МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

І. С. Безклубенко, О. І. Баліна,
О. І. Серпінська

ТЕОРІЯ РЯДІВ ДІЙСНОЇ ТА КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Числові та функціональні ряди

Рекомендовано вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури як навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю F6 (126) «Інформаційні системи та технології» освітньої програми «Інформаційні системи та технології»

Київ 2026

УДК 517
Б39

Рецензенти: *Ю. П. Буценко*, канд, фіз.-мат. наук. доцент, Національний технічний університет «Київський політехнічний інститут» ім. Ігоря Сікорського;
І. М. Доманецька, канд. техн. наук, доцент, Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка;
О. В. Доля, канд, фіз.-мат. наук. доцент, Київський національний університет будівництва та архітектури

Затверджено на засіданні вченої ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № 36 від 24 вересня 202 року.

Безклубенко І. С.
Б39 Теорія рядів дійсної та комплексної змінної. Числові та функціональні ряди : навчальний посібник / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна, О. І. Серпінська. – Київ : КНУБА, 2026. – 208 с.

ISBN 978-966-627-291-4

Розглянуто основи теорії числових і функціональних рядів та їх застосування до прикладних задач відповідно до програми другого курсу. Наведено основні теоретичні відомості, систематизовану добірку задач, без вміння розв'язувати які неможлива підготовка сучасного інженера. Містить розв'язок типового варіанта, 30 варіантів індивідуальних завдань, кожен варіант складається з 28 завдань (50 задач), список літератури.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальностей F6 (126) «Інформаційні системи та технології».

УДК 517

ISBN 978-966-627-291-4

ЗМІСТ

Вступ

Навчальний посібник з розділу «Числові та функціональні ряди» дисципліни «Теорія рядів дійсної та комплексної змінної», призначений для здобувачів технічних спеціальностей, допоможе студентам опрацювати тему «Числові та функціональні ряди», виробити вміння та практичні навички розв’язування основних задач. Це, зі свого боку, забезпечить успішне засвоєння матеріалу, передбаченого основними розділами робочої навчальної програми дисципліни «Теорія рядів дійсної та комплексної змінної» з вищої математики здобувачів спеціальностей F6 (126) «Інформаційні системи та технології».

Навчальний посібник «Числові та функціональні ряди» може бути рекомендований для використання викладачами вищої математики як допоміжний матеріал у підготовці та проведенні практичних занять, як збірник задач для виконання індивідуальної розрахункової або курсової роботи з теми «Числові та функціональні ряди» для студентів очної та заочної форм навчання.

Індивідуальна робота є логічним продовженням лекційного курсу та практичних занять із дисципліни «Теорія рядів дійсної та комплексної змінної» і сполучною ланкою для переходу від виконання навчальних завдань до проведення самостійної роботи за реальною тематикою.

Метою індивідуальної (курсової або розрахункової) роботи є закріплення практичних навичок та вмінь щодо використання та поглиблення набутих знань з модуля 1 «Ряди», а саме: студенти мають ***знати***

ознаки збіжності рядів з додатними членами;

теорему Лейбніца для знакозмінних рядів;

знаходження області збіжності функціонального ряду;

теорему Абеля для степеневих рядів;

розвинення елементарних функцій у ряд.

До *основних задач* індивідуальної роботи належить ідея застосування математичного апарату теорії рядів до дослідження на збіжність рядів та застосування вивчених математичних методів до наближених обчислень у прикладних задачах.

У процесі виконання роботи студенти повинні продемонструвати вміння застосовувати на практиці теоретичні знання, отримані під час вивчення дисципліни, а саме: ***вміти***

дослідити на збіжність ряди з додатними членами,

дослідити на збіжність знакозмінні ряди;

знайти область збіжності степеневого ряду.

Приклад виконання розрахункової роботи. Модуль 1

Варіант №

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

Розв'язання Запишемо числовий ряд у розгорнутому вигляді:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots$$

Видно, що числовий ряд є нескінченною геометричною прогресією з першим членом рівним $\frac{1}{5}$ і знаменником також рівним $\frac{1}{5}$.

Тоді його частинна сума дорівнює

$$S_n=\frac{\frac{1}{5}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}\left[1-\left[\frac{1}{5}\right]^n\right].$$

Оскільки $S_n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{4}$, то числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ збігається, а його сума дорівнює $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n} = \frac{1}{4}$.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n!}, \qquad\qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2}{n^3+n-1}.$$

Розв'язання Застосуємо ознаку Даламбера.

а) Оскільки $u_n = \frac{2^n+1}{n!}$, то $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}+1}{(n+1)!}$,

отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+1}+1)n!}{(2^n+1)(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\frac{2+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}\right) = 0 < 1,$$

за ознакою Даламбера числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n!}$ збігається.

б) Оскільки $u_n = \frac{3^n+2}{n^3+n-1}$, то $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}+2}{(n+1)^3+n}$,

отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3^{n+1}+2)(n^3+n-1)}{(3^n+2)[(n+1)^3+n]}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n-1}{(n+1)^3+n}\,\frac{3^{n+1}+2}{3^n+2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n^2}}\,\frac{3+\frac{2}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}}\right)=3>1,$$

за ознакою Даламбера числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+2}{n^3+n-1}$ розбігається.

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n^2+n-2)^n}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}5^n\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^n.$$

Розв'язання Застосуємо радикальну ознаку Коші.

а) Оскільки $u_n=\dfrac{1}{(2n^2+n-2)^n}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2+n-2}=0<1,$$

отже, числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n^2+n-2)^n}$$

збігається.

б) Оскільки $u_n=5^n\left(\dfrac{n^2+2}{n^2+3}\right)^n$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = 5\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+3} = 5 > 1,$$

отже, числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n\left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^n$$

розбігається.

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[4]{\ln n}}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^4 n}}.$$

Розв'язання Застосуємо інтегральну ознаку збіжності Коші числових рядів.

