УДК 539.3:589.03:589.04:624.04

Станкевич А.М., канд. техн. наук,
Шкельов Л.Т., канд. техн. наук

ДОСВІД ВИКОРИСТАННЯ ТА ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ МЕТОДА ПРЯМИХ

Значна більшість наближених методів розв'язку крайових задач засновано на зведенні складних класів рівнянь до більш простих, методи розв'язування яких відомі. При цьому застосовуються різні способи апроксимації шуканих функцій. Подача їх у вигляді функціональних рядів із невизначеними коефіцієнтами (методи Рітца, Бубнова-Гальоркіна). Для знаходження невизначених коефіцієнтів, частіше, використовуються енергетичні принципи. Чисельна апроксимація функцій використовується в методі кінцевих різниць.

Метод скінчених елементів заснований на розчленуванні об'єкта на окремі частини стандартної форми та представленні шуканої функції в межах окремого елемента у вигляді сплайнів різних порядків.

Усі зазначені вище методи дозволяють замінити складні вихідні рівняння наближено еквівалентною системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

Чисельно-аналітична апроксимація використовується в диференційно-різницевому методі або "методі прямих". У цьому випадку за однією із змінних зберігається аналітичний характер шуканих функцій, а за іншими змінними передбачається дискретний характер шуканих функцій. Це дозволяє крайову задачу для рівнянь у частинних похідних звести до крайової задачі для системи звичайних лінійних диференційних рівнянь. Не можна однозначно стверджувати, який із зазначених методів має беззаперечну перевагу. Кожен із них має певні переваги та недоліки. Очевидно, найбільш вірним буде твердження, що кожен метод має свою раціональну сферу застосування.

На кафедрі опору матеріалів КНУБА над розвитком методу прямих та його застосуванням для розв'язання прикладних задач працюють Шкельов Л.Т., Морсков Ю.А., Корбаков О.Ф., Одинець Є.А., Станкевич А.М. Характерною особливістю варианта методу прямих, який вони розвивають, є побудова такої системи звичайних диференційних рівнянь, для якої в замкненій аналітичній формі можна отримати загальний розв'язок. До складу такого розв'язку входять довільні сталі в такій кількості, яка дозволяє задовольнити граничні умови в точках перетину прямих з границею об'єкта. У результаті чисельна реалізація методу зводитьсядо складання та розв'язку системи граничних алгебраїчних рівнянь із наступним визначенням конкретних значень шуканих функцій та пов'язаних з ними величин.

Для переходу від вихідних двомірних і тримірних диференційних рівнянь до системи звичайних диференційних рівнянь і подальшого розв'язку цієї системи розроблений чіткий і достатньо простий алгоритм. Це досягнуто завдяки принято допущення про періодичний характер змін шуканих функцій за дискретним напрямком і зведенню процедури чисельного диференціювання до простих матричних операцій, а саме, до множення диференційованого виразу на відповідну матрицю. У подальшому ці матриці будемо називати матрицями диференціювання.

Усього використовується три види матриць диференціювання A,B,C. Матриці A и B, являють собою двохдіагональні матриці, відповідно, з верхнім і нижнім кутовим елементом. Усі компоненти матриць A і B за абсолютним значенням дорівнюють одиниці. Матриця C є трьохдіагональною з кутовими коефіцієнтами. Множення диференційованого вектора зліва на матрицю A дає кінцево-різницеву похідну цього вектора першого порядку у лівих різницях. Відповідно, при множенні на матрицю B отримуємо першу похідну у правих різницях. Множення на матрицю C дає похідну в центральних різницях. Матриця C дорівнює добутку матриць A і B, а саме:

$$C = A \cdot B = B \cdot A..$$

Непарна похідна $n^{го}$ порядку може бути записана у декількох варіантах:

$$\underbrace{A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot \cdots \cdot A \cdot B \cdot A}_{n} = \underbrace{C \cdot C \cdot C \cdot \cdots \cdot C}_{(n-1)\frac{1}{2}} \cdot A = A \cdot \underbrace{C \cdot C \cdot C \cdot \cdots \cdot C}_{(n-1)\frac{1}{2}},$$

$$\underbrace{B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot \cdots \cdot B \cdot A \cdot B}_{n} = \underbrace{C \cdot C \cdot C \cdot \cdots \cdot C}_{(n-1)\frac{1}{2}} \cdot B = B \cdot \underbrace{C \cdot C \cdot C \cdot \cdots \cdot C}_{(n-1)\frac{1}{2}}.$$

Парну похідну $n^{го}$ порядку можна записати таким чином:

$$\underbrace{A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot \cdots \cdot A \cdot B}_{n} = \underbrace{B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot \cdots \cdot B \cdot A}_{n\frac{1}{2}} = \underbrace{C \cdot C \cdot C \cdot \cdots \cdot C}_{n\frac{1}{2}}.$$

Матриця C може бути подана як добуток трьох матриць

$$C = V\left\{-\beta_k^2\right\}V .$$

Елементи квадратної матриці V визначаються за формулою:

$$V_{ik} = \frac{\sqrt{n}}{n}(sin\frac{2ik\pi}{n} + cos\frac{2ik\pi}{n}).$$

Компоненти діагональної матриці β_k^2 дорівнюють:

$$\beta_k^2 = -\frac{\lambda_k}{\Delta^2},$$

де $\lambda_k = -4\,sin^2\frac{k\pi}{n}$.

Матриця V має ту властивість, що пряма і зворотна матриці рівні:

$$V \cdot V = E.$$

Звідси випливає, що $C^n = V\left\{(-)^n \beta_k^{2n}\right\}V$.

Використання цього співвідношення дозволяє істотно спростити вираз для похідних.

Підкреслимо ще одну особливість розробленої методики. Вона полягає у використанні перехресних прямих, що дозволило більш простіше задовольнити граничні умови.

Наведений алгоритм розроблений у прямолінійних прямокутних координатах і в полярних координатах. Користуючись зазначеним методом, отримані числові розв’язки задач і досліджена збіжність методу. Наведемо перелік розв’язаних задач:

- згин пластин довільної конфігурації;
- згин пластин з отвором;
- згин пластин на пружній основі;
- плоский напружений стан пластин довільної конфігурації;
- плоский напружений стан пластин з отвором;
- пластинчасті системи;
- напружений стан пластин при згині без використання гіпотез Кірхгофа;
- кругові циліндричні оболонки замкнені та відкриті;
- циліндричні оболонки з діафрагмами;

- системи, які складаються із замкнених циліндричних оболонок і круглих пластин.

На перспективу намічено дослідження щодо використання методу для вирішення таких задач:

- згин пластин без використання гіпотез Кірхгофа;
- багатошарові пластини;
- оболонки без використання гіпотез Кірхгофа – Лява.

1. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542с.
2. *Ридель В. В., Гулин Т. В.* Динамика мягких оболочек. – М.: Наука, 1990. – 205с.

Матеріал надійшов до редакції 29.10.04.