МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 2 (ЗМ 4). Ряди

Методичні вказівки
до виконання самостійних та індивідуальних робіт
для здобувачів ОПП першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
інженерних та природничих спеціальностей всіх форм навчання

Київ 2025

УДК 510.6 (073)
В55

Укладачі: О.В. Доля, канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Ю.В. Рябчун, д-р філософії, доцент;
Л.І. Турчанінова, канд. техн. наук, доцент

Рецензент О.І. Баліна, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск О.О. Терентьєв, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій проєктування та прикладної математики, протокол № 2 від 17 вересня 2024 року.

В авторській редакції.

Вища математика : Модуль 2 (ЗМ 4). Ряди : методичні вказівки
В55 до виконання самостійних та індивідуальних робіт / уклад. : О.В. Доля, Ю.В. Рябчун, Л.І. Турчанінова. – Київ : КНУБА, 2025. – 44 с.

Містять необхідні практичні відомості для виконання самостійних та індивідуальних завдань Модуля 2, що включають завдання з теорії рядів, також приклади виконання типових варіантів змістового модуля 4 індивідуальної роботи та 30 варіантів для виконання самостійних робіт.

Наведені розв’язки типових завдань з індивідуальної роботи змістового модуля 4. Рекомендуються для аудиторної та самостійної роботи студентів.

Призначені для здобувачів ОПП першого (бакалаврського) рівня вищої освіти інженерних та природничих спеціальностей всіх форм навчання.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Основними завданнями, що мають бути вирішені в процесі викладання дисципліни «Вища математика», є теоретична та практична підготовка здобувачів з питань:

- алгебри чисел;
- лінійної алгебри і елементів векторної алгебри;
- математичного аналізу функцій однієї і багатьох змінних;
- інтегрального числення;
- диференціальних рівнянь;
- теорії числових та функціональних рядів.

Зокрема, запропоноване видання являє собою методичні рекомендації для вивчення дисципліни «Вища математика. Модуль 2. Ряди».

Основою навчання є самостійна робота студента з підручником, навчальним посібником, конспектом лекцій та виконання індивідуальної роботи.

Метою викладання дисципліни «Вища математика» є засвоєння фундаментальних основ математики, зокрема аналізу необхідних для подальшого вивчення та розуміння інших математичних дисциплін.

Методичні вказівки містять 30 варіантів для виконання самостійних і індивідуальних робіт з дисципліни «Вища математика. Модуль 2 (ЗМ 4)» здобувачами першого курсу інженерних та природничих спеціальностей всіх форм навчання КНУБА.

У даному виданні

РЯДИ. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Вираз
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \qquad (1)$$
називають **рядом**; u_n – **загальним членом ряду;**
$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \qquad (2)$$
частинною сумою ряду.

Якщо
$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad (3)$$
то ряд (1) **збіжний** і S – **сума** цього ряду.

Якщо
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty, \text{ то} \qquad (4)$$
ряд (1) **розбіжний.**

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ – геометрична прогресія збіжний при $|q| < 1$, $S = \dfrac{a}{1-q}$; розбіжний при $|q| \geq 1$.

Ряд Діріхле (узагальнюючий гармонічний ряд) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ – збіжний при $\alpha > 1$, розбіжний при $\alpha \leq 1$. Зокрема, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ – **простий гармонічний ряд** розбіжний.

Необхідна умова збіжності: якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (5)$$

Достатня умова розбіжності: якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний.

Ознака порівняння: нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ знакододатні, причому $u_n \leq v_n$, де $n = 1, 2, \ldots$, тоді якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Гранична ознака порівняння: нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ знакододатні, причому існує скінчена границя $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = a \neq 0$, (6)

тоді ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Ознака Д'Аламбера: якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \tag{7}$$

то ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

Ознака Коші: якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l, \tag{8}$$

то ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

Інтегральна ознака Коші: якщо задано ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots, \tag{9}$$

де $f(x)$ – додатна, неперервна і монотонно спадна функція на проміжку $[1;+\infty)$. Тоді ряд (9) збіжний, якщо збіжний невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ і розбіжний, якщо розбіжний цей інтеграл.

Ряд, **знаки членів якого чергуються**, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots, \text{ де } u_n > 0. \tag{10}$$

Ознака Лейбніца: якщо для ряду (10) виконуються умови:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots;$

2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то він збігається, його сума додатна і не перевищує першого члена ряду.

Абсолютна і умовна ознака збіжності. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакозмінний ряд, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ утворений з модулів його членів.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, причому **абсолютно**.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ є **умовно збіжним**.

Вираз виду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ називають **функціональним** рядом, (11)

якщо $u_n(x)$ – функція.