а) Функція $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt[4]{\ln x}}$ є неперервною та монотонно спадною на проміжку $[2,\infty)$. Оскільки

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\sqrt[4]{\ln x}}dx = \lim_{B\to\infty}\int_2^{B}\frac{1}{x\sqrt[4]{\ln x}}dx = \lim_{B\to\infty}\int_2^{B}\frac{d\ln x}{\sqrt[4]{\ln x}} =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \ln x, \\ x_1 = 2 \Rightarrow t_1 = \ln 2, \quad x_2 = B \Rightarrow t_2 = \ln B \end{bmatrix} = \lim_{B\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln B}\frac{dt}{\sqrt[4]{t}} = \lim_{B\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln B} t^{-\frac{1}{4}}dt =$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{B\to\infty} t^{\frac{3}{4}}\Big|_{\ln 2}^{\ln B} = \frac{4}{3}\lim_{B\to\infty}\left((\ln B)^{\frac{3}{4}} - (\ln 2)^{\frac{3}{4}}\right) = \infty,$$

то і числовий ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[4]{\ln n}}$$

теж розбігається.

б) Функція $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^4 n}}$. є неперервною та монотонно спадною на проміжку $[2,\infty)$. Оскільки

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln^4 x}}\,dx = \lim_{B\to\infty}\int_{2}^{B} \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln^4 x}}\,dx = \lim_{B\to\infty}\int_{2}^{B} \frac{d\ln x}{\sqrt[3]{\ln^4 x}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = \ln x, \\ x_1 = 2 \Rightarrow t_1 = \ln 2, \quad x_2 = B \Rightarrow t_2 = \ln B \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{B\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln B} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4}} = \lim_{B\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln B} t^{-\frac{4}{3}}dt =$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{B\to\infty} t^{-\frac{4}{3}}\Bigg|_{\ln 2}^{\ln B} = -3\lim_{B\to\infty}\left((\ln B)^{-\frac{1}{3}} - (\ln 2)^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{\ln 2}},$$

то і числовий ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^4 n}}$$

теж збігається.

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}\,(\cos^2 n + 2)}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\sin^4 n + 5}}{\sqrt[3]{n^8}}.$$

Розв'язання Застосуємо ознаку порівняння числових рядів.

а) Оскільки $\cos^2 n \le 1$, то $\cos^2 n + 2 \le 3$, то

$$\sqrt[5]{n^3}(\cos^2 n + 2) \le 3\sqrt[5]{n^3},$$

$$\text{отже, } \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}(\cos^2 n+2)} \geq \frac{1}{3\sqrt[5]{n^3}} = v_n.$$

Оскільки числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}}$ є узагальненим гармонічним рядом із $p = \frac{3}{5} \leq 1$, то він розбіжний. Отже, за ознакою порівняння числових рядів числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}\,(\cos^2 n+2)}$$

також розбіжний.

б) Оскільки $\sin^4 n \leq 1$, то $\sin^4 n + 5 \leq 6$, то

$$\sqrt[3]{\sin^4 n+5} \leq \sqrt[5]{6},$$

$$\text{отже, } \frac{\sqrt[3]{\sin^4 n+5}}{\sqrt[3]{n^8}} \leq \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{n^8}} = v_n.$$

Оскільки числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{n^8}} = \sqrt[3]{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^8}}$ збігається (числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^8}}$ є узагальненим гармонічним рядом із $p = \frac{8}{3} > 1$), то за ознакою порівняння числових рядів числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\sin^4 n+5}}{\sqrt[3]{n^8}}$ також збіжний.

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n+1}{2^n(n+3)}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}.$$

Розв'язання

а) Цей числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n+1}{2^n(n+3)}$

є знакопереміжним. Якщо $n\to\infty$ $u_n\to 0$ і монотонно спадає, то за ознакою Лейбніца він збіжний. Дослідим його на абсолютну збіжність. Запишемо ряд з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{2^n(n+3)}.$$

Застосуємо ознаку порівняння числових рядів. Порівняємо його з рядом $\sum_{n=1}^{\infty}v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. У силу того, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2^n+1)n}{2^n(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\,\frac{2^n+1}{2^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{1+\frac{3}{n}}\right) = 1 \in \left]0,\infty\right[$$

і числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ розбігається (він є гармонічним рядом), то

розбігається і числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, отже, числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n+1}{2^n(n+3)}$$

умовно збіжний.

б) Цей числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$ є знакопереміжним. Оскільки числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{4^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ збігається (або за ознакою Даламбера, або за радикальною ознакою Коші, або цей числовий ряд є нескінченною геометричною прогресією зі знаменником за модулем меншим за одиницю), випливає абсолютна збіжність числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$.

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2n+3}{6n+7},\qquad б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n\ln(4n)},\qquad в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{2^n},$$

$$г)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right),\quad д)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-3n+5}{6n^2-n+3},\quad е)\sum_{n=1}^{\infty}tg^n\,\frac{n^2}{n^4+2}.$$

а) *Розв'язання* Цей числовий ряд є знакопереміжним. Загальний член цього ряду має вигляд: $u_n=(-1)^n\,\frac{2n+3}{6n+7}$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{6n+7} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{6+\frac{7}{n}}\right) = \frac{1}{3} \neq 0,$$

то числовий ряд розбігається (за достатньою ознакою розбіжності числового ряду).

б) *Розв'язання* Застосуємо ознаку порівняння з «більшим» збіжним рядом геометричної прогресії

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (1/8)^n$$

зі знаменником $q = \frac{1}{8} < 1$:

$$u_n = \frac{1}{8^n \ln(4n)} < \frac{1}{8^n} = \left(\frac{1}{8}\right)^n = v_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

оскільки $u_n \le v_n$, то «менший» ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n \ln(4n)}$$

також збігається.

