

УДК 539.3

Баженов В.А., д-р техн. наук,
Пискунов С.О., канд. техн. наук,
Остапенко Р.М.
Сизевич Б.І.

РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ НМСЕ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Отримані розв'язувальні співвідношення напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) для кругового косокутного неоднорідного скінченного елемента з урахуванням змінності компонент метричного тензора в площині його поперечного перерізу та проведена оцінка вірогідності отримуваних із його використанням результатів.

Вступ. Умови експлуатації значної кількості відповідальних елементів конструкцій сучасного енергетичного машинобудування – просторових тіл обертання, до яких належать вали, диски і ротори енергетичних установок, фрагменти корпусних деталей, захисні оболонки ядерних реакторів тощо – передбачають наявність тривалого силового і температурного навантаження. Визначення несучої здатності і ресурсу зазначених об'єктів потребує розв'язання просторових задач із визначення параметрів напружено-деформованого стану з урахуванням наявності деформацій пластичності, повзучості та температурних складових деформацій, що викликані великими градієнтами температур, спричиненими довільним їх розподіленням в об'ємі досліджуваного об'єкта. При розв'язанні поставленої задач на основі методу скінчених елементів (МСЕ) та його модифікацій, зважаючи на складність форми досліджуваних об'єктів, виникає необхідність використання дискретних моделей з великою кількістю невідомих. У цьому випадку при покроковому розв'язанні задач пластичності і повзучості загальні обчислювальні витрати можуть бути неприйнятними. Одним зі шляхів скорочення кількості невідомих при побудові дискретних моделей є застосування косокутних скінчених елементів. Розгляд цієї проблеми для призматичних тіл був проведений у роботі [2]. Для тіл обертання це питання є невирішеним.

Метою даної роботи є отримання розв'язувальних співвідношень напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) для тіл обертання з довільними граничними умовами на торцях із урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу

скінченного елемента та оцінка вірогідності отримуваних при розв'язанні задач результатів.

Постановка задачі. Розглянемо неоднорідне просторове тіло обертання (рис.1). Зовнішні впливи складаються з розподіленого у просторі навантаження $q = q(z^{i'})$ і температурного поля $T = T(z^{i'})$. Фізико-механічні характеристики матеріалу передбачаються залежними від температури T і просторових координат $z^{i'}$: $E = E(z^{i'}, T)$, $\nu = \nu(z^{i'}, T)$.

Для опису геометричних і механічних характеристик, початкових і граничних кінематичних умов, а також зовнішніх навантажень використовується базисна ортогональна кругова Циліндрична система координат $z^{i'}$. Подання напружено-деформованого стану тіла із складною формою поперечного перерізу здійснюється у місцевій криволінійній системі координат x^i , що безпосередньо пов'язана з геометрією тіла.

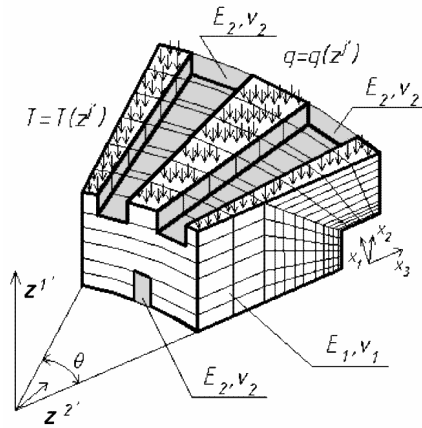


Рис. 1. Неоднорідне кругове тіло

Зв'язок між базисною та місцевою системами координат в будь-якій точці тіла вважається відомим та визначається згідно прямого і зворотного тензорів перетворення координат:

$$z_{,j}^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad x_{,j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^{j'}}. \quad (1)$$

Враховуючи те, що координатні осі x^3 і $z^{3'}$ перпендикулярні до площини поперечного перерізу та співпадають, для циліндричної системи координат маємо:

$$z_{,\alpha}^{3'} = z_{,3}^{\alpha'} = 0. \quad (2)$$

Тут і надалі позначені латинськими літерами індекси приймають значення 1, 2, 3; а грецькими – 1, 2; кома перед індексом засвідчує операцію диференціювання.

В ортогональній циліндричній системі координат відмінні від нуля компоненти метричного тензора, що визначають масштаби базисних векторів, мають вигляд [3]:

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = 1, \quad g_{3'3'} = (z^{2'})^2. \quad (3)$$

Коваріантні компоненти метричного тензора в місцевій системі координат визначаються через відповідні компоненти в базисній:

$$g_{ij} = z_{,i}^{\alpha'} z_{,j}^{\alpha'} + z_{,i}^{3'} z_{,j}^{3'} g_{3'3'}. \quad (4)$$

Враховуючи (2) формула (4) набуває вигляду:

$$g_{\beta\gamma} = z_{,\beta}^{\alpha'} z_{,\gamma}^{\alpha'}, \quad g_{33} = z_{,3}^{3'} z_{,3}^{3'} g_{3'3'}. \quad (5)$$

Переміщення будь-якої точки тіла визначається компонентами в базисній системі координат $u_{i'}$. Компоненти тензору деформацій в місцевій системі координат виражаються через компоненти переміщень в базисній [1]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{k',i} z_{,j}^{k'} + u_{k',j} z_{,i}^{k'} - 2u_{k'} z_{,i}^{l'} z_{,j}^{m'} \Gamma_{l'm'}^{k'} \right), \quad (6)$$

де

$$u_{k',i} = \frac{\partial u_{k'}}{\partial x^i}; \quad (7)$$

$\Gamma_{l'm'}^{k'}$ – символи Крістофеля другого роду, що в ортогональній циліндричній системі координат відмінні від нуля і мають наступний вигляд [3]:

$$\Gamma_{3'3'}^{2'} = -z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{z^{2'}}. \quad (8)$$

Враховуючи (8) співвідношення (7) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma,\beta} + z_{,\beta}^{\gamma'} u_{\gamma,\alpha} \right), \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left(z_{,3}^{3'} u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma,3} - \frac{2z_{,\alpha}^{2'} z_{,3}^{3'} u_{3'}}{z^{2'}} \right), \\ \varepsilon_{33} &= z_{,3}^{3'} u_{3',3} + \left(z_{,3}^{3'} \right)^2 z^{2'} u_{2'}. \end{aligned} \quad (9)$$

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [3]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (10)$$

Для ізотропного тіла компоненти тензора пружних сталих d^{ijkl} пов'язані з коефіцієнтами Ляме λ і μ співвідношеннями [3]:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}), \quad (11)$$

де коефіцієнти Ляме λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(z^i, T)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E = E(z^i, T)$ [6]:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (12)$$

Фізичні компоненти тензорів деформацій $\tilde{\varepsilon}_{kl}$, напружень $\tilde{\sigma}^{ij}$ та пружних констант \tilde{d}^{ijkl} визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{kl} &= \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g^{(ii)}g^{(jj)}}}, \quad \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g^{(ii)}g^{(jj)}}, \\ \tilde{d}^{ijkl} &= d^{ijkl} \sqrt{g^{(ii)}g^{(jj)}g^{(kk)}g^{(ll)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

При термов'язкопружнопластичному деформуванні просторових тіл компоненти прирощення повної деформації $d\varepsilon_{ij}$ можуть бути подані сумою прирощень пружних деформацій $d\varepsilon_{ij}^e$, температурних деформацій $d\varepsilon_{ij}^T$, деформацій пластичності $d\varepsilon_{ij}^p$ та деформацій повзучості $d\varepsilon_{ij}^c$, тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^c. \quad (14)$$

Передбачається, що пружні деформації є малими.

