

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ОПР МАТЕРІАЛІВ

ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ

Методичні рекомендації, завдання та приклади
до виконання розрахунково-графічних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності G19 «Будівництво і цивільна інженерія»
ОП «Теплогазопостачання і вентиляція», «Водопостачання та
водовідведення»

Київ 2026

УДК 539.3

О-61

Укладачі: О. О. Кошевий, д-р філософії Ph.D., доцент;

О. П. Кошевий, канд. техн. наук, доцент;

М. О. Янсонс, канд. техн. наук, доцент

Рецензент Г.М. Іванченко, д-р техн. наук, професор

Відповідальний за випуск Д.В. Левківський, канд. техн. наук,
доцент

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів, протокол
№ 1 від 22 грудня 2025 року.*

В авторській редакції.

Опір матеріалів. Побудова епюр внутрішніх зусиль [електронний
О-61 ресурс]: методичні рекомендації, завдання та приклади до виконання
розрахунково- графічних робіт /уклад.: О.О. Кошевий, О.П. Кошевий,
М.О. Янсонс. – Київ: КНУБА, 2026. – 40 с.

Містять варіанти індивідуальних завдань та детальні плани
виконання розрахунково-графічних робіт з курсу «Опір матеріалів», а
також приклади розв'язку кожного завдання. Розглянуто розділ:
«Побудова епюр внутрішніх зусиль».

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти спеціальності G19 «Будівництво і цивільна інженерія»
ОП «Теплогазопостачання і вентиляція», «Водопостачання та
водовідведення».

© КНУБА, 2026

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методичні рекомендації призначені для допомоги студентам виконати розрахунково-графічну роботи з курсу «Опір матеріалів» за розділом: «Побудова епюр внутрішніх зусиль». Розрахунково-графічну роботу студент має виконати за індивідуальним завданням, виданим викладачем. Вихідні данні (розрахункові схеми та числові значення) студент вибирає з додатку за власним шифром у вигляді тризначного числа. Пояснення та розрахунки потрібно виконувати на комп'ютері за допомогою MS Word. Для кожного завдання наведено план та рекомендації щодо виконання поетапного розрахунку. Оформлюється розрахунково-графічна робота на аркушах формату А4, які скріплюються зліва. Титульний аркуш роботи оформлюється за зразком:

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет будівництва і архітектури Кафедра
опору матеріалів

Розрахунково-графічна робота №

”_____”
/тема/

Виконав:

студент

/спеціальність, курс, група/

/прізвище, ініціали/ Керівник

/прізвище, ініціали/

Київ - 20__р.

Пояснення та розрахунки потрібно виконувати на одній стороні аркуша ручкою, а креслення виконувати олівцем. Дозволяється комп'ютерне виконання креслень.

Для кожного завдання наведено план та рекомендації щодо виконання поетапного розрахунку. Для ілюстрації наведено приклад виконання РГР. Виконуючи кожен етап розрахунку, потрібно спочатку записати розрахункові формули, підставити числові значення та записати результат обчислення у відповідних одиницях виміру (система СІ).

Розрахунково-графічна робота вважається зарахованою після її захисту.

Мета роботи: Ознайомити студентів з базовими поняттями та класичним методом побудови епюр внутрішніх зусиль; основними підходами та принципами роботи для нормального і дотичного напруження; надати практичні навички проведення інженерних розрахунків по пошуку внутрішніх зусиль, які необхідні для розрахунку на міцність, жорсткість та стійкість; навчити методам обробки та перевірки отриманих розрахунків.

ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ

Загальні положення

Під час навантажування тіла довільними зовнішніми навантаженнями в ньому відбувається деяка зміна внутрішніх сил взаємодії між частинками цього тіла (молекулами, атомами і т.п.). В опорі матеріалів таку зміну сил взаємодії називають **внутрішніми силами**. Для визначення внутрішніх сил в опорі матеріалів використовують метод перерізів. Для цього в деякій точці тіло розсікають площиною (зазвичай перпендикулярною до осі тіла) на дві частини ліву та праву, та розглядають рівновагу однієї з відсічених частин між зовнішніми навантаженнями та внутрішніми силами, що виникають в площині перерізу тіла. Внутрішні сили віднесені до одиниці площі поперечного перерізу називають **напруженнями**. Їх можна звести до центру ваги перерізу. Проекції головного вектору та головного моменту внутрішніх сил на поздовжню вісь X (або для криволінійної осі на дотичну до цієї осі) та на головні центральні осі поперечного перерізу Y та Z називають **внутрішніми зусиллями та моментами** в даному перерізі (рис. 1.1). У загальному випадку навантажування стержня їх шість.

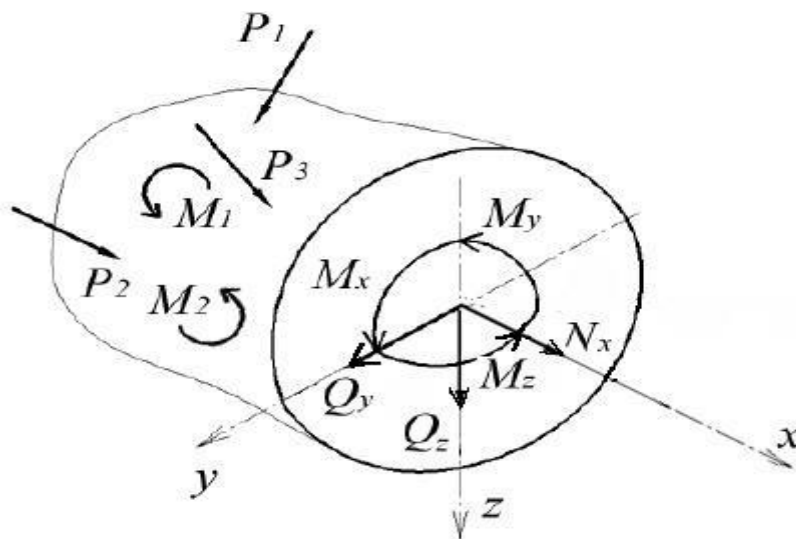


Рис. 1.1

N – поздовжня (нормальна) сила; Q_y, Q_z поперечні сили; M_x ($M_{кр}$) – крутний момент (момент кручення); M_y, M_z – згинальні моменти.

Тут і надалі під **зовнішніми силами** вважатимемо розподілені сили, зосереджені сили та зосереджені моменти, що прикладені до поздовжньої осі стержня, включаючи реакції в опорах.

Поздовжня сила N в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на поздовжню вісь стержня X (або на дотичну до неї) всіх зовнішніх сил, що прикладені до однієї з відсічених його частин.

Поперечна сила Q_y (або Q_z) у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на перпендикулярну (нормальну) до осі стержня вісь Y (або Z) зовнішніх сил, що прикладені до однієї з відсічених його частин.

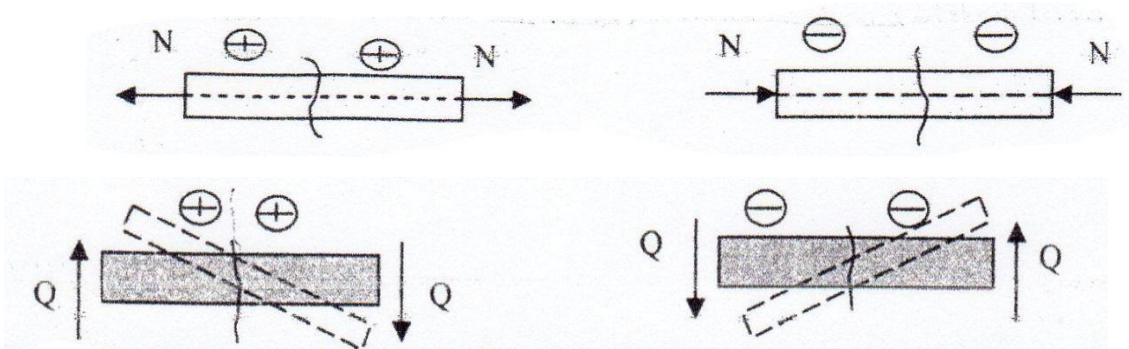
Згинальний момент M_y (або M_z) у перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно головної осі перерізу Y (або Z) всіх зовнішніх сил, що прикладені до однієї з відсічених його частин.

Крутний момент $M_{кр}$ в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно поздовжньої осі стержня X всіх зовнішніх сил, що прикладені до однієї з відсічених його частин.

Якщо вісь стержня та зовнішні навантаження лежать в одній площині, то з шести зусиль відмінними від нуля можуть бути лише три: поздовжня сила N , поперечна сила $Q_z = Q$ та згинальний момент $M_y = M$. У випадку доцільно користуватись правилом знаків.

Правило знаків для внутрішніх зусиль в стержні

1. Поздовжня сила в перерізі додатна, якщо визиває у відсіченій частині стержня розтяг, а від'ємна якщо – стиск.

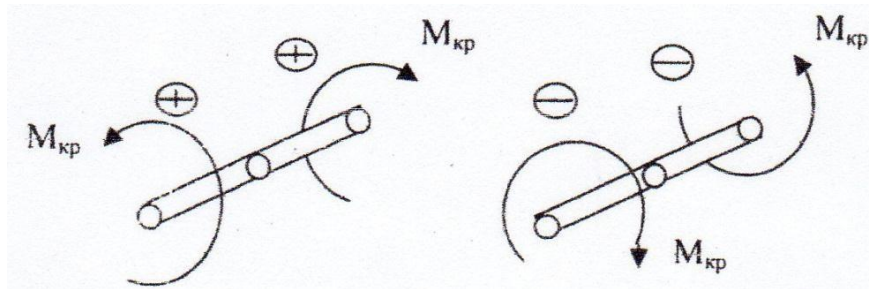


2. Поперечна сила в перерізі додатна, якщо визиває обертання відсіченої частини стержня навколо точки перерізу за годинниковою стрілкою, а від'ємна, якщо - проти годинникової стрілки.

3. Згинальний момент в перерізі додатний, якщо визиває у відсіченій частині стержня розтяг нижнього волокна відносно точки перерізу, а від'ємний, якщо визиває у відсіченій частині стержня розтяг верхнього волокна. Епюра моментів завжди будується на розтягнутому волокні.



4. Крутний момент у перерізі додатний, якщо обертає відсічену частину стержня навколо поздовжньої осі X за годинниковою стрілкою зі сторони перерізу (тобто з торця відсіченої частини), від'ємний – якщо обертає проти годинникової стрілки.



План виконання завдання:

1. Складання розрахункової схеми;
2. Визначення реакцій опор;
3. Поділ розрахункової схеми на ділянки та визначення характерних поперечних перерізів;
4. Обчислення зусиль в характерних перерізах;
5. Побудова епюр внутрішніх зусиль;
6. Перевірка правильності побудованих зусиль.

Рекомендації до виконання завдання

1. У наведених у додатку схемах, стержень замінений його віссю (пряма, ламана або крива лінія), на якій позначені довжини і навантаження. Розрахункову схему треба накреслити обов'язково в масштабі, з нанесенням на неї всіх цифрових даних, значення яких, згідно з шифром студента, вказаним у додатку. Навантаження прикладаються до поздовжньої осі стержня та позначаються цифровими значеннями з таблиці Д.

2. У розрахункових схемах плоских стержньових систем зустрічаються три типи опор: шарнірно-рухома опора - має одну в'язь, в якій виникає одна опорна реакція, що виникає вздовж опорного стержня (рис. 1.2, а); шарнірно-нерухома опора – має дві лінійні в'язі, в яких виникають дві складові опорної реакції (рис. 1.2, б); жорстко закріплена (затиснена)

опора – накладає на стержень три в'язі (дві лінійні і одну кутову), в яких виникають три реакції (дві зосереджені сили та момент) (рис. 1.2, в):

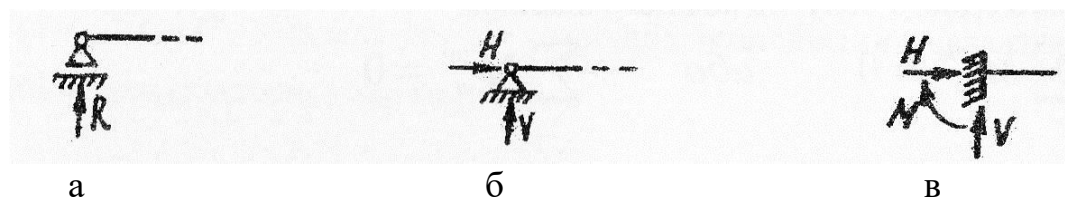


Рис. 1.2

Всі опорні реакції вважаються прикладеними в центрі ваги опорного перерізу. Значення опорних реакцій в статично визначуваних системах знаходять з умов рівноваги всієї системи. Рівняння рівноваги для плоских стержньових систем можна записати у трьох варіантах:

✓ У вигляді сум проєкції на дві осі, що перпендикулярні між собою та суми моментів всіх сил відносно довільної точки, що лежить в площині схеми: $\sum x=0$; $\sum z=0$; $\sum M_o=0$.

✓ У вигляді суми проєкції на вісь і двох сум моментів відносно точок площини, що не лежать на одному перпендикулярі до цієї осі проєкцій: $\sum x=0$; $\sum M_a=0$; $\sum M_b=0$.

✓ У вигляді трьох сум моментів відносно довільних трьох точок площини, що не лежать на одній прямій: $\sum M_a=0$; $\sum M_b=0$; $\sum M_c=0$.

Той чи інший варіант складання рівнянь рівноваги (з відповідним вибором точок і напрямку осей) використовують в кожному окремому випадку з таким розрахунком, щоб по можливості уникнути розв'язання системи рівнянь. Для перевірки правильності визначення опорних реакцій рекомендується підставити їх значення в будь-яке рівняння рівноваги, що не застосовували раніше.

Напрямок опорних реакцій при складанні рівнянь рівноваги можна вибирати довільний. Якщо під час розрахунку будь-яка реакція буде мати від'ємний знак, то треба замінити її напрямком на рисунку протилежним і надалі вважати цю реакцію додатною.

Якщо на стержень діє розподілене навантаження, то при визначенні реакції його замінюють на зосереджену силу площі епюри розподіленого навантаження і прикладється в центрі ваги цієї епюри.

Для шарнірно-консольних балок, крім звичайних рівнянь рівноваги, треба додатково скласти рівняння рівності нулю суми моментів всіх сил, що

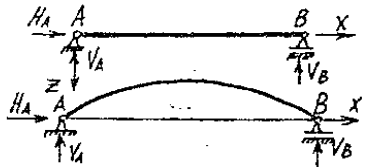
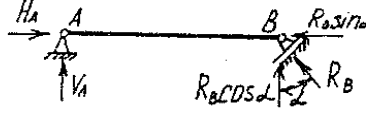
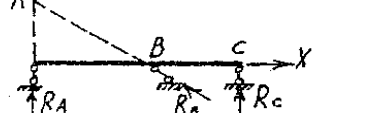
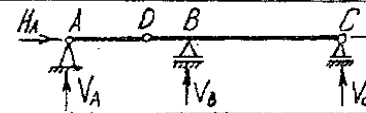
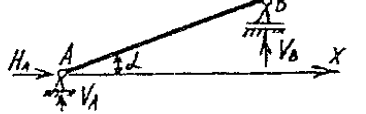
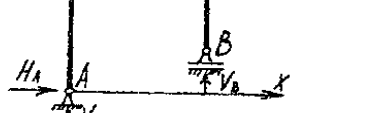
знаходиться лівіше або правіше від кожного шарніру:

$$\sum M_{\text{ш}}^{\text{лів}} = 0 \quad \text{або} \quad \sum M_{\text{ш}}^{\text{прав}} = 0.$$

Опорні реакції для балок з шарнірами можна визначати, поділивши їх на прості балки.