в) Загальний член числового ряду має вигляд

$$u_n = (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{2^n}.$$

Перевіримо, чи виконуються умови теореми Лейбніца

1) $$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)'}{(2^n)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n \ln 2} = 0;$$

2) $$|u_1| = \frac{1}{2}, \quad |u_2| = \frac{3}{4}, \quad |u_3| = \frac{5}{8}, \quad |u_4| = \frac{7}{16} \ldots$$

$$|u_1| < |u_2|, \quad |u_2| > |u_3| > |u_4| > \ldots > |u_n| > |u_{n+1}|,$$

оскільки функція $f(x) = \frac{2x-1}{2^x}$ є монотонно спадною для $x > 2$,

($f'(x) = \frac{2-(2x-1)\ln 2}{2^x} < 0$) за теоремою Лейбніца ряд збігається.

Дослідимо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$. Скористаємося для цього ознакою Даламбера.

$$u_n=\frac{2n-1}{2^n},\quad u_n=\frac{2n+1}{2^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2n-1}=\frac{1}{2}<1.$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ збігається, отже, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{2^n}$$

збігається абсолютно.

г) *Розв'язання* Перетворимо загальний член ряду, помноживши чисельник і знаменник на спряжений вираз до цього:

$$u_n=\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}.$$

Оскільки $\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\approx\frac{1}{n}$, якщо $n\to\infty$, досліджуваний ряд є розбіжним як гармонічний ряд.

д) Загальний член числового ряду має вигляд $u_n=\frac{4n^2-3n+5}{6n^2-n+3}$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+5}{6n^2-n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{6-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\neq 0,$$

не виконується необхідна ознака збіжності числового ряду, тому числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-3n+5}{6n^2-n+3}$$

розбігається.

е) Загальний член числового ряду є степенем з показником n виразу $tg\,\dfrac{n^2}{n^4+2}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{tg^n\,\frac{n^2}{n^4+2}}=\lim_{n\to\infty}tg\,\frac{n^2}{n^4+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}tg\,\frac{1/n^2}{1+2/n^3}=tg0=0<1,$$

отже, ряд збігається.

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Розв'язання Розглянемо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ і дослідимо його на збіжність.

За ознакою Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2\cdot 2^{n^2}}{(n!)^2\cdot 2^{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=0<1,$$

тому ряд є збіжним, отже, його загальний член прямує до нуля (необхідна ознака збіжності ряду). Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}=0.$

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \alpha=2\cdot 10^{-1};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)}2^n}{(n+1)!},\quad \alpha=0{,}01.$$

Розв'язання

а) Цей числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ є знакододатним числовим рядом. Цей ряд збіжний, як узагальнений гармонічний ряд із $p=2>1$. Члени ряду $u_n=\frac{1}{n^2}$ утворюють монотонно спадну послідовність, якщо $n\ge 1$. Позначимо суму ряду S, а його частинну суму – S_n і оцінимо залишок ряду R_n:

$$R_n=S-S_n\le\int_n^{\infty}f(x)dx\le\alpha,\quad f(x)=u(x),\ n\ge 1.$$

$$R_n\le\int_n^{\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\bigg|_n^{\infty}=-\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{1}{n}\le\alpha\Rightarrow\frac{1}{n}\le 2\cdot 10^{-1}\Rightarrow\ n\ge 5.$$

Отже, якщо $n\ge 5$, залишок ряду не перевищуватиме задану точність $\alpha=2\cdot 10^{-1}$:

$$R_5=S-S_5=\sum_{6}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le\alpha=0{,}2.$$

Знайдемо суму ряду:

$$S\approx S_n\bigg|_{n=5}=\sum_{1}^{5}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}=1{,}48.$$

Відповідь: $S=\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\approx 1{,}5$ з точністю $\alpha=2\cdot 10^{-1}$.

б) Цей числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)} 2^n}{(n+1)!}$ є числовим рядом лейбніцевого типу, отже, він збігається, а сума його дорівнює S.

Оскільки

$$|u_1| = 2 > \varepsilon, \quad |u_2| = 2 > \varepsilon, \quad |u_3| \approx 1{,}333 > \varepsilon, \quad |u_4| \approx 0{,}667 > \varepsilon,$$

$$|u_5| \approx 0{,}267 > \varepsilon, \quad |u_6| \approx 0{,}089 > \varepsilon,$$

$$|u_7| \approx 0{,}025 > \varepsilon, \quad |u_8| \approx 0{,}006 < \varepsilon,$$

то $S \approx S_7$ з абсолютною похибкою $\varepsilon = 10^{-2}$, де

$$S_7 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \approx 0{,}863 \approx 0{,}86.$$

Отже, $S \approx 0{,}86$ з абсолютною похибкою $\varepsilon = 10^{-2}$.

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Розв'язання

Знайдемо суму двох рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = (1 + 1 + 0 + 0\ldots) + (1 + 2 + 0 + 0\ldots) = 2 + 3 + 0 + 0\ldots$$

Сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$;

Сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3$;

Знайдемо різницю двох рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = (1+1+0+0\ldots)-(1+2+0+0\ldots)=0-1+0+0\ldots$$

Для знаходження добутку двох рядів скористаємося формулою

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = (u_1+u_2+\ldots)(v_1+v_2+\ldots)=$$

$$=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1)+\ldots=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{m} u_{m-l+1}v_l.$$

Для зручності складемо таблицю

$$\begin{array}{cccc} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \ldots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \ldots \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Для заданих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1+1+0+0+0+\ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+2+0+0+0+\ldots$$

таблиця має вигляд:

$$\begin{array}{ccccccc} 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 0 & 1\cdot 0 & \ldots & 1\cdot 0 & \ldots \\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 0 & 1\cdot 0 & \ldots & 1\cdot 0 & \ldots \\ 0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 0\cdot 0 & 0\cdot 0 & \ldots & 0\cdot 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 0\cdot 0 & 0\cdot 0 & \ldots & 0\cdot 0 & \ldots \end{array}$$

Ряд, який є добутком відповідно до означення, отримаємо як суму елементів цієї таблиці по кутах квадратів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = (1+1+0+0...)(1+2+0+0...) = 1+5+0+0.... = 6.$$

Ряд, який є добутком відповідно до означення, отримаємо як суму елементів цієї таблиці за її діагоналями:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = (1+1+0+0...)(1+2+0+0...) = 1+3+2+0.... = 6.$$

Бачимо, що обидва означення дають два різні ряди, але з однаковою сумою:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n) = 6.$$

Отже, сума добутку рядів дорівнює добутку сум цих рядів.