Прирощення пластичних деформацій визначається згідно з асоційованим законом:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = \lambda_p s_{ij}, \quad (15)$$

де f_p – функція текучості ; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} / 3$ – компоненти девіатора напружень; $\sigma_0 = \sigma_{ii}$:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - [\tau_s(\vartheta_p, T)]^2 = 0, \quad (16)$$

де $\tau_s(\vartheta_p, T)$ – межа текучості при чистому зсуві; $\vartheta_p = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon^{ijp}$ – параметр зміцнення Одквіста.

Прирошення деформацій повзучості визначаються на основі теорії зміцнення:

$$d\varepsilon_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial s^{ij}} = \lambda_c s_{ij}, \quad (17)$$

де f_c – функція, що визначає поверхню повзучості:

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - [\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi_c^i)]^2 = 0, \quad (18)$$

де $\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi_c^i)$ – межа текучості при чистому зсуві; $\vartheta_c = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^c d\varepsilon^{ijc}$ – параметр зміцнення Одквіста; $\xi_c^i = \frac{\partial \varepsilon_c^i}{\partial t} = \int_{\varepsilon_{ij}^c} \sqrt{\frac{2}{3}} d\xi_{ij}^c d\xi_c^{ij}$ – інтенсивність швидкостей деформацій повзучості.

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій визначаються за формулою:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \quad (19)$$

де $\alpha_T = \alpha_T(z^{k'}, T)$ – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, $\Delta T = T - T_0$ – приріст температури в досліджуваній точці тіла відносно його вихідного стану при $T = T_0$.

Для опису впливу розсіяних пошкоджень на міцність матеріалу конструкції застосовується функція пошкоженості $\omega(t)$, яка змінюється в процесі експлуатації від $\omega_0 = 0$ (або, в загальному випадку, $0 < \omega_0 < 1$, що враховує наявність вихідних технологічних та інших дефектів у матеріалі) до $\omega = 1$, що відповідає руйнуванню матеріалу.

При наявності континуального руйнування вираз функції поверхні повзучості (18) набуває вигляду:

$$f_c = \frac{3}{2} s_{ij} s^{ij} - [\sigma_i(\vartheta_c, T, \xi_c^i, \omega)]^2 = 0. \quad (20)$$

Для здійснення опису деформування матеріалу в умовах повзучості вираз (20) потребує доповнення рівнянням, яке описує зміни з часом параметра пошкоженості. В загальному випадку припускається, що прирощення функції $\omega(t)$ за малий проміжок часу t залежить від поточного стану матеріалу (значення параметра пошкоженості) та навантажень (силових, деформаційних і температурних впливів) [4; 5]:

$$\frac{d\omega}{dt} = \Phi(\omega, p_j), \quad (21)$$

де $\Phi(\omega, p_j)$ – деяка функція; p_j – вектор навантажень, що характеризує сили, деформаційні, температурні та інші зовнішні впливи.

Неоднорідний косокутний круговий скінченний елемент з довільними граничними умовами на торцях. Для апроксимації просторових тіл обертання використовуються просторові неоднорідні кругові скінченні елементи (рис.2), які повинні забезпечувати не лише точність подання напружено-деформованого стану конструкцій складної форми, але і високу швидкість збіжності результатів до точного рішення. Як показано в роботах [1,8], застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [8] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ.

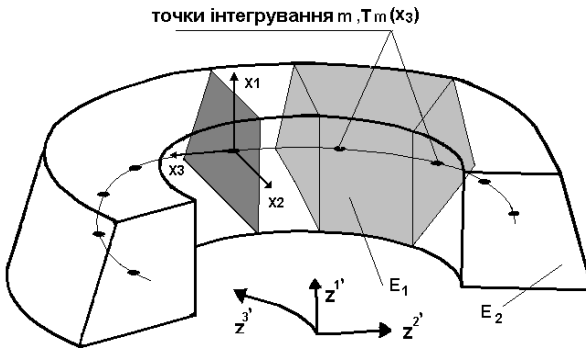


Рис.2. Просторовий неоднорідний круговий скінченний елемент

У місцевій системі координат їх переріз є квадратом з одиничними сторонами. Початок місцевої системи координат x^i знаходиться у геометричному центрі елемента, вісі x^1 і x^2 спрямовані паралельно сторонам поперечного перерізу, а x^3 суміщена із z^3 .

У відповідність до кожного скінченного елемента (СЕ) поставлена місцева система координат x^i з початком у геометричному центрі елемента, яка природньо пов'язана з геометрією об'єкта. Осі x^1 і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перерізу скінченного елемента, а x^3 спрямована вздовж твірної й співпадає за напрямком із z^3 .

Розподілення переміщень і температури у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (22)$$

$$T = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} \left(\frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (23)$$

де $u_{m'(S_1 S_2)}$, $T_{(S_1 S_2)}$ – вузлові значення переміщень і температури, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центру поперечного перетину елемента в місцевій системі координат x^i .

Значення переміщень і їх похідних у центрі поперечного перерізу СЕ визначаються згідно з прийнятим законом їх розподілення (22):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{u}_{i'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_\alpha; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2),3}; \\ \overset{\circ}{u}_{i',12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_1 S_2; \quad \overset{\circ}{u}_{i',3\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2),3} S_\alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

Виходячи з (23), аналогічним чином визначаються похідні від температури у центрі поперечного перерізу СЕ:

$$\overset{\circ}{T} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)}; \quad \overset{\circ}{T}\alpha = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} T_{(S_1 S_2)} S_\alpha. \quad (25)$$

У напрямку твірної температура та переміщення, а також їх похідні за напрямком x^3 апроксимуються розкладенням за системою координатних функцій $\varphi^{(l)}$ – поліномами Лагранжа ($l = 0, 1$) і Міхліна ($l = 2, \dots, L$):

$$u_{i'} = \sum_{l=0}^L u_{i'}^l \varphi^{(l)}; \quad u_{i',3} = \sum_{l=0}^L u_{i',3}^l \varphi_{,3}^{(l)}; \quad (26)$$

$$T = \sum_{l=0}^L T^l \varphi^{(l)}; \quad T_{,3} = \sum_{l=0}^L T^l \varphi_{,3}^{(l)}; \quad (27)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= \frac{1}{2}(1 - x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x^3), \\ \varphi^{(l)} &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2 - 1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)! (k!)^2 2^{k+1}} \left[(1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right]. \end{aligned}$$

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє досить просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, а саме шляхом виключення відповідних рівнянь [2].

