

УДК 539.3

Іванченко Г. М., канд. техн. наук.,  
Вашіліна О. В., канд. фіз-мат. наук,  
Засць Ю. О.

### **ПЕРЕБУДОВА ФРОНТІВ РОЗРИВНИХ ХВИЛЬ В НЕОДНОРІДНИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

Розглядаються випадки перебудови плоскої розривної хвилі в неоднорідному трансверсально-ізотропному пружному середовищі. Досліджується залежність форми променів і фронтів від параметрів неоднорідності.

При дослідженні задач сейсмології, сейсморозвідки й аналізі динамічної поведінки тектонічних структур під впливом вибухових збурень актуальними виявляються задачі математичного моделювання процесів взаємодії ударних хвиль з поверхнями розділу порід з різними механічними властивостями.

Специфіка динамічних явищ, що виникають у цих випадках, пов'язана з короткочасністю високоінтенсивного початкового поля тиску, зазвичай, сконцентрованого на початковому етапі часу в малій області, пов'язаного з вільною граничною поверхнею середовища, і перебудовою поверхні фронту ударної хвилі в міру її поширення. Оскільки при цьому границя виділеної для розрахунку області еволюціонує з просуванням хвильового фронту, для аналізу таких процесів виявляються малоефективними традиційні методи розв'язування крайових задач математичної фізики.

Зазвичай при дослідженні ударних хвиль найбільша увага приділяється питанням геометричної побудови поверхонь розривів польових функцій і обчисленням значень цих розривів, що дають найбільш повну інформацію про фронт ударної хвилі й інтенсивності імпульсу, що переноситься нею, в кожній точці фронту. Тому для постановки і розв'язування таких задач важливу роль відіграють методи геометричної оптики, зокрема, нульове наближення променевого методу, яке забезпечує хороший кількісний опис широкого кола хвильових явищ різної фізичної природи.

Застосування променевого методу полягає у виділенні функції оптичного шляху хвилі, чи ейконала, і побудові за допомогою рівняння ейконала системи променів і фронтів ударної хвилі. Ця задача досить просто розв'язується для ізотропних середовищ, однак і там виникають деякі ускладнення, коли доводиться досліджувати взаємодію хвилі з поверхнею розділу середовищ з різними механічними властивостями

(пружні відбивачі, лінзи, шаруваті середовища й ін.), в результаті чого утворюються каустики, пов'язані з фокусуванням енергії і необмеженим зростанням інтенсивності поля.

Фізична картина динамічних явищ різко ускладнюється при вивченні поширення хвиль сильних розривів у неоднорідних пружних анізотропних середовищах, оскільки в цих випадках польова функція виявляється векторною; для кожного напрямку існує три види хвиль, що відрізняються поляризацією; фазові швидкості хвиль залежать як від поляризації хвилі, так і від напрямку її поширення; промені, в загальному випадку, не ортогональні поверхні хвильового фронту, а променеві швидкості відрізняються від фазових і між їх напрямками не завжди існує однозначна відповідність. Крім того промені викривляються, а на поверхні фронтів можуть утворюватися геометричні особливості.

**Постановка задачі.** Динамічна рівновага пружного середовища в декартовій системі координат  $x_1, x_2, x_3$  визначається системою трьох диференціальних рівнянь

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1,2,3), \quad (1)$$

де  $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho$ ;  $c_{ik,pq}$  – параметри пружності;  $\rho$  – густина;  $u_1, u_2, u_3$  – компоненти вектора пружних переміщень,  $t$  – час.

У зв'язку з тим, що в анізотропних середовищах промені, у загальному випадку, не ортогональні поверхням хвильових фронтів, будемо розрізняти вектори фазової  $V$  і променевої  $\xi$  швидкостей, вважаючи, що фронт є поверхнею постійної фази  $n \cdot r - vt = \text{const}$ , кожна елементарна площадка якого рухається вздовж місцевої одиничної нормалі  $n$  зі швидкістю  $v$ . Тут  $r$  – радіус-вектор точки фронту.

Вектори поляризації  $A$  хвилі і її фазової швидкості  $V$  для обраного напрямку  $n$  можна побудувати з однорідної системи алгебраїчних рівнянь [2, 4]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \quad (2)$$

як власні числа і вектори матриці її коефіцієнтів.

З умови існування нетривіальних розв'язків цієї системи впливає рівняння третього ступеня щодо квадрата фазової швидкості  $v^2$

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0, \quad (3)$$

за допомогою якого для кожного напрямку нормалі  $n$  можна визначити і розташувати в порядку спадання три швидкості по-різному поляризованих хвиль.

Надаючи величині  $v^2$  в системі (2) по черзі одне із знайдених значень  $v_r^2(n)$  ( $r = 1,2,3$ ), можна визначити компоненти векторів поляризації  $A^{(r)}$  трьох хвиль, що рухаються в розглянутому напрямку зі своїми фазовими швидкостями  $v_r(n)$ .