Розділимо тепер ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на ряд. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Скористаємося формулою

$$\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} b_l .$$

$$\vartheta_1 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\vartheta_2 = \frac{a_2 - \vartheta_1 b_2}{b_2} = \frac{1 - 1 \cdot 2}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\vartheta_3 = \frac{a_3 - \vartheta_1 b_3 - \vartheta_2 b_2}{b_1} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1,$$

$$\vartheta_4 = \frac{a_4 - \vartheta_1 b_4 - \vartheta_2 b_3 - \vartheta_3 b_2}{b_1} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$\vartheta_5 = \frac{a_5 - \vartheta_1 b_5 - \vartheta_2 b_4 - \vartheta_3 b_3 - \vartheta_4 b_2}{b_1} = \frac{-2 \cdot 2}{1} = -4.$$

Звідки знаходимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n = 1 - \frac{1}{2} + 1 + 2 - 4 \ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad\qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Розв'язання

Вважатимемо для зручності

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}, \ \sum_{l=1}^{\infty} v_l = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l!}$$

та скористаємося формулою добутку двох рядів

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = (u_1 + u_2 + \ldots)(v_1 + v_2 + \ldots) =$$

$$= u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \ldots = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} u_{m-l+1} v_l.$$

Отже, шукаємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n \cdot = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \cdot \sum\limits_{l=1}^{\infty} v_l$,

де

$$u_k = \frac{1}{2^k}, \quad v_l = \frac{1}{l!}.$$

Згідно з означенням маємо:

$$w_1 = u_1 v_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

$$w_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{2!} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{1!} = \frac{4}{2^2 2!},$$

$$w_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{3!} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{2!} + \frac{1}{2^3 1!} = \frac{16}{2^3 3!},$$

$$w_4 = u_1 v_4 + u_2 v_3 + u_3 v_2 + u_4 v_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{4!} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3 2!} + \frac{1}{2^4 1!} = \frac{72}{2^4 4!},$$

$$w_5 = u_1 v_5 + u_2 v_4 + u_3 v_3 + u_4 v_2 + u_5 v_1 =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{5!} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{4!} + \frac{1}{2^3 3!} + \frac{1}{2^4 2!} + \frac{2}{2^5 1!} = \frac{376}{2^5 5!}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \cdot = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} \cdot \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2^2 2!} + \frac{16}{2^3 3!} + \frac{72}{2^4 4!} + \frac{376}{2^5 5!} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{16} + \frac{47}{480} + \ldots$$

Шукаємо частку цих двох рядів. Розділимо тепер ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ на ряд $\sum_{l=1}^{\infty} v_l = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l!}$.

Скористаємося формулою

$$\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} v_l .$$

Отримаємо

$$\vartheta_1 = \frac{u_1}{v_1} = \frac{1/2}{1/1!} = \frac{1}{2},$$

$$\vartheta_2 = \frac{u_2 - \vartheta_1 v_2}{v_2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2!} = 0,$$

$$\vartheta_3 = \frac{u_3 - \vartheta_1 v_3 - \vartheta_2 v_2}{v_1} = \frac{1}{2^3} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3!} - 0 = \frac{1}{24},$$

$$\vartheta_4 = \frac{u_4 - \vartheta_1 v_4 - \vartheta_2 v_3 - \vartheta_3 v_2}{v_1} = \frac{1}{2^4} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4!} - 0 - \frac{1 \cdot 1}{24 \cdot 2!} = \frac{1}{48},$$

$$\vartheta_5 = \frac{u_5 - \vartheta_1 v_5 - \vartheta_2 v_4 - \vartheta_3 v_3 - \vartheta_4 v_2}{v_1} = \frac{1}{2^5} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 5!} - 0 - \frac{1 \cdot 1}{24 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 1}{48 \cdot 2!} = \frac{7}{720},$$

звідки знаходимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{7}{720} + \ldots$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}; \qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

Обчислити суму одного з рядів.

Розв'язання

а) Застосуємо ознаку Коші, вважаючи $u_n = \dfrac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{n^n} = \begin{cases} 0, & |x-1| \le 1; \\ \infty, & |x-1| > 1. \end{cases}$$

Таким чином, ряд є збіжним, якщо $|x-1| \le 1$, тобто на відрізку $[0, 2]$.

б) Використаємо формулу табличного розвинення $\dfrac{1}{1+x}$, у якій замінимо x на $-x$.

$$\frac{1}{1-x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n, \quad |x|<1.$$

$$\frac{1}{1-x}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^n, \quad |x|<1.$$

$$\frac{x}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n, \quad |x|<1.$$

Продиференцюємо:

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \Rightarrow \frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}.$$

Помножимо ліву та праву частини отриманого розвинення на x і остаточно дістанемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Отже, сума ряду $S(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$, а областю збіжності ряду є інтервал $(-1,1)$.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $(0,\infty)$ ряд

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)},$$

виходячи з означення, і ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^{n-1}},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

Розв'язання

а) Знайдемо часткову суму цього ряду

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right] = 1 - \frac{1}{nx+1}.$$

Для послідовності $S_n(x)$ знайдемо граничну функцію:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{nx+1} \right) = 1.$$

Розглянемо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\,\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\,\infty)} \left| \frac{1}{nx+1} \right| = 1.$$

Отже, послідовність $S_n(x)$ нерівномірно збігається до $S(x)$, тож ряд теж нерівномірно збіжний на $(0,\,\infty)$.

