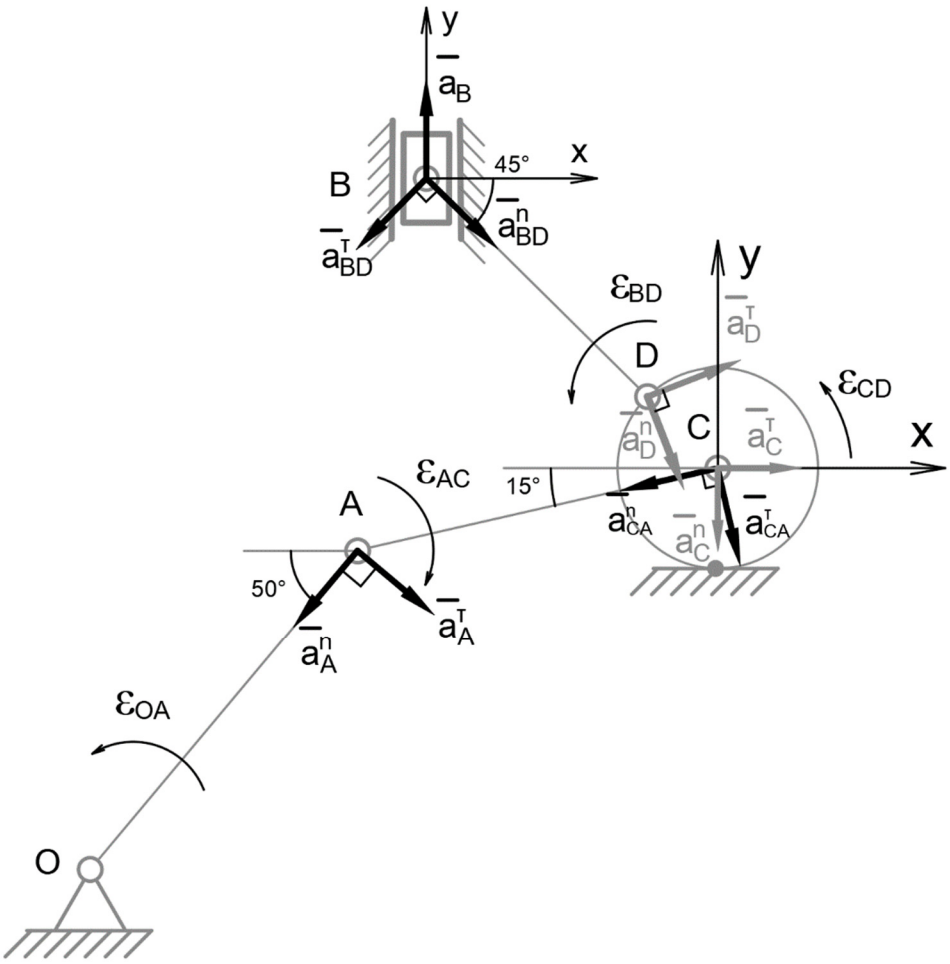


Рис. 2.7. Визначення величин прискорень точок

Проектуємо на вісь C_x:

$$a_C^\tau = -a_A^n \cdot \cos(50°) + a_A^\tau \cdot \sin(50°) - a_{CA}^n \cdot \cos(15°) + a_{CA}^\tau \cdot \sin(15°) \Rightarrow$$
$$a_C^\tau = -1,0 \cdot \cos(50°) + 1,0 \cdot \sin(50°) - 0,493 \cdot \cos(15°) + 0,228 \cdot \sin(15°)$$

Отже: $a_C^\tau = -0,09$ м/с^2

Напрям вектора $\vec{a}_C^{\,\tau}$ є протилежним до зазначеного на рисунку.
Кутове прискорення колеса CD:

$$\varepsilon_{CD} = \frac{\left|a_C^\tau\right|}{R} = \frac{0,09}{0,2} = 0,45 \text{ рад/с}^2 \text{ (співпадає з напрямом } \omega_{CD}).$$

Прискорення точки *D*:

З трикутника ΔCDP_{DC} (див. рис. 2.1):

$$DP_{DC} = 2R \cdot \cos 22,5° = 0,370 \text{ м},$$

$$a_D^{\tau} = \varepsilon_{CD} \cdot DP_{CD} = 0,45 \cdot 0,369 = 0,166 \text{ м/с}^2$$

$$a_D^{n} = (\omega_{CD})^2 \cdot DP_{CD} = 2,97^2 \cdot 0,369 = 1,096 \text{ м/с}^2$$

$$a_D = \sqrt{(a_D^{\tau})^2 + (a_D^{n})^2} = 1,108 \text{ м/с}^2.$$

Векторна формула розподілу прискорення точки *B* шатуна *BD*:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_D^{\tau} + \vec{a}_D^{n} + \vec{a}_{BD}^{\tau} + \vec{a}_{BD}^{n}, \qquad (2.11)$$

де $a_{BD}^{n} = \omega_{BD}^2 \cdot BD = (1,437)^2 \cdot 1,0 = 2,065 \text{ м/с}^2.$

Проектуємо (3) на осі B_x та B_y:

B_x: $0 = a_D^{\tau} \cdot \sin 67,5° + a_D^{n} \cdot \sin 22,5° + a_{BD}^{\tau} \cdot \cos 45° - a_{BD}^{n} \cos 45°$

$$a_{BD}^{\tau} = \frac{-a_D^{\tau} \cdot \sin 67,5° - a_D^{n} \cdot \sin 22,5° - a_{BD}^{n} \cos 45°}{\cos 45°}$$

$$a_{BD}^{\tau} = \frac{-0,166 \cdot \sin 67,5° - 1,096 \cdot \sin 22,5° + 2,065 \cdot \cos 45°}{\cos 45°} =$$

$$= \frac{-0,059 - 0,419 + 1,460}{0,707} = 0,982 \, м/с^2$$

Отже: $a_{BD}^{\tau} = 0,982$ м/с².

Кутове прискорення ланки *BD*:

$$\varepsilon_{BD} = \frac{\left|a_{BD}^{\tau}\right|}{BD} = \frac{0,982}{1,0} = 0,982 \text{ рад/с}^2.$$

B_y: $a_B = a_D^{\tau} \cdot \cos 67,5° - a_D^{n} \cdot \cos 22,5° - a_{BD}^{\tau} \cdot \sin 45° - a_{BD}^{n} \sin 45°$

$$a_B = 0{,}166 \cdot \cos 67{,}5° - 1{,}096 \cdot \cos 22{,}5° - 0{,}982 \cdot \sin 45° - 2{,}065 \cdot \sin 45° =$$
$$= 0{,}064 - 0{,}924 - 0{,}694 - 1{,}460 = -3{,}014 \, м/с^2$$

Отже: a_B = -3,014 м/с^2 (вектор спрямовано у протилежному напрямку до вказаного на рисунку).