Фізичні компоненти тензору температурних деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^T = \frac{\varepsilon_{ij}^T}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}. \quad (28)$$

Згідно до МССЕ [8] температурні складові компонент тензору фізичних деформацій у поперечному перерізі для кожної точки інтегрування подано у вигляді відрізків ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}^T + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\varepsilon}_{12}^T = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}^T; \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}^T &= 0; \quad \tilde{\varepsilon}_{33}^T = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}^T + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta}^T x^\beta, \end{aligned} \quad (29)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних температурних деформацій у ряд Маклорена з урахуванням їх подання у місцевій системі координат на основі (28) та з підстановкою (19):

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}^T = \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta T};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T = \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}^T}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{\partial \left(\overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta T} \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta T}_{,(3-\alpha)};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}^T = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta T} \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}; \quad (30)$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}^T = \frac{1}{g_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta T}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha}^T = \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}^T}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \left(\overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta T} \right)}{\partial x^\alpha} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta T}_{,\alpha},$$

де $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^T \Big|_{x^\alpha=0}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^T = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0}$.

Коефіцієнтом розкладання $\frac{\partial^2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^\alpha=0}$ нехтуємо, як величиною

більш високого порядку малості.

Згідно формули (28), враховуючи (30), знаходимо:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}^T g_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta T} g_{\alpha(\alpha)};$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T g_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta T}_{,(3-\alpha)} g_{\alpha(\alpha)};$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}^T \sqrt{g_{11} g_{22}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta T} g_{12}; \quad (31)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33}^T g_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta T} g_{33};$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta}^T g_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta T}_{,\beta} g_{33}.$$

Подамо коефіцієнти розкладання компонент деформацій через вузлові

температури (25):

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} 2S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{12}; \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33}; \\
 \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \Delta T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33} 2S_{\beta}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладання деформацій у ряд Маклорена і температурою, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\} = \left[\overset{\circ}{B}^T \right] \{ T \}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T \right\} = \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right] \{ T \}, \tag{33}$$

де $\{ T \}^T = \{ T_{(-1,-1)} \ T_{(1,-1)} \ T_{(-1,1)} \ T_{(1,1)} \}$;

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}^T \right\} = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^T \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^T \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^T \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T \right\};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}^T \right\} = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T \ 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)}^T \ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^T \right\}.$$

$$\left[\overset{\circ}{B}^T \right] = \left[\left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(-1;1)} \left[\overset{\circ}{B}^T \right]^{(1;1)} \right]; \tag{34}$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right] = \left[\left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(-1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(1;-1)} \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(-1;1)} \left[\overset{\circ}{B}_{,\alpha}^T \right]^{(1;1)} \right].$$

Значення компонент підматриць $\begin{bmatrix} \circ B^T \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)}$ і $\begin{bmatrix} \circ B^T, \alpha \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)}$ у виразі

(34) для неоднорідних тіл обертання визначаються відповідно до формул (32) з урахуванням обчислених за (3) значеннями компонент метричного тензора для тіл обертання:

$$\begin{bmatrix} \circ B^T \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \circ \alpha_T \circ g_{11} \\ \frac{1}{2} \circ \alpha_T \circ g_{12} \\ \frac{1}{4} \circ \alpha_T \circ g_{22} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \circ \alpha_T \circ g_{33} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \circ B^T, \alpha \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \circ \alpha_T S_{(3-\alpha)} \circ g_{\alpha(\alpha)} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \circ \alpha_T S_{\alpha} \circ g_{33} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Фізичні компоненти тензора напружень подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha}. \end{aligned} \quad (36)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання фізичних компонент тензора напружень у ряд Маклорена з урахуванням (13):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}^{12} = \sqrt{g_{11}^{\circ} g_{22}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}^{12}; \quad \tilde{\sigma}^{\alpha 3} = \sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3}; \\ \tilde{\sigma}^{33} &= g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}^{33}; \quad \tilde{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} = g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)}; \quad \tilde{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} = \sqrt{g_{\alpha(\alpha)}^{\circ} g_{33}^{\circ}} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3}; \\ \tilde{\sigma}_{,3-\alpha}^{33} &= g_{33}^{\circ} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33}. \end{aligned} \quad (37)$$

У відповідності до моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [8] компоненти тензора повних фізичних деформацій в поперечному перерізі для кожної точки інтегрування подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \tilde{\epsilon}^{\alpha(\alpha)} + \tilde{\epsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\epsilon}_{12} = \tilde{\epsilon}^{12}; \\ \tilde{\epsilon}_{\alpha 3} &= \tilde{\epsilon}^{\alpha 3} + \tilde{\epsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\epsilon}_{33} = \tilde{\epsilon}^{33} + \tilde{\epsilon}_{33, \beta}^{\alpha 3} x^{\beta}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}.$$

Представимо коефіцієнти розкладання компонент повних фізичних деформацій у ряд Маклорена, отримані з урахуванням (13) :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha(\alpha)} g_{33}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}; \quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} = \frac{1}{g_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{\alpha(\alpha)} / g_{\alpha(\alpha)})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \left(\varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \varepsilon_{\alpha(\alpha)} \frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{g_{\alpha(\alpha)}} \right) \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right); \quad (39) \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{\alpha 3} / \sqrt{g_{\alpha(\alpha)} g_{33}})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha(\alpha)} g_{33}}} \left[\varepsilon_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha 3} \left(\frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{g_{\alpha(\alpha)}} + \frac{g_{33,(3-\alpha)}}{g_{33}} \right) \right] \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha(\alpha)} g_{33}}} \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \left(\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33,(3-\alpha)} \right) \right]; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha} &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{33} / g_{33})}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{g_{33}} \left(\varepsilon_{33,\alpha} - \varepsilon_{33} \frac{g_{33,\alpha}}{g_{33}} \right) \Big|_{x^\beta=0} = \frac{1}{g_{33}} \left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right), \end{aligned}$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{h}_{ij,\delta} = \frac{\overset{\circ}{g}_{ij,\delta}}{\overset{\circ}{g}_{ij}}, \quad \overset{\circ}{g}_{ij,\delta} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\delta} \Big|_{x^\alpha=0}.$$