б) Для всіх $x \in R$ члени цього функціонального ряду задовольняють нерівність

$$\left| \frac{\sin nx}{2^{n-1}} \right| \le \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 1, 2...$$

Складемо додатній числовий ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^{N-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{N-1}} + ...$$

Цей ряд збіжний як геометрична прогресія, знаменник якої $q = \frac{1}{2} < 1$. Тому, згідно з ознакою Вейєрштраса, цей ряд збіжний рівномірно на всій числовій осі.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n(n+3)}; \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{8^n\sqrt[6]{n}}.$$

Розв’язання

а) Маємо степеневий ряд за степенями $x-1$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності заданого ряду за ознакою Даламбера, прийнявши

$$u_n=\frac{1}{n(n+3)},\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+4)}.$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\frac{n+4}{n+3}\right|=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)\lim_{n\to\infty}\frac{1+4/n}{1+3/n}=1.$$

Отже, ряд збігається абсолютно при $|x-1|<1$, тобто $-1<x-1<1$, або $0<x<2$.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу.

У точці $x=2$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$. Цей ряд збігається за основною ознакою порівняння з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, що збігається, як узагальнений гармонічний ряд $(p=2>1)$:

$$u_n=\frac{1}{n^2+3n}<\frac{1}{n^2}=v_n.$$

Таким чином, у точці $x=2$ ряд збігається абсолютно.

У точці $x=0$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+3)}$. Це знакопереміжний ряд. Вище показано, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$, складений з його абсолютних величин, збігається. Отже, цей знакоперемінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+3)}$ збігається абсолютно.

Таким чином, цей степеневий ряд має область збіжності $[0,2]$, де скрізь збігається абсолютно.

б) Знайдемо радіус збіжності заданого ряду за ознакою Даламбера, вважаючи

$$u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{8^n\sqrt[6]{n}},\quad u_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}}{8^{n+1}\sqrt[6]{n+1}}.$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{8^n\sqrt[6]{n}}\frac{8^{n+1}\sqrt[6]{n+1}}{(-1)^{n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{8\sqrt[6]{n+1}}{\sqrt[6]{n}}=8.$$

Інтервал збіжності цього ряду $-8<x<8$. Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу.

У точці $x=-8$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-8)^n}{8^n\sqrt[6]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n 8^n}{8^n\sqrt[6]{n}}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}.$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}$ є розбіжним $\left(p=\frac{1}{6}<1\right)$, отже, степеневий ряд, якщо $x=-8$, розбігається.

У точці $x=8$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{8^n}{8^n\sqrt[6]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[6]{n}}.$$

Це ряд Лейбніца. Перевіримо, чи виконуються умови відповідної теореми.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[6]{n}} = 0;$

2) $|u_1| = 1, \quad |u_2| = \dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}, \quad |u_3| = \dfrac{1}{\sqrt[6]{3}}, \quad |u_4| = \dfrac{1}{\sqrt[6]{4}} \ldots$

$|u_1| > |u_2| > |u_3| > |u_4| > \ldots > |u_n| > |u_{n+1}|.$

За теоремою Лейбніца ряд є збіжним, тобто в точці $x = 8$ ряд збігається. Отже, областю збіжності ряду є $-8 < x \le 8.$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos x)^n}{n}; \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{3n}}{x^{2n}\ln n}.$$

Розв'язання

а) Скористаємося ознакою Даламбера, вважаючи

$$u_n = \frac{(\cos x)^n}{n}, \quad u_{n+1} = \frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{(\cos x)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|\cos x|^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{|\cos x|^n} = |\cos x|.$$

Інтервал збіжності цього ряду $|\cos x| < 1,$ тобто

$$-1 < \cos x < 1.$$

Ця нерівність виконується за всіх значень x, окрім тих, де

$$\cos x = 1 \text{ або } \cos x = -1$$

Нехай $\cos x = 1$, тобто $x = 2\pi k, \quad k \in Z.$

Нехай $\cos x = -1$, тобто $x = (2k+1)\pi, \quad k \in Z.$

Дослідимо поведінку ряду в цих точках.

Якщо $x = 2\pi k$, $\cos x = 1$, маємо розбіжний гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Якщо $x = (2k+1)\pi$, $\cos x = -1$, маємо знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, який збігається за ознакою Лейбніца, тобто умовно.

Отже, область збіжності цього ряду $x \neq 2\pi k, \quad k \in Z.$

б) Введемо нову змінну $z = \frac{1}{x^2}$. Тоді $x^2 = \frac{1}{z}$ і ми маємо степеневий ряд за степенями z стандартного вигляду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n} z^n}{\ln n}.$$

Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера, вважаючи

$$u_n = \frac{(-1)^n 4^{3n}}{\ln n}, \quad u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} 4^{3(n+1)}}{\ln(n+1)}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)} \frac{\ln n}{(-1)^n} \right| = 4^3 \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} =$$

$$= 64 \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)'}{(\ln(n+1))'} = 64 \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)'}{n'} = 64.$$

Інтервал збіжності цього ряду $|z| < 64$, тобто $\frac{1}{x^2} < 64$, або $|x| > 8$. Дослідимо поведінку ряду на кінцях інтервалу.

У точці $x = 8$ маємо ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{3n}}{8^{2n}\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

Це ряд Лейбніца. Перевіримо, чи виконуються умови відповідної теореми:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0;$

2) $|u_n| = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)} = |u_{n+1}|.$

Умови теореми Лейбніца виконуються, тож ряд є збіжним. Перевіримо ряд на абсолютну збіжність. Складемо ряд з абсолютних величин. Ряд з його модулів $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ розбігається за основною ознакою порівняння з розбіжним гармонічним рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$, тому що $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Отже, в точці $x=8$ ряд збігається умовно.

У точці $x=-8$ маємо ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{3n}}{(-8)^{2n}\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

Цей ряд збігається з отриманим рядом, якщо $x=8$. Він збігається умовно.

Отже, областю збіжності цього ряду є об’єднання двох променів

$$-8<x\le 8.\left]-\infty, 8\right]\cup\left[8,+\infty\right[.$$

16. Для функцій

$$a)\quad 3^x; \qquad\qquad б)\quad \frac{1}{x}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = 1$, та $x_0 = 3$ відповідно.