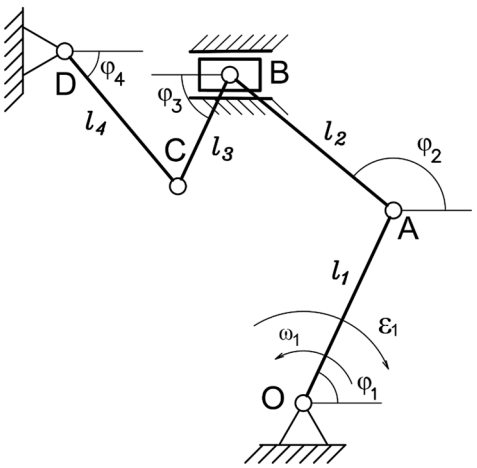
Відповідь: υ_A = 1 м/с; υ_c = 0,594 м/с; υ_D = 1,099 м/с; υ_B = 0,595 м/с; ω_{AC} = 0,740 рад/с; ω_{BD} = 1,437 рад/с; ω_{CD} = 2,970 рад/с; a_B = -3,014 м/с^2; a_A = 1.414 м/с^2; a_C = -0.765 м/с^2; a_D = 1,018 м/с^2; ε_{AC} = 0,253 рад/с^2; ε_{CD} = 0,45 рад/с^2; ε_{BD} = 0,982 рад/с^2;

Приклад 2.

Дано:

$\angle\varphi_1 = 65^\circ, \angle\varphi_2 = 140^\circ, \angle\varphi_3 = 70^\circ,$
$\angle\phi_4 = 50^\circ, OA = l_1 = 1{,}2 м,$
$AB = l_2 = 1{,}0 м, BC = l_3 = 0{,}9 м,$
$CD = l_4 = 1{,}0 м, \omega_{OA} = 1{,}2 \; рад/с,$
$\varepsilon_{OA} = -0{,}6 \; рад/с$

V_A, V_B, V_C -?; $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ -?;
a_A, a_B, a_C -?; $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ -?



1. Визначаємо види рухів окремих ланок плоского механізму.
Даний кривошипно-шатунний механізм складається із п’яти ланок:
- кривошипи *OA* та *CD* виконують обертовий рух;
- шатуни *AB* та *BC* – плоскопаралельний;
- повзун – поступальний рух.

1) Знайдемо швидкість т. *A*:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}44 \text{ м/с.}$$

2) Розглянемо ΔABP_2 і визначимо кути:

$\angle A = \angle\varphi_1 + (180^o - \angle\varphi_3) = 105^o$

$\angle B = 90^o - (180^o - \angle\varphi_2) = 50^o$

$\angle P_2 = 90^o - \angle\varphi_1 = 25^o$

За теоремою синусів: $\frac{AB}{\sin\angle P_2}=\frac{AP_2}{\sin\angle B}=\frac{BP_2}{\sin\angle A};$

$$AP_2=\frac{AB\cdot\sin 50^\circ}{\sin 25^\circ}=\frac{1,2\cdot 0,766}{0,422}=2,175\,\text{м};$$

$$BP_2=\frac{AB\cdot\sin 105^\circ}{\sin 25^\circ}=\frac{1,2\cdot 0,965}{0,422}=2,743\,\text{м}.$$

3) Знайдемо кутову швидкість (ω_2):

$$\omega_2=\frac{V_A}{AP_2}=\frac{1,44}{2,175}=0,662\ \text{рад/с}.$$

4) Знайдемо швидкість т. *B*:

$$V_B=\omega_2\cdot BP_2=0,662\cdot 2,743=1,816\ \text{м/с}.$$

5) Розглянемо ΔBCP_3:

$\angle B=90^\circ-\angle\varphi_3=90^\circ-70^\circ=20^\circ$

$\angle C=\angle\varphi_3+\angle\varphi_4=50^\circ+70^\circ=120^\circ$

$\angle P_3=180^\circ-(\angle B+\angle C)=180^\circ-140^\circ=40^\circ$

За теоремою синусів:

$$\frac{BC}{\sin\angle P_3}=\frac{CP_3}{\sin\angle B}=\frac{BP_3}{\sin\angle C};$$

$$BP_3=\frac{BC\cdot\sin 120^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{0,7\cdot 0,866}{0,643}=0,943\,\text{м};$$

$$CP_3=\frac{BC\cdot\sin 120^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{0,7\cdot 0,342}{0,642}=0,372\,\text{м}.$$

6) Знайдемо кутову швидкість ω_3:

$$\omega_3=\frac{V_B}{BP_3}=\frac{1,816}{0,943}=1,926\ \text{рад/с}$$

7) Знайдемо швидкість т. *C*:

$$V_C = \omega_3 \cdot CP_3 = 1{,}926 \cdot 0{,}372 = 0{,}716 \text{ м/с.}$$

8) Визначимо кутову швидкість ω_4:

$$\omega_4 = \frac{V_C}{CD} = \frac{0{,}716}{1{,}0} = 0{,}716 \text{ рад/с.}$$

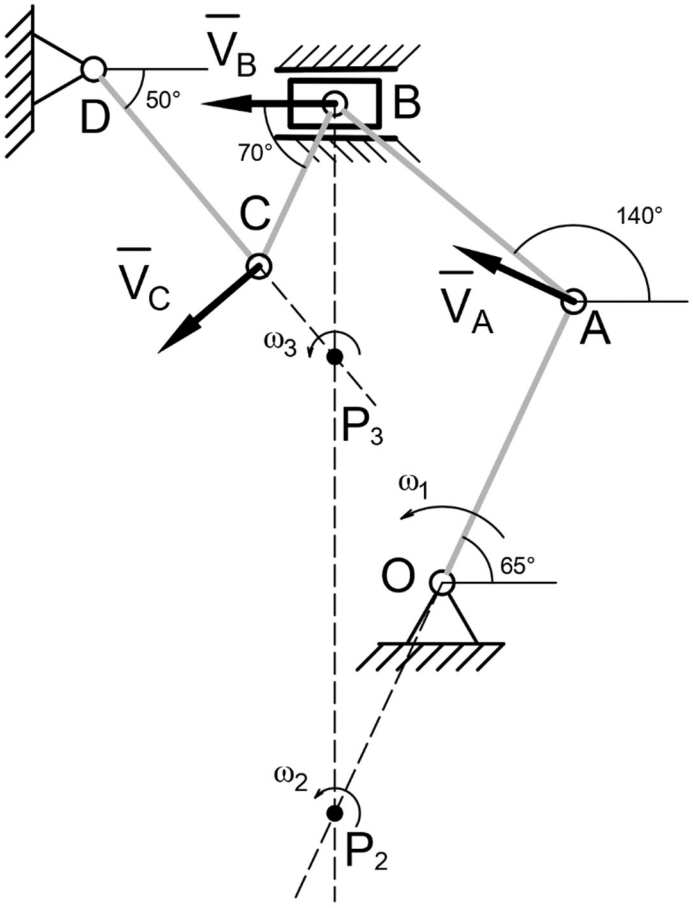


Рис. 2.8. Визначення величин швидкостей точок

9) Знайдемо прискорення т. *A*:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau},$$

де $a_A^n = \omega_1{}^2 \cdot O_1A = 1,2^2 \cdot 1,2 = 1,782$ м/с².