Вирази коефіцієнтів деформацій через переміщення з урахуванням незалежності $z'_{,3}$ від x^α мають вигляд:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha} &= z'_{,\alpha} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,\alpha}, & \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2} \left(z'_{,1} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,2} + z'_{,2} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,1} \right), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left(z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3',\alpha} + z'_{,\alpha} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,3} - \frac{2 z'_{,\alpha} \cdot z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3'}}{z'_{,2'}} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3',3} + z'^2_{,3} \left(\frac{\overset{\circ}{z}'_{,3}}{z'_{,3}} \right)^2 \overset{\circ}{u}'_{2'},$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = z'_{,\alpha(3-\alpha)} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,\alpha} + z'_{,\alpha} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,\alpha(3-\alpha)},$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \left(z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3',\alpha(3-\alpha)} + z'_{,\alpha(3-\alpha)} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,3} + z'_{,\alpha} \cdot \overset{\circ}{u}'_{\gamma,3(3-\alpha)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 z'_{,\alpha(3-\alpha)} \cdot z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3'}}{z'_{,2'}} - \frac{2 z'_{,\alpha} \cdot z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3',(3-\alpha)}}{z'_{,2'}} + \frac{2 z'_{,\alpha} \cdot z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3'} \cdot z'_{,(3-\alpha)}}{\left(z'_{,2'} \right)^2} \right), \end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = z'_{,3} \cdot \overset{\circ}{u}'_{3',3\alpha} + z'_{,\alpha} \cdot \left(\frac{\overset{\circ}{z}'_{,3}}{z'_{,3}} \right)^2 \overset{\circ}{u}'_{2'} + z'_{,\alpha} \cdot \left(\frac{\overset{\circ}{z}'_{,3}}{z'_{,3}} \right)^2 \overset{\circ}{u}'_{2',\alpha}.$$

$$\text{де } z'^2_{,2'} = z'^2_{,2'} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad z'^i_{,j} = z'^i_{,j} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad z'_{,12} = z'_{,12} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad u'^i = u'^i \Big|_{x^\alpha=0},$$

$$u'^i_{,\alpha} = u'^i_{,\alpha} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad u'^i_{,3} = u'^i_{,3} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad u'^i_{,\alpha(3-\alpha)} = u'^i_{,\alpha(3-\alpha)} \Big|_{x^\alpha=0}.$$

При заданому законі апроксимації переміщень, коефіцієнти ряду Маклорена обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)} S_{\beta} + \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)} S_{\alpha} \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[\overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)} S_{\alpha} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma, 3(S_1, S_2)} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma}}{\overset{\circ}{z}_{,\beta}} u_{\gamma(S_1, S_2)} \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[\overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma, 3(S_1, S_2)} + \overset{\circ}{z}_{,\beta} \left(\overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} \right)^2 u_{\gamma(S_1, S_2)} \right], \quad (41) \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[u_{\gamma(S_1, S_2)} S_{\alpha} \left(\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma}_{(3-\alpha)} + 2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma}_{,\alpha} S_{(3-\alpha)} \right) \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[2 \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)} S_{\alpha} S_{(3-\alpha)} + \frac{u_{\gamma, 3(S_1, S_2)}}{2} \left(\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma}_{(3-\alpha)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma}_{,\alpha} S_{(3-\alpha)} \right) - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)}}{\overset{\circ}{z}_{,\beta}} \left(\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma}_{(3-\alpha)} + 2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma}_{,\alpha} S_{(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma}}{\overset{\circ}{z}_{,\beta}} S_{(3-\alpha)} \right) \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \overset{\circ}{z}_{,\beta} \left[u_{\gamma, 3(S_1, S_2)} S_{\alpha} + \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma}}{2} u_{\gamma(S_1, S_2)} + \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)} S_{\alpha} \right].
\end{aligned}$$

Враховуючи розклад переміщень у напрямку твірної (26), отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу вузлових переміщень для кругового скінченного елемента:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_{1\pm 1}} \sum_{S_{2\pm 1}} \sum_{l=0}^L \left(\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)}^l S_{\beta} + \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)}^l S_{\alpha} \right) \Phi^l; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_{1\pm 1}} \sum_{S_{2\pm 1}} \sum_{l=0}^L \left[\left(u_{\gamma(S_1, S_2)}^l S_{\alpha} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta} \overset{\circ}{\gamma}}{\overset{\circ}{z}_{,\beta}} u_{\gamma(S_1, S_2)}^l \right) \cdot \overset{\circ}{z}_{,\beta} \Phi^l + \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,\alpha} \overset{\circ}{\gamma} u_{\gamma(S_1, S_2)}^l \cdot \Phi_{,\beta}^l \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1 \pm 1} \sum_{S_2 \pm 1} \sum_{l=0}^L z^{\overset{\circ}{3'}} \cdot \overset{\circ}{3'} \left(u_{3'(S_1, S_2)}^l \cdot \Phi_{,3}^l + u_{2'(S_1, S_2)}^l \cdot z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot z^{\overset{\circ}{3'}} \cdot \Phi^l \right); \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1 = \pm 1} \sum_{S_2 = \pm 1} \sum_{l=0}^L \left(2 z^{\overset{\circ}{\gamma}} \cdot S_{1, S_2} \cdot z^{\overset{\circ}{\gamma}} \cdot S_{\alpha} \right) \cdot u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l \cdot \Phi^l; \quad (42) \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1 = \pm 1} \sum_{S_2 = \pm 1} \sum_{l=0}^L \left[\left(z^{\overset{\circ}{\gamma}} \cdot S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z^{\overset{\circ}{\gamma}} \cdot S_{,12} \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l \cdot \Phi_{,3}^l + \right. \\ &\quad \left. + z^{\overset{\circ}{3'}} \cdot \left(2 S_{\alpha} S_{(3-\alpha)} - \frac{1}{z^{\overset{\circ}{2'}}} \cdot \left(z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot S_{(3-\alpha)} - \frac{z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot z^{\overset{\circ}{(3-\alpha)}}}{z^{\overset{\circ}{2'}}} \right) \right) \cdot u_{3'(S_1, S_2)}^l \cdot \Phi^l \right]; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1 = \pm 1} \sum_{S_2 = \pm 1} \sum_{l=0}^L z^{\overset{\circ}{3'}} \cdot \overset{\circ}{3'} \left(z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot S_{\alpha} + z^{\overset{\circ}{2'}} \cdot S_{\alpha} \right) u_{2'(S_1, S_2)}^l \Phi^l + 2 S_{\alpha} u_{3'(S_1, S_2)}^l \Phi_{,3}^l. \end{aligned}$$