Розв'язання

а) Знаходимо значення функції $f(x) = 3^x$ і значення її похідних у точці $x_0 = 1$:

$$f(1) = 3;$$

$$f'(x) = 3^x \ln 3, \quad f'(1) = 3\ln 3;$$

$$f''(x) = 3^x \ln^2 3, \quad f''(1) = 3\ln^2 3;$$

Отже, три перші члени розвинення функції $f(x) = 3^x$ в ряд Тейлора в точці $x_0 = 1$ мають вигляд

$$f(x) \approx 3 + \frac{3\ln 3}{1!}(x-1) + \frac{3\ln^2 3}{2!}(x-1)^2.$$

б) Знаходимо значення функції $f(x) = \frac{1}{x}$ і значення її похідних у точці $x_0 = 3$:

$$f(3) = 1;$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'(3) = -\frac{1}{3^2};$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f''(1) = \frac{2}{3^3}.$$

Отже, три перші члени розвинення функції $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в ряд Тейлора в точці $x_0=3$ мають вигляд

$$\frac{1}{x}\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}(x-3)+\frac{2}{3^3}(x-3)^2.$$

17. Функції

$$a)\quad \sin\frac{x^3}{7}\,,\qquad б)\quad x^2\ln\left(1-3x^4\right),\qquad в)\quad \ln x$$

в околі точки x_0 ($x_0=0,\ x_0=0,\ x_0=2,$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

Розв'язання

а) Для розвинення функції у ряд Маклорена використаємо формулу табличного розвинення в ряд Маклорена функції $\sin x$, у якій заміняємо x на $\dfrac{x^3}{7}$.

$$\sin x=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+r_{2m}(x).$$

$$f(x)=\sin\frac{x^3}{7}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(\dfrac{x^3}{7}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!\,7^{2n-1}}x^{6n-3}.$$

Табличний ряд збігається, якщо $x\in(-\infty,\infty)$, отже, побудований буде збіжним, якщо $x\in(-\infty,\infty)$.

б) Для розвинення функції у ряд Маклорена використаємо формулу табличного розвинення $\ln(1+x)$, у якій заміняємо x на $-3x^4$.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + r_n(x). \qquad (1)$$

$$\ln\left(1-3x^4\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\left(-3x^4\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n 3^n x^{4n}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{4n}}{n}.$$

$$f(x) = x^2 \ln\left(1-3x^4\right) = -x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{4n}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{4n+2}}{n}.$$

Отже,

$$x^2 \ln\left(1-3x^4\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{4n+2}}{n}.$$

Інтервал збіжності застосованого табличного ряду визначається нерівністю $|x| < 1$, отже, побудований ряд абсолютно збігається, якщо

$$\left|-3x^4\right| < 1 \Rightarrow \left|3x^4\right| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{3} \Rightarrow |x| < \sqrt[4]{\frac{1}{3}}.$$

Таким чином, інтервалом збіжності побудованого ряду становитиме

$$\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right).$$

в) Записуємо функцію $f(x) = \ln x$ у вигляді:

$$f(x) = \ln x = \ln(x-2+2) = \ln\left[2\left(1+\frac{x-2}{2}\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right).$$

У розвиненні (1) функції $f(x) = \ln(1+x)$ замінимо x на $\frac{x-2}{2}$ і до результату додаємо $\ln 2$. Отримаємо

$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{(x-2)^3}{2^3 \cdot 3} - \ldots + \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^n \cdot n} + \ldots$$

Визначимо, за яких значень x ряд збігається:

$$-1 < \frac{x-2}{2} \leq 1, \quad -2 < x-2 \leq 2, \quad 0 < x \leq 4.$$

Отже, областю збіжності ряду є проміжок $]0, 4]$.

18. Обчислити суми рядів

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n+1}; \qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

і вказати області збіжності цих функціональних рядів.

Розв'язання

а) Знайдемо радіус збіжності заданого ряду за ознакою Даламбера, вважаючи, що

$$u_n = (-1)^n n x^{2n+1}, \quad u_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)x^{2n+3}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n (n+1) x^{2n+3}}{(-1)^{n+1} n x^{2n+1}}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n) = x^2 < 1.$$

Отже, ряд збігається абсолютно, якщо $|x| < 1$, тобто $-1 < x < 1$. Оскільки ряд є розбіжним, якщо $x = \pm 1$, то область збіжності цього ряду – це інтервал $(-1, 1)$.

Відомо, що степеневий ряд усередині його області збіжності можна почлено диференціювати та інтегрувати, при цьому отримані внаслідок диференціювання й інтегрування ряди матимуть той же радіус збіжності, що і вихідний ряд.

Позначивши його суму через $S(x)$, перепишемо цей ряд у вигляді

$$S(x)=\frac{1}{2}x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{2n-1}=\frac{1}{2}x^2 S_1(x),$$

де

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1}.$$

Проінтегрувавши ряд

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1} \text{ по } x,$$

маємо

$$\int_0^x S_1(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n\int_0^x t^{2n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n\frac{x^{2n}}{2n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\frac{-x^2}{1-\left(-x^2\right)}=\frac{-x^2}{1+x^2},$$

або

$$\int_0^x S_1(t)dt=-\frac{x^2}{1+x^2},\quad x\in(-1,1).$$

Тепер, диференціюючи останню рівність, отримаємо:

$$\left(\int_0^x S_1(t)dt\right)'\Bigg|_x=\left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right)'\Bigg|_x\Rightarrow S_1(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2},\quad x\in(-1,1).$$

Отже, отримаємо

$$S(x)=\frac{1}{2}x^2S_1(x)=-\frac{1}{2}x^2\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}=-\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^2},\quad x\in(-1,1).$$

б) Знайдемо радіус збіжності заданого ряду за ознакою Даламбера. Записуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ в розгорнутому вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$$

