

УДК 539.3

Гайдайчук В.В., д.т.н., проф.

Киричук О.А., д.т.н., проф.

Палій О.М., асистент

ДИНАМІКА ПОВЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ ТОНКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Сучасні тонкостінні оболонки відрізняються високою міцністю і легкістю, що обумовлює їх раціональне використання в різних галузях сучасної техніки. Вони є елементами багатьох будівельних конструкцій, використовуються в хімічному та енергетичному машинобудуванні, в судобудівництві, в сучасній ракетній техніці та авіабудівництві, в нафтовій та газовій промисловостях.

В процесі експлуатації оболонкові конструкції сприймають інтенсивні технологічні навантаження, в тому числі і динамічні, які змінюються періодично за часом. Прикладом можуть бути вібраційні кінематичні збурення оболонки корпусу літака або ракетного носія від працюючого двигуна, дії сейсмічних хвиль на резервуари з паливом, періодичні коливання будівельної конструкції, що розташована біля залізничної колії, від потягу, що рухається на великій швидкості. В деяких випадках періодичні навантаження приводять до виникнення в оболонкових конструкціях параметричних коливань, перпендикулярних до напрямку дії періодичного навантаження. Це приводить до появи в оболонках фізичних явищ і ефектів [1,2], які властиві нелінійним механічним системам. До них можна віднести складні резонансні режими коливань, існування кількох форм коливань при одних і тих же параметрах періодичного навантаження, ефект стабілізації нестійких станів рівноваги високочастотними параметричними коливаннями.

Амплітуди параметричних коливань оболонок можуть перевищувати допустимі значення експлуатації і порушувати стійкість їх форм. З теорії параметричних коливань відомо [3], що найбільш небезпечними випадками коливань є зони параметричних резонансів, коли співвідношення між частотою прикладеної сили(θ) та частотою власних коливань(ω) визначається залежністю

$$\frac{\omega}{\theta} = \frac{\kappa}{2}, \quad \kappa=1,2,3,\dots$$

Формула дає співвідношення між частотою зовнішніх сил і частотою власних коливань, поблизу яких виникають необмежено зростаючі

коливання оболонки резонансного характеру, що може призвести до втрати стійкості її форми. Тому дослідження динаміки тонкостінних конструкцій, зокрема визначення поведінки тонких оболонок при дії реальних динамічних навантажень вимагає, перш за все, знання їх динамічних характеристик, а саме спектра власних частот і відповідні їм форми коливань. Наявність зазначених характеристик дозволяє визначати такі експлуатаційні параметри оболонок, які виключають можливість резонансу.

Для визначення динамічних характеристик тонких симетричних оболонок використаємо метод [3], основні припущення якого коротко полягають в наступному. Симетричними оболонками будемо вважати тонкостінні оболонки, серединна поверхня яких утворена обертанням твірної довільної форми навколо осі. Будемо розглядати лише рівномірно розподілене, нормальне до поверхні оболонки або повздовжнє навантаження, що характеризується симетрією щодо осі обертання оболонки. Коливання можуть бути ініційовані силовим періодичним за часом навантаженням. У такому випадку при відсутності початкових недосконалостей форми поверхні усталені коливання оболонок при малих значеннях параметра інтенсивності збурювання реалізуються по симетричним відносно осі формам, які ми будемо називати симетричними, з частотою, рівною частоті збурювання. Зі зростанням інтенсивності силового збурювання при фіксованій частоті змущених коливань їхні симетричні моди можуть трансформуватися в циклічно симетричні. Крім того, за певних умов усталені коливання оболонок, залишаючись симетричними, можуть різко збільшити амплітуду і змінити форму коливань. Перераховані фактори характеризують втрату стійкості усталеного руху і їм відповідають особливі точки на кривих стаціонарних станів. Тому дослідження стійкості усталеного руху на основі пропонованого підходу пов'язано з побудовою кривих стаціонарних станів, що цілком описують еволюцію коливань, і відшукуванням на кривих особливих (граничних і біфуркаційних) точок. Такий підхід традиційно називається дослідженням стійкості коливань в амплітудній області при фіксованій частоті коливання оболонок. У випадку, коли дослідження стійкості коливань розглядається при варіюванні частоти, його можна віднести до частотної області дослідження.