Побудова матриці жорсткості для неоднорідного кругового скінченного елемента. Варіація потенційної енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^3 = -1}^1 \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (43)$$

Фізичні компоненти тензорів напружень $\tilde{\sigma}^{ij}$ і деформацій $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ представимо відрізками ряду Маклорена згідно основних положень МССЕ:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^3 = -1}^1 \left[\left(\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\tilde{\varepsilon}^{\alpha(\alpha)} + \tilde{\varepsilon}^{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \tilde{\sigma}^{12} \delta \tilde{\varepsilon}_{12} + \left(\tilde{\sigma}^{\alpha 3} + \tilde{\sigma}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\tilde{\varepsilon}^{\alpha 3} + \tilde{\varepsilon}^{\alpha 3, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\tilde{\sigma}^{33} + \tilde{\sigma}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha} \right) \delta \left(\tilde{\varepsilon}^{33} + \tilde{\varepsilon}^{33, \alpha} x^{\alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (44) \end{aligned}$$

Після відповідних перетворень для варіації потенційної енергії δW , отримаємо наступний вираз:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left[\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij} + \frac{1}{12} \left(\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha 3,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,\alpha} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33,\alpha} \right) \right] \sqrt{g} dx^3. \quad (45)$$

Представляючи в (45) фізичні компоненти коефіцієнтів розкладу деформацій та напружень згідно (37) і (39) запишемо:

$$\delta W = \int_{x_3=-1}^{x_3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{ij} + \frac{1}{12} \left[\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} \delta \cdot \left(\overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) + \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} \delta \cdot \left[\overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{\alpha 3} \left(\overset{\circ}{h}{}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}{}_{33,(3-\alpha)} \right) \right] + \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,\alpha} \delta \cdot \left(\overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}{}_{33} \overset{\circ}{h}{}_{33,\alpha} \right) \right] \right\} \sqrt{g} dx^3. \quad (46)$$

Сформуємо наступні вектори коефіцієнтів розкладу деформацій та напружень в ряд Маклорена:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \right\}; \quad (47)$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{23,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \left(\overset{\circ}{h}_{22,1} + \overset{\circ}{h}_{33,1} \right) \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,1} \right\};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \overset{\circ}{h}_{11,2} \quad 2 \overset{\circ}{\varepsilon}_{13,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \left(\overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2} \right) \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,2} \right\};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{12} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{23} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{13} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33} \right\}; \quad (48)$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{22}_{,1} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{23}_{,1} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,1} \right\}; \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\}^T = \left\{ \overset{\circ}{\sigma}{}^{11}_{,2} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{13}_{,2} \quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,2} \right\}.$$

Тоді вираз варіації потенційної енергії скінченного елемента може бути поданий у векторній формі:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \frac{1}{12} \left[\left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}^T \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,1} \right\} + \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}^T \right\} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,2} \right\} \right] \sqrt{g} dx^3. \quad (49)$$

Співвідношення, що описують залежність між коефіцієнтами розкладення фізичних деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення переміщень за поліномами, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} = \sum_{l=0}^L \left(\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right] \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right] \varphi_{,3}^{(l)} \right) \{ u \}_l;$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\} = \sum_{l=0}^L \left(\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right] \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(l)} \right) \{ u \}_l, \quad (50)$$

де

$$\{ u \}_l^T = \left\{ u_{i(-1,-1)}^l \quad u_{i(1,-1)}^l \quad u_{i(-1,1)}^l \quad u_{i(1,1)}^l \right\};$$

$$\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha} \right] = \left[\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha} \right]^{(-1,-1)} \quad \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha} \right]^{(1,-1)} \quad \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha} \right]^{(-1,1)} \quad \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha} \right]^{(1,1)} \right];$$

$$\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha,\beta} \right] = \left[\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha,\beta} \right]^{(-1,-1)} \quad \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha,\beta} \right]^{(1,-1)} \quad \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha,\beta} \right]^{(-1,1)} \quad \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha,\beta} \right]^{(1,1)} \right]. \quad (51)$$

Значення компонент підматриць $\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha} \right]^{(S_1, S_2)}$, $\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{\alpha,\beta} \right]^{(S_1, S_2)}$ у виразі

(51) для неоднорідних косокутних кругових елементів визначаються відповідно до формул (35):

$$\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} & \frac{1}{2} S_1 \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} & 0 \\ \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} & \frac{1}{2} S_2 \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}^{2'} \cdot \left(\overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right)^2 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} \right) & \frac{1}{2} \left(S_2 \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} + S_1 \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left(S_1 - \frac{\overset{\circ}{z}_{,1}^{2'}}{\overset{\circ}{z}^{2'}} \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left(S_2 - \frac{\overset{\circ}{z}_{,2}^{2'}}{\overset{\circ}{z}^{2'}} \right) \end{bmatrix};$$

$$\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{1'} & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,1}^{2'} & 0 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{1'} & \frac{1}{4} \overset{\circ}{z}_{,2}^{2'} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{11} & \left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{12} & 0 \\ 0 & \left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{33} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\text{де } \left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{11} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{1'} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{1'} - \frac{1}{2} S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{1'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$$

$$\left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{12} = S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{2'} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{2'} - \frac{1}{2} S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,(3-\alpha)}^{2'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha};$$

$$\left(\tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{22} = \frac{1}{4} \left(\overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right)^2 \left(2 \overset{\circ}{z}^{2'} S_{\alpha} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} - \overset{\circ}{z}^{2'} \cdot \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right);$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{B}_{1,\alpha}\right)_{33} = & \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 3'} \left(2S_{\alpha} S_{(3-\alpha)} - \frac{1}{z_{,2'}^{\circ}} \left(z_{,12}^{\circ 2'} + 2z_{,(3-\alpha)}^{\circ 2'} \cdot S_{\alpha} - \frac{z_{,1'}^{\circ} z_{,2'}^{\circ}}{z_{,2'}^{\circ}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(S_{(3-\alpha)} - \frac{z_{,(3-\alpha)}^{\circ 2'}}{z_{,2'}^{\circ}} \right) \cdot \left(h_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}^{\circ} + h_{33,\alpha}^{\circ} \right) \right); \end{aligned}$$

$$\left[\tilde{B}_{2,\alpha} \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{23} \\ \left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{31} & \left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{32} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{де } \left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{23} = \frac{1}{4} z_{,3}^{\circ 3'} \left(2S_1 - h_{33,1}^{\circ} \right);$$

$$\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{31} = \frac{1}{2} z_{,(3-\alpha)}^{\circ 1'} \cdot S_{\alpha} + \frac{1}{4} z_{,12}^{\circ 1'} - \frac{1}{8} z_{,(3-\alpha)}^{\circ 1'} \cdot \left(h_{11,2}^{\circ} + h_{33,2}^{\circ} \right);$$

$$\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{32} = \frac{1}{2} z_{,(3-\alpha)}^{\circ 2'} \cdot S_{\alpha} + \frac{1}{4} z_{,12}^{\circ 2'} - \frac{1}{8} z_{,(3-\alpha)}^{\circ 2'} \cdot \left(h_{11,2}^{\circ} + h_{33,2}^{\circ} \right).$$