Доцільна послідовність визначення опорних реакцій для деяких систем наведена в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

№ п/п	Розрахункова схема	Рівняння для визначення реакцій	Визначені реакції	Перевірка
1		$\sum M_A = 0$ $\sum M_B = 0$ $\sum X = 0$	V_B V_A H_A	$\sum Z = 0$
2		$\sum M_A = 0$ $\sum M_B = 0$ $\sum X = 0$	R_B V_A H_A	$\sum Z = 0$
3		$\sum M_A = 0$ $\sum M_B = 0$ $\sum X = 0$	R_C R_A R_B	$\sum Z = 0$
4		$\sum M_D = 0$ $\sum M_B = 0$ $\sum M_C = 0$	V_A V_C V_B	$\sum Z = 0$
5		$\sum M_A = 0$ $\sum Z = 0$ $\sum X = 0$	V_A V_B H_A	$\sum M_B = 0$
6		$\sum M_A = 0$ $\sum Z = 0$ $\sum X = 0$	V_A V_B H_A	$\sum M_B = 0$

В розрахунках прямолінійних, криволінійних і ламаних стержнів, що жорстко закріплені одним кінцем, визначення опорних реакцій необов'язкове.

3. Ділянкою (характерним відрізком) системи називають кожну її

частину, в межах якої зміни внутрішніх зусиль залишаються постійними. Границями ділянок є поперечні перерізи, в яких прикладені зосереджені сили (в тому числі опорні реакції) або в яких починається та закінчується розподілене навантаження (або змінюється інтенсивність навантаження за новим законом). У рамках границями ділянок є також вузлові перерізи.

Характерні перерізи – це такі, в яких визначаються величини зусиль. Характерними перерізами є граничні точки всіх ділянок, а на ділянках з рівномірно розподіленим навантаженням – додатково 1-2 поперечних перерізи.

4. Зусилля в характерних перерізах можна обчислювати за складеними рівняннями або без їх складання. Складаючи рівняння, на кожній ділянці стержня проводиться довільний переріз, вказується початок відліку координати X та границі її зміни, відповідно до наведених рекомендацій та правил знаків складають вирази (рівняння) зусиль як функції від координати X . Складені вирази можна проконтролювати використовуючи диференціальні залежності:

$$\frac{dN}{dx} = -q_x; \quad \frac{dQ_y}{dx} = -q_y; \quad \frac{dM_{кр}}{dx} = -m; \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z; \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y.$$

де q_x ; q_y ; q_z ; m – інтенсивність зовнішніх розподілених навантажень, додатні напрями яких вказані на рис.1.3.

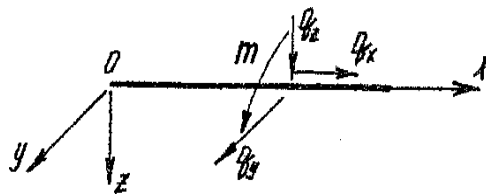


Рис. 1.3

Більш раціональним є обчислення зусиль у характерних перерізах безпосередньо, без складання рівнянь.

У плоских криволінійних стержнях, які окреслені по дузі кола радіусом R , положення довільного перерізу доцільно визначати з допомогою полярних координат. Тоді внутрішні зусилля N , Q , M будуть функціями кута φ . Диференціальні залежності між зусиллями мають вигляд:

$$\frac{dN}{d\varphi} = Q - q_t \cdot R; \quad \frac{dQ}{d\varphi} = -N - q_r \cdot R; \quad \frac{dM}{d\varphi} = Q \cdot R,$$

де q_r та q_t – проекції розподіленого навантаження на радіус і дотичну до осі криволінійного стержня в точці перерізу.

5. Обчислені в характерних перерізах значення N , Q_y , Q_z , M_{kr} , M_y , M_z , є ординатами епюр відповідних зусиль.

Епюра будь-якого зусилля – це графік, який відображає закон зміни величини цього зусилля по довжині стержня. Епюри зусиль для окремих прямолінійних стержнів будують кожен в своєму масштабі на осевих лініях, які паралельні до осі стержня, а для криволінійних стержнів і рам – безпосередньо на осях стержнєвої розрахункової схеми.

Ординати відкладають перпендикулярно до осі епюр: для M_y та M_z – збоку розтягнутого волокна, для інших зусиль вибір напрямку ординат не принциповий. Для окремих горизонтальних стержнів, завантажених плоскою системою сил, доцільно використовувати таке правило: додатні ординати N , Q відкладають вгору, M – вниз, від’ємні – навпаки.

6. Для контролю епюр зусиль на сам перед використовують правило, що випливають з диференціальних залежностей, наведених у п.4. Зокрема, для плоскої системи, завантаженої в її площині на підставі залежностей:

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z; \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z$$

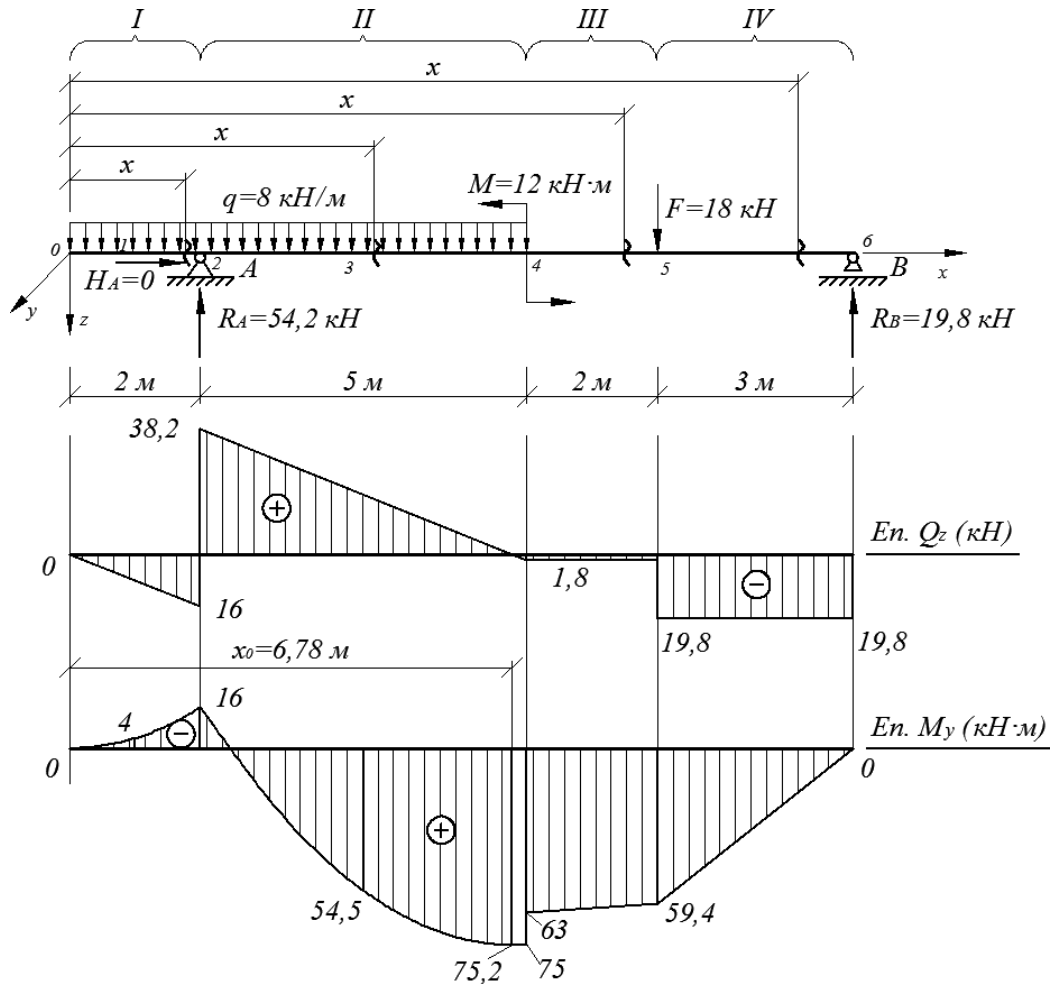
можна визначати: за характером навантаження – обриси ліній епюр Q_z і M_y ; за значенням поперечної сили – крутизну нахилу лінії, що обмежує епюру згинальних моментів; за знаком поперечної сили Q_z – зростання або зменшення ординат епюри M_y ; за нульовими точками епюри Q_z – наявність екстремумів в епюри M_y .

Точкам прикладання зосереджених сил відповідають злами в епюрі M_y , у напрямку дії сили та стрибки в епюрі Q_z на величину цих сил; точкам прикладання зосереджених моментів відповідають стрибки в епюрі M_y на величину моментів, характер епюри Q_z в цьому разі не змінюється.

Для перевірки побудови епюр зусиль можна використовувати також умови рівноваги відсіченої частини системи, якщо прикласти до неї зовнішні навантаження, а в проведених перерізах зусилля, взяті з відповідних епюр. У рамках доцільна перевірка рівноваги вирізаних вузлів.

Приклади

Приклад 1. Горизонтальна балка на двох опорах на яку діє зовнішнє навантаження прикладене в площині балки (рис. 1.4).



Визначення реакцій опор:

$$\sum X = 0; H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$R_B \cdot 10 - 8 \cdot 7 \cdot 1,5 + 12 - 18 \cdot 7 = 0; R_B = 19,8 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$-R_A \cdot 10 + 8 \cdot 7 \cdot 8,5 + 12 + 18 \cdot 3 = 0; R_A = 54,2 \text{ кН};$$

$$\text{Перевірка: } \sum Z = 0; 8 \cdot 7 - 54,2 + 18 - 19,8 = 0.$$

Беремо початок відліку координати X на лівому кінці балки.

Поділяємо балку на ділянки I, II, III, IV та визначаємо характерні перерізи:

$$0, 1, 2, \dots, 6 \text{ (} x = 0; 1; 2; 4; 5; 7; 9; 12 \text{ м)}.$$

Ділянка I ($0 \leq x \leq 2 \text{ м}$)

Складаємо вирази для Q та M ,

$$Q = -8 \cdot x; M = -8 \cdot x \frac{x}{2} = -4 \cdot x^2.$$

Ділянка II ($2 \text{ м} \leq x \leq 7 \text{ м}$)

$$Q = -8 \cdot x + 54,2;$$

$$M = -8 \cdot x \frac{x}{2} + 54,2 \cdot (x - 2) = -4 \cdot x^2 + 54,2x - 108,4.$$

Ділянка III ($7 \text{ м} \leq x \leq 9 \text{ м}$)

$$Q = -8 \cdot 7 + 54,2 = 1,8 \text{ кН.}$$

$$M = -8 \cdot 7 \left(x - \frac{7}{2} \right) + 54,2 \cdot (x - 2) = -56 \cdot (x - 3,5) + 54,2(x - 2) - 12.$$

Ділянка IV ($9 \text{ м} \leq x \leq 12 \text{ м}$)

$$Q = -8 \cdot 7 + 54,2 - 18 = -19,8 \text{ кН.}$$

$$M = -8 \cdot 7(x - 3,5) + 54,2 \cdot (x - 2) - 12 - 18 \cdot (x - 9) = 0.$$

Визначаємо значення поперечних сил та згинальних моментів у характерних точках на балці підставивши в отримані рівняння значення координат X початку та кінця характерних відрізків, результати зводимо в таблицю.

$X[\text{м}]$	0	1	2	2	4,5	max	7	7	9	9	12
$Q[\text{кН}]$	0	-	-16	38,2	-	0	-1,8	-1,8	-1,8		- 19,8
$M[\text{кНм}]$	0	-4	-16	-16	- 54,5	75,2	75	63	59,4	59,4	0

За результатами розрахунків будуюмо епюри Q та M .

На ділянці II треба визначити екстремальну точку згинального моменту. При $Q = 0$ - $M = \text{max}$.

$$Q = -8 \cdot x_0 + 54,2 = 0 \rightarrow x_0 = 6,78 \text{ м.}$$

$$M_{\text{max}} = -4 \cdot 6,78^2 + 54,2 \cdot (6,78 - 2) = 75,2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Приклад 2. Балка на двох опорах з консоллю, що навантажена похилим рівномірно-розподіленим навантаженням. (рис. 1.5)

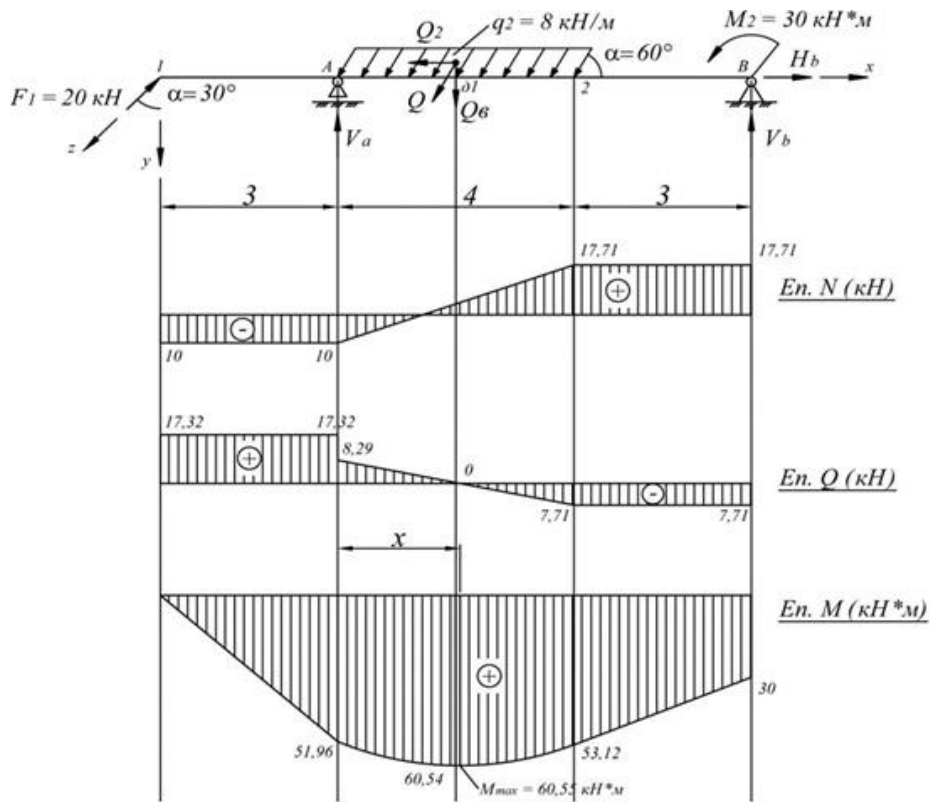


Рис. 1.5

Замінюємо рівномірно-розподілене навантаження рівнодіючою силою, та розкладаємо похилі сили на дві складові – вертикальну та горизонтальну:

$$Q = q_2 \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32 \text{ кН}$$

$$Q^2 = Q \cdot \sin 60^\circ = 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27,11 \text{ кН}$$

$$Q^B = Q \cdot \cos 60^\circ = 32 \cdot \frac{1}{2} = 16 \text{ кН}$$

$$F_1^B = F_1 \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17,32 \text{ кН}$$

$$F_1^2 = F_1 \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ кН}.$$

Визначаємо реакції опор

$$\sum X = 0;$$

$$F_2 - Q_2 + H_b = 0;$$

$$10 - 27,71 = -H_b; H_b = 17,71 \text{ кН};$$

$$\sum M_a = 0;$$

$$F_b \cdot 3 + Q_b \cdot 2 - M_2 - V_b \cdot 7 = 0$$

$$V_b = \frac{-17,32 \cdot 3 + 16 \cdot 2 - 30}{7} = 7,71 \text{ кН}.$$

$$\sum M_b = 0;$$

$$F^B \cdot 10 + V_a \cdot 7 - Q^B \cdot 5 - M_2 = 0$$

$$V_a = \frac{-17,32 \cdot 10 + 16 \cdot 5 + 30}{7} = -9,03 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum Y = 0; F^B + V_a - Q^B + V_b = 17,32 + (-9,03) - 16 + 7,71 = 0.$$

Беремо початок відліку координати x , позначаємо характерні точки на балці, та визначаємо ординати епюр зусиль M , Q , N (Рис.2.5) в характерних та додаткових точках методом перерізів, розглядаючи при цьому ліву від перерізу частину балки.