На малюнку напрям ε_1 позначено відповідно до умови:

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot O_1A = 0,6 \cdot 1,2 = 0,720 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \sqrt{\left(a_A^\tau\right)^2 + \left(a_A^n\right)^2} = \sqrt{\left(1,782\right)^2 + \left(0,720\right)^2} = 1,872 \text{ м/с}^2.$$

10) Визначимо прискорення т. *B*:

$$a_A^\tau = \vec{a}_A^{\,\tau} + \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_{BA}^{\,\tau} + \vec{a}_{BA}^{\,n};$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 0,662^2 \cdot 1,2 = 0,562 \text{ м/с}^2.$$

Спроектуємо на вісь *By*:

$$0 = -a_{BA}^n \cdot \sin(\pi - \varphi_2) + a_{BA}^\tau \cdot \cos(\pi - \varphi_2) - a_A^n \cdot \sin(\varphi_1) + a_A^\tau \cdot \cos(\varphi_1),$$

звідки:

$$a_{BA}^\tau = \frac{1}{\cos(40°)} \cdot \left(a_{BA}^n \cdot \sin(40°) + a_A^n \cdot \sin(65°) - a_A^\tau \cdot \cos(65°)\right);$$

$$a_{BA}^\tau = \frac{1}{\cos(40°)} \cdot \left(0,526 \cdot \sin(40°) + 1,728 \cdot \sin(65°) - 0,720 \cdot \cos(65°)\right) =$$

$$= 2,089 \text{ м/с}^2.$$

11) Знайдемо кутове прискорення ε_2:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{2,089}{1,2} = 1,741 \text{ рад/с}^2$$

Спроектуємо на вісь *Bx*:

$$a_B = a_{BA}^n \cdot \cos(\pi - \varphi_2) + a_{BA}^\tau \cdot \cos(\pi - \varphi_2) - a_A^n \cdot \cos(\varphi_1) - a_A^\tau \cdot \sin(\varphi_1)$$
$$a_B = 0,526 \cdot \cos(40°) + 2,089 \cdot \sin(40°) + (-1) \cdot 1,728 \cdot \cos(65°) -$$
$$-0,720 \cdot \sin(65°)$$
$$a_B = 0,363 \text{ м/с}^2$$

12) Знайдемо прискорення т. *C*:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau;$$
$$a_C^n = \frac{V^2}{CD} = \frac{(0,716)^2}{1,0} = 0,513 \text{ м/с}^2;$$
$$a_{CB}^n = \omega_3^2 \cdot BC = 1,26^2 \cdot 0,7 = 2,597 \text{ м/с}^2.$$

Спроектуємо на вісь Cy_1:

$$a_C^n = -a_B^n \cdot \cos\varphi_4 + a_{CB}^n \cdot \cos(\pi - \varphi_3 - \varphi_4) - a_{CB}^\tau \cdot \sin(\pi - \varphi_3 - \varphi_4);$$
$$a_{CB}^\tau = \frac{-1}{\sin(\pi - \varphi_3 - \varphi_4)} \cdot (a_C^n + a_B \cdot \cos(\varphi_4) - a_{CB}^n \cdot \cos(\pi - \varphi_3 - \varphi_4));$$
$$a_{CB}^\tau = \frac{-1}{\sin(60°)} \cdot (0,513 + 0,363 \cdot \cos 50° - 2,597 \cdot \cos 60°) = 0,638 \text{ м/с}^2.$$

13) Знайдемо кутове прискорення ε_3:

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a_{CB}^\tau\right|}{BC} = \frac{0,638}{0,7} = 0,911 рад/с^2$$

Спроектуємо на вісь Cx_1:

$$a_C^\tau = a_B \cdot \sin\varphi_4 \cdot (-1) - a_{CB}^n \cdot \sin(\pi - \varphi_3 - \varphi_4) - a_{CB}^\tau \cdot \cos(\pi - \varphi_3 - \varphi_4);$$
$$a_C^\tau = -0,363 \cdot \sin(50°) - 2,597 \cdot \sin(60°) - 0,638 \cdot \cos(60°) = -2,846 \text{ м/с}^2.$$

Отже, прискорення т. *C*:

$$a_C = \sqrt{(a_C^{\tau})^2 + (a_C^{n})^2} = \sqrt{(-2,846)^2 + (0,513)^2} = 2,892 м/с^2 .$$

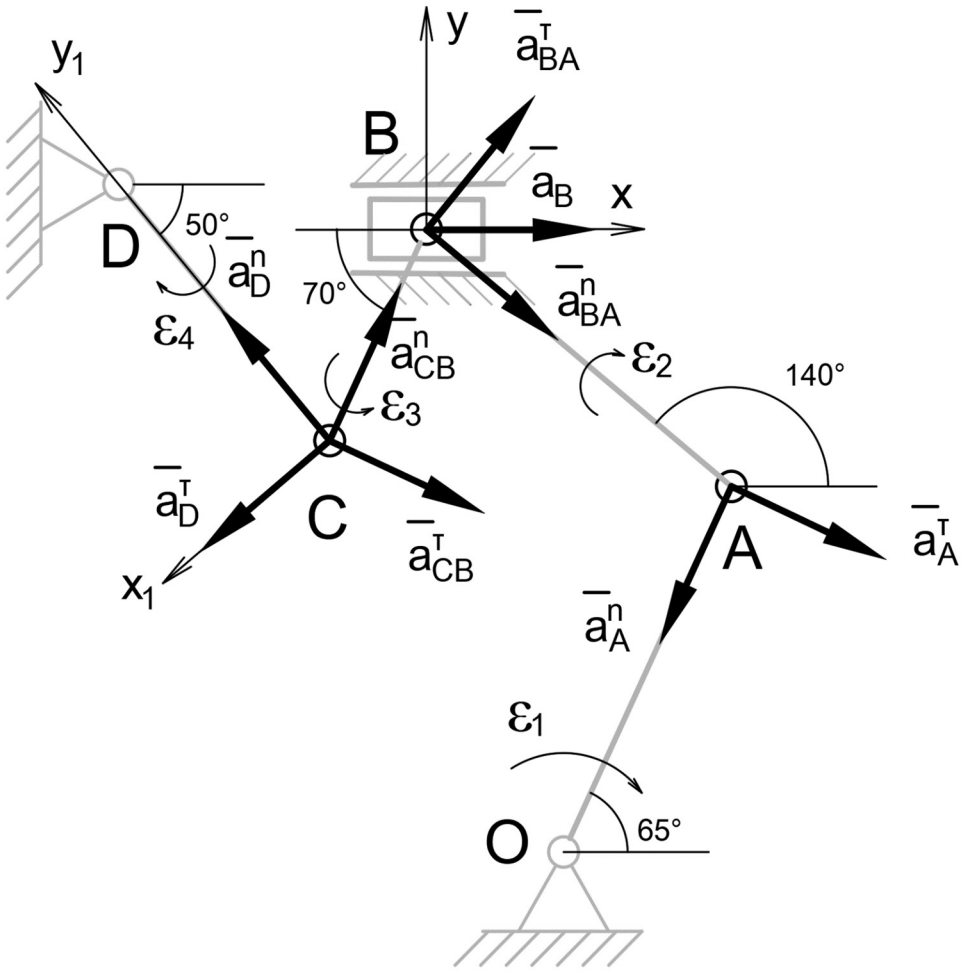


Рис. 2.9. Визначення величин прискорень точок

14) Знайдемо кутове прискорення ε_4:

$$\varepsilon_4 = \frac{\left|a_C^{\tau}\right|}{CD} = \frac{\left|-2,846\right|}{0,7} = 2,846\, рад/с^2$$

Відповідь: $V_A = 1,44\frac{м}{с}$, $V_B = 1,818\frac{м}{с}$, $V_C = 0,716\frac{м}{с}$;
$\omega_2 = 0,622\frac{рад}{с}$, $\omega_3 = 1,926\frac{рад}{с}$, $\omega_4 = 0,716\frac{рад}{с}$; $a_A = 1,872\frac{м}{с^2}$,
$a_B = 0,363\frac{м}{с^2}$, $a_C = 2,892\frac{м}{с^2}$; $\varepsilon_2 = 1,741\frac{рад}{с^2}$, $\varepsilon_3 = 0,911\frac{рад}{с^2}$,
$\varepsilon_4 = 2,846\frac{рад}{с^2}$.