Якщо $|x|<1$, цей ряд збіжний. Отже, його можна почлено диференціювати всередині інтервалу збіжності. Позначивши його суму через $S(x)$, маємо

$$S'(x)=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}+\ldots$$

Оскільки $|x|<1$, то одержаний ряд похідних як геометрична прогресія із знаменником $q=x^2$ має суму $S'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$. Проінтегрувавши

$$S'(x)=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}+\ldots=\frac{1}{1-x^2},$$

знайдемо його суму:

$$S(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots=\int_0^1\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|,\quad (|x|<1).$$

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2(e^x-1)}.$$

Розв'язання Використаємо відомі табличні розвинення в ряд Маклорена елементарних функцій $\sin x$, $\cos x$, e^x:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}{x^2\left(\frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \dots\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + \dots}{x^3\left(1 + \frac{x}{2} + \dots\right)} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{3}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \quad \sigma = 10^{-5}.$$

Розв'язання

Первісна для функції $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не є елементарною. Оскільки для всіх $x \in (-\infty, \infty)$ має місце рівність

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots,$$

то для тих же x правильна і рівність

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \dots$$

На відрізку $[0, 1]$ цей ряд збіжний рівномірно, тому

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 \left\{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right\}dx = \left(x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7} - \ldots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + \ldots$$

Оскільки одержаний числовий ряд знакозмінний, то його залишок не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів. Розглянемо четвертий член цього ряду:

$$\frac{1}{7!7} = 2{,}834 \cdot 10^{-5} < 0{,}0001 .$$

Отже, з точністю до 10^{-4} одержимо

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0{,}98932,$$

до того ж перші чотири цифри точні.

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'' - (1 + x^2)y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 2$$

у ряд Тейлора.

Розв’язання

Підставивши в рівняння початкові умови, одержимо

$$y''(0) = 1 \cdot (-2) = -2.$$

Диференціюючи початкове рівняння, послідовно знаходимо

$$y''' = 2xy + (1 + x^2)y' = 0, \quad y'''(0) = 2,$$

$$y^{IV} = 2y + 2xy' + 2xy' + (1 + x^2)y'' == 2y + 4xy' + (1 + x^2)y'',$$

$$y^{IV}(0) = -6.$$

Підставляючи значення похідних в ряд Тейлора, одержимо

$$y(x) = -2 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

Оскільки нам потрібні лише перші чотири члени розвинення в ряд Тейлора розв'язку диференціального рівняння, то

$$y(x) \approx -2 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

22. Методом невизначних коефіцієнтів розв'язати задачу Коші

$$y'' - xy' + y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Розв'язання

Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Згідно з початковими умовами знаходимо, що $a_0 = a_1 = 0.$ Тоді

$$y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k.$$

Підстановка цього розвинення в диференціальне рівняння дає

$$\sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)a_k x^{k-2} - ka_k x^k + a_k x^k] = 1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових степенів x, отримаємо

$$a = \frac{1}{2};$$

$$(k+1)(k+2)a_{n+2} = (k-1)a_n, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Оскільки $a_1 = 0$, то $a_{2l-1} = 0$, де $l = \overline{1,\infty}$. Для $n = 2l$ маємо рекурентну формулу

$$a_{2(l+1)} = \frac{2l-1}{(2l+1)(2l+2)} a_{2l},$$

з якої виводимо вираз для коефіцієнта загального члену ряду. Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{(2l+2)!} x^{2l+2}.$$

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$а) \quad f(x) = x^2 + x, -\pi < x < \pi; \qquad б) \quad f(x) = \frac{3-3x}{5}, \quad -3 < x < 3.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

Розв'язання

а) Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2 + x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}(\pi^3 + \pi^2) + \frac{1}{2}(\pi^2 - \pi^2)\right] = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2 + x\right)\cos nx dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{c|c} u = x^2 + x & du = (2x+1)dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{(x^2 + x)\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(2x+1)\sin nx}{n}dx = -\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\sin nx dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} u = 2x+1; & du = 2dx \\ dv = \sin nx dx; & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right\} = \frac{2x+1}{\pi n^2}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx =$$

$$= \frac{2\pi + 1}{\pi n^2}\cos \pi n - \frac{-2\pi + 1}{\pi n^2}\cos \pi n - \frac{2}{\pi n^3}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left(2\pi\cos\pi n + \cos\pi n + 2\pi\cos\pi n - \cos\pi n\right) == \frac{4\pi\cos\pi n}{\pi n^2} = \frac{4}{n}\cos\pi n.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2+x\right)\sin nx dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{c|c} u = x^2 + x & du = (2x+1)dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{(x^2+x)\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(2x+1)\cos nx}{n}dx =$$

$$-\frac{\pi^2+\pi}{\pi n}\cos\pi n + \frac{\pi^2-\pi}{\pi n}\cos\pi n + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\cos nx dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{cc} u = 2x+1; & du = 2dx \\ dv = \cos nx dx; & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right\} = -\frac{\pi^2}{\pi n}\cos\pi n - \frac{\pi}{\pi n}\cos\pi n + \frac{\pi^2}{\pi n} -$$

$$-\frac{\pi}{\pi n}\cos\pi n + \frac{1}{n}\left(\frac{2x+1}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right) =$$

$$= -\frac{2\pi}{\pi n}\cos\pi n + \frac{2}{\pi n^3}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\pi}{n}\cos\pi n + \frac{2}{n^3}\cos\pi n - \frac{2}{n^3}\cos\pi n\right) = -\frac{2}{n}\cos\pi n.$$

Отже, розвинення функції $f(x) = x^2 + x$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$ в ряд Фур'є має вигляд

$$x^2 + x = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos\pi n\cos nx + \frac{-2}{n}\cos\pi n\sin nx\right)$$

або

$$x^2 + x = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx - \frac{2(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$

Ця рівність справджується для всіх $x \in (-\pi,\ \pi)$.

Побудуємо графік суми ряду. В інтервалі $(-\pi,\ \pi)$ графік суми ряду збігається з графіком самої функції. Якщо функцію $f(x) = x^2 + x$ подати у вигляді $y + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, то очевидно, що задана функція визначає параболу з вершиною у точці $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, симетричну відносно прямої $x = -\frac{1}{2}$.