Ознака Вейєрштрасса. Функціональний ряд (11) **абсолютно і рівномірно збіжний** на відрізку $[a;b]$, якщо існує знакододатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, такий, що $|u_n(x)|\le\alpha_n, \quad x\in[a;b]$. Функціональний ряд виду $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ називають **степеневим рядом** (12)

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (12) збіжний при $x=x_0$, то він абсолютно збіжний для всіх x, таких що $|x|<|x_0|$. Якщо при $x=x_0$ ряд (12) розбіжний, то він розбіжний всюди, де $|x|>|x_0|$.

Якщо для коефіцієнтів ряду (12) існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R \text{ або } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=R, \qquad (13)$$

то число R називається **радіусом збіжності степеневого ряду,** а інтервал $(-R;R)$ – його **інтервалом збіжності**. Причому якщо $R=0$, то ряд збігається лише в точці $x=0$. Якщо $R=+\infty$, то ряд збіжний на всій числовій осі. Питання збіжності ряду при $x=\pm R$ для кожного ряду розв'язується окремо.

Радіус збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ визначається аналогічно. Але інтервал збіжності знаходять з нерівності $|x-x_0|<R$.

Ряд Тейлора має вигляд (14):

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Ряд Маклорена маємо з ряду (14) при $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+.\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (15)$$

Розвинення деяких функцій у ряд Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ \text{де}\ x\in(-\infty;\infty) \qquad (16)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ \text{де}\ x\in(-\infty;\infty) \qquad (17)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ \text{де}\ x\in(-\infty;\infty) \qquad (18)$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n+\ldots,$$

де $x\in(-1;1)$ (19)

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,\ \text{де}\ x\in(-1;1) \qquad (20)$$

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\ \text{де}\ x\in(1;1] \qquad (21)$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ \text{де}\ x\in[-1;1] \qquad (22)$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Приклад 1.

Довести збіжність рядів і знайти їх суму:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

Розв'язання:

а) Знайдемо частинну суму ряду (2):

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, то ряд збіжний і його сума $S=1$.

Відповідь: ряд збіжний, $S=1$

б) Загальний член ряду $u_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$

Знайдемо суму перших n членів ряду:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right)+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

Так як $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1$, то ряд збігається до 1.

Відповідь: ряд збіжний, $S=1$

Приклад 2.

Дослідити на збіжність знакододатні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{\pi}{3n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

д) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+3}$

Розв'язання:

а) Для цього ряду необхідна ознака збіжності ряду (5) не виконується:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\sin\frac{1}{n}\right)=1\neq 0$, тобто ряд розбіжний.

Відповідь: ряд розбіжний

б) Оскільки $\frac{1}{n\cdot 3^n}\leq\frac{1}{3^n}$, де $n\in N$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ збіжний, як геометрична прогресія зі знаменником $q=\frac{1}{3}<1$, то за достатньою ознакою порівняння даний ряд збіжний.

Відповідь: ряд збіжний

в) За граничною ознакою порівняння (6):

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{tg\frac{\pi}{3n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{tg\frac{\pi}{3n}}{\frac{\pi}{3n}}\cdot\frac{\pi}{3}\right)=1\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\neq 0$ і простий гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний. Тому даний ряд також розбіжний.

Відповідь: ряд розбіжний

г) Скористаємось ознакою Д'Аламбера (7): $u_n=\frac{n!}{n^n}$; $u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1,$$

отже, даний ряд збіжний.

Відповідь: ряд збіжний

д) За радикальною ознакою Коші (8): $u_n = \dfrac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 3^n}$;

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot 3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1,$$ тобто ряд збіжний.

Відповідь: ряд збіжний

е) Застосуємо інтегральну ознаку Коші (9): нехай $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$, де $x \in [1;+\infty)$ і розглянемо невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+3} = \lim_{b\to+\infty} ln(x^2+3)\Big|_1^b = \infty .$$

Оскільки інтеграл розбіжний, тому і даний ряд розбіжний.

Відповідь: ряд розбіжний

Приклад 3.

Дослідити на збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{sin n\alpha}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{10^n}\right)$

Розв'язання:

а) Оскільки $\left|\dfrac{sin n\alpha}{n^3}\right| \le \dfrac{1}{n^3}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ – збіжний, як узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхле), то за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{sin n\alpha}{n^3}\right|$ збіжний, тому даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{sin n\alpha}{n^3}$ абсолютно збіжний.

Відповідь: ряд абсолютно збіжний

б) За ознакою Лейбніца: $1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > ... > \dfrac{1}{n} > ...$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, тому даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ – збіжний. А ряд, утворений з модулів його членів,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбіжний, як простий гармонічний ряд. Отже, даний ряд є умовно збіжним.

Відповідь: ряд умовно збіжний

в) Оскільки $u_n = 1+\frac{1}{10^n}$; $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)=1\neq 0$,

$1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > 1{,}0001 > \ldots$, ознака Лейбніца не виконується.

Тому ряд розбіжний.

Відповідь: ряд розбіжний

Приклад 4.

Дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$.