Поздовжня сила: $N_{(x)}$

$$N_1^l = 0.$$

$$N_1 = -F_1^2 = -10 \text{ кН.}$$

$$N_a = -F_1^2 = -10 \text{ кН.}$$

$$N_2 = -F_1^2 + Q^2 = -10 + 27,71 = 17,71 \text{ кН.}$$

$$N_B^l = -F_1^2 + Q^2 = -10 + 27,71 = 17,71 \text{ кН.}$$

$$N_B^r = -F_1^2 + Q^2 - H_b = -10 + 27,71 - 17,71 = 0.$$

Поперечна сила: $Q_{(z)}$

$$Q_1^l = 0.$$

$$Q_1^r = F_1^2 = 17,32 \text{ кН.}$$

$$Q_a^l = F_1^2 = 17,32 \text{ кН.}$$

$$Q_a^r = F_1^2 + V_a = 17,32 + (-9,03) = 8,29 \text{ кН.}$$

$$Q_2 = F_1^2 + V_a - Q^B = 17,32 + (-9,03) - 16 = -7,71 \text{ кН.}$$

$$Q_B^l = F_1^2 + V_a - Q^B = 17,32 + (-9,03) - 16 = -7,71 \text{ кН.}$$

$$Q_B^r = F_1^2 + V_a - Q^B + V_b = 17,32 + (-9,03) - 16 + 7,71 = 0.$$

Згинальний момент: M_y

$$M_1 = 0$$

$$M_a = F_1^B \cdot 3 = +17,32 \cdot 3 = 51,96 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$M_1 = F_1^B \cdot 5 + V_a \cdot 2 - q_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2 \cdot 1 = 17,32 \cdot 5 + (-9,03) \cdot 2 - 8 \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 60,54 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

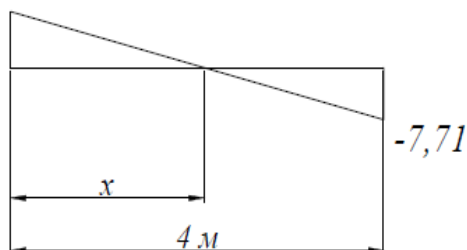
$$M_2 = F_1^B \cdot 7 + V_a \cdot 4 - q_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 4 \cdot 2 = 17,32 \cdot 7 + (-9,03) \cdot 4 - 8 \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 53,12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_b^l = F_1^B \cdot 10 + V_a \cdot 7 - q_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 4 \cdot 5 = 17,32 \cdot 10 + (-9,03) \cdot 7 - 8 \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_b^п = M_b^l - M_2 = 30 - 30 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Визначення положення M_{max} на Епюрі моментів. Виділимо відрізок там де $Q = 0$.

8,29



$$8,29 + 7,71 \rightarrow 4$$

$$8,29 \rightarrow x$$

$$x = \frac{8,29 \cdot 4}{16} = 2,07 \text{ м}$$

Визначаємо M_{max} , розглянемо переріз на відстані $x = 2,07 \text{ м}$ від опори А.

$$\begin{aligned} M_{max} &= F_1^B \cdot 5,07 + V_a \cdot 2,07 - q_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2,07 \cdot \frac{2,07}{2} = \\ &= 17,32 \cdot 5,07 + (-9,03) \cdot 2,07 - 8 \frac{1}{2} \cdot 2,07 \cdot \frac{2,07}{2} = 60,55 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Консоль, завантажена похилими силами.

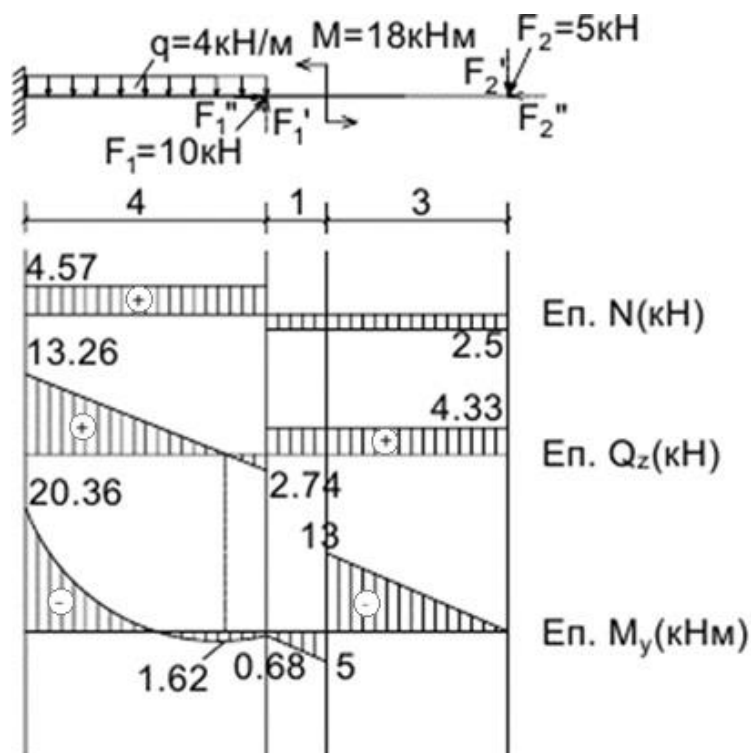


Рис. 1.6

Кожну похилу силу розкладаємо на дві складові: вертикальну та горизонтальну:

$$F_1^B = F_1 \cos 45^\circ = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ кН};$$

$$F_1^r = F_1 \sin 45^\circ = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ кН}$$

$$F_1^{B'} = F_1 \sin 45^\circ = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ кН}$$

$$F_1^{r'} = F_1 \sin 45^\circ = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ кН}$$

$$F_2^B = F_2 \cos 30^\circ = 5 \cdot 0,866 = 4,33 \text{ кН};$$

$$F_2^r = F_2 \cos 30^\circ = 5 \cdot 0,866 = 4,33 \text{ кН};$$

$$F_2^{B''} = F_2 \sin 30^\circ = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ кН}$$

$$F_2^{r''} = F_2 \sin 30^\circ = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ кН}.$$

У цьому випадку опорні реакції в защемленні не обчислюємо. Зусилля визначаємо, розглядаючи умовно відсічену праву частину балки, без складання рівнянь, за характерними перерізами.

Поздовжня сила $N_{(x)}$:

$$N_0 = -2,5 \text{ кН};$$

$$N_{2\Pi} = -2,5 \text{ кН};$$

$$N_{2Л} = -2,5 + 7,07 = 4,57 \text{ кН};$$

$$N_4 = 4,57 \text{ кН}.$$

Поперечна сила $Q_{(x)}$:

$$Q_0 = 4,33 \text{ кН};$$

$$Q_{2\Pi} = 4,33 \text{ кН};$$

$$Q_{2Л} = 4,33 - 7,07 = -2,74 \text{ кН};$$

$$Q_4 = 4,33 - 7,07 + 4 \cdot 4 = 13,26 \text{ кН}.$$

Згинальний момент $M_{y(x)}$:

$$M_0 = 0;$$

$$M_{1\Pi} = -4,33 \cdot 3 = -13 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{1Л} = -4,33 \cdot 3 + 18 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = -4,33 \cdot 4 + 18 = -0,68 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = -4,33 \cdot 6 + 18 + 7,07 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -1,84 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = -4,33 \cdot 8 + 18 + 7,07 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -20,36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{max} = -4,33 \cdot 4,69 + 18 + 7,07 \cdot 0,69 - 4 \frac{0,69^2}{2} = 1,62 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Будуємо епюри внутрішніх зусиль: N , Q_z , M_y рис. 1.6.

Приклад 4. Балка прикріплена до основи у трьох точках за допомогою опорних стержнів (рис. 1.7).

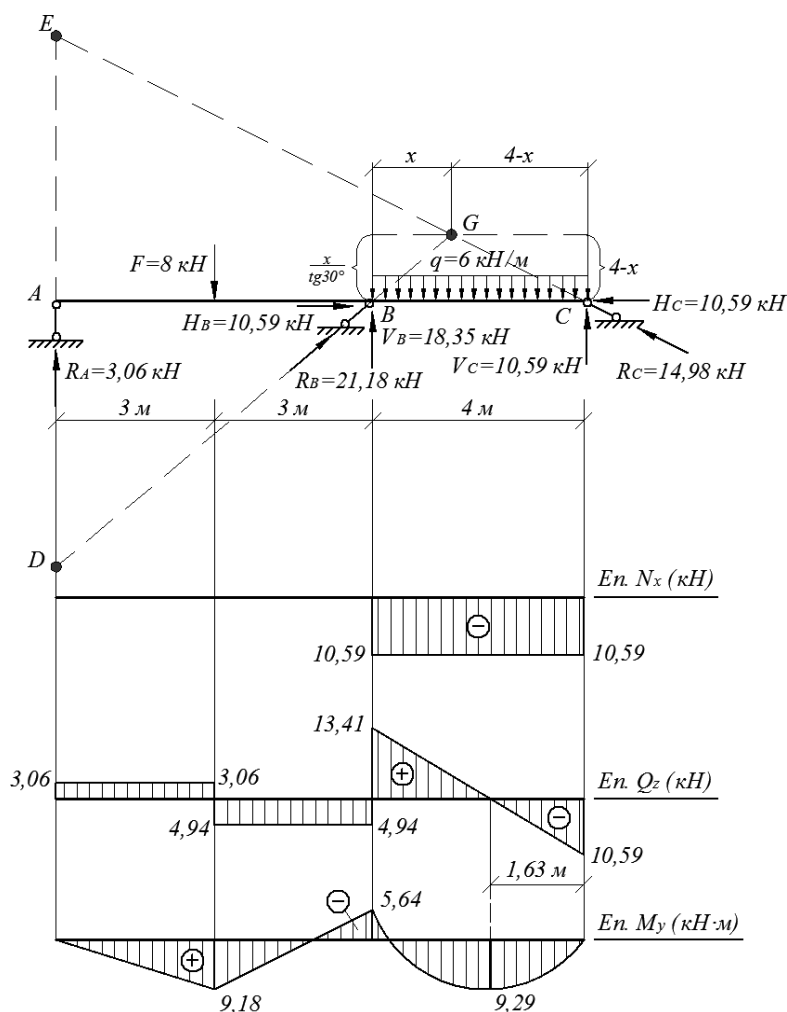


Рис. 1.7

Реакції опор діють вздовж стержнів, напрямки яких не перетинаються в одній точці. Тому ця система геометрично незмінна.

Точки перетину D та E опорних реакцій R_A з R_B та R_A з R_C лежать на вертикальній прямій, що проходить через точку A і перебуває від неї відповідно на відстанях:

$AD = 6 \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 6 \cdot 1,733 = 10,39 \text{ м}$; і $AE = 10 \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ = 10 \cdot 1 = 10 \text{ м}$
 Знайдемо положення точки перетину G опорних реакцій R_B та R_C .

$$\frac{x}{\operatorname{ctg} 30^\circ} = 4 - x; x = (4 - x) \cdot 0,577; x = 1,46 \text{ м}$$

$$\sum M_D = 0; R_C \cdot \cos 45^\circ \cdot 10 + R_C \sin 45^\circ \cdot 10,39 - 8 \cdot 3 - 6 \cdot 4 \cdot 8 = 0;$$

$$R_C = 14,98 \text{ кН}; V_C = R_C \cos 45^\circ = 14,98 \cdot 0,707 = 10,59 \text{ кН}.$$

$$H_C = R_C \sin 45^\circ = 14,98 \cdot 0,707 = 10,59 \text{ кН}.$$

$$\sum M_E = 0; R_b \cdot \cos 30^\circ \cdot 6 + R_b \sin 30^\circ \cdot 10 - 8 \cdot 3 - 6 \cdot 4 \cdot 8 = 0;$$

$$R_b = 21,18 \text{ кН}; V_b = R_b \cdot \sin 30^\circ = 21,18 \cdot 0,5 = 10,59 \text{ кН}.$$

$$\sum M_G = 0; R_A \cdot 7,46 + 8 \cdot 4,46 - 6 \cdot 4 \cdot 0,54 = 0; R_A = 3,06 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum F_x = 0; \quad 10,59 - 10,59 = 0;$$

$$\sum F_z = 0; \quad 3,06 + 18,35 + 10,59 - 8 - 6 \cdot 4 = 0.$$

Обчислюємо та будуємо епюри внутрішніх зусиль: N, Q_z, M_y Рис 2.6

Приклад 5. Шарнірно-консольна балка (рис.1.8).

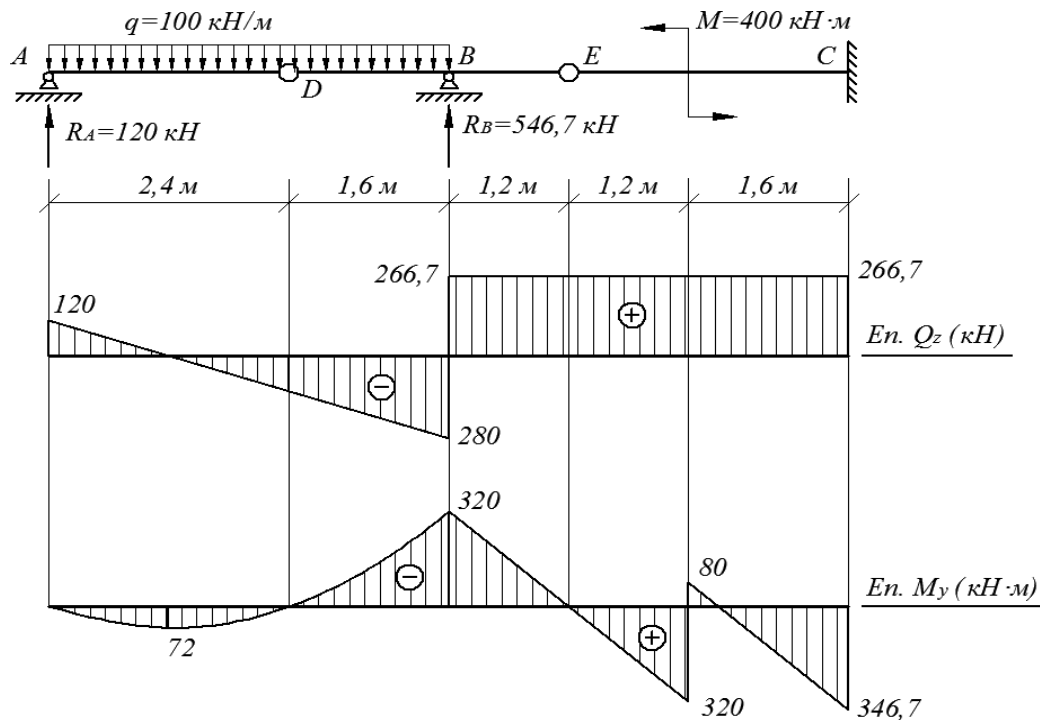


Рис. 1.8

$$\sum M_D^{\text{ліб}} = 0; -R_A \cdot 2,4 + 100 \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 0; R_A = 120 \text{ кН}.$$

$$\sum M_E^{\text{ліб}} = 0; -R_B \cdot 1,2 + 100 \cdot 4 \cdot 3,2 - 120 \cdot 5,2 = 0; R_B = 546,7 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0; M_C + 400 - 120 \cdot 8 + 100 \cdot 4 \cdot 6 - 546,7 \cdot 4 = 0; M_C = 346,7 \text{ кНм}.$$

$$\sum F_y = 0; R_C - 120 - 546,7 + 100 = 0; R_C = 266,7 \text{ кНм}.$$

Визначаємо ординати епюр зусиль, враховуючи зовнішні навантаження, що містяться зліва від розрахункових перерізів, і будуємо епюри Q_z, M_y рис. 1.8.