3. КІНЕМАТИКА СКЛАДНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

3.1. Короткі відомості з теорії

У багатьох задачах теоретичної механіки доцільно враховувати, що рух матеріальної точки одночасно відбувається в двох (або декількох) системах відліку. Причому одна із таких систем є нерухомою (основною), а друга рухомою. У такому випадку рух точки відносно кожної з цих систем є різним. Відносно рухомої системи відліку він називається відносним, а рух самої рухомої системи відносно нерухомої системи – переносним. Наприклад, рух капітана по палубі корабля буде відносним, а рух самого корабля відносно нерухомого причалу (з яким пов'язана нерухома система відліку) – переносним. Рух капітана відносно нерухомої системи координат буде абсолютним. Абсолютний рух точки складається з її відносного руху щодо рухомої системи і переносного руху разом з рухомою системою відліку і тому називається складним рухом точки.

Основним завданням кінематики складного руху є встановлення залежностей між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного та відносного рухів. Кінематичними характеристики такого руху є абсолютна швидкість і абсолютне прискорення точки.

3.2. Визначення абсолютної швидкості

За складного руху точки абсолютна швидкість точки складається із відносної та переносної швидкості.

Абсолютною називають швидкість точки відносно нерухомої (основної) системи відліку. Відносною швидкістю точки називають її швидкість відносно рухомої системи відліку. Переносною швидкістю називають швидкість точки у її переносному русі.

Згідно з теоремою про додавання швидкостей абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі її відносної та переносної швидкостей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e, \tag{3.1}$$

де $\vec{V}_a, \vec{V}_r, \vec{V}_e$ – швидкість відповідно абсолютна, відносна та переносна.

Величина абсолютної швидкості залежить від розташування векторів відносної та переносної швидкості. Якщо кут між векторами $\vec{V}_r$ та $\vec{V}_e$:

- дорівнює 90°, то значення розраховують за теоремою Піфагора:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} ;$$

- не дорівнює 90° і вони не паралельні, то значення розраховують за теоремою косинусів:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos\alpha} ,$$

де α – кут між векторами відносної і переносної швидкості;

- важко визначити, то для визначення абсолютної швидкості потрібно спроектувати відносну і переносну швидкість на координатні осі, та розрахувати значення за теоремою Піфагора:

$$V_a = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} .$$

3.3. Визначення абсолютного прискорення

Відповідно до теореми Коріоліса абсолютне прискорення точки при складному русі дорівнює геометричній сумі її відносного, переносного прискорень і прискорення Коріоліса.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c , \qquad (3.2)$$

де $\vec{a}_a, \vec{a}_r, \vec{a}_e, \vec{a}_c$ – абсолютне, відносне, переносне прискорення та прискорення Коріоліса.

Прискорення Коріоліса є результатом взаємного впливу обертового переносного та відносного рухів і характеризує зміну відносної швидкості за напрямом за рахунок переносного обертового руху та зміну величини переносної швидкості за рахунок відносного руху.

Прискорення Коріоліса дорівнює подвійному векторному добутку кутової швидкості при переносному русі та відносної швидкості матеріальної точки:

$$\vec{a}_c = 2\left[\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right]. \quad (3.3)$$

Модуль коріолісового прискорення визначається за формулою:

$$a_c = 2V_r\omega_e \cos\left(\vec{\omega}_e \hat{;} \vec{V}_r\right). \quad (3.4)$$

Напрям вектора прискорення Коріоліса визначається за допомогою правила векторного добутку або правила Жуковського.

Правило векторного добутку:

Вектор прискорення Коріоліса $\vec{a}_c$ буде перпендикулярним до площини, створеної векторами $\vec{V}_r$ та $\vec{\omega}_e$ і спрямовано у той бік, якщо спостерігач дивлячись на зустріч вектору прискорення Коріоліса, бачить умовний перехід між $\vec{\omega}_e$ до $\vec{V}_r$ проти ходу годинникової стрілки за найменшим кутом.

Правило Жуковського:

Для визначення напряму вектору прискорення Коріоліса $\vec{a}_c$ потрібно спроектувати вектор відносної швидкості $\vec{V}_r$ на площину перпендикулярну вектору переносної кутової швидкості $\vec{\omega}_e$ і отриману проекцію повернути на 90° у напрямі переносної кутової швидкості ω_e.

Випадки, за яких прискорення Коріоліса дорівнює нулю:

- $\omega_e = 0$, тобто коли переносний рух поступальний, чи коли значення кутової швидкості в даний момент дорівнює нулю;

- $V_r = 0$, тобто, швидкість точки у даний момент дорівнює нулю, точка перебуває в стані спокою;

- $\sin(\vec{\omega}_e \hat{} \vec{V}_r) = 0$, тобто, відносна швидкість точки паралельна осі переносного обертання.

3.4. Порядок розв'язання задач

1. Визначте для точки відносний, переносний та абсолютний рухи.

2. Покажіть вектори швидкостей відносного, переносного рухів точки.

3. Визначте модуль та напрям швидкості абсолютного руху точки, використовуючи теорему про додавання швидкостей.

4. Зобразіть вектори прискорень точки при відносному та переносному рухах.

5. Визначте напрям та величину коріолісового прискорення.

6. Використовуючи теорему про додавання прискорень, визначити модуль і напрям прискорення абсолютного руху точки.

3.5. Умова завдання і приклади розв'язання задач

Точка *M* рухається відносно тіла *D*. За заданими законом руху $S_r(t)$ точки *M* відносно тіла *D* та кінематичними характеристиками обертального або поступального руху тіла *D* визначити для моменту часу $t = t_1$ абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки *M*.

Схеми механізмів показано на рис. 3.1 [1], а необхідні для розрахунку дані наведено у табл. 3.1.