Гілки параболи напрямлені вгору. Сума ряду Фур'є є періодичною функцією з періодом 2π.

Отже, на кожному з проміжків $(-\pi + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi)$, де $k \in Z$, графік суми ряду повторюється, а в точках розриву, тобто в точках $x = (2k+1)\pi$, де $k \in Z$, сума ряду набуває значення $\frac{1}{2}\left(\left(\pi^2 - \pi\right) + \left(\pi^2 + \pi\right)\right)$ чи π^2 (рис. 1).

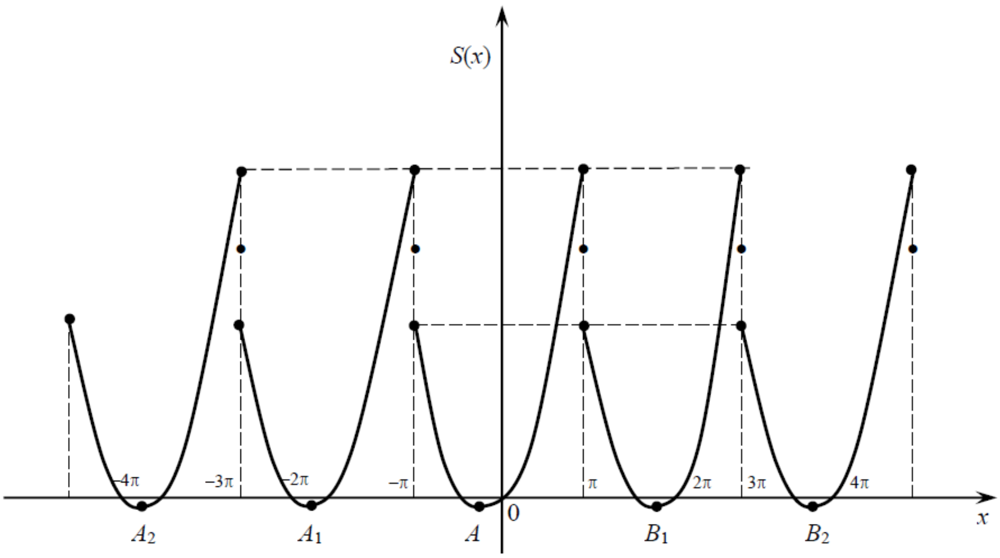

Рис. 1

Відповідь:

$$x^2+x=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx-\frac{2(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$

б) Задана функція неперервна на інтервалі $(-3, 3)$. Продовжимо функцію $f(x)$ періодично на вісь із періодом $3-(-3)=6$. У підсумку отримаємо періодичну функцію, яка задовольняє умовам Діріхле, отже, розкладається в ряд Фур'є.

Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є функції $f(x)$, у цьому прикладі $2l=6$, отже, $l=3$.

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}\frac{3-3x}{5}dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}\left(-\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}\right)dx=-\frac{1}{3}\frac{3}{5}\int_{-3}^{3}xdx+\frac{1}{3}\frac{3}{5}\int_{-3}^{3}dx=$$

$$=\frac{1}{5}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-3}^{3}+\frac{1}{5}x\Bigg|_{-3}^{3}=\frac{1}{10}\left(3^2-(-3)^2\right)+\frac{1}{5}(3-(-3))=\frac{6}{5}.$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}\frac{3-3x}{5}\cos\frac{\pi nx}{3}dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{c|c} u=\dfrac{3-3x}{5} & du=-\dfrac{3}{5}dx \\ dv=\cos\dfrac{\pi nx}{3}dx & v=\dfrac{3}{\pi n}\sin\dfrac{\pi nx}{3}\end{array}\right\}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}\frac{3-3x}{5}\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3}-\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}\left(-\frac{3}{5}\right)\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}dx=$$

$$=\frac{3-9}{5\pi n}\sin\pi n-\frac{3+9}{5\pi n}\sin(-\pi n)-\frac{3}{5\pi n}\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Bigg|_{-3}^{3}=$$

$$=\{\sin\pi n=\sin(-\pi n)=0\}=-\frac{9}{5\pi^2n^2}\left((-1)^n-(-1)^n\right)=0.$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3}\frac{3-3x}{5}\sin\frac{\pi nx}{3}dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{c|c} u = \dfrac{3-3x}{5} & du = -\dfrac{3}{5}dx \\ dv = \sin\dfrac{\pi nx}{3}dx & v = -\dfrac{3}{\pi n}\cos\dfrac{\pi nx}{3} \end{array}\right\} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\frac{3-3x}{5}\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3} + \frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3}\left(-\frac{3}{5}\right)\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}dx =$$

$$= -\frac{3-9}{5\pi n}\cos\pi n + \frac{3+9}{5\pi n}\cos(-\pi n) - \frac{3}{5\pi n}\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Bigg|_{-3}^{3} =$$

$$= \left\{\cos\pi n = \cos(-\pi n) = (-1)^n\right\} = \frac{6}{5\pi n}(-1)^n + \frac{12}{5\pi n}(-1)^n -$$

$$-\frac{9}{5\pi^2 n^2}\left(\sin\pi n - \sin(-\pi n)\right) =$$

$$= \left\{\sin\pi n = \sin(-\pi n) = 0\right\} = \frac{18}{5\pi n}(-1)^n.$$

Таким чином, для кожного $x \in (-3, 3)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{3} + b_n\sin\frac{\pi nx}{3}\right) =$$

$$= \frac{\frac{6}{5}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos\frac{\pi nx}{3} + \frac{18}{5\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\right) =$$

$$= \frac{3}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{18}{5\pi n}(-1)^n\sin\frac{\pi nx}{3}.$$

Отже,

$$\frac{3-3x}{5} = \frac{3}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{18}{5\pi n}(-1)^n\sin\frac{\pi nx}{3}.$$

Графік функції $f(x)$ має вигляд (рис. 2).