Розв'язання:

Маємо ряд $\frac{\sin x}{1!}+\frac{\sin 2x}{2!}+\ldots+\frac{\sin nx}{n!}+\ldots$. Скористаємось ознакою Вейєрштрасса. Оскільки при $x\in R$ і $n\in N$ $\left|\frac{\sin nx}{n!}\right|\le\frac{1}{n!}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ - збіжний за ознакою Д'Аламбера, то заданий функціональний ряд абсолютно і рівномірно збіжний на всій числовій осі.

Відповідь: ряд абсолютно і рівномірно збіжний

Приклад 5.

Знайти суму функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, якщо $|x|<\frac{1}{2}$

Розв'язання:

Оскільки при $|x|<\frac{1}{2}$ і $n\in N$ виконується нерівність $\left|nx^n\right|<\frac{n}{2^n}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ збіжний, то за ознакою Вейєрштрасса ряд $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$ рівномірно збіжний при $|x|<\frac{1}{2}$. Цей ряд утворюється почленним диференціюванням геометричної прогресії: $1+x+x^2+x^3+x^4+...=\frac{1}{1-x}$, $|x|<\frac{1}{2}$. За властивістю рівномірно збіжних рядів маємо:

$$\frac{d}{dx}(1+x^2+x^3+x^3+x^4+...)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right), |x|<\frac{1}{2}, \text{ або}$$

$$1+2x+3x^2+4x^3+...=\frac{1}{(1-x)^2},\ |x|<\frac{1}{2}, \text{ звідки}$$

$$x(1+2x+3x^2+4x^3+...)=x+2x^2+3x^3+4x^4+...=\frac{x}{(1-x)^2}, |x|<\frac{1}{2}.$$

Відповідь: сума ряду $\frac{x}{(1-x)^2}, |x|<\frac{1}{2}$

Приклад 6.

Знайти область збіжності степеневих рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-5)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{2n+1}$

Розв'язання:

а) Маємо: $a_n=\frac{1}{n!}, a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$. Отже, радіус збіжності (13) ряду: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Отже, ряд збіжний при $x\in(-\infty;\infty)$.

Відповідь: ряд збіжний на всій числовій осі.

б) Оскільки $a_n=n!, a_{n+1}=(n+1)!$, то радіус збіжності (13) даного ряду: $R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Тому ряд збіжний лише при x-$5=0$, тобто в точці $x=5$.

Відповідь: ряд збіжний в точці $x=5$

в) За ознакою Д'Аламбера:

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x-3)^{n+1}\cdot(2n+1)}{(2n+3)(2x-3)^n}\right| = |2x-3|,$$ ряд збіжний при $l<1$, тобто $|2x-3|<1$. Тому $-1<2x-3<1, \quad 1<x<2$.

Отже, радіус збіжності ряду $R=\frac{1}{2}$, а інтервал збіжності (1;2).

Щоб знайти область збіжності ряду, дослідимо збіжність в крайніх точках інтервалу (1;2).

При $x=1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, який збіжний за ознакою Лейбніца. При $x=2$ маємо знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\cdot 2-3)^n}{2n+1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$, який є розбіжним.

Отже, область збіжності даного ряду $x\in[1;2)$.

Відповідь: область збіжності ряду $[1;2)$

Приклад 7.

а) Розвинути функцію $y=\cos^2 x$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0=\frac{\pi}{3}$. Знайти область збіжності ряду до цієї функції.

б) Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=x^2\ln(1-x^3)$.

Розв'язання:

а) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x,$ $\qquad f(x_0)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{4};$

$f'(x)=-\sin 2x;$ $\qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$

$f''(x)=-\cos 2x;$ $\qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{2\pi}{3}=1;$

$f'''(x)=4\sin 2x;$ $\qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3};$

… … …

$f^{(n)}(x)=-2^{n-1}\sin\left(2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right);$ $\quad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2^{n-1}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+(n-1)\frac{\pi}{2}\right).$

Отже,

$$cos^2 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{1!} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!} \cdot 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(-2^{n-1} sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n .$$

Залишковий член ряду Тейлора $R_n(x) = \frac{-2^n}{(n+1)!} sin\left(2\varepsilon + n\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}$, де $\varepsilon \in (x; x_0)$.

Оскільки $\left| sin\left(2\varepsilon + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$, достатньо знайти область збіжності ряду з загальним членом $\frac{2^n}{(n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}$. За ознакою Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left| \frac{2^{n+1}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+2} (n+1)!}{(n+2)! 2^n \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left|x - \frac{\pi}{3}\right|}{n+2} = 0 < 1.$$

Отриманий ряд збігається для будь-якого *x*. Отже, область його збіжності до функції $f(x) = cos^2 x$ буде: $-\infty < x < \infty$.