Поверхня фронту ударної хвилі визначається співвідношенням

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0, \quad (4)$$

у якому функція  $\tau$  повинна задовольняти диференціальному рівнянню в частинних похідних першого порядку [2]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (5)$$

що узагальнює рівняння ейконала в геометричній оптиці для пружних анізотропних хвиль.

Величини, що входять у (5)  $p_k$  ( $k = 1,2,3$ ) являють собою компоненти вектора рефракції  $p_k \equiv \partial \tau / \partial x_k = n_k / v_r(n)$  ( $k = 1,2,3$ ).

Хвильовий фронт (4) ударної хвилі в однорідному анізотропному середовищі будується після знаходження розв'язку рівняння (5), яке за допомогою методу характеристик зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} dx_k / d\tau &= \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ dp_k / d\tau &= 0 \quad (k=1,2,3). \end{aligned} \quad (6)$$

Перша група цих рівнянь описує поширення хвилі вздовж променя з променевою швидкістю  $\xi = \xi^{(r)}(n, x_k)$ . Друга група рівнянь вказує на

прямолинійність променів в однорідному середовищі  $\lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}$ .

Однак, якщо пружне середовище є неоднорідним, рівняння (6) замінюються більш складнішими співвідношеннями [2, 6-8]

$$\begin{aligned} \frac{dx_m}{d\tau} &= \xi_m \equiv \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (m = 1, 2, 3), \\ \frac{dp_m}{d\tau} &= \eta_m \equiv \frac{-1}{2} \sum_{i,k,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Наведені залежності дають можливість описати фронти складної геометрії, які перебудовуються під час свого поширення. В такому випадку промені стають криволінійними.

**Методика розв'язування.** Розглянемо два трансверсально-ізотропних середовища, осі симетрії пружних параметрів яких збігається з віссю  $Ox_2$  декартової системи координат. Завдяки властивостям симетрії, компоненти  $C_{ik,pq}$  тензора пружних сталих кожного середовища можна представити у формі шестирядної квадратної матриці..

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu - p & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - m \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де  $\lambda$  і  $\mu$  – параметри Ламе,  $l$ ,  $m$ ,  $p$  – константи, що відрізняють середовище від ізотропного. Для неоднорідного середовища ці параметри є функціями координат  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .

Нехай у середовищі  $\bar{I}$  збуджена плоска поздовжня ударна хвиля, вектор поляризації якої напрямлений вздовж осі  $Ox_2$ . Дослідимо дифракцію такої хвилі при її взаємодії з криволінійними осесиметричними границями  $G_1$  і  $G_2$  розділу середовищ, вісь симетрії яких також збігається з  $Ox_2$ . Сформульована задача є осесиметричною, тому достатньо розглянути явища перебудови і формування ударних хвиль на одній із площин, наприклад, на площині  $x_3 = 0$ , що містить вісь

симетрії. Прийmemo “локально-плоске наближення” [2], відповідно до якого в місці падіння хвилі на елементарну площадку, що розділяє поверхні  $G_I$  в площині падіння  $x_3 = 0$ , усі відбиті і заломлені хвилі також будуть належати цій площині, тобто треті компоненти усіх векторів поляризації дорівнюють нулю. Це дозволяє застосовувати узагальнений закон Снелліуса, що виражається рівностями [2, 4, 5]

$$\frac{\sin(\gamma)}{v} = \frac{\sin(\Theta_v^I - \gamma)}{v_v^I(\Theta_v^I)} = \frac{\sin(\Theta_\mu^{\bar{I}} + \gamma)}{v_\mu^{\bar{I}}(\Theta_\mu^{\bar{I}})}, \quad v, \mu = 1, 2, \quad (9)$$

де  $\gamma$  - кут нахилу дотичної до поверхні  $G_I$  в точці  $M$  падіння променя,  $\Theta_1^I, \Theta_2^I$  - кути між віссю  $Ox_2$  і напрямками векторів фазових швидкостей квазіпоздовжньої  $qP$  і квазіпоперечної  $qS$  хвиль, відбитих у середовище  $\bar{I}$ ;  $\Theta_1^{\bar{I}}, \Theta_2^{\bar{I}}$  - аналогічні кути для хвиль, заломлених у середовище  $\bar{II}$  (у середній шар);  $v, v_v^I, v_\mu^{\bar{I}}$  - величини фазових швидкостей падаючої поздовжньої хвилі, відбитих і заломлених хвиль (індекс 1 відповідає квазіпоздовжній, 2 – квазіпоперечній хвилі).