Цю систему розраховують, поділяючи її на окремі балки. Послідовність визначення реакцій та побудови епюр зусиль у цей спосіб показана на рис. 1.9.

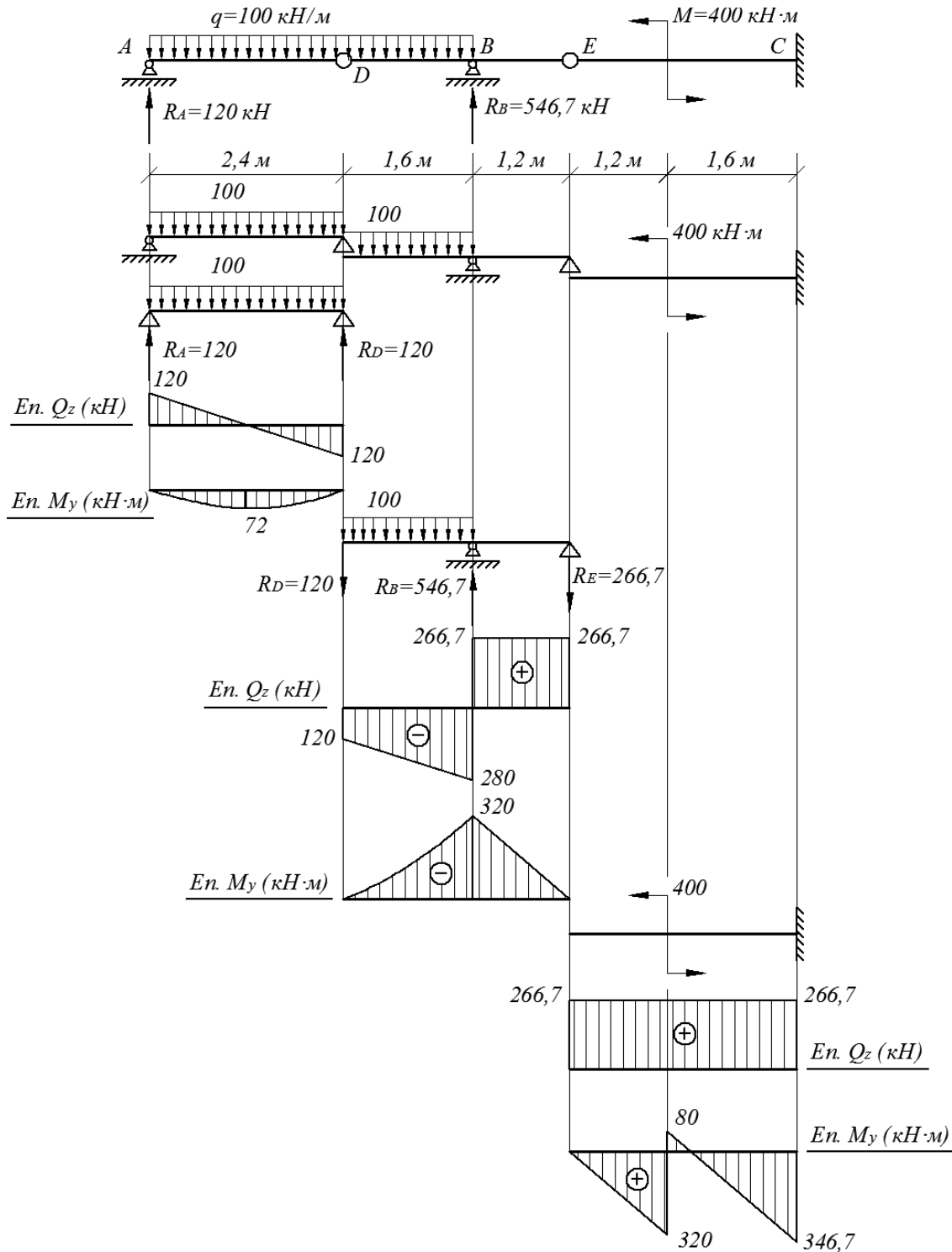


Рис. 1.9

Приклад 6. Плоска рама з навантаженням, яке діє в площині рами (рис. 1.10). Спочатку визначаємо кут α та обчислюємо його тригонометричні функції.

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} = 0,75; \alpha = 36,87^\circ; \sin \alpha = 0,6; \cos \alpha = 0,8.$$

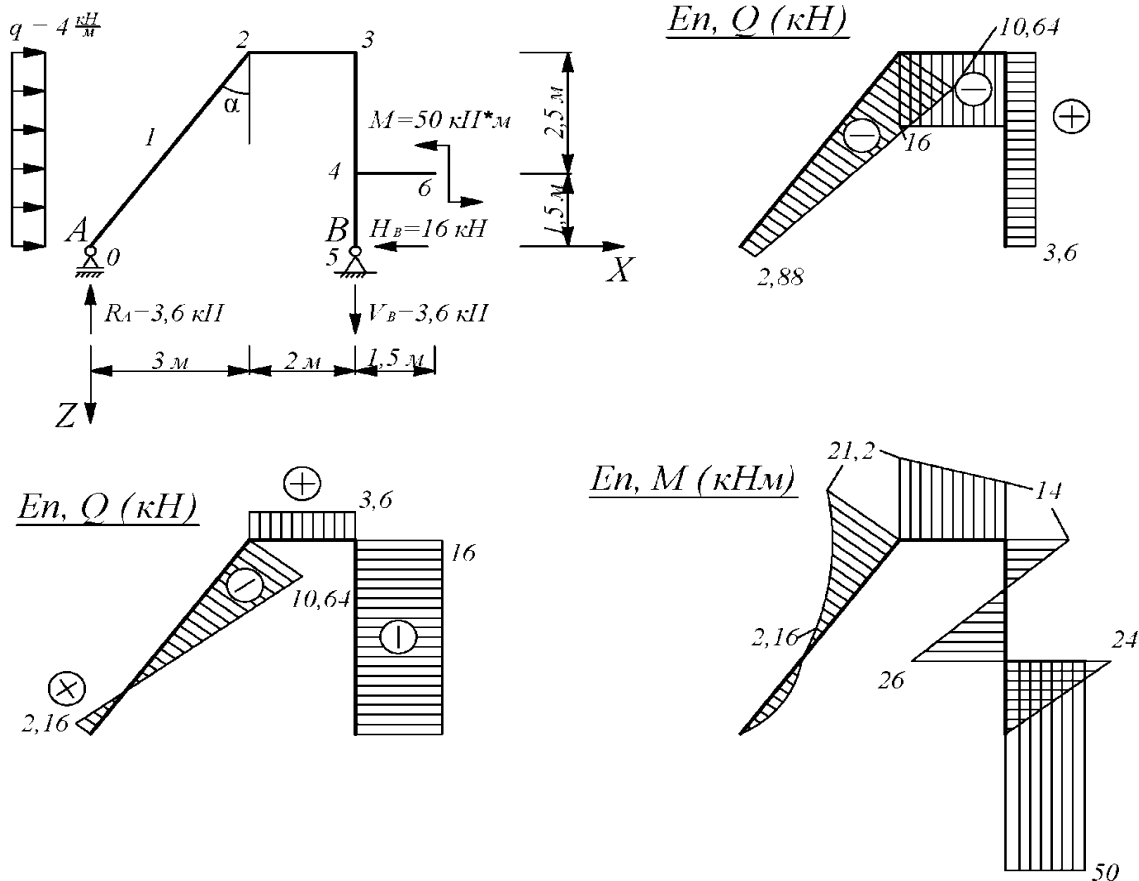


Рис 1.10

Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_b = 0; -R_a * 5 - 4 * 4 * 2 + 50 = 0; R_a = 3,6 \text{ kN};$$

$$\sum M_a = 0; -V_b * 5 - 4 * 4 * 2 + 50 = 0; V_b = 3,6 \text{ kN};$$

$$\sum X = 0; -H_b + 4 * 4 = 0; H_b = 16 \text{ kN};$$

Перевірка:

$$\sum Z = 0; -3,6 + 3,6 = 0.$$

Визначаємо характерні перерізи та обчислюємо в них значення зусиль.

Повздовжня сила:

$$N_0 = -R_a * \cos \alpha = -3,6 * 0,8 = -2,88 \text{ kN};$$

$$N^H = -R_a * \cos \alpha - q * 4 * \sin \alpha = -3,6 * 0,8 - 4 * 4 * 0,6 = -12,48 \text{ kN};$$

$$N_{2-3} = -q * 4 = -4 * 4 = -16 \text{ kN};$$

$$N_{3-5} = V_a = 3,6 \text{ kN};$$

$$N_{4-6} = 0$$

Поперечна сила:

$$Q_0 = R_a \cdot \sin \alpha = 3,6 \cdot 0,6 = 2,16 \text{ kH};$$

$$Q^H = R_a \cdot \sin \alpha - q \cdot 4 \cdot \cos \alpha = 3,6 \cdot 0,6 - 4 \cdot 4 \cdot 0,8 = -10,64 \text{ kH};$$

$$Q_{\Pi}^2 = Q_{\Pi}^3 = R_a = 3,6 \text{ kH};$$

$$Q_3^H = Q_5^B = H_B = 16 \text{ kH};$$

$$Q_4^{\Pi} = Q_6 = 0.$$

Згинальний момент:

$$M_0^B = 0.$$

$$M_1 = R_a \cdot \frac{3}{2} - q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 3,6 \cdot 1,5 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 2,6 \text{ kH} \cdot \text{m};$$

$$M_2^H = R_a \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 3,6 \cdot 3 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = -21,2 \text{ kH} \cdot \text{m};$$

$$M_3^{\Pi} = M_5^{\Pi} = R_a \cdot 5 - q \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 3,6 \cdot 5 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = -14 \text{ kH} \cdot \text{m};$$

$$M_4^{\Pi} = M_6^{\Pi} = -50 \text{ kH} \cdot \text{m};$$

$$M_4^B = H_B \cdot 1,5 - 50 = 16 \cdot 1,5 - 50 = -26 \text{ kH} \cdot \text{m};$$

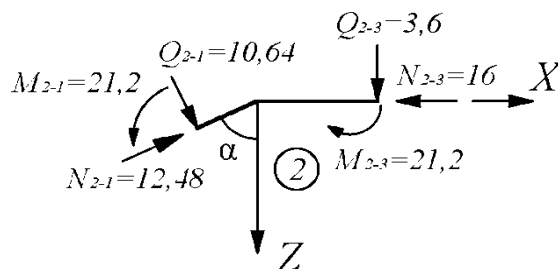
$$M_4^H = H_B \cdot 1,5 = 16 \cdot 1,5 = 24 \text{ kH} \cdot \text{m};$$

$$M_5^B = 0.$$

Обчислюємо та будуємо епюри внутрішніх зусиль: N , Q_z , M_y рис. 1.10. Виконуємо перевірку рівноваги вирізаних вузлів 2, 3 та 4, приклавши до них діючі внутрішні зусилля.

Вузол 2

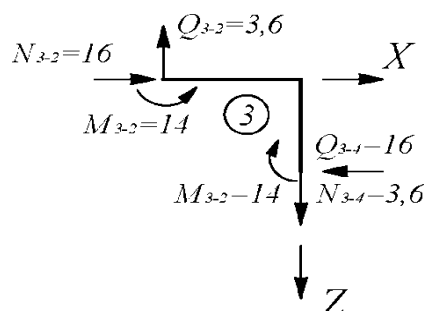
$$\sum X = 0; 10,64 \cdot 0,8 + 12,48 \cdot 0,6 - 16 = 0;$$



$$\sum Z = 0; 10,64 \cdot 0,6 - 12,48 \cdot 0,8 + 3,6 = 0;$$

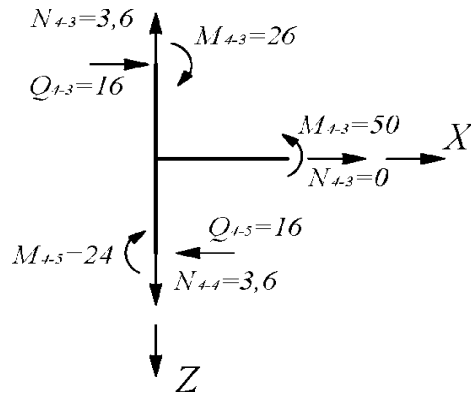
$$\sum M = 21,2 - 21,2 = 0.$$

Вузол 3



$$\begin{aligned}\sum X &= 16 - 16 = 0; \\ \sum Z &= 3,6 - 3,6 = 0; \\ \sum M &= 14 - 14 = 0.\end{aligned}$$

Вузол 4



$$\begin{aligned}\sum X &= 16 - 16 = 0; \\ \sum Z &= 3,6 - 3,6 = 0; \\ \sum M &= 50 - 26 - 24 = 0.\end{aligned}$$

Приклад 7. Плоский криволінійний стержень, вісь якого окреслена по дузі кола (рис. 1.11).

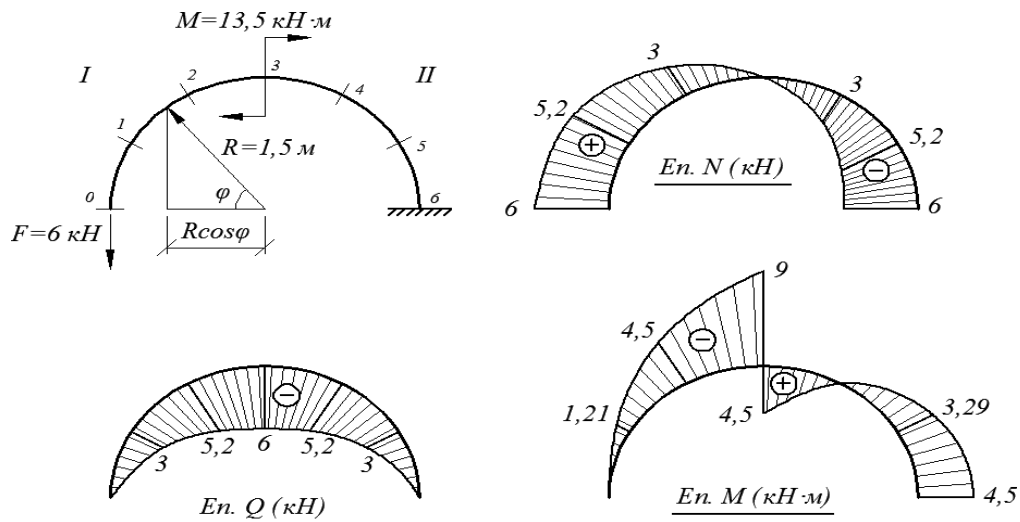


Рис. 1.11

Реакції в защемленні не визначаємо. Поділяємо вісь стержня на дві ділянки та складаємо рівняння для визначення зусиль. Розглядаючи ліву умовно відсічену частину стержня, проектуємо сили на дотичну та нормаль до осі стержня й визначаємо суму моментів відносно центру перерізу.