Відповідь: $cos^2 x = \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} sin\left(\frac{2\pi}{3} + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n; \quad -\infty < x < \infty$

б) Скористаємось відомим розкладом:

$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$, де $x \in (-1;1]$; поклавши $-x^3$ замість *x*. Маємо: $ln(1-x^3) = -x^3 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{3} - \ldots - \frac{x^{3n}}{n} \ldots$, де $x \in [-1;1)$. Тоді $x^2 ln(1-x^3) = -x^5 - \frac{x^8}{2} - \frac{x^{11}}{3} - \ldots - \frac{x^{3n+2}}{n} - \ldots$, де $x \in [-1;1)$.

Відповідь: $x^2 ln(1-x^3) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{n}$, $x \in [-1;1)$

Приклад 8.

Обчислити з заданою точністю α:

а) $sin18^o, \alpha = 0{,}001$; б) $\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx, \alpha = 0{,}001$

Розв'язання:

а) Скористаємось відомим розкладом:

$sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$, де $x \in R$.

Отже, при $x = 18^o = \frac{\pi}{10}$, маємо

$sin18^o = sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{10^7 \cdot 7!} + ...$ Дістали ряд лейбніцевого типу. Оскільки $\frac{\pi}{10} > 0{,}001; \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} > 0{,}001; \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} < 0{,}001$, то з точністю до 0,001 маємо: $sin18^o \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} \approx 0{,}309$.

Відповідь: 0,309

б) Скориставшись відомим рядом $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ...\frac{x^n}{n!} + ...$, де $x \in R$, маємо: $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ...$

Цей ряд рівномірно збіжний для $x \in R$, тому

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx = \int_0^{1/3} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ...\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + ...\right)\Bigg|_0^{1/3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{10 \cdot 3^5} - \frac{1}{42 \cdot 3^7} + ...$$

Дістали ряд Лейбніца. Зважаючи на те, що $\frac{1}{3} > 0{,}001; \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} > 0{,}001; \frac{1}{10 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0{,}001$, то з точністю до 0,001 маємо $\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{81} \approx 0{,}321.$

Відповідь: 0,321

Приклад 9.

Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в ряд розв'язків рівняння: $y' = xy + y^2 + e^y, y(0) = 0$.

Розв'язання:

Шукаємо розв'язок диференціального рівняння у вигляді ряду:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots .$$

Маємо $y'(0) = e^0 = 1;\quad y'' = y + xy' + 2yy' + e^y y';\ y''(0) = 1;$

$$y''' = y' + y' + xy'' + 2(y'y' + yy'') + e^y y'' + e^y y'y';\ y'''(0) = 6.$$

Отже, $y(x) \approx x + \dfrac{x^2}{2} + x^3$.

Відповідь: $x + \dfrac{x^2}{2} + x^3$

Приклад 10.

Методом послідовного диференціювання знайти перші п'ять членів розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $4x^2 y'' + y = 0$ при початкових умовах: $y(1) = 1, y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Розв'язання:

Шукаємо розв'язок у вигляді ряду:

$$y = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 +$$

$$+ \frac{f^{IV}(1)}{4!} \cdot (x-1)^4 + \dots,$$

де $f(1) = 1; f'(1) = \dfrac{1}{2};\ f''(x) = -\dfrac{y}{4x^2};\ f''(1) = -\dfrac{1}{4};\ f'''(x) = -\dfrac{y'x^2 - 2xy}{4x^4};$

$$f'''(1) = \frac{3}{8};$$

$$f^{IV}(x) = -((y'x^2 + 2xy' - 2y - 2xy')x^4 - 4x^3(y'x^2 - 2xy)) \div (4x^8)$$

$$f^{IV}(1) = -\frac{15}{16}.$$

Отже,

$$y = 1 + \frac{1}{2} \cdot (x-1) - \frac{1}{4 \cdot 2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!} \cdot (x-1)^3 - \frac{15}{16 \cdot 4!} \cdot (x-1)^4 + \ldots,$$

$$y = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5 \cdot (x-1)^4}{128} + \ldots .$$

Відповідь: $y = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5 \cdot (x-1)^4}{128} + \ldots$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Користуючись означенням збіжності числового ряду, встановити, які ряди збігаються, і знайти суми цих рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n-2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^{n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\frac{2}{n^2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

2. Перевірити необхідну умову збіжності ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ln\frac{2n^2+n+1}{5n^2+3n+2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\pi}sin\frac{\pi}{n}$

3. Дослідити ряди на збіжність за ознаками порівняння:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^3+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}sin\frac{\pi}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$

4. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи ознаку Д'Аламбера:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ntg\frac{\pi}{2^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^{n+1}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}sin\frac{\pi}{n!}$

5. Дослідити ряди на збіжність за допомогою радикальної ознаки Коші:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{ln^n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^{n+1}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$

6. Використовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідити ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{2n^2+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$

7. Дослідити ряди на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{1}{n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+\cos n}{n}$

8. Встановити, які ряди збігаються абсолютно, умовно чи розбігаються:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