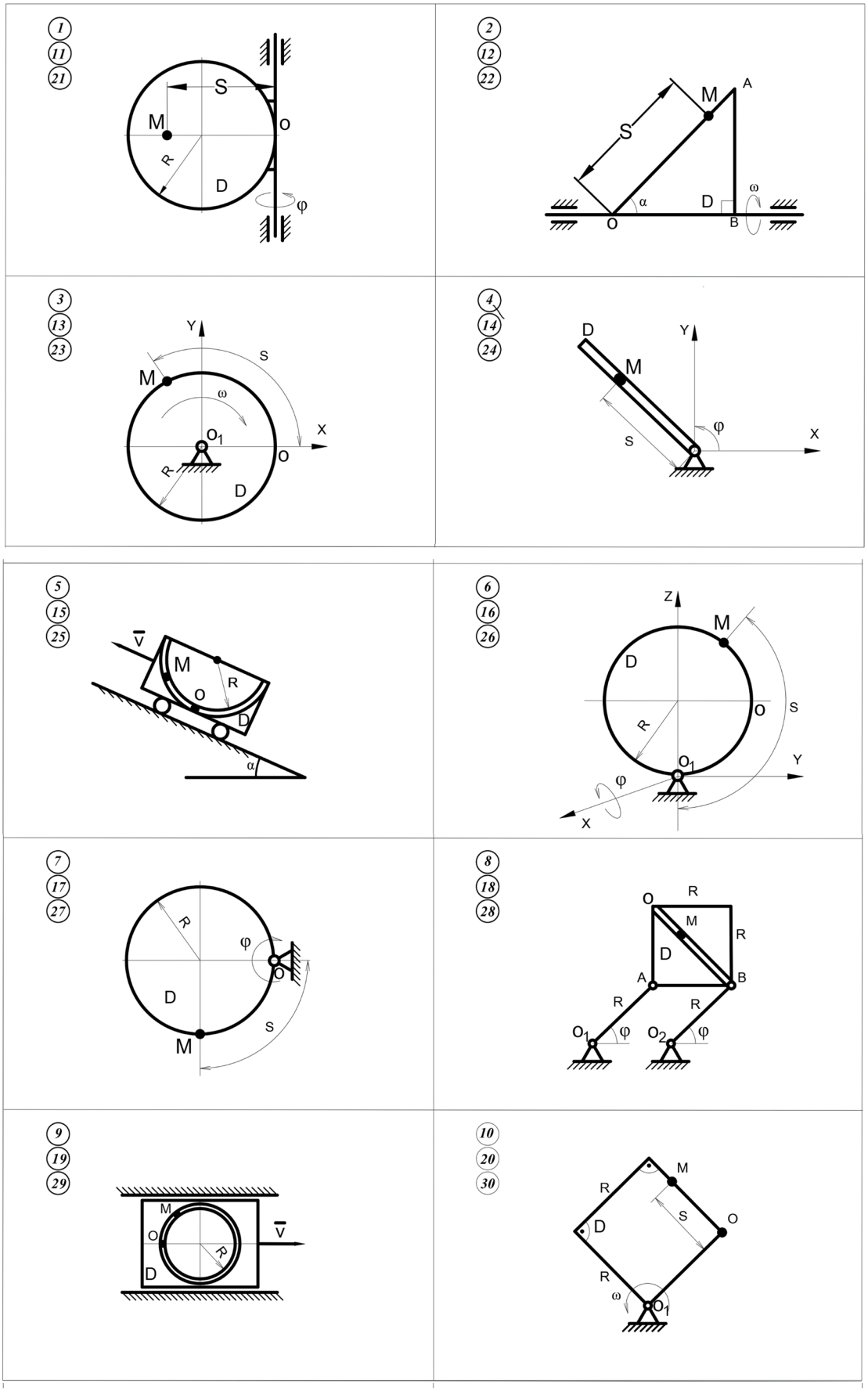


Рис. 3.1. Схеми механізмів

Таблиця 3.1

Вихідні дані до розрахунку абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки

Варі-ант	Рівняння відносного руху точки $OM = s_r(t)$, *см*	Рівняння руху тіла $\varphi_e = \varphi_e(t)$, *рад*	t_1, *с*	*R, см*	Швид-кість тіла v, см/с	Кутова швидкість тіла ω, рад/с	α, град	Кутове прискорення ε, рад/с²
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	$6t^2$	$t^2 - 6t$	2	20	-	-	-	-
2	$4t$	$4t - t^2$	1	-	-	-	30	-
3	$0{,}5\pi t^2$	$t^2 - 11t$	5	50	-	-	-	-
4	$5t^2$	$4t - t^2$	1	-	-	-	-	-
5	$30\pi \cos(\pi t/6)$	-	4	75	$4t$	-	30	-
6	$\pi(18 - t^2)$	$2t^2$	3	15	-	-	-	-
7	$2\pi t$	$\pi t(t/3 - 2)$	3	18	-	-	-	-
8	$8t^2$	$\pi t - \pi t^2/3$	0,5	15	-	-	-	-
9	$4\pi t^2$	-	2	25	$10\sin(\pi t/2)$	-	-	-
10	$t^2 - 16t$	-	2	40	-	$4t - 9$	-	-
11	$2t^2$	$8t - 1{,}5t^2$	2	20	-	-	-	-
12	$8t$	$t^3 / 1{,}5$	2	-	-	-	60	-
13	$5\pi t^3/4$	-	2,5	30	-	$5 - t^2$	-	-
14	$2t^2$	$t^4 - 5t$	2	-	-	-	-	-
15	$12\pi \sin(\pi t)$	-	1,5	24	3t	-	60	-
16	$5\pi(t^2 - 3t)$	$3t^2$	1	30	-	-	-	-
17	$4\pi t$	$5t - t^2/3$	3	15	-	-	-	-
18	$4t^2 + 5$	$\pi t^2 - 2\pi t$	0,25	20	-	-	-	-
19	$10\pi \sin(\pi t/6)$	-	2	30	$5 - t^2$	-	-	-
20	$t^3 + 2$	-	2	30	-	$8 - 3t$	-	-
21	$t^2 + 45$	$2{,}5t^2$	1	30	-	-	-	-
22	$t^2 + 1$	-	3	-	-	$2{,}5t - 4$	45	-

Закінчення табл. 3.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	$20\pi \sin(\pi t/3)$	-	2	20	-	$2\pi t$	-	-
24	$t^3 + t$	$0{,}5t^2$	2	-	-	-	-	-
25	$20\pi t^2$	-	1	70	$30 \sin(\pi t/3)$	-	45	-
26	$20\pi t^2$	2 t 3	0,5	30	-	-	-	-
27	$10\pi t$ (t – 2)	$2\pi t^3/3$	0,25	10	-	-	-	-
28	$8 + 4 \sin(\pi t/3)$	$2\pi t^3/3$	0,25	16	-	-	-	-
29	$2\pi t(1 - t)$	-	0,5	12	$2t^2 - t$	-	-	-
30	$10t^2 + 5t$	-	1	30	-	$8\pi t$	-	-

Приклад 1.

Дано:

$\varphi(t) = 10t - 0{,}1t^2, рад$

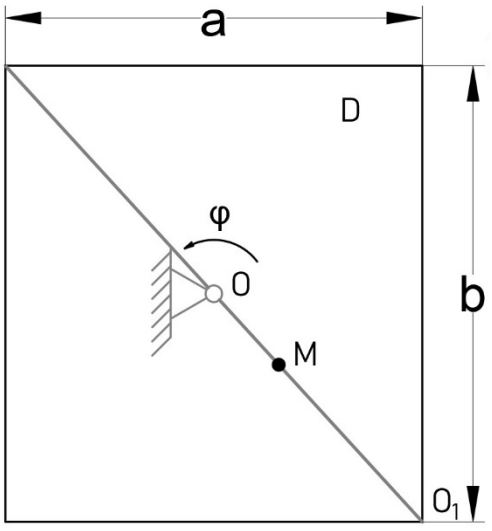
$S = OM = 6t^3, м$

$t_1 = 1{,}5c,$

$a = 4{,}2м,$

$b = 3{,}8м$

V_a-?; a_a-?;



Діагональ пластини, що обертається дорівнює:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 3{,}8^2} = 5{,}664м;$$

$$OO_1 = \frac{d}{2} = 2{,}832м.$$

Знаходимо положення точки М при $t = t_1$:

$$OM = S(t_1) = 6 \cdot t_1^3 = 6 \cdot 1,5 = 20,250 м .$$

За кількість раз N точка пройде довжину траєкторії:

$$N = \frac{OM}{d} = \frac{20,250}{5,664} = 3,575 раз .$$

Відстань від точки M до осі обертання:
3,575 – 3 = 0,575 раз;
$OM_1 = 0,575 \cdot 5,664 = 0,425$м;
Отже: $OM_1 = 0,425$ м.