Ділянка I $\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$$N(\varphi) = 6 \cdot \cos\varphi;$$

$$Q(\varphi) = -6 \cdot \sin\varphi;$$

$$M(\varphi) = -6 \cdot 1,5 \cdot (1 - \cos\varphi) = -9 \cdot (1 - \cos\varphi).$$

$$\text{Ділянка II } \left(\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\right)$$

$$N(\varphi) = 6 \cdot \cos\varphi;$$

$$Q(\varphi) = -6 \cdot \sin\varphi;$$

$$M(\varphi) = -9 \cdot (1 - \cos\varphi) + 13,5.$$

Обчислення N, Q, M у перерізах, з інтервалом 30° наведені в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Ділянка	φ , градуси	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$N(\varphi)$, кН	$Q(\varphi)$, кН	$M(\varphi)$, кНм
I	0	0	1	6	0	0
	30°	0,5	0,866	5,2	-3	-1,21
	60°	0,866	0,5	3	-5,2	-4,5
	90°	1	0	0	-6	-9
II	90°	1	0	0	-6	4,5
	120°	0,866	-0,5	-3	-5,2	0
	150°	0,5	-0,866	-5,2	-3	-3,29
	180°	0	-1	-6	0	-4,5

Будуємо епюри N, Q, M , відкладаючи ординати по нормалі до криволінійної осі (рис. 1.11.)

Приклад 8. Просторова рама, закріплена одним кінцем і складається з трьох взаємно перпендикулярних стержнів (рис. 1.12)

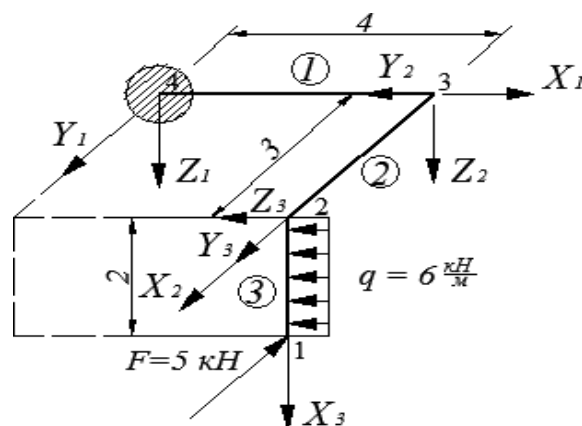


Рис. 1.12

Побудову епюр внутрішніх зусиль можна виконувати двома способами:

1 спосіб: Спроектувати просторову конструкцію на горизонтальну, фронтальну та профільну координатні площини з прикладеним навантаженням. Побудувати епюри М-згинальних моментів, Q-поперечних сил, N-повздовжніх сил для кожної площини.

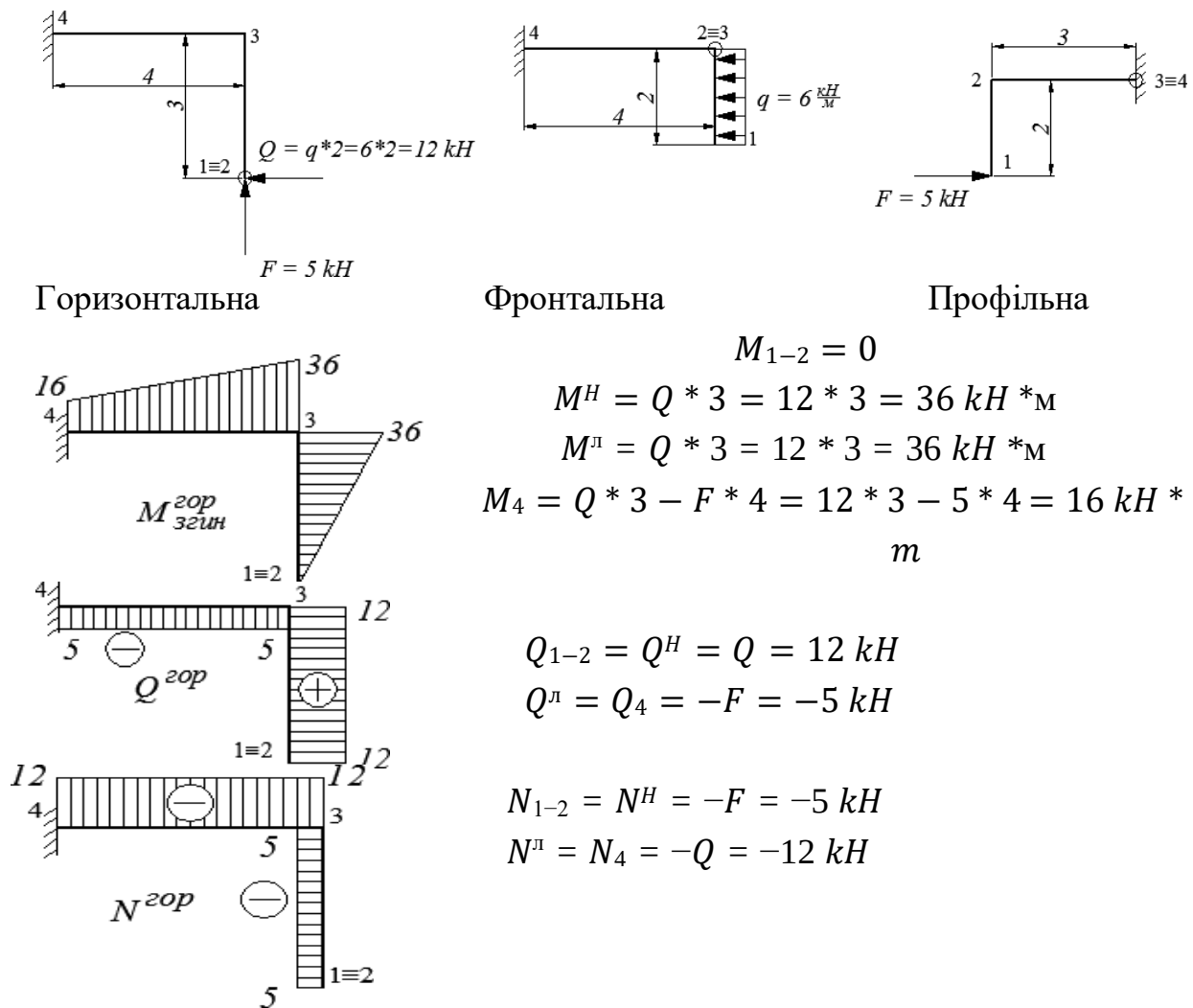


Рис. 1.13. Епюри згинальних моментів (а), поперечних сил (б), поздовжніх сил (в) у горизонтальній проєкції

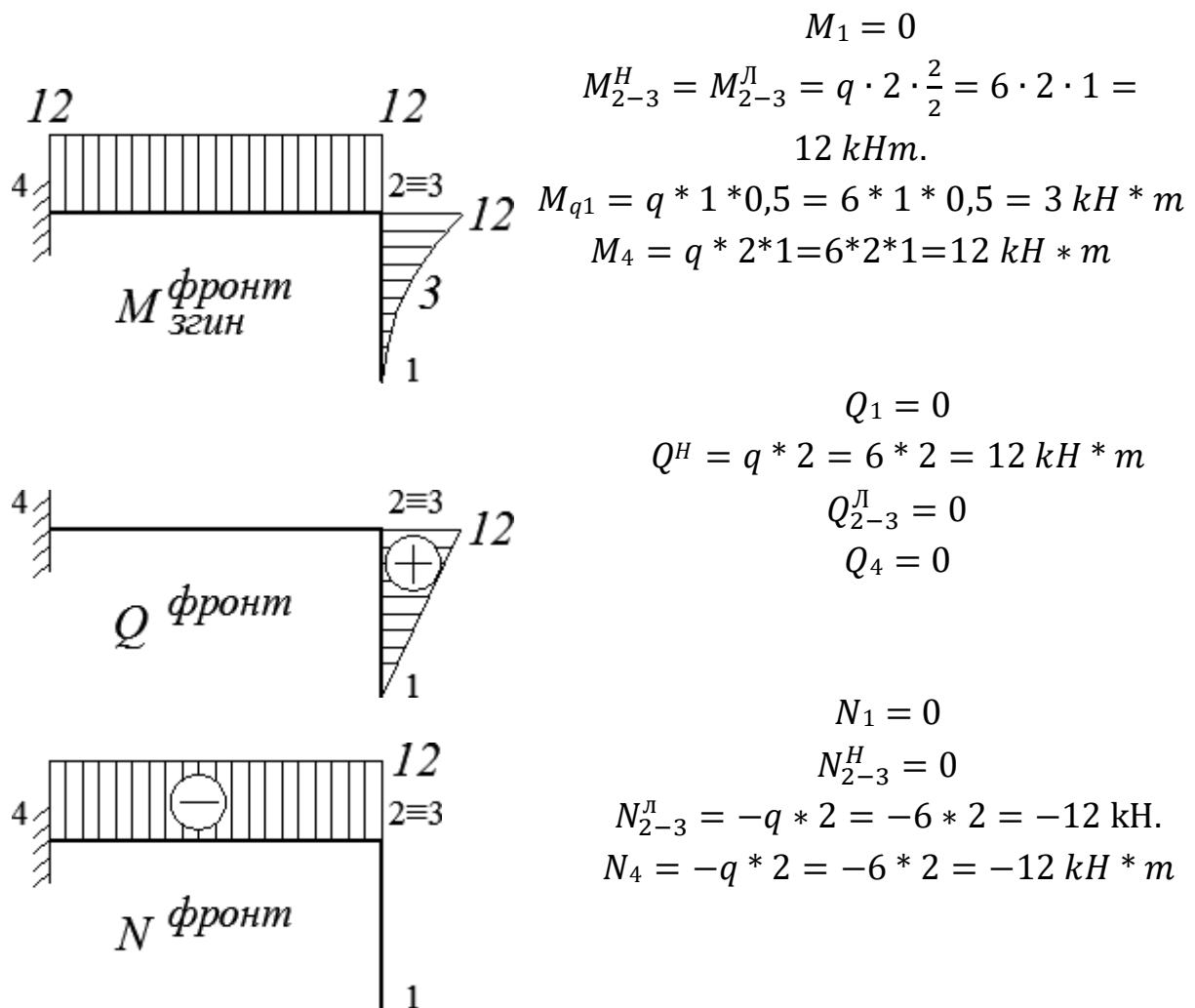
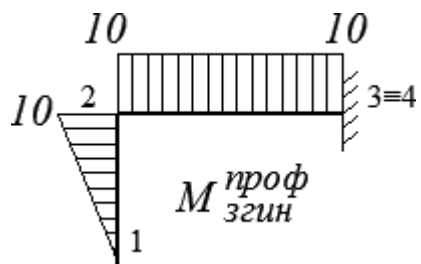


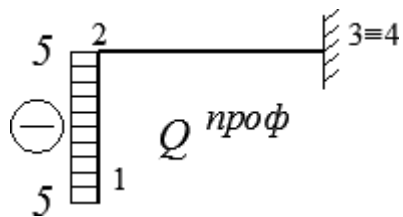
Рис. 1.14. Епюри згинальних моментів (а), поперечних сил (б), поздовжніх сил (в) у фронтальній проєкції



$$M_1 = 0$$

$$M_2 = -F * 2 = -5 * 2 = -10 \text{ kH} * \text{m}$$

$$M_{3-4} = -F * 2 = -5 * 2 = -10 \text{ kH} * \text{m}$$

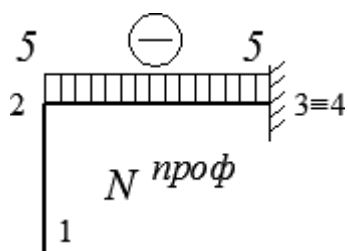


$$Q_1 = -F = -5 \text{ kH}$$

$$Q_2^H = -F = -5 = -5 \text{ kH} * \text{m}$$

$$Q_2^H = 0$$

$$Q_{3-4} = 0$$



$$N_1 = N_2^H = 0$$

$$N_2^H = N_{3-4} = -F = -5 \text{ kH}$$

Рис. 2.15.Епюри згинальних моментів (а), поперечних сил (б), поздовжніх сил (в) у профільній проєкції

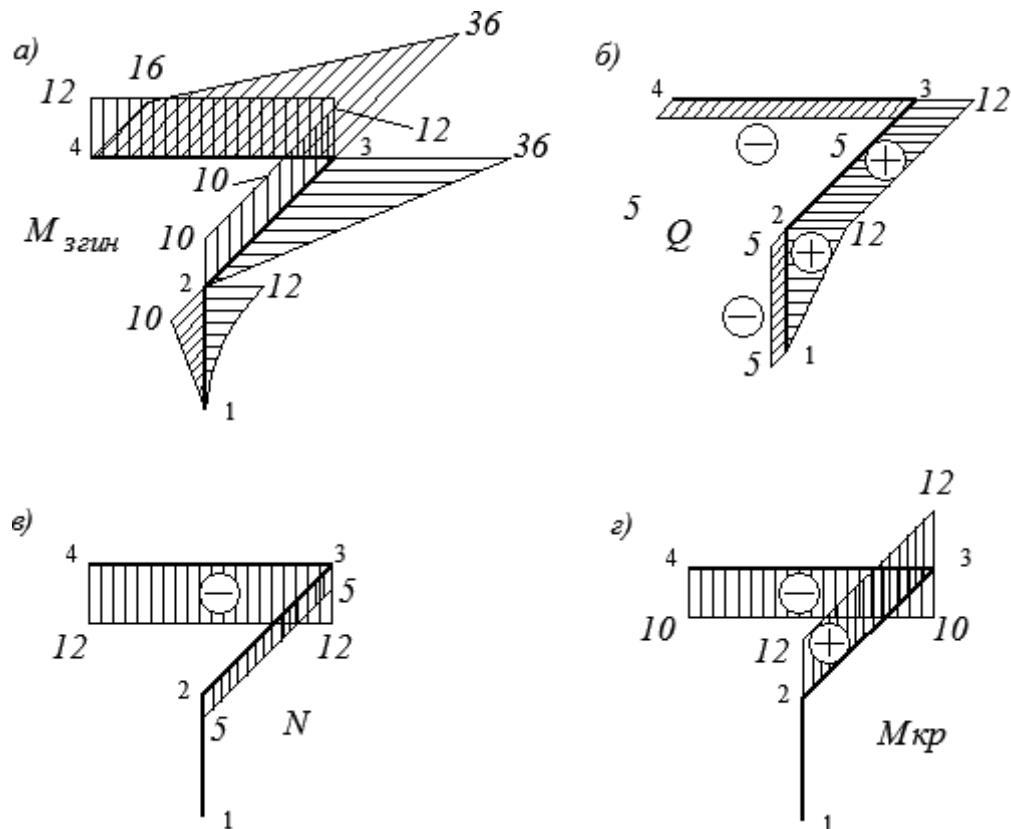


Рис. 1.16 Просторові епюри згинальних моментів (а), поперечних сил (б), поздовжніх сил (в) та крутних моментів (г)

Епюра $M_{кр}$ (рис. 1.16, г) будується на стержнях номери яких співпадають на проєкціях епюр згинальних моментів. При цьому величина крутного моменту дорівнює величині згинального моменту в цій точці та розповсюджується по всій довжині стержня.

Горизонтальна проєкція 1-2 – згинальний момент $M_{1-2} = 0 \rightarrow M_{кр1-2} = 0$;

Фронтальна проєкція 2-3 - згинальний момент $M_{2-3} = 12 \text{ кН} \rightarrow M_{кр2-3} = 12 \text{ кН*м}$;

Профільна проєкція 3-4 - згинальний момент $M_{3-4} = 10 \text{ кН} \rightarrow M_{кр3-4} = -10 \text{ кН*м}$.

2 спосіб. При переході від одного стержня до іншого вісь X направляємо вздовж осі цього стержня, відповідно вказуємо додатні напрямки осей Y та Z . Тоді беремо правило знаків для зусиль відповідно до рис. 1.12 Знаки згинальних моментів можна не враховувати, а ординати відкладати в двох площинах з боку розтягнутих волокон на епюрі M .