Нелінійні диференціальні рівняння коливань оболонок

$$\frac{\partial \sqrt{a} \vec{T}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \sqrt{a} \vec{q}(t) - \sqrt{a} \gamma h \vec{w} = 0;$$

$$\frac{\partial \sqrt{a} \vec{M}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \left[\vec{e}_{\alpha} \times \vec{T}^{\alpha} \right] \sqrt{a} = 0,$$

де a – фундаментальний детермінант метричного тензора поверхні оболонки, h – товщина, γ – щільність матеріалу, $\vec{T}^\alpha$, $\vec{M}^\alpha$ – вектори внутрішніх зусиль та моментів, $\vec{w}$ – вектор прискорення, $\vec{q}(t)$ – вектор зовнішніх навантажень, дискретизуються в напрямку твірної за допомогою модифікованого кінцево-різницевого метода криволінійних сіток [4]. В круговому напрямку компоненти вектора переміщень елемента серединної поверхні оболонки апроксимуються тригонометричними рядами. Розв'язок отриманої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь будується методом продовження розв'язку по параметру в поєднанні з методом Ньютона – Канторовича. Критерієм втрати стійкості коливань оболонки є рівність нулю визначника матриці лінеаризованих рівнянь. Граничне (критичне) значення амплітуди періодичного збудження, яке відповідає цьому стану системи, характеризує втрату стійкості параметричних коливань, при якому відбувається інтенсивний збільшення амплітуди коливань. Втрата стійкості коливань, яка супроводжується різкою перебудовою форм усталених коливань, визначає біфуркаційне значення параметра інтенсивності збудження. Зазначений підхід дозволяє будувати залежності між амплітудою навантаження і амплітудою коливань оболонки при фіксованій частоті коливань і знаходити на цих кривих особливі точки, які відповідають втраті стійкості коливань оболонок [5].

З метою оцінки працездатності та достовірності розробленого методу була сформульована задача визначення з його допомогою нижчих власних частот та форм повздовжніх коливань кругової циліндричної оболонки. Геометричні розміри оболонки становлять: товщина $h=0,002\text{м}$, радіус $R=0,2\text{м}$, висота $L=0,48\text{м}$; фізичні параметри: коефіцієнт Пуассона $\mu=0,3$, модуль пружності $E=2,06 \cdot 10^{11}\text{Н/м}^2$; граничні умови – на одному кінці оболонка жорстко закріплена, а на іншому – ковзаюче кріплення вздовж твірної.

Пошук нижчої частоти власних коливань оболонки здійснюється на основі приведеного нижче алгоритму. Початкове значення параметра частоти ω_0 малих коливань в межах недеформованого стану оболонки, як правило, вибирається нульовим. Послідовно збільшуючи параметр ω на деяку фіксовану величину $\Delta\omega$ і розв'язуючи для кожного значення частоти лінійну задачу, отримаємо неперервну послідовність стаціонарних станів системи, яка визначає амплітудно-частотну характеристику її малих коливань. На кожному кроці розв'язку лінійної задачі по варійованій частоті ω аналізується поведінка визначника системи рівнянь. Граничне значення параметра ω_k^* , при якому

відбувається зміна знака визначника в порівнянні з параметром ω_{k-1} , характеризує одну з власних частот. Мінімальне значення ω_k^* відповідає першій нижчій частоті власних коливань оболонки.

Описаний алгоритм застосовується також і для визначення власних частот циклічно симетричних форм коливань оболонки. В цьому випадку аналізується визначник матриці лінійної системи, що відповідає несиметричній формі руху при $n > 0$ та шукається таке значення ω_k^* , при якому відбувається зміна знаку визначника.

Користуючись програмним комплексом, який реалізує зазначений вище метод, в діапазоні зміни частоти коливань $0 \leq \omega \leq 1000$ Гц були отримані результати перших п'яти власних частот повздовжніх коливань циліндричної оболонки:

$$\omega_{15}^* \approx 490,05 \text{ Гц}; \quad \omega_{26}^* \approx 533,01 \text{ Гц}; \quad \omega_{34}^* \approx 561,78 \text{ Гц};$$

$$\omega_{47}^* \approx 651,84 \text{ Гц}; \quad \omega_{53}^* \approx 781,7807 \text{ Гц}.$$

Для визначення достовірності і точності отриманих результатів було виконано їх порівняння з результатами, отриманими за допомогою програмного комплексу NASTRAN:

$$\omega_{15}^* \approx 485,8075 \text{ Гц}; \quad \omega_{26}^* \approx 527,9954 \text{ Гц}; \quad \omega_{34}^* \approx 557,9566 \text{ Гц};$$

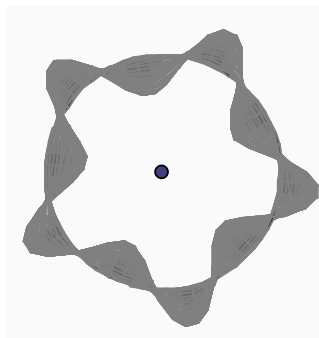
$$\omega_{47}^* \approx 645,653 \text{ Гц}; \quad \omega_{53}^* \approx 779,4727 \text{ Гц}.$$

Форми власних коливань циліндричної оболонки, що відповідають спектру нижчих частот, приведені на рис. 1 - 5.