З урахуванням подання коефіцієнтів розкладу деформацій через коефіцієнти розкладу переміщень у ряд Маклорена, варіація енергії деформації одного СЕ може бути подана у вигляді:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \sum_{l=0}^L \left(\delta\{u_l\}^T \left(\left[\tilde{B}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\tilde{B}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta\{u_l\}^T \left(\left[\tilde{B}_{1,\alpha} \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\tilde{B}_{2,\alpha} \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \right) \right) \sqrt{g} dx^3 = \\ & = \sum_{l=0}^L \delta\{u_l\}^T \left\{ \overset{\circ}{R} \right\}_l. \end{aligned} \tag{53}$$

де $\left\{ \overset{\circ}{\bar{R}} \right\}_l$ – вектор вузлових реакцій СЕ:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{\bar{R}} \right\}_l &= \left[\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right] \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} dx^3 + \\ &+ \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} dx^3 \Bigg] \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \\ &= \left[\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi^{(l)} dx^3 + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right]^T \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} dx^3 \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} . \end{aligned} \quad (54)$$

Виконавши чисельне інтегрування за напрямком x^3 , отримаємо вираз для обчислення компонент вектору вузлових реакцій СЕ:

$$\begin{aligned} \left\{ \overset{\circ}{\bar{R}} \right\}_l &= \left[\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_l + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_{l3} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_{l\alpha} + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right]^T \left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\}_{l\alpha 3} \right) \right] \sqrt{\overset{\circ}{g}} . \end{aligned} \quad (55)$$

Коефіцієнти прирощення напружень пов'язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}, \quad (56)$$

де

$$\left[\overset{\circ}{D} \right] = \left[\overset{\circ}{d} \begin{matrix} ijkl \end{matrix} \right], \quad \left[\overset{\circ}{D}, \alpha \right] = \left[\left[\overset{\circ}{d} \begin{matrix} ij(3-\alpha)(3-\alpha) \end{matrix} \right] \left[\overset{\circ}{d} \begin{matrix} ij33 \end{matrix} \right] \left[\overset{\circ}{d} \begin{matrix} ij(3-\alpha) \end{matrix} \right] \right]. \quad (57)$$

З урахуванням цього вираз для варіації енергії деформування СЕ (53) набуває вигляду:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}, \alpha \right\}^T \left[\overset{\circ}{D}, \alpha \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}, \alpha \right\} \right) \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3. \quad (58)$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами, подано отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^L \left(\delta \{ u \}_l^T \right) [K]_{ln} \{ u \}_n, \quad (59)$$

де $[K]_{ln}$ – матриця жорсткості неоднорідного косокутного кругового СЕ:

$$\begin{aligned} [K]_{ln} = & \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \left(\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left[\overset{\circ}{D} \right] \times \left(\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right] \varphi^{(n)} + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right] \varphi_{,3}^{(n)} \right) + \frac{1}{12} \times \right. \\ & \left. \times \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left(\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^T \varphi^{(l)} + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right]^T \varphi_{,3}^{(l)} \right) \left[\overset{\circ}{D}, \alpha \right] \left(\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right] \varphi^{(n)} + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \right) \right) \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3. \quad (60) \end{aligned}$$

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком x^3 з урахуванням неоднорідності, введемо позначення:

$$[D]_{00}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} H_m;$$

$$[D]_{30}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \varphi_m \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_m^{(n)} H_m;$$

$$[D]_{03}^{ln} = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} \varphi_m H_m;$$

$$\begin{aligned}
[D]_{33}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D} \right] \varphi_{,3}^{(n)} H_m; \\
[D]_{00\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_m^{(n)} H_m; \\
[D]_{30\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_m^{(n)} H_m; \\
[D]_{03\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_m^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} H_m; \\
[D]_{33\alpha}^{ln} &= \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} dx^3 = \sum_{m=1}^M \varphi_{,3}^{(l)} \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \varphi_{,3}^{(n)} H_m.
\end{aligned} \tag{61}$$

З урахуванням цих виразів для матриці жорсткості СЕ отримаємо:

$$\begin{aligned}
[K]_{ln} &= \left\{ \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^T [D]_{00}^{ln} \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^T [D]_{30}^{ln} \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_1 \right]^T [D]_{03}^{ln} \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right] + \right. \\
&+ \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right]^T [D]_{33}^{ln} \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \right] + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^T [D]_{00\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right] + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right]^T \times \right. \\
&\left. \left. \times [D]_{30\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right] + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{1,\alpha} \right]^T [D]_{03\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right] + \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right]^T [D]_{33\alpha}^{ln} \left[\overset{\circ}{\tilde{B}}_{2,\alpha} \right] \right) \left. \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \tag{62}
\end{aligned}$$

При розв'язанні задач термов'язкопружності для кожної з M точок інтегрування обчислюються не тільки значення координат x^3 , значення базисних функцій $(\varphi^l)_m$, їх похідних $(\varphi^l_{,3})_m$, та вагових функцій H_m , але й величини температур, а також деформації пластичності і повзучості та величини параметра пошкодження матеріалу.

Отримані вирази матриці жорсткості (62) неоднорідного кругового скінченного елемента дозволяють будувати дискретні моделі для неоднорідних тіл обертання складної форми з урахуванням змінності компонент метричного тензора в межах поперечного перерізу СЕ. .

Розв'язання тестових прикладів. З метою доведення ефективності використання розроблених розв'язувальних співвідношень НМСЕ для тіл обертання з довільними граничними умовами на торцях із урахуванням змінності компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу СЕ, розглянуто тестовий приклад про деформування товстостінного циліндра (рис.3) з внутрішнім радіусом $a = 2$ мм та зовнішнім $b = 20$ мм, навантаженого внутрішнім тиском 680 кг/см².

При розв'язанні задачі були розглянуті дискретні моделі з 4 (рис.3,а), а також з 12 (рис.3,б) і 36 СЕ вздовж радіуса. У якості еталонного розв'язку використано результат отриманий аналітично [9].