Епюри поперечних та поздовжніх сил і крутних моментів також будуються в двох відповідних площинах. Ці епюри можуть бути орієнтовані як завгодно але ординати завжди відкладаються по нормалі від осі стержня.

У цій системі немає необхідності визначати опорні реакції. Побудову епюр починаємо із стержня 3. Визначаємо результат дії на нього сили F і рівномірно розподіленого навантаження q . Ці навантаження викликають у стержні поперечні сили та згинальні моменти, які мають такі значення:

$$Q_{y3} = -5 \text{ кН}; Q_{z3(\max)} = 6 * 2 = 12 \text{ кН};$$

$$M_{z3(\max)} = 5 * 2 = 10 \text{ кНм}; M_{y3(\max)} = 6 * 2 * 1 = 12 \text{ кНм}.$$

Переходимо до стержня 2. Стержень стикується та згинається у вертикальній площині силою F , а навантаження q викликає поперечний згин у горизонтальній площині та кручення цього стержня.

$$N_2 = -5 \text{ кН}; Q_{y2} = 6 * 2 = 12 \text{ кН}; Q_{z2} = 0;$$

$$M_{z2(\max)} = 12 * 3 = 36 \text{ кНм}; M_{y2} = 5 * 2 = 10 \text{ кНм};$$

$$M_{kp2} = 12 * 1 = 12 \text{ кНм}.$$

У стержні 1 сила F викликає поперечний згин та кручення, а навантаження q - стискає та згинає його у двох площинах.

$$N_1 = -6 * 2 = -12 \text{ кН}; Q_{z1} = 0; Q_{y1} = -5 \text{ кН};$$

$$M_{z1 \text{ зац}} = 36 - 5 * 4 = 16 \text{ кНм}; M_{y1} = 6 * 2 = 12 \text{ кНм};$$

$$M_{kp1} = -5 * 2 = -10 \text{ кНм}.$$

Будуємо епюри зусиль (див. рис. 1.16).

Список літератури

1. Іванченко П.О. Збірник задач з опору матеріалів: навч. посіб. / П.О. Іванченко, Л. О. Григор'єва, О.П. Кошевий та ін. –Київ: Ліра-К, 2021. – 396 с.
2. Григор'єва Л.О. Опір матеріалів з основами теорії пружності: курс лекцій // Л.О. Григор'єва, Д.В. Левківський. О.П. Кошевий. – Київ: Ліра-К, 2021. – 270 с.
3. Кошевий О.П. Опір матеріалів в лекціях і задачах: навч. посіб. / О.П. Кошевий, Л.О.Григор'єва, Д.В. Левківський. – Київ: КНУБА;- Кам'янець-Подільський : ТОВ Друкарня Рута, 2019. – 340 с.
4. Шкельов Л.Т. Опір матеріалів: підручник для студентів вищих навчальних закладів. / Л.Т. Шкельов, А.М. Станкевич, Д.В. Пошивач. – Київ: ЗАТ Віпол, 2011. – 456 с.
5. Опір матеріалів з основами теорії пружності. Змістовий модуль 4. Основи теорії пружності: методичні рекомендації для самостійної роботи та дистанційного навчання здобувачів вищої освіти спеціальності БЦІ /уклад.: Л.О. Григор'єва, Д.В. Левківський. – Київ : КНУБА, 2024. – 40 с.
6. Опір матеріалів: методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт для студентів всіх спеціальностей/ уклад.: І. В. Жупаненко, О.П. Кошевий, О.О. Кошевий. – Київ : КНУБА, 2023. – 52 с.
7. Опір матеріалів. Розтяг та стиск стержнів. Геометричні характеристик і поперечних перерізів. Опір матеріалів. Розтяг та стиск стержнів. Геометричні характеристики поперечних перерізів: методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи №1 /уклад.: О. П. Кошевий, Л.О. Григор'єва, А. Г. Чубарєв, І. Р. Дамнаті. – Київ: КНУБА, 2023. – 29 с.
8. Опір матеріалів. Побудова епюр внутрішніх зусиль. Опір матеріалів. Побудова епюр внутрішніх зусиль. Методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи №2 / уклад.: О. П. Кошевий, Л.О. Григор'єва, А. Г. Чубарєв, І. Р. Дамнаті. – Київ: КНУБА, 2023. – 34 с.

Ця література доступна в читальному залі бібліотеки КНУБА і на кафедрі опору матеріалів. (ауд. 164)