Абсолютну швидкість точки M шукаємо у вигляді:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e , \qquad (3.5)$$

де $\vec{V}_e$ – переносна швидкість;

$$V_e = \omega_e \cdot O_1M = \left| \omega_e = \frac{d}{dt}(\varphi(t)) = \left(10 - 0,2 \cdot t\right) \right|_{t_1} = 9,7 \cdot 0,425 = 4,123 \ м/с ;$$

$\omega_e = 10 – 0,2 \cdot t_1 = 9,7$ рад/с;
$\vec{V}_r$ – відносна швидкість;

$$\left| V_r = \frac{d}{dt}(S) \right|_{t_1} = 6 \cdot 3 \cdot t_1^2 = 18 \cdot 1,5^2 = 40,5 \ м/с ;$$

$\vec{V}_r \perp \vec{V}_e$ з (1) отримаємо:

$$V_a = \sqrt{\left(V_e\right)^2 + \left(V_r\right)^2} = \sqrt{\left(4,123\right)^2 + \left(40,5\right)^2} = 40,709 \ м/с .$$

Отже: $V_a = 40,709 \ м/с$.

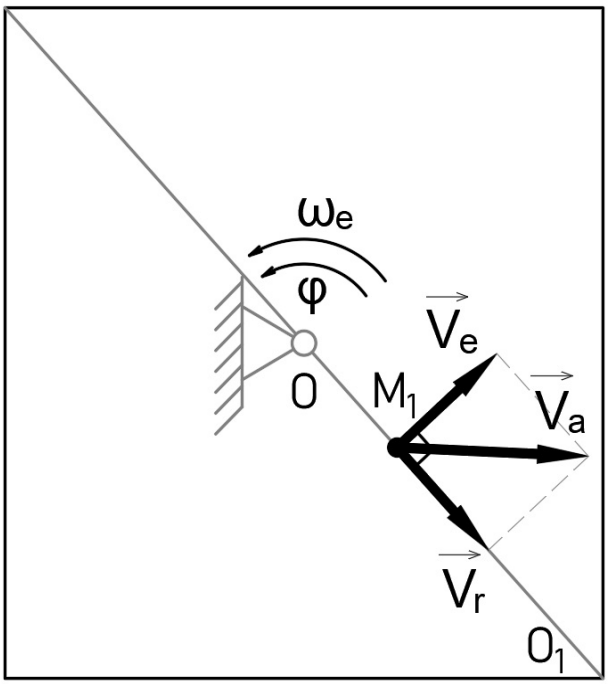


Рис. 3.2. Вектори швидкості точки

Враховуючи, що переносний рух є обертовим, абсолютне прискорення точки М шукаємо у вигляді:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c\,, \tag{3.6}$$

де $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\,\tau} + \vec{a}_e^{\,n}$ – переносне прискорення;

$a_e^n = (\omega_e)^2 \cdot O_1M = (9,7)^2 \cdot 0,425 = 39,988\ м/с^2$;

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot O_1M = \left|\varepsilon_e = \frac{d}{dt}(\omega_e)_{t_1} = (10 - 0,2\cdot t)_{t_1} = \left|-0,2\ рад/с^2\right|\right| =$$

$= -0,2 \cdot 0,425 = -0,085\ м/с^2$ (*на рисунку вказано реальний напрям*)

$\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n}$ – відносне прискорення;

$$a_r^\tau = \left|\frac{d}{dt}V_r\right|_{t_1} = \frac{d}{dt}\left(18t^2\right)\Big|_{t_1} = 36\cdot t_1 = 36\cdot 1,5 = 54\ м/с^2\ ;$$

$a_r^n = 0$, оскільки траєкторія відносного руху є пряма.

Коріолісове прискорення:

$$\vec{a}_c = 2\cdot\left[\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right]\cdot\sin\left(\widehat{\vec{\omega}_e;\vec{V}_r}\right).$$

Отримаємо: $a_c = 2 \cdot (\omega_e \cdot V_r) \cdot \sin 90° = 2 \cdot 9,7 \cdot 40,5 \cdot 1 = 785,7 \ м/с^2$

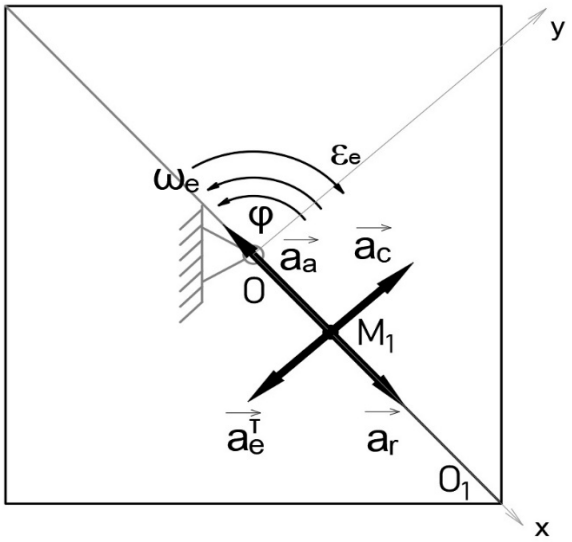


Рис. 3.3. Вектори прискорення точки

Спроектуємо векторну формулу (2) на координатні осі, і враховуючи напрями векторів прискорень, отримуємо:

$$a_{ax} = a_r^{\tau} - a_e^n = 54 - 39,998 = 14,012 \ м/с^2;$$

$$a_{ay} = a_c - \left|a_e^{\tau}\right| = 785,7 - 0,085 = 785,615 \ м/с^2;$$

$$a_a = \sqrt{14,012^2 + 785,615^2} = 785,74 \ м/с^2.$$

Відповідь: $V_a = 40,709 \ м/с$; $a_a = 785,74 \ м/с^2$.

Приклад 2.

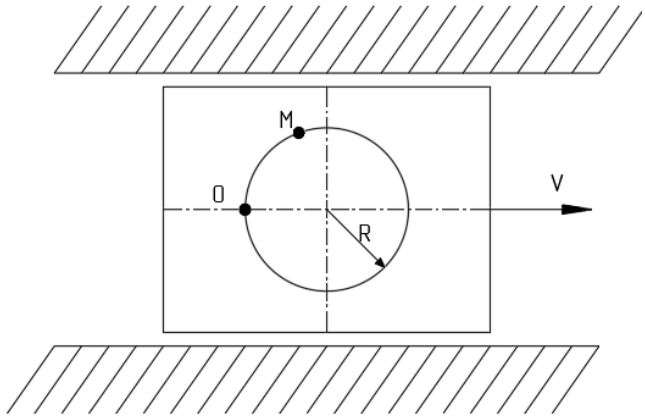
Дано:

$S = OM = 10\pi \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right), м$

$V = 5 - t^2,$

$R = 0,3м$

$t_1 = 5c,$



V_a-?; a_a-?;

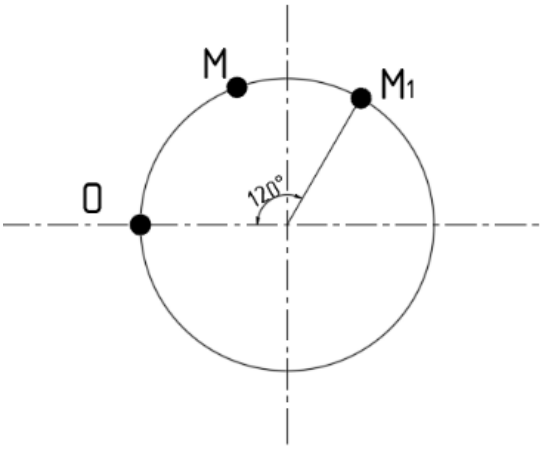
1. Визначаємо положення точки на траєкторії руху через кут α.