У випадку анізотропних середовищ співвідношення (9) закону Снелліуса характеризуються тим, що знаменники  $v_v^I, v_\mu^{\bar{I}}$ , як і чисельники, є функціями відповідних кутів  $\Theta_v^I, \Theta_\mu^{\bar{I}}$  і неявно кута  $\gamma$ . Значення кутів  $\Theta_v^I, \Theta_\mu^{\bar{I}}$  ( $v, \mu = 1, 2$ ) відбиття та заломлення променів в деякій точці  $M$  границі  $G_I$ , визначаються розв’язком системи нелінійних рівнянь (9) методом Ньютона разом з алгоритмом продовження розв’язку за параметром [3]. В якості ведучого параметра зручно обрати кут нахилу дотичної  $\gamma$ . Тоді, наприклад, для першого рівняння системи (9) при деяких відомих величинах параметра  $\gamma = \gamma^n$  і векторів  $v_v = v_v^n$  малому збільшенню ведучого параметра  $\Delta\gamma$  будуть відповідати прирости направляючих кутів фазових швидкостей пружних хвиль, відбитих у середовище  $\bar{I}$

$$\Delta\Theta_V^I = \frac{\cos\gamma \cdot v_V^I(\Theta_V^I) + \cos(\Theta_V^I - \gamma) \cdot v}{\cos(\Theta_V^I - \gamma) \cdot v - \sin(\gamma) \cdot dv_V^I(\Theta_V^I) / d\Theta_V^I} \cdot \Delta\gamma + r_V, \quad (10)$$

де  $r_V = \sin(\Theta_V^I - \gamma) \cdot v - \sin\gamma \cdot v_V^I(\Theta_V^I)$  – нев'язки на розглянутому кроці побудови розв'язку.

Крок обчислення  $\Delta\gamma$  у формулі (10) загалом вибирають з умови збіжності числового процесу, при цьому точність обчислень оцінюється по величині нев'язки  $r_V$ .

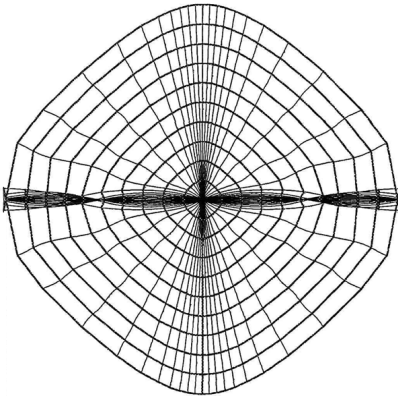


Рис. 1. Фронти і промені квазіповздовжньої  $qP$ -хвилі в середовищі зі змінною густиною

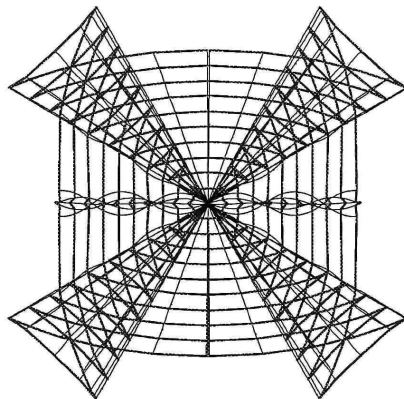


Рис. 2. Фронти і промені квазіпоперечної  $qS$ -хвилі в середовищі зі змінною густиною

На основі запропонованої методики розв'язані задачі про поширення хвиль, що породжуються ударним полем тиску в сферичній порожнині трансверсально-ізотропного пружного середовища, густина якого  $\rho$  змінюється по вертикальній змінній за законом  $\rho = \rho_0 [1 + 0.1 \cos(ax_3)]$ . Рис. 1 ілюструє систему променів і фронтів розривної хвилі зі зміною часу для випадку  $\rho_0 = 6650 \text{ кг/м}^3$ ,  $E = 1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\nu = 0.28$ , параметри анізотропії  $-0.5 \text{ } 0.3 \text{ } -0.1$ . Рис. 2 відповідає випадку  $\rho_0 = 2760 \text{ кг/м}^3$ ,  $E = 3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\nu = 0.1$ , параметри анізотропії  $0.1 \text{ } 0.3 \text{ } 0.5$ . Аналіз отриманих результатів свідчить про те, що неоднорідність механічних властивостей пружного середовища призводить до суттєвої перебудови системи променів і фронтів і виникнення у ній каустик. При цьому промені набувають суттєвої кривизни, а на поверхнях фронтів утворюються геометричні особливості.

1. *Кравцов Ю. А. Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М., Наука, 1980. 304с.
2. *Петрашень Г. И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград, Наука, 1980. 280с.
3. *Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К., Наукова думка, 1988. 220с.
4. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – Т.64, №3. – С. 394–402.
5. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Крицкий В.Б., Иванченко Г.М.* Отражение и преломление плоских разрывных волн параболоидными поверхностями раздела анизотропных упругих сред // Геофизический журнал. – 2005. – Т.27, №3. – С. 418–426.
6. *Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.
7. *Gulyayev V.I., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave interaction with interfaces between anisotropic elastic media // International Journal of Solids and Structures – 2006. – 43. – P. 74-90.
8. *Gulyayev V.I., Ivanchenko G.M.* Focusing and dispersion of a plane wave by transversally isotropic elastic lenses // Acoustical Physics – 2004. – Vol. 50. – 2. – P. 140-145.