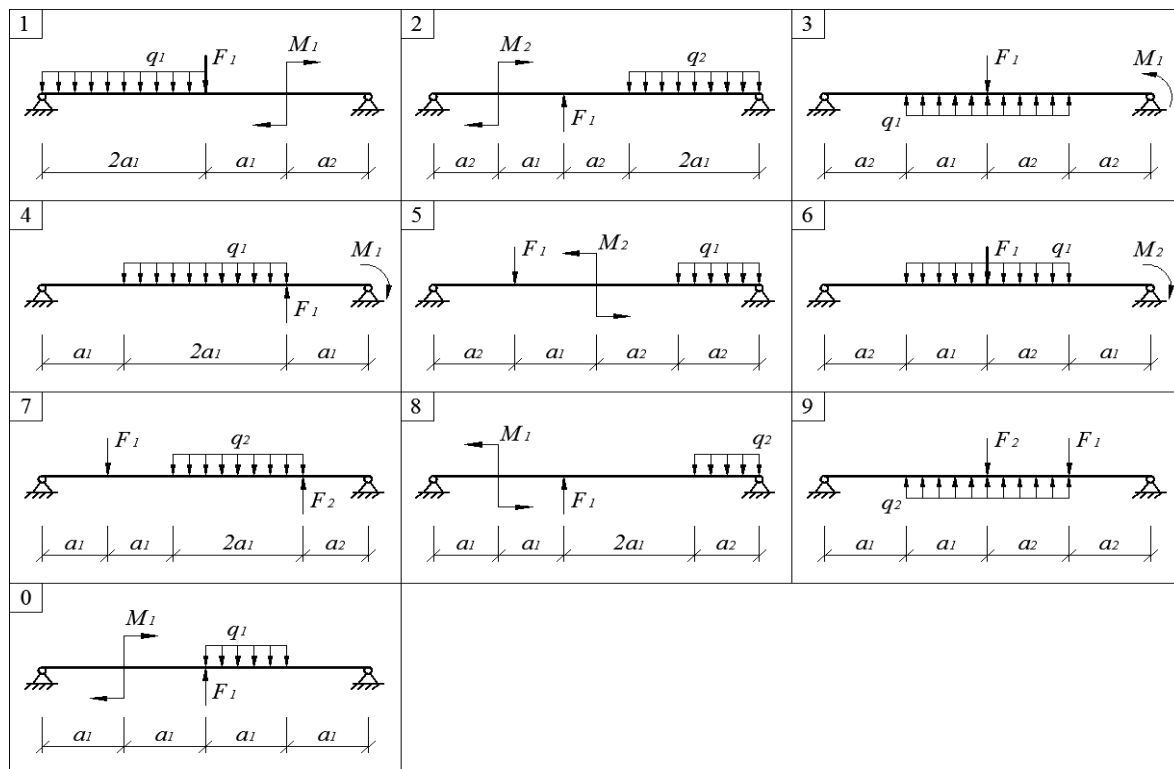


Рис. Д.1

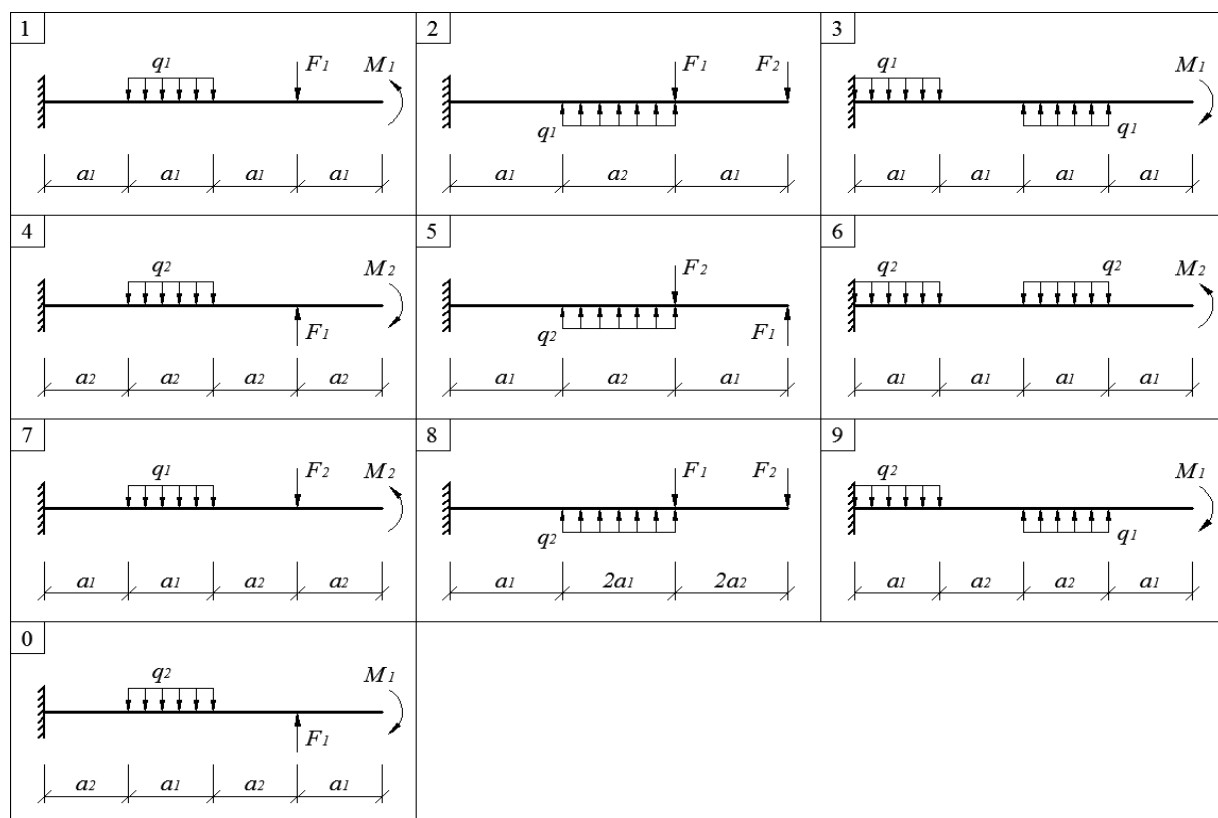


Рис. Д.2

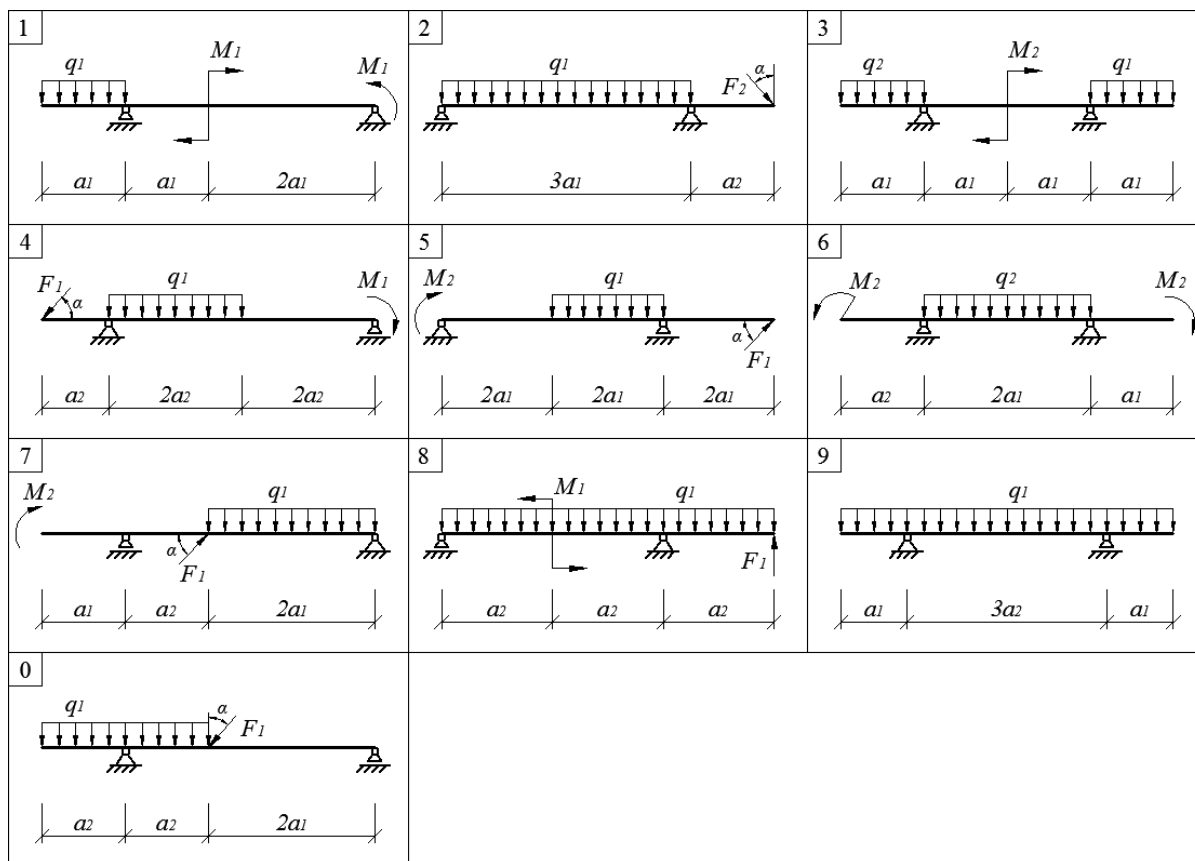


Рис. Д.3

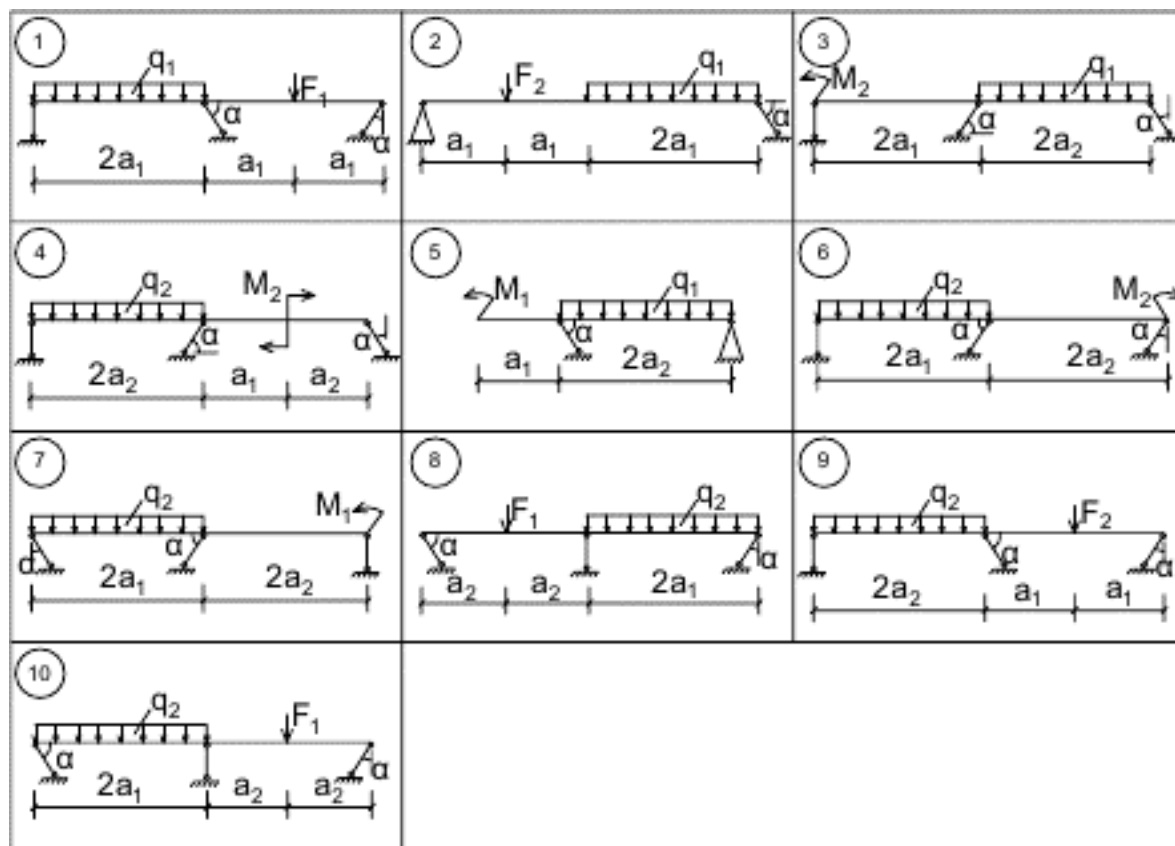


Рис. Д.4

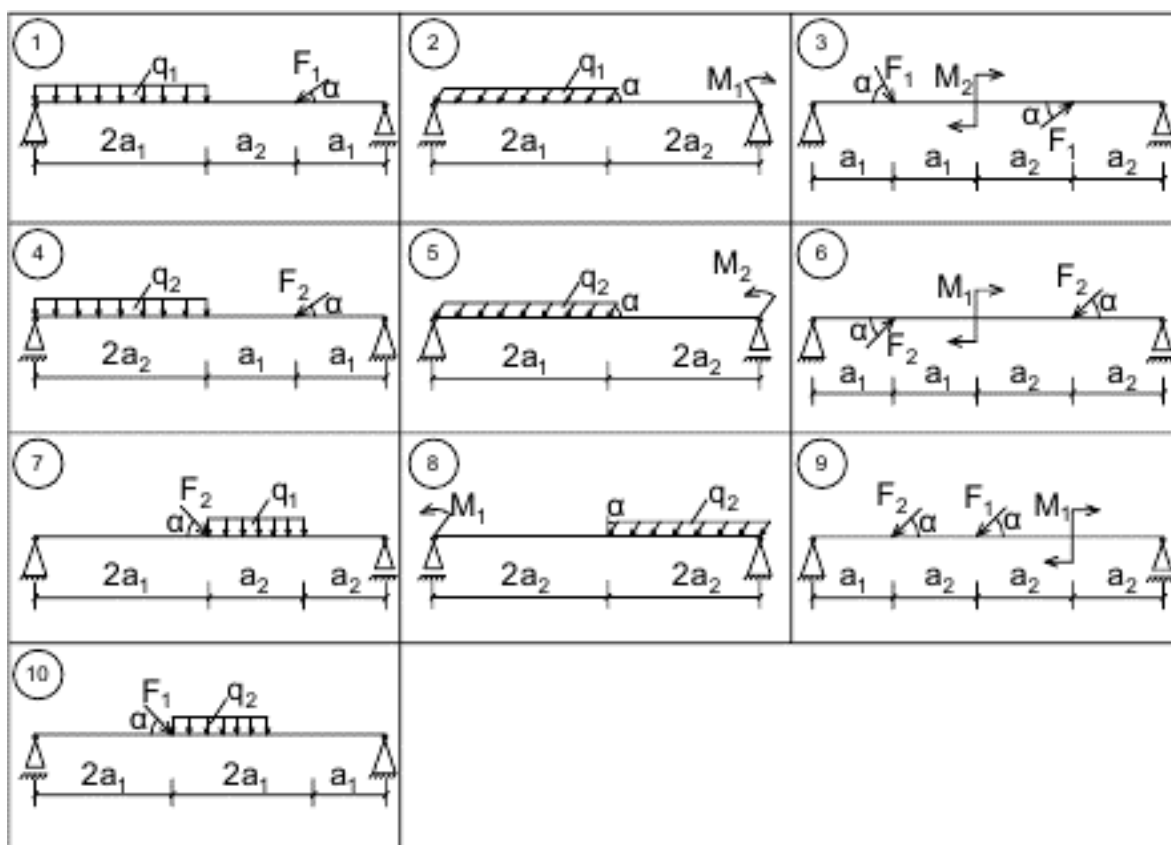


Рис. Д.5

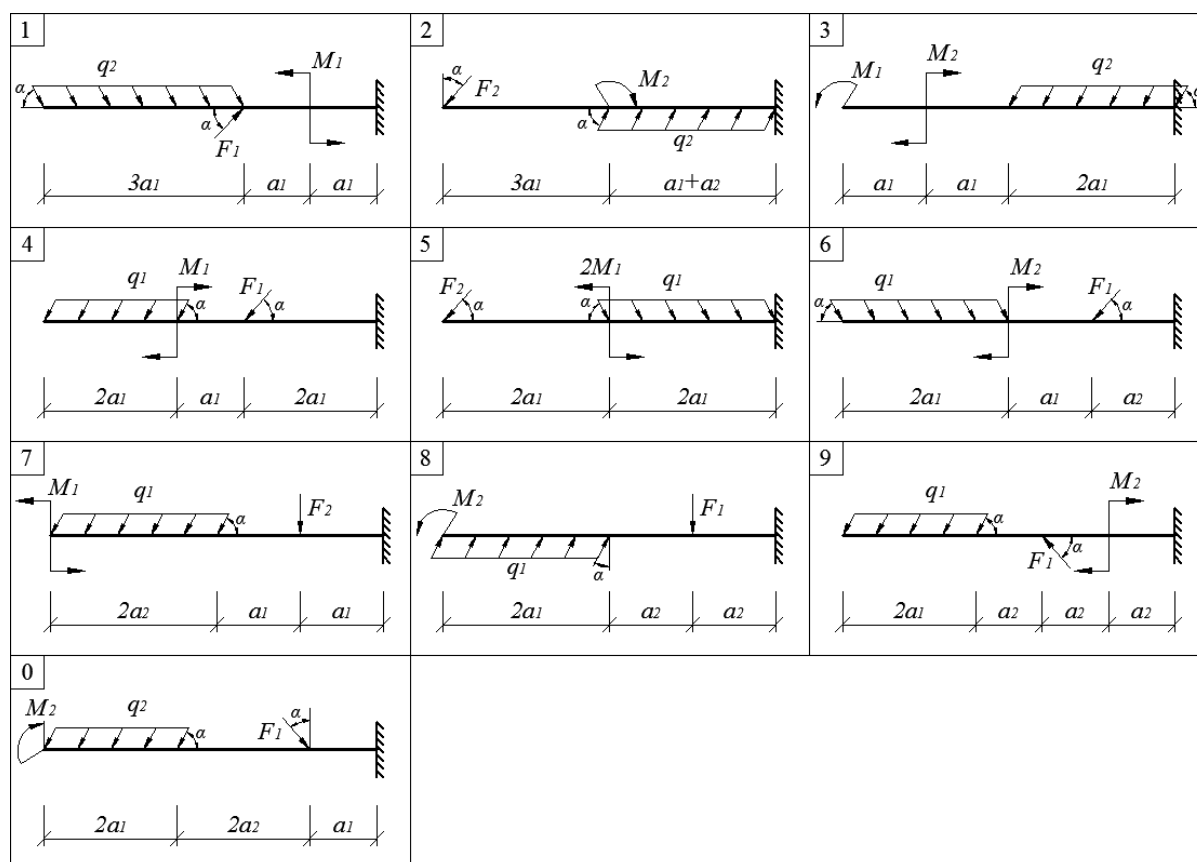


Рис. Д.6

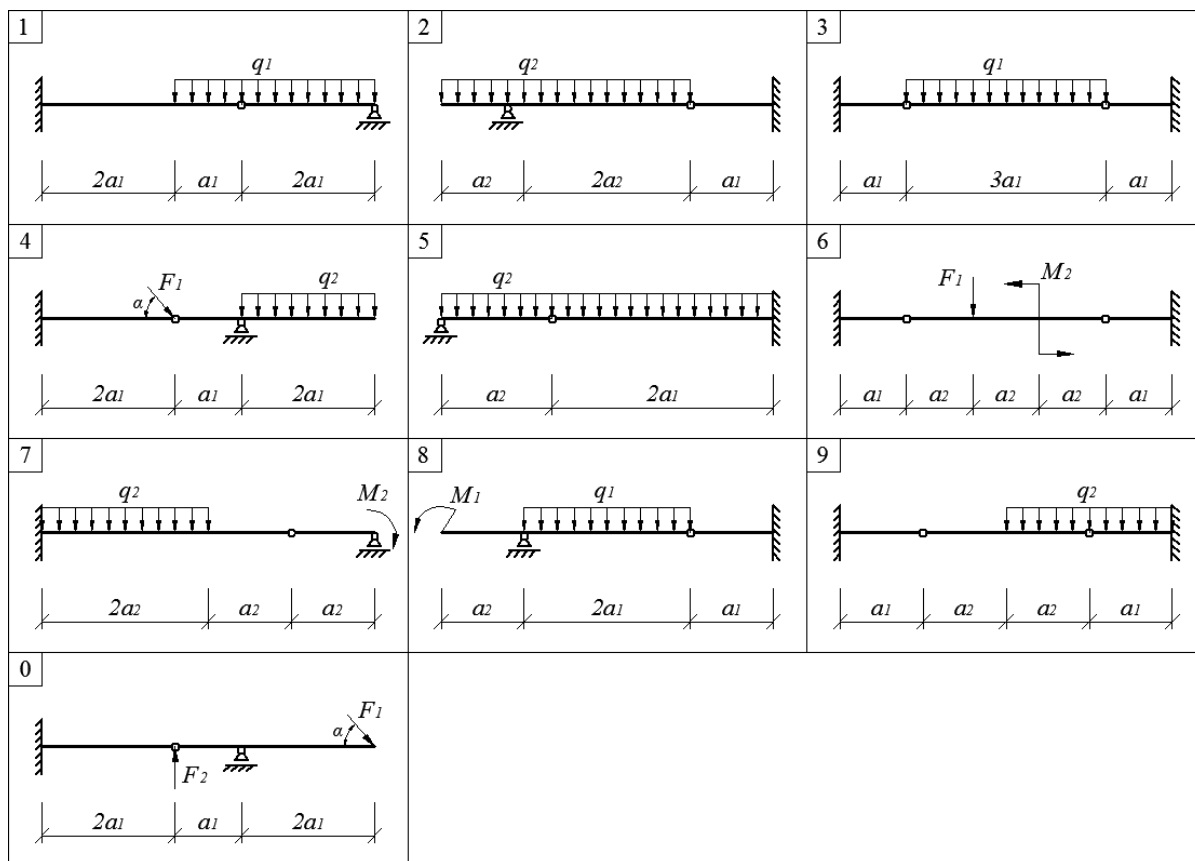


Рис. Д.7

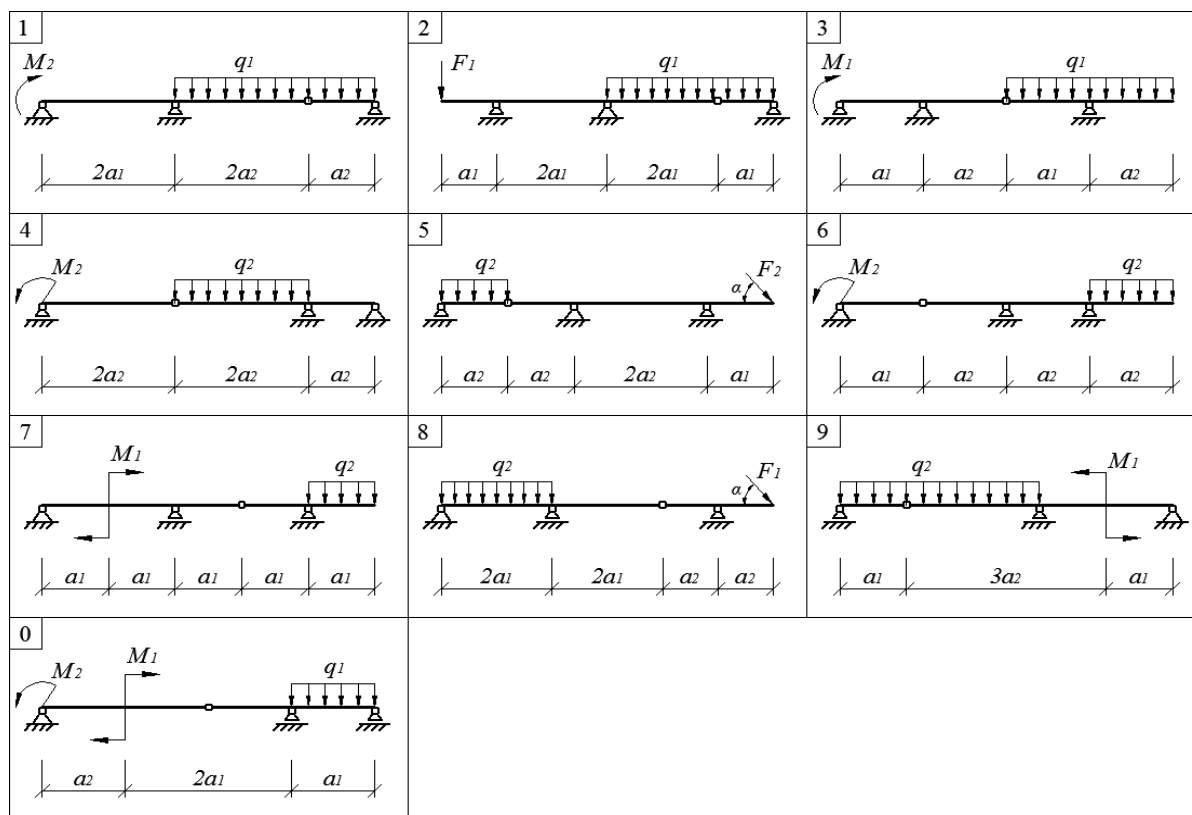


Рис. Д.8

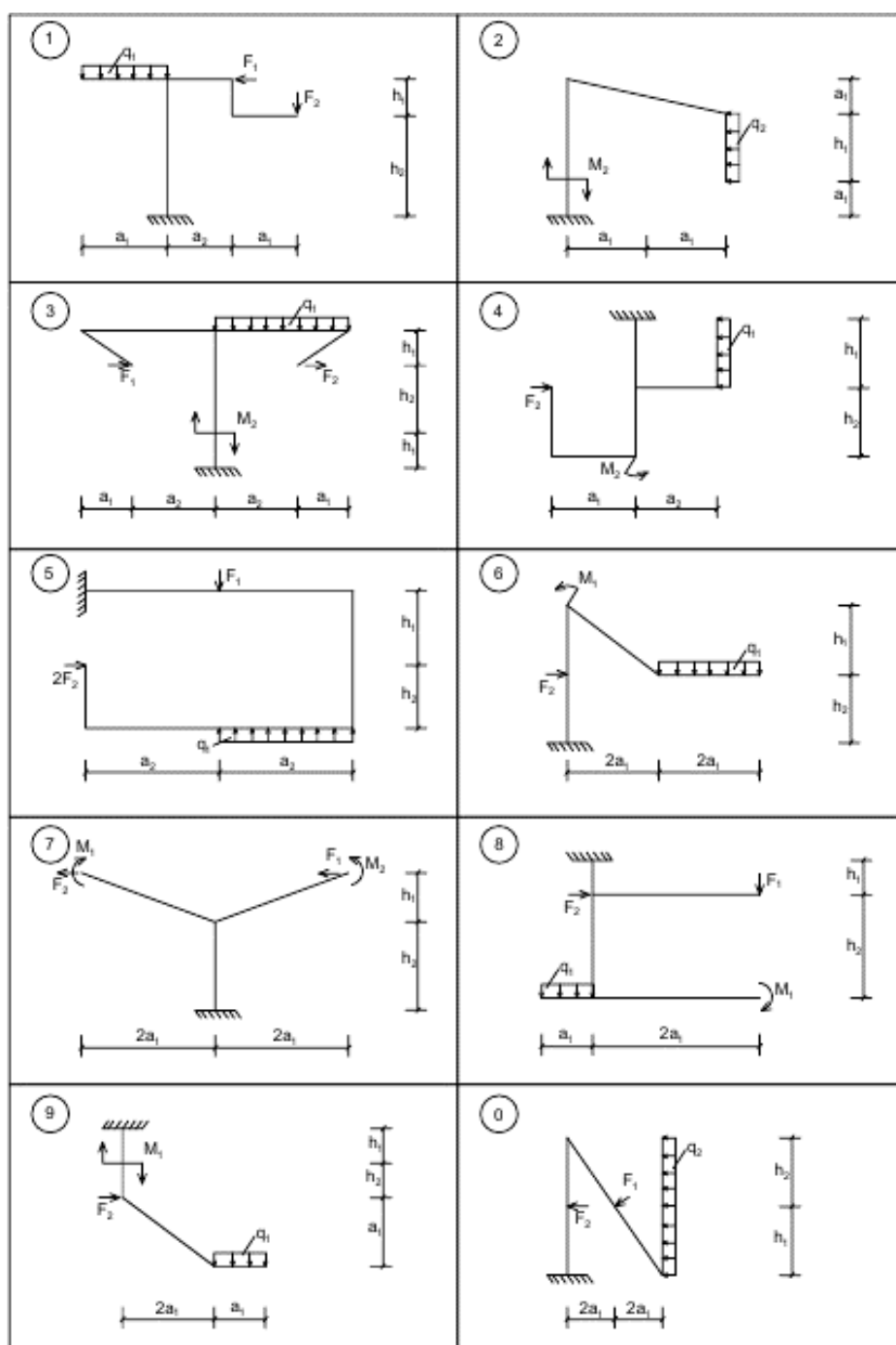


Рис. Д.9

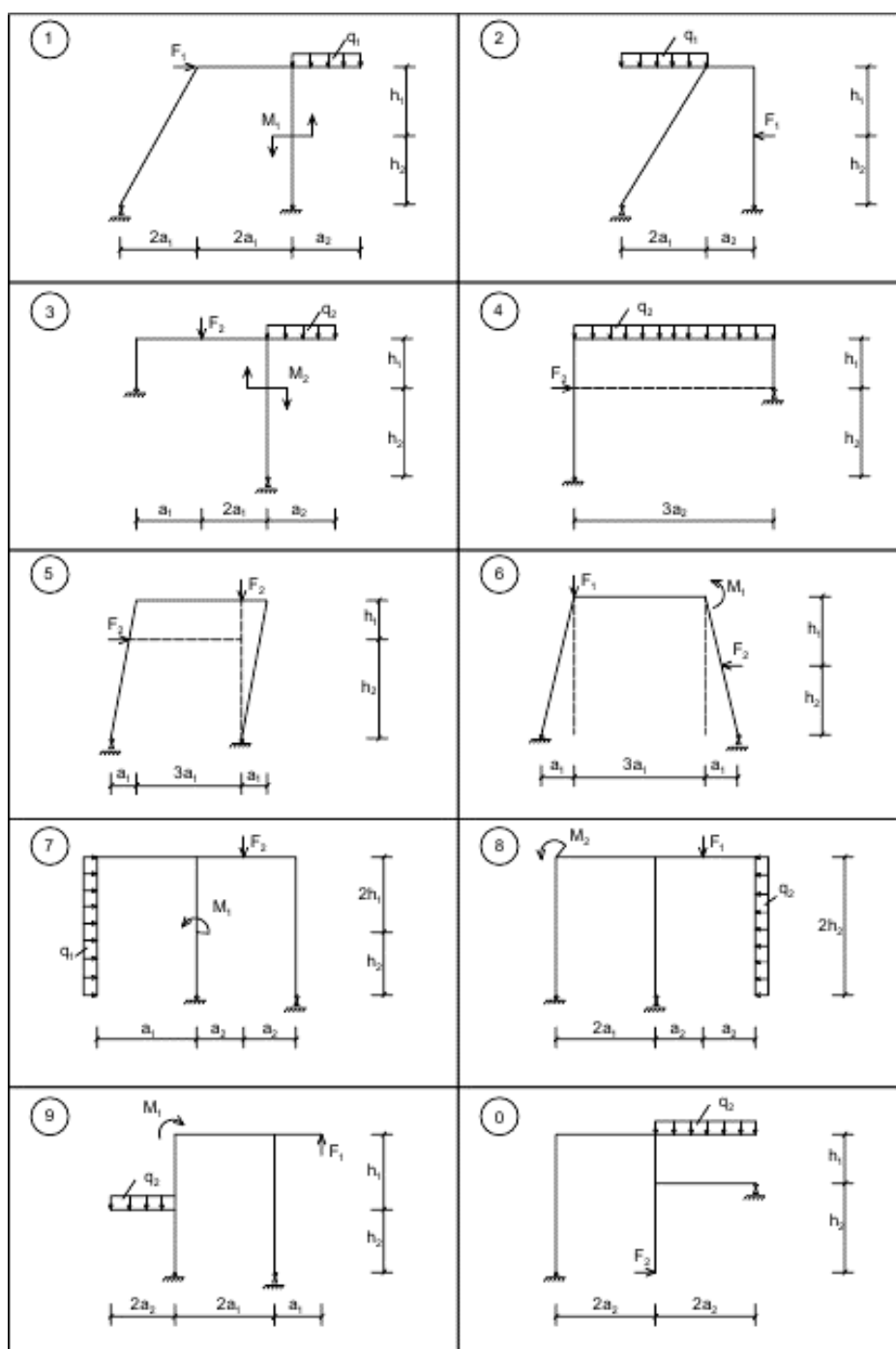


Рис. Д.10

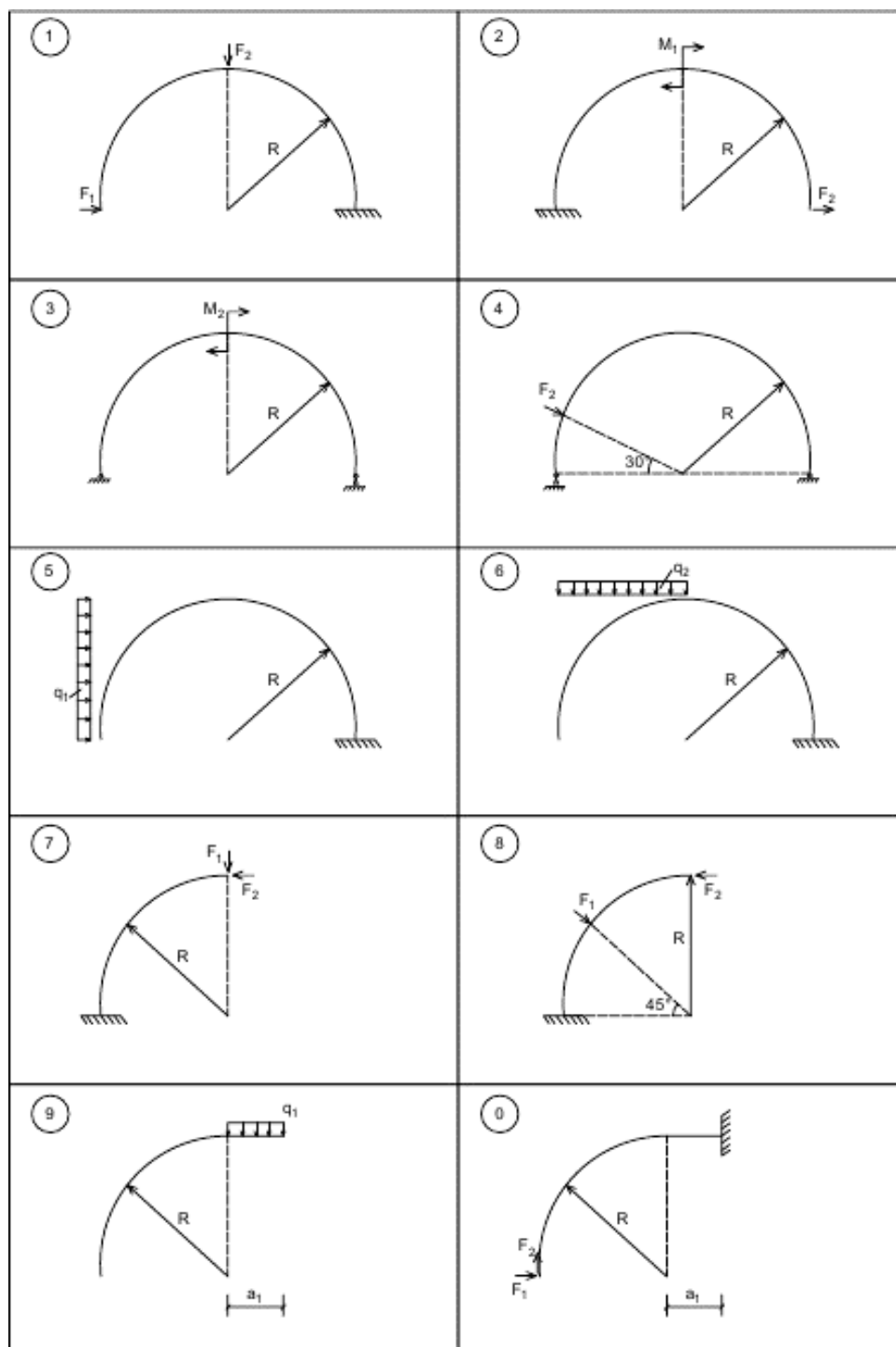


Рис. Д11

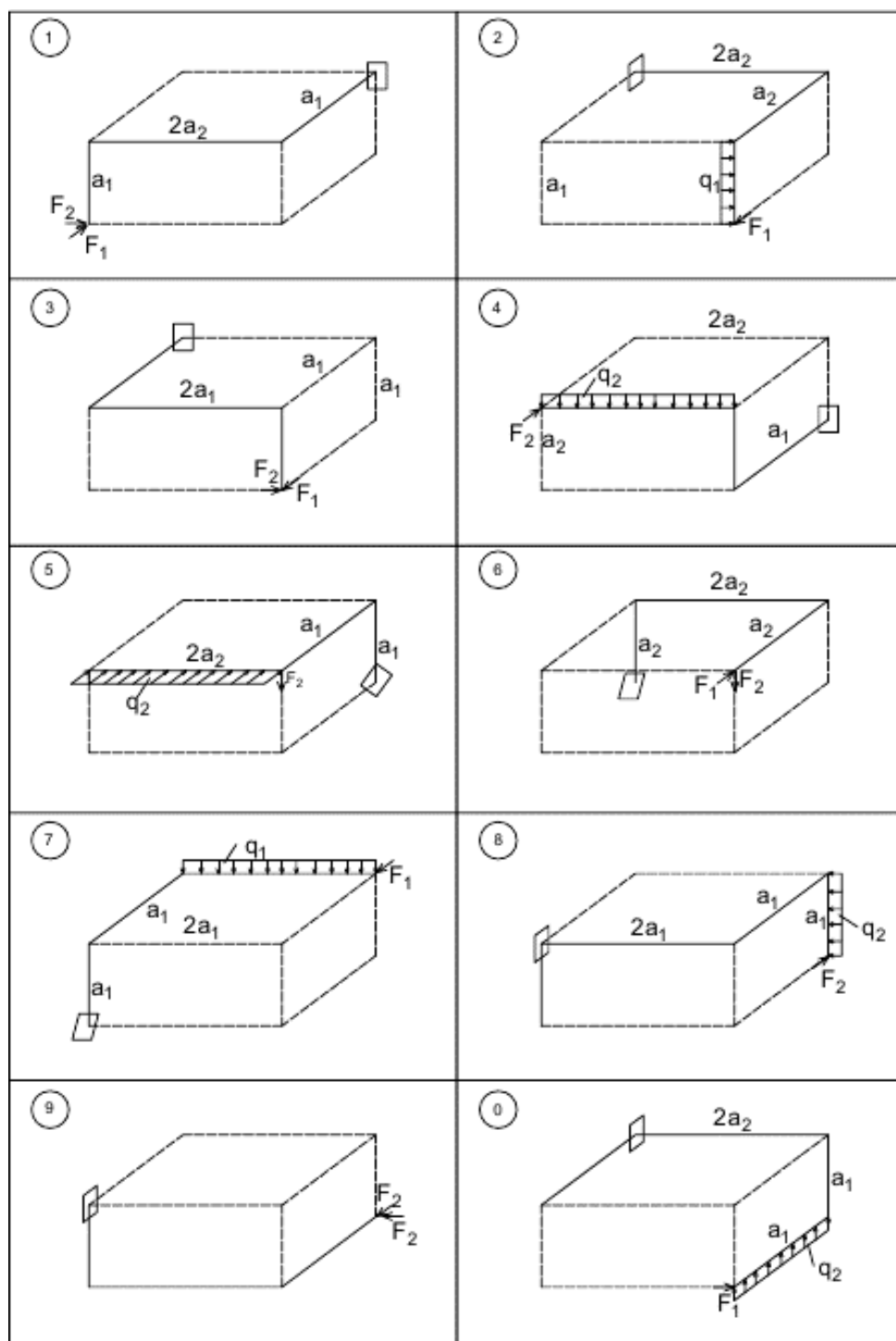


Рис. Д.12

Таблиця Д1

Цифра шифру	Перша цифра шифру				Друга цифра шифру				Третя цифра шифру			
	a ₁	a ₂	h ₁	h ₂	R	M ₁	M ₂	F ₁	F ₂	q ₁	q ₂	α
1	2	3	4	3	6	12	5	10	9	4	3	30°
2	3	4	3	2	5	10	7	8	13	6	5	45°
3	4	2	5	4	4	8	9	14	17	8	7	60°
4	3	3	2	5	5	20	11	20	19	10	9	75°
5	2	4	3	5	6	18	13	24	21	8	7	60°
6	4	3	4	4	3	16	15	16	11	6	5	45°
7	2	2	5	3	4	12	17	18	13	4	3	30°
8	3	2	3	2	5	22	19	10	15	2	7	75°
9	4	3	4	3	6	20	21	18	17	8	9	60°
0	2	4	5	4	4	14	11	22	21	6	5	30°

Навчально-методичне видання

ОПІР МАТЕРІАЛІВ

ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ

Методичні рекомендації, завдання та приклади
до виконання розрахунково-графічних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
спеціальності G19 «Будівництво і цивільна інженерія»
ОП «Теплогазопостачання і вентиляція», «Водопостачання та
водовідведення»

Укладачі: **КОШЕВИЙ** Олександр Олександрович,
КОШЕВИЙ Олександр Петрович,
ЯНСОНС Марина Оскарівна

Випусковий редактор *Ю.М. Долгополова*
Комп'ютерне верстання *Ю.М. Долгополової*

Ум. друк. арк. 2,32. Обл.-вид. арк. 2,5
Електронний документ. Вид № 75/V-26.

Виконавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури
Прспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002