9. Знайти область збіжності функціональних рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n x$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n(1+x^2)$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$

10. Переконатися, що дані ряди рівномірно збігаються на всій числовій осі:

а) $1+\frac{\sin x}{1!}+\ldots+\frac{\sin nx}{n!}+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+x^2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\cos^2 x}$

11. Для степеневих рядів знайти область збіжності:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n x^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{4n^2+1}}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3-2x)^n}{n^2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$

12. Розвинути в ряд Тейлора функції:

а) $y=\sqrt{x^3}$ за степенями *(x-1)*; б) $y=\frac{1}{2+3x}$ за степенями *(x+2)*;

в) $y=ln(5x+3)$ за степенями *(x+1)*; в) $y=sin\frac{\pi x}{4}$ за степенями *(x-2)*.

13. Розвинути в ряд Маклорена функції:

а) $y=x^2ex$; б) $y=3^x$; в) $y=\frac{sin3x}{x}$; г) $y=ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

14. Обчислити з точністю до 0,001:

а) $cos1^o$; б) e^2; в) $\sqrt[5]{15}$; г) $ln3$; д) $arcsin0{,}2$

15. Обчислити інтеграли з точністю до 0,001:

а) $\int_{0,1}^{0,2}\frac{e^{-x}}{x^3}dx$; б) $\int_{0}^{0,5}\frac{arctgx}{x}dx$; в) $\int_{0}^{0,5}\frac{dx}{1+x^4}$; г) $\int_{0}^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

16. Використовуючи тотожність $\frac{\pi}{4}=4arctg\frac{1}{5}-arctg\frac{1}{239}$, обчислити число π з 10 знаками після коми.

17. Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розвинення в ряд розв'язку рівняння, які задовольняють початкові умови:

а) $y'=xy+ln(x+y), y(1)=0$;

б) $y'-4y+2xy^2-e^{3x}=0, y(0)=2$;

в) $y''=x^2+y^2, y(-1)=0, y'(-1)=0$;

г) $y''=x\sin y'+\cos y', y(1)=0, y'(1)=0$;

д) $y'''=y''+(y')^2+y^3+2x, y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=0$

18. Знайти п'ять перших членів розвинень у ряд розв'язків рівнянь, які задовольняють початкові умови:

а) $y' = 2\cos x + xy^2, y(0) = 1;$

б) $y'' = y\cos x + x, y(0) = 1, y'(0) = 0$

в) $y'' + y' = x^2 y, y(0) = 1, y'(0) = 0$

19. Розв'язати дані рівняння відносно y за допомогою ряду Тейлора двома способами: методом невизначених коефіцієнтів і послідовним диференціюванням:

а) $y^3 + xy = 1$ (знайти три члени розкладу);

б) $2\sin x + \sin y = x - y$ (знайти два члени розкладу);

в) $e^x - e^y = xy$ (знайти три члени розкладу)

20. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x^x dx$.

ПРАКТИКУМ З ТЕОРІЇ РЯДІВ

1. Довести збіжність ряду і знайти його суму (табл. 1)
2. Дослідити на збіжність вказані ряди з додатніми членами (табл. 2)
3. Дослідити на збіжність і абсолютну збіжність знакопочережні ряди (табл. 3)
4. Знайти область збіжності ряду (табл. 4)
5. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)$. Вказати область збіжності отриманого ряду до цієї функції (варіант 1 – 16).

   Розкласти функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки x_0. Знайти область збіжності отриманого ряду до цієї функції (варіант 17-30) (табл. 5)
6. Обчислити вказану величину наближено з заданою точністю α, скориставшись розкладом в степеневий ряд підібраної функції (табл. 6)
7. Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити визначений інтеграл з заданою точністю 0,001 (табл. 7)
8. Знайти розклад в степеневий ряд за степенями x розв'язку диференціального рівняння (записати три перших, відмінних від нуля члени цього розкладу) (табл. 8)

Таблиця 1

Варі-ант	*Ряд*		Варі-ант	*Ряд*
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$		*2*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{12^n}$
3	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)(2n+7)}$		*4*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}$
5	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+6)}$		*6*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-2^n}{10^n}$
7	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+7)(2n+9)}$		*8*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n-3^n}{12^n}$

9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)(n+7)}$		*10*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{15^n}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+9)(n+10)}$		*12*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-3^n}{15^n}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+7)(n+8)}$		*14*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+7^n}{14^n}$
15	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$		*16*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-2^n}{14^n}$
17	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$		*18*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+5^n}{20^n}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}$		*20*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-4^n}{20^n}$
21	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$		*22*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+3^n}{21^n}$
23	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$		*24*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-3^n}{21^n}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$		*26*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+8^n}{24^n}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$		*28*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n-3^n}{24^n}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$		*30*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n-2^n}{18^n}$