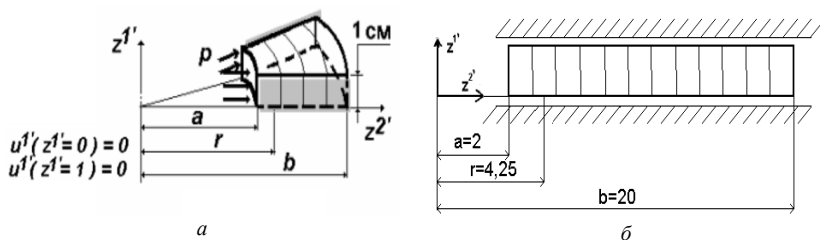


Рис. 3. Дискретна модель НМСЕ з 4 СЕ (а) та поперечний переріз дискретної моделі з 12 СЕ (б).

Результати представлені на рис. 4 у вигляді графіків залежності похибок обчислення радіальних σ_r і колових σ_ϕ напружень для точки циліндра при $r = 4,25$ мм від кількості n СЕ вздовж радіуса циліндра. Як видно, при обчисленні напружень для дискретної моделі з 4 СЕ на основі фізичних величин компонент тензору деформацій $\tilde{\epsilon}_{ij}$ (на графіку – пунктирна лінія) похибка є значно меншою ніж при використанні місцевої ненормованої системи координат для визначення відповідних значень компонент тензору деформацій ϵ_{ij} (на графіку – суцільна лінія).

Аналогічне дослідження було проведене для призматичних тіл в [2]. Наведені в цій роботі результати засвідчили, що для призматичних тіл вплив способу обчислення величин деформацій на отримувані результати проявляється лише при використанні косокутної СЕ сітки. На відміну від призматичних тіл, для тіл обертання одержання точних результатів навіть із використанням ортогональної сітки (як в розглянутому вище прикладі) можливе лише при обчисленні фізичних величин компонент деформацій.

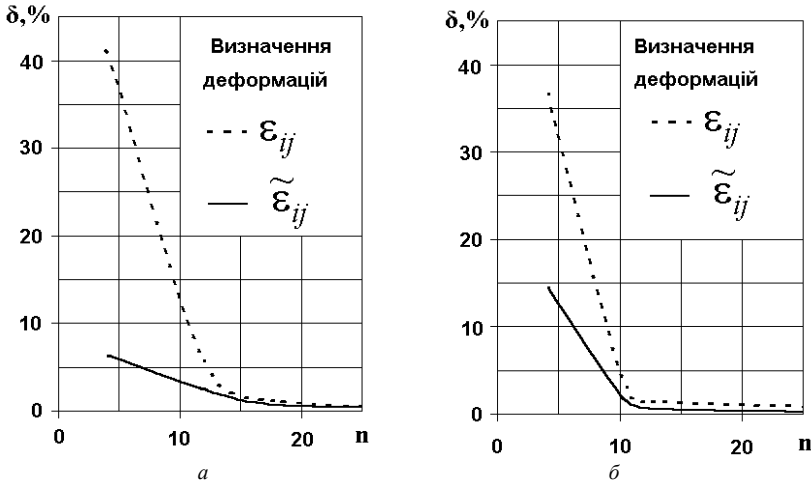


Рис. 4. Порівняння збіжності результатів обчислення радіальних (а) і колових (б) напружень.

Для дослідження ефективності використання розроблених розв'язувальних співвідношень НМСЕ при використанні косокутної скінченноелементної сітки розглянуто тестовий приклад про деформування циліндра висотою 10 мм та діаметром 20 мм під впливом силового навантаження – всебічного стиску.

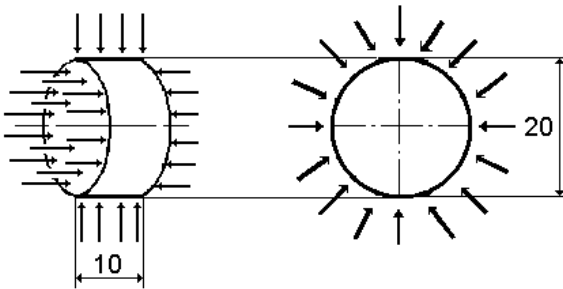


Рис.5. Циліндр під впливом всебічного стиску

Вихідні дані: зовнішнє силове навантаження $q = 1 \text{ кг/см}^2$, модуль пружності $E = 1 \text{ кг/см}^2$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

При розв'язанні задачі були розглянуті дискретні моделі з 4 (рис. 6,а), а також з 36 та 484 (рис. 6, б, в) скінчених елементів. У якості еталонного розв'язку використано результат, отриманий для ортогональної сітки (рис. 6,г).

Результати представлені на у вигляді графіків залежності похибок обчислення радіальних і колових напружень δ_i (рис. 7) та осьових і радіальних переміщень (рис. 8) від щільності скінченноелементної сітки (n – кількість СЕ в площині поперечного перерізу циліндра).

З отриманих результатів видно, що при силовому навантаженні застосування косокутних неоднорідних СЕ у тілах обертання на основі величин фізичних компонент тензору деформацій $\tilde{\epsilon}_{ij}$ при визначенні радіальних напружень дає результати в межах 2%). При застосуванні для розв'язання задачі величин ϵ_{ij} потребує дискретної моделі, що містить більш ніж на порядок більше невідомих ніж при застосуванні $\tilde{\epsilon}_{ij}$.

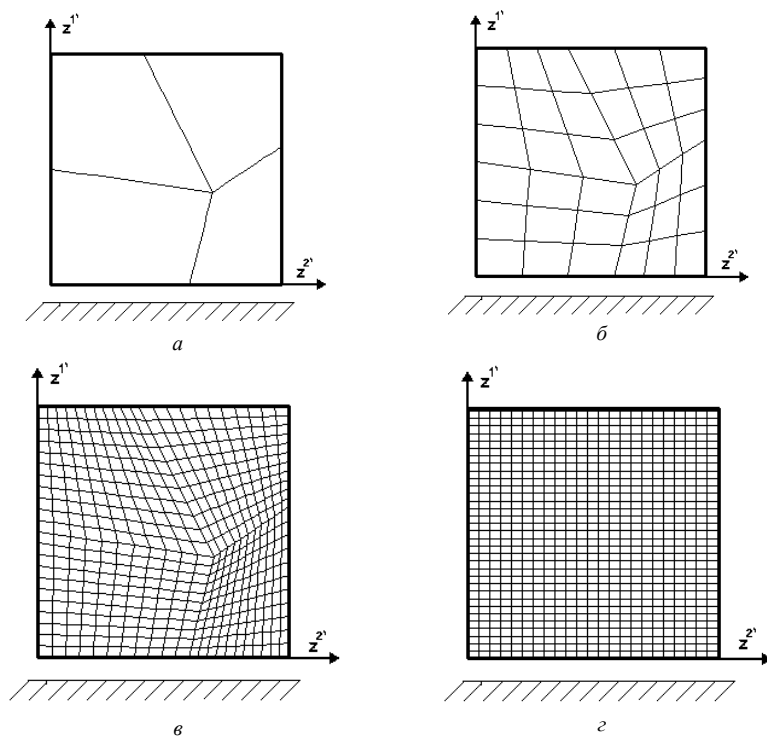


Рис. 6. Поперечні перерізи дискретних моделей з 4 (а) і 36(б) та 484 косокутними (в) та ортогональними СЕ (г)