$$S = OM = 10\pi \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 10\pi \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 15,7\,м$$

$$\alpha = \frac{S}{R} = \frac{15,7}{0,3} = 52,3\,рад = 3000°$$

$N = \frac{3000°}{360°} = 8,33$ раз

α = 360º · 0,33 = 120º



2. Знаходимо V_e при переносному русі:

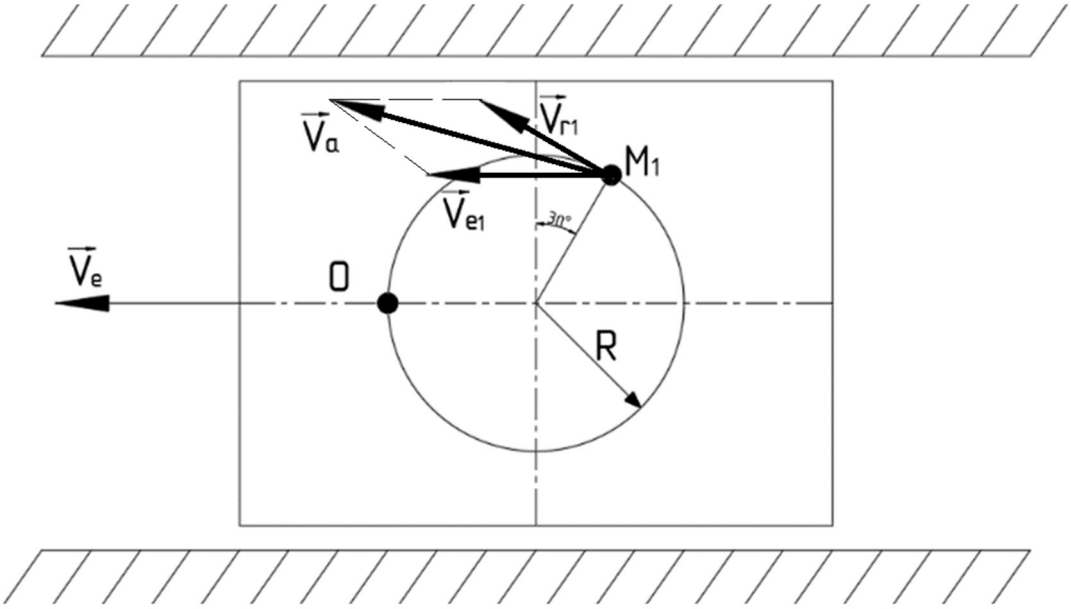


Рис. 3.4. Вектори швидкості точки

$$V_e = 5 - t^2$$

при t_1 = 5 с

$$V_{e_1} = 5 - 25 = -20\frac{м}{с}$$

3. Визначаємо V_r при відносному русі:

$$V_r = \frac{dS}{dt} = \frac{10\pi^2}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

при $t_1 = 5$ с

$$V_{r_1} = \frac{10\pi^2}{6}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -14,25\frac{м}{с}$$

4. Визначаємо абсолютну швидкість:

$$V_a = \sqrt{V_{r_1}^2 + V_{e_1}^2 + 2\cdot V_{r_1}^2 \cdot V_{e_1}^2 \cdot \cos 30°} =$$

$$= \sqrt{(-14,25)^2 + (-20)^2 + 2\cdot(-14,25)\cdot(-20)\cdot 0,866} = 33,12\frac{м}{с}$$

5. Визначаємо a_e при переносному русі:

$$a_e = \frac{dV_e}{dt} = -2t$$

при $t_1 = 5$ с

$$a_{e_1} = -2\cdot 5 = -10\frac{м}{с^2}$$

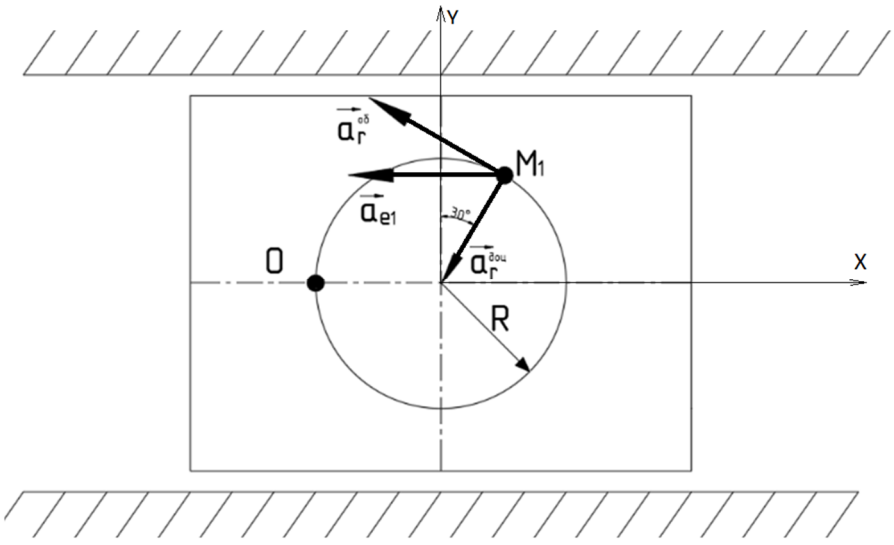


Рис. 3.5. Вектори прискорення точки

6. Визначаємо $a_r^n;\ a_r^\tau$ при відносному русі:

$$a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = \frac{10\pi^3}{36} sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

$$a_{r_1}^\tau = -\frac{10\pi^3}{36} sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -4,31\frac{м}{c^2}$$

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R}$$

$$a_{r_1}^n = \frac{(-14,25)^2}{0,3} = 676\frac{м}{c^2}$$

7. Враховуючи, що переносний рух є обертовим, знаходимо a_a:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r^{\,\tau} + \vec{a}_r^{\,n} + \vec{a}_e\,.$$

Спроектуємо прискорення на вісь *OX*:

$$a_{e_1} + a_{r_1}^\tau \cdot cos30° + a_{r_1}^n \cdot cos60° = a_x.$$

Спроектуємо прискорення на вісь *OY*:

$$a_{r_1}^\tau \cdot cos60° - a_{r_1}^n \cdot cos30° = a_y$$

$$a_x = -10 + (-4,31) \cdot cos30° + 676 \cdot cos60° = 324\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$$

$$a_y = (-4,31) \cdot cos60° - 676 \cdot cos30° = -588\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$$

$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-588)^2 + 324^2} = 671\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$$

Відповідь: $V_a = 33,12\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $a_a = 671\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

4. ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ

Розрахунково-графічна робота оформляється на аркушах формату А4 (210 х 297 мм) за допомогою програми *Microsoft Word* (версії 97 або пізнішої) українською мовою. Перший (титульний) лист виконується згідно зі зразком (див. додаток). Текстова частина та рисунки мають бути друкованими. Усі аркуші нумеруються наскрізно арабськими цифрами. Номер сторінки ставлять унизу по центру. Робота має бути набрана шрифтом «Times New Roman» розміром 14 пт, міжрядковий інтервал – «множник» 1,5. Параметри макету сторінки наведено на рис. 4.1.

Кожна складова частина (завдання 1, завдання 2 і т.д.) текстового матеріалу має починатися з нового аркушу.