Таблиця 2

Варі-ант	*Ряд*		Варі-ант	*Ряд*
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2+1}\right)^2$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$		*2*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n\left(\frac{1}{n}\right)^7$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{2n+1}\right)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n^2+1}$		*4*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)tg\frac{\pi}{3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+2))^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+3n}}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n/2}}{3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{2^n}\right)^{3n}$		*6*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot5\cdot6\ldots(n+3)}{5\cdot7\cdot9\ldots(2n+3)}$;

	; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(3n+4)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$			$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^7 n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$; $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{5^n}\right)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7+n}{49+n^2}\right)^2$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}$		8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot7\cdot13\ldots(6n-5)}{2\cdot3\cdot4\ldots(n+1)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n/(n+1))^{n^2}}{2^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+3}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n(n+1)}{5^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$; $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$; $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{\pi}{3^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^2}$		10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\ln(5n-2)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+1)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-1)(6n+3)}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{2\pi}{3^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+3))^n}$;		12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n/2}}{n!}$;

Продовження табл. 2

	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6+n}{36+n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$			$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{(3+7n)^{10}}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+3)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n(n+3)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n^2+5}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+n}$		14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 6\cdot 11\ldots(5n-4)}{3\cdot 7\cdot 11\ldots(4n-1)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n^3}\right)^{2n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2-n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2}$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+3)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+5)\ln(10n+5)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{3^n}$		16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3 tg\frac{2\pi}{5^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{((n+1)/n)^{n^2}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+4)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$

17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)}{(n+1)!}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(ln(n+1))^{3^n}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+n}{25+n^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty}sin\frac{2\pi}{3^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+3)!}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)ln(n+3)ln(ln(n+3))}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arcsin\frac{1}{3^n}\right)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+2n)ln^5(3+2n)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{2n}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+5}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{3\cdot 7\cdot 11\ldots(4n-1)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(4+9n)^5}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)sin\frac{\pi}{4^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^n$;	22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{9+n^2-2n}$;

	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(9n-4)\ln^2(9n-4)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$		$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n-1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n)!}$
23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 7^n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(7n-1)}$	24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[8]{(7n-5)^3}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{4n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
25	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left((n+1)/n\right)^{n^2}}{5^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln(n+4)\ln(\ln(n+4))}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{7n+1}}$	26	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\ldots(5n-3)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{2n+1}\right)^{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+8n)\ln^3(3+8n)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+5}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{9^n}$
27	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{5n+1}\right)^{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(4n-3)^3}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$;	28	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^3}{(2n)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+3)\ln^2(10n+3)}$;

	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-7}{3n^4+5n-2}$			$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2+4}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+5)}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n(2n-1)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(\ln(n+5))^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{4+n^2-n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2+3}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+7}\right)^{n^2}$		*30*	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln(n+5)\ln(\ln(n+5))}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+6)}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{(n-1)!}$

Таблиця 3

Варі-ант	*Ряд*		Варі-ант	*Ряд*
1	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$		*2*	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$
3	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$		*4*	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$;

				$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$		6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n^4}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{3^n}$		8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+1}{n^3}$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^3+1}$		10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\ln(n+1))^n}$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(\ln n)^2}$		12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+5}{3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-1}$; $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n}$		14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n-1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)!}$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n-1)3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{12^n}$		16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$;

			$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^{3/2}}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{9n-1}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{3n^2+1}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(5n+1)^n}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{7^n}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{n^2}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3}{\ln(n+1)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{n^2+1}$
23	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{5n(n+1)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{8^n}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3^n}{2n+2}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+4)}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+5}}$; $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin^n\frac{\pi}{6n}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+5}{3^n}$;	28	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$;

	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+2)}$			$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n-3}{n^2-1}$
29	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt[5]{(n+1)^3}}$		*30*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{4n}{5n+1}\right)$

Таблиця 4

Варі-ант	*Ряд*		Варі-ант	*Ряд*
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{n^2+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}x^n}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$		*2*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n/2}x^n}{(n+1)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n^n\ln(1+1/n)}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{8^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^n x}{n^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{2^n}$		*4*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n^2}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+8)^n}{n^2}$		*6*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{(n+1)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2+x)^n$

7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{2n-1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$		*8*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{2^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2 x}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n^2}(x+2)^{n^2}$		*10*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\frac{x}{2^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n(n+1)x^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+10)^n}{n^n}$		*12*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n tg\frac{x}{2^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{x^n}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{nx^n}}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1}(x+1)^n$		*14*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x-2)^n}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2-x)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n n\ln n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2x)^n}{n-\ln^2 n}$		*16*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$
17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(0.1)^n x^{2n}}{n}$;		*18*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lg x)^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(nx)^n}$;

	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\sqrt{2n+1}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$		$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$
19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$	20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$
21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{x}{3^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$	22	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$
23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,x^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$	24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$
25	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{3n-1}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$	26	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$
27	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2 x}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$	28	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$

Закінчення табл. 4

29	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n tg\frac{1}{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)ln(n+1)}$		30	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$

Таблиця 5

Варі-ант	*Функція*		Варі-ант	*Функція*
1	$f(x)=\cos 5x$		2	$f(x)=x^3 arctgx$
3	$f(x)=sin x^2$		4	$f(x)=\frac{x^2}{1+x}$
5	$f(x)=\cos\frac{2x^3}{3}$		6	$f(x)=\frac{2}{1-3x^2}$
7	$f(x)=e^{3x}$		8	$f(x)=\frac{1}{1+x}$
9	$f(x)=\cos(2x^3)$		10	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x}}$
11	$f(x)=\sin(x+3)$		12	$f(x)=e^{-x^4}$
13	$f(x)=2^{-x^2}$		14	$f(x)=5^x$
15	$f(x)=x\cos\sqrt{x}$		16	$f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$

Закінчення табл. 5

17	$f(x)=\frac{1}{x}, x_0=-2$		18	$f(x)=\frac{1}{x+3}, x_0=-2$
19	$f(x)=e^x, x_0=1$		20	$f(x)=\frac{1}{2x+5}, x_0=3$
21	$f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}, x_0=1$		22	$f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}, x_0=2$
23	$f(x)=\ln(5x+3), x_0=\frac{2}{5}$		24	$f(x)=\ln\frac{1}{x^2-2x+2}, x_0=1$
25	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4+x}}, x_0=-3$		26	$f(x)=\cos x, x_0=\frac{\pi}{4}$
27	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}, x_0=2$		28	$f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}, x_0=-2$
29	$f(x)=\sin x, x_0=\frac{\pi}{3}$		30	$f(x)=\ln(5x+3), x_0=1$

Таблиця 6

Варі-ант	*Функція*		Варі-ант	*Функція*
1	$e, \alpha=0{,}0001$		2	$\sqrt[5]{250}, \alpha=0{,}01$
3	$\sin 1, \alpha=0{,}00001$		4	$\sqrt{1{,}3}, \alpha=0{,}001$
5	$arctg\frac{\pi}{10}, \alpha=0{,}001$		6	$\ln 3, \alpha=0{,}0001$
7	$\cos 2, \alpha=0{,}0001$		8	$\lg e, \alpha=0{,}0001$
9	$\pi, \alpha=0{,}00001$		10	$e^2, \alpha=0{,}001$
11	$\cos 2^o, \alpha=0{,}001$		12	$\sqrt[3]{80}, \alpha=0{,}001$

13	$ln5, \alpha = 0{,}001$		14	$arctg\frac{1}{2}, \alpha = 0{,}001$
15	$\sqrt[6]{738}, \alpha = 0{,}001$		16	$\sqrt[3]{e}, \alpha = 0{,}00001$
17	$sin1^o, \alpha = 0{,}0001$		18	$\sqrt[3]{8{,}36}, \alpha = 0{,}001$
19	$ln10, \alpha = 0{,}0001$		20	$arcsin\frac{1}{3}, \alpha = 0{,}001$
21	$lg7, \alpha = 0{,}001$		22	$\sqrt{e}, \alpha = 0{,}0001$
23	$cos10^o, \alpha = 0{,}0001$		24	$\frac{1}{\sqrt[3]{30}}, \alpha = 0{,}001$
25	$\sqrt[10]{1080}, \alpha = 0{,}001$		26	$\frac{1}{e}, \alpha = 0{,}0001$
27	$sin\frac{\pi}{100}, \alpha = 0{,}0001$		28	$\sqrt[4]{90}, \alpha = 0{,}001$
29	$\frac{1}{\sqrt[7]{136}}, \alpha = 0{,}001$		30	$\frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \alpha = 0{,}001$

Таблиця 7

Варі-ант	*Функція*		Варі-ант	*Функція*
1	$\int_0^{0{,}25} ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$		2	$\int_0^1 arctg\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$
3	$\int_0^{0{,}2} \sqrt{x}e^{-x}dx$		4	$\int_0^{0{,}5} \frac{arctgx}{x}dx$

5	$\int\limits_0^{0,2}\sqrt{x}\cos x dx$		6	$\int\limits_0^{0,5} ln\left(1+x^3\right)dx$
7	$\int\limits_0^{1} x^2 \sin x dx$		8	$\int\limits_0^{1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
9	$\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}dx$		10	$\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$
11	$\int\limits_0^{1} \sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}}dx$		12	$\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x}dx$
13	$\int\limits_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}dx$		14	$\int\limits_0^{0,5} x^2\cos 3x dx$
15	$\int\limits_0^{0,5} ln(1+x^2)dx$		16	$\int\limits_0^{0,4} \sqrt{x}e^{-\frac{x}{4}}dx$
17	$\int\limits_{0,3}^{0,5} \frac{1+\cos x}{x^2}dx$		18	$\int\limits_0^{0,5} \frac{arctgx^2}{x^2}dx$
19	$\int\limits_0^{0,8} \frac{1-\cos x}{x}dx$		20	$\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx$
21	$\int\limits_0^{0,1} \frac{ln(1+x)}{x}dx$		22	$\int\limits_0^{1} \cos\sqrt[3]{x}dx$
23	$\int\limits_0^{1} \sqrt{x}\sin dx$		24	$\int\limits_0^{25} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}dx$