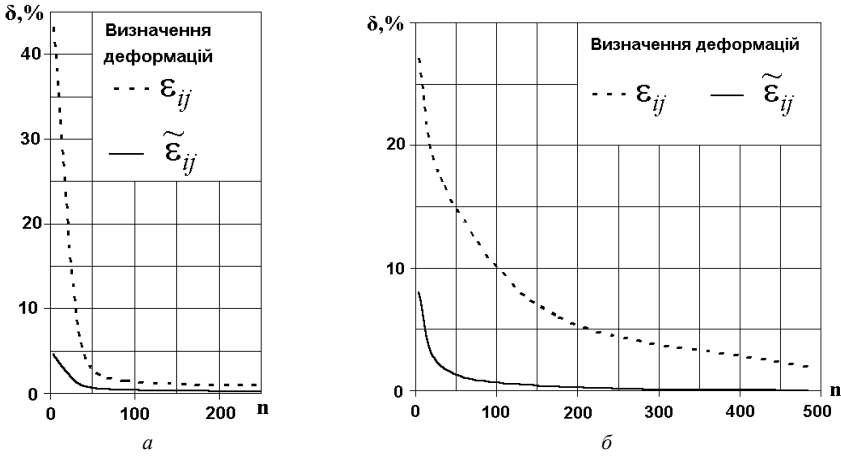


Рис.7 Порівняння збіжності результатів обчислення радіальних (а) і колових (б) напружень

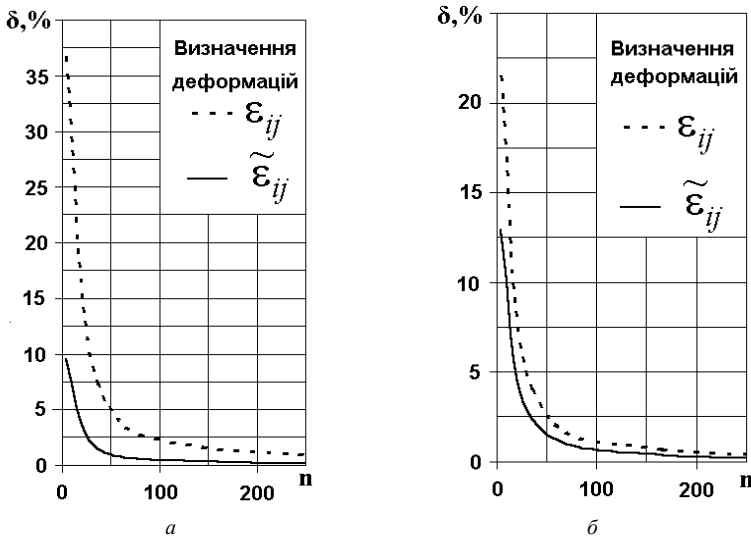


Рис. 8. Порівняння збіжності обчислення радіальних (а) і осьових (б) переміщень

На наступному етапі задачі було розглянуто деформування суцільного циліндра (рис.5) під впливом температурного навантаження: розподіл

температури в напрямку осі обертання від 0 до 100 градусів прийнятий за лінійним законом. При порівнянні результатів використані напруження, взяті в центрі найближчого до початку системи координат СЕ (рис. 6,а). У якості еталонних були прийняті значення, отримані для дискретної моделі з ортогональними СЕ. Результати більш високої точності було отримано на основі величин фізичних компонент тензору деформацій $\tilde{\epsilon}_{ij}$ (табл. 1), що засвідчило ефективність використання розроблених розв'язувальних співвідношень НМСЕ при використанні косокутної скінченноелементної сітки також при температурному навантаженні.

Таблиця 1

Порівняння достовірності обчислення радіальних та колових напружень

Спосіб визначення компонент тензора деформацій	Напруження та похибка їх обчислення		Еталонне значення σ , кг/см ²
	σ , кг/см ²	δ , %	
Радіальні напруження, $\sigma_{2'2'}$			
$\tilde{\epsilon}_{ij}$	0,6272	0,064	0,6268
ϵ_{ij}	0,6391	1,96	
Колові напруження, $\sigma_{3'3'}$			
$\tilde{\epsilon}_{ij}$	0,7576	0,26	0,7556
ϵ_{ij}	0,7436	1,59	

Висновки. У роботі одержані вирази матриці жорсткості та вектора вузлових реакцій неоднорідного кругового СЕ з довільними граничними умовами з урахуванням змінності компонент метричного тензора в поперечному перерізі СЕ. Ефективність застосування такого СЕ для тіл обертання доведена на тестових прикладах. Урахування змінності компонент метричного тензору в поперечному перерізі СЕ дозволяє отримувати вірогідні результати при значно меншій кількості невідомих дискретної скінченноелементної моделі, що в свою чергу дозволяє зменшити обчислювальні витрати на порядок і більше. На відміну від призматичних тіл, у яких регулярна ортогональна сітка навіть без урахування змінності компонент метричного тензора в площині попереченого перерізу СЕ дозволяє отримати вірогідні значення напружень, для тіл обертання для одержання точних результатів таке врахування є просто необхідним. Використання косокутних скінченних елементів для тіл обертання дозволяє отримувати результати з більш високою точністю, а при температурному навантаженні дозволяє одержувати значення радіальних напружень з похибкою вдвічі меншою, ніж для випадку силового навантаження.

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
2. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей Л.Л., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матрица жесткости и вектор узловых реакций скінченного элемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружнопластичності НМСЕ. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 76. – С.3–26.
3. *Блах В.И.* Теория упругости Харьков: Изд-во Харьк. ун-та. – 1964. –483с.
4. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.
5. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
6. *Пискунов С.О.* Ефективність ітераційних алгоритмів розв'язання задач в'язкопружно-пластичності в межах напіваналітичного методу скінченних елементів. // Науковий вісник Національного технічного університету України „КПІ”. № 46, 2005 г.
7. *Рассказов А.О.* Расчёт многослойной ортотропной пологой оболочки методом конечных элементов // Прикл. механика. –1978. – 14, №8. –с. 51-56.
8. *Сахаров А.С., Кислюцкий В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. - Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
9. Сопротивление материалов / Под ред. акад. АН УССР *Писаренко Г. С.* – 5-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986. –