Формули або рівняння має бути набрано у формульному редакторі Math Type 6. Розмір шрифтів і стилі у формульному редакторі наведено на рис. 4.2 *а*, *б*.

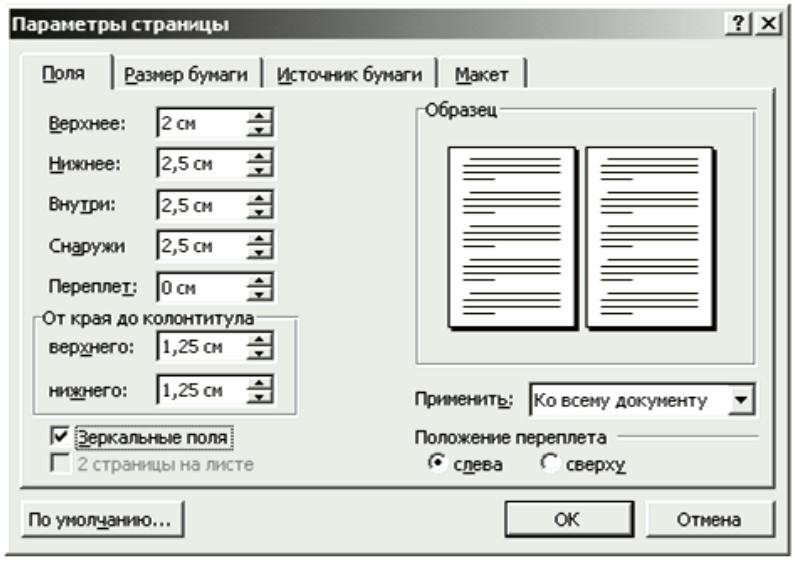
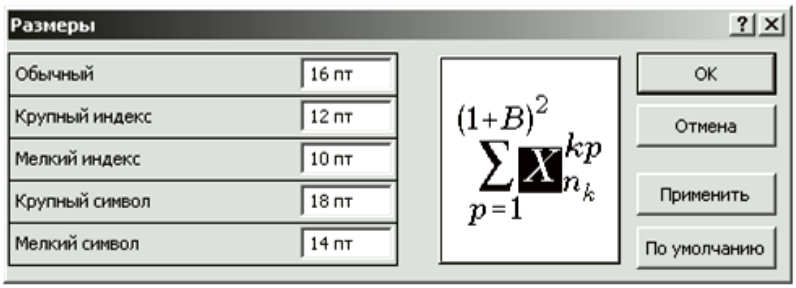
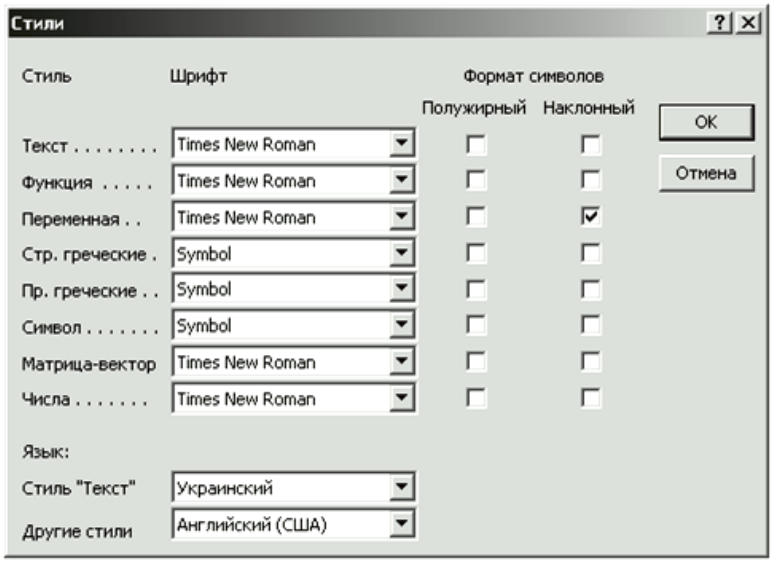


Рис. 4.1. Параметри макету сторінки



а



б

Рис. 4.2. Розмір шрифтів і стилі у формульному редакторі

Латинські літери в тексті, формулах і матрицях пишуть курсивом, грецькі, українські літери, тригонометричні функції і позначення: ln, π, sin, cos, tg, ctg, Re, max, min та цифри – прямі.

У виключних випадках печатна текстова частина, згідно з попередньою домовленістю з викладачем, може бути замінена рукописною, а рисунки виконані креслярським інструментом: олівцем, лінійкою, транспортиром, циркулем з дотриманням лінійних і кутових розмірів і масштабу.

Студент подає викладачу розрахунково-графічну роботу на електронному носієві одним файлом (назва файлу: «прізвище студента_група.doc»), а також один примірник у надрукованому вигляді.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи / уклад.: В.В. Аврутов. – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – 11 с.

2. Булгаков В.М. Теоретична механіка: навчальний посібник / за ред. С.І. Кучеренка. − Ніжин: 2012. − 432 с.

3. Гайдайчук В.В. Теоретична механіка. Кінематика: навч. посібник / В.В. Гайдайчук, М.Г. Гонтар, О.О. Лук'янченко, А.В. Кузнецов. – К.: КНУБА, 2015. – 152 с.

4. Іскрицьский В.М. Теоретична механіка. Статика і кінематика: навч. посібник / В.М. Іскрицький, С.В. Подлєсний, О.В. Водолазська, Ю.О. Єфорт. – Краматорськ: ДДМА, 2007. – 204 с.

5. Лобас Л.Г. Теоретична механіка: підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів / Л.Г. Лобас, Л.Г. Лобас. – Київ: ДЕТУТ, 2008. – 406 с.

6. Теоретична механіка. Кінематика: методичні вказівки та завдання до виконання контрольних робіт / уклад: О.М. Палій, Р.О. Плохута. – К.: КНУБА, 2019. – 38 с.

7. Приятельчук В.О. Теоретична механіка. Статика. Розрахунково-графічні та контрольні завдання: навч. посібник / В.О. Приятельчук, В.І. Риндюк, В.О. Федотов. – Вінниця: ВДТУ, 2002. – 108 с.

8. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник. – Київ: Техніка, 2002. – 512 с.

Додаток

Зразок оформлення титульної сторінки розрахунково-графічної роботи

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Кафедра теоретичної механіки

Розрахунково–графічна робота № 1
на тему:
«Кінематичний аналіз плоского механізму.
Визначення абсолютної швидкості і абсолютного прискорення точки при складному русі»

Виконав:
студент факультету урбаністики
та просторового планування
групи МБГ 21
[прізвище і ініціали]

Перевірив:
доцент [прізвище і ініціали]

Київ 202__

Навчально-методичне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. КІНЕМАТИКА

Методичні вказівки та завдання
до виконання розрахунково-графічних робіт
для студентів спеціальностей
131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»,
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,
192 «Будівництво та цивільна інженерія»
і 192.02 «Міське будівництво та господарство»

Укладачі: **КОТЕНКО** Костянтин Едуардович,
ЛАЗАРЕВА Марина Вікторівна

Випусковий редактор *В.С. Сасько*
Комп'ютерне верстання *Д.М. Ніколаєвич*

Підписано до друку 27.07.2023. Формат $60x84_{1/16}$
Ум. друк. арк. 3,72. Обл.-вид. арк. 4,0.
Електронний документ. Вид. № 123/ІІІ-23

Видавець і виготовлювач:
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.