Закінчення табл. 7

25	$\int_0^1 \cos\frac{x^2}{4}dx$		26	$\int_0^1 arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)dx$
27	$\int_0^{0,5} \frac{x-arctgx}{x^2}dx$		28	$\int_0^{0,4} \sqrt{1-x^3}dx$
29	$\int_0^{0,5} e^{-x^2}dx$		30	$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}dx$

Таблиця 8

Варі-ант	*Рівняння*		Варі-ант	*Рівняння*
1	$y' = xy + e^y, y(0) = 0$		2	$y' = x^2y^2 + 1, y(0) = 1$
3	$y' = x^2 - y^2, y(0) = \frac{1}{2}$		4	$y' = x^3 + y^3, y(0) = \frac{1}{2}$
5	$y' = x + y^2, y(0) = -1$		6	$y' = x + x^2 + y^2, y(0) = 1$
7	$y' = 2\cos x - xy^2, y(0) = 1$		8	$y' = e^x - y^2, y(0) = 0$
9	$y' = x + y + y^2, y(0) = 1$		10	$y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$
11	$y' = x^2y^2 + \sin x, y(0) = \frac{1}{2}$		12	$y' = 2y^2 + ye^x, y(0) = \frac{1}{3}$
13	$y' = e^{3x} + 2xy^2, y(0) = 1$		14	$y' = x + e^y, y(0) = 0$
15	$y' = y\cos x + 2\cos y, y(0) = 0$		16	$y' = x^2 + 2y^2, y(0) = 0,2$
17	$y' = x^2 + xy + y^2, y(0) = 0,5$		18	$y' = e^{\sin x} + x, y(0) = 0$
19	$y' = xy - y^2, y(0) = 0,2$		20	$y' = 2x + y^2 + e^x, y(0) = 1$

Закінчення табл. 8

21	$y' = x\sin x - y^2, y(0) = 1$		22	$y' = 2x^2 - xy, y(0) = 0$
23	$y' = x - 2y^2, y(0) = 0{,}5$		24	$y' = xe^x + 2y^2, y(0) = 0$
25	$y' = xy + x^2 + y^2, y(0) = 1$		26	$y' = xy + e^x, y(0) = 0$
27	$y' = ye^x, y(0) = 1$		28	$y' = 2\sin x + xy, y(0) = 0$
29	$y' = x^2 + e^y, y(0) = 0$		30	$y' = x^2 + y, y(0) = 1$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П. Вища математика : навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2020. – 647 с.

2. Дубовик В.П. Вища математика : Збірник задач : навч. посіб. / В.П. Дубовик та ін. – Київ : «Ігнатекс-Україна», 2020. – 480 с.

3. Турчанінова Л.І. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. / Л.І. Турчанінова, О.В. Доля. – Київ : «Ліра-К», 2021. – 348 с.

4. Вища математика : Модуль 1 (ЗМ 1, ЗМ 2). Лінійна алгебра та векторний аналіз. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних : методичні вказівки до виконання самостійних та індивідуальних робіт / уклад. : О.В. Доля, О.В. Забарило, Ю.А. Коротких, Ю.В. Рябчун. – Київ : КНУБА, 2023. – 94 с.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 2 (ЗМ 4). Ряди

Методичні вказівки
до виконання самостійних та індивідуальних робіт
для здобувачів ОПП першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
інженерних та природничих спеціальностей всіх форм навчання

Укладачі: **Доля** Олена Вікторівна,
Рябчун Юлія Володимирівна,
Турчанінова Людмила Іванівна

Випусковий редактор *Л. С. Тавлуй*
Комп'ютерне верстання *К. А. Мавроді*

Підписано до друку 13.05.2025. Формат 60 x $84_{1/16}$
Ум. друк. арк. 2,56. Обл.-вид. арк. 2,75.
Електронний документ. Вид. № 36/ІІІ-25

Видавець і виготовлювач:
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 2 (ЗМ 4). Ряди

Методичні вказівки до виконання самостійних та індивідуальних робіт для здобувачів ОПП 1-го рівня вищої освіти (бакалавр) інженерних та природничих спеціальностей всіх форм навчання КНУБА

Всі цитати, цифровий
та фактичний матеріал,
бібліографічні відомості
перевірені. Написання
одиниць вимірювання
відповідає стандартам

Підпис (и) автора (ів) ________________________________

____

____

«____» ________________2024 р.

Підпис голови методичної комісії факультету

____

«____» ________________2024 р.

Київ 2024