На рис. 1 зображена форма коливань оболонки при найнижчій власній частоті $\omega_{15}^* \approx 485,8075$ Гц. Кількість гармонік в коловому напрямку $n=5$, що характеризує циклічно симетричну форму руху.

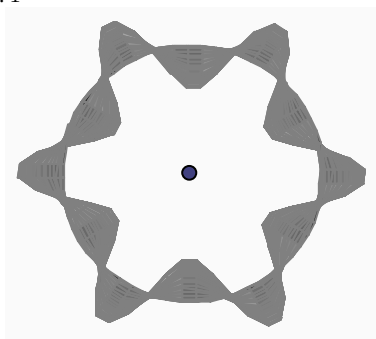
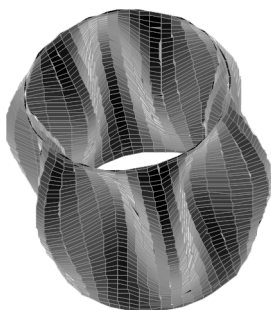
На рис. 2 зображена циклічно симетрична форма коливань з частотою $\omega_{26}^* \approx 527,9954$ Гц. Кількість гармонік в коловому напрямку $n=6$.

На рис. 3, 4 і 5 зображені циклічно симетричні форми коливань з частотами 557,9566 Гц, 645,653 Гц, 779,4727 Гц, що відповідають коливанням з 4,7,3 хвилями в коловому напрямку відповідно.



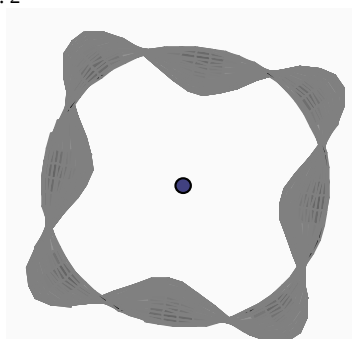
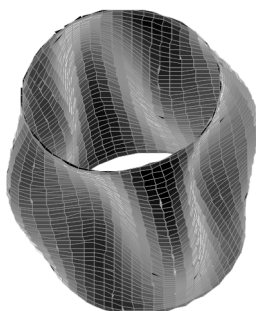
$$\omega_{15}^* \approx 485,8075 \text{ Гц}$$

Рис. 1



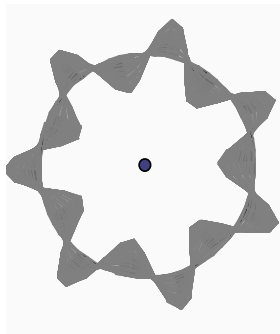
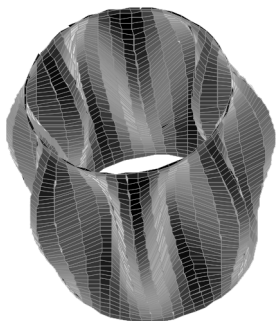
$$\omega_{26}^* \approx 527,9954 \text{ Гц}$$

Рис. 2



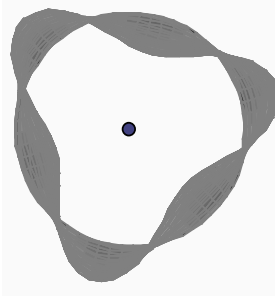
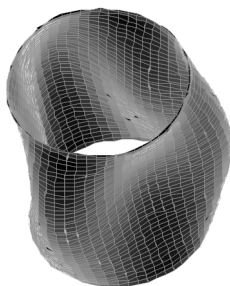
$$\omega_{34}^* \approx 557,9566 \text{ Гц}$$

Рис. 3



$$\omega_{47}^* \approx 645,653 \text{ Гц}$$

Рис. 4



$$\omega_{53}^* \approx 779,4727 \text{ Гц}$$

Рис. 5

При порівнянні результатів, одержаних за допомогою описаної методики та програмного комплексу NASTRAN можна зробити висновок, що найбільше відхилення в розрахунках не перевищує 2%.

1. Тимошенко С.П.. Устойчивость стержней пластин и оболочек. –М.: Наука, 1971.,- 808 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. –М.: Наука, 1967, - 984 с.
3. Гайдайчук В.В., Киричук А.А., Палий О.Н. .Численно-аналитический метод исследования установившихся колебаний оболочечных конструкций. – Математические модели в образовании, науке и промышленности: Сборник научных трудов. – Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2003, -55-58с.
4. Гоцуляк Е.А., Ермишев В.И., Жадрасинов Н.Т. Применение метода криволинейных сеток к расчету оболочек. – Киев, КИСИ (деп. в УкрНИИНТИ - N 2557) -23 с.
5. A.Kirichuk, T. Most, C. Bucher. Numerical nonlinear stability analysis of kinematically excited shells. –International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 1(5) 61-74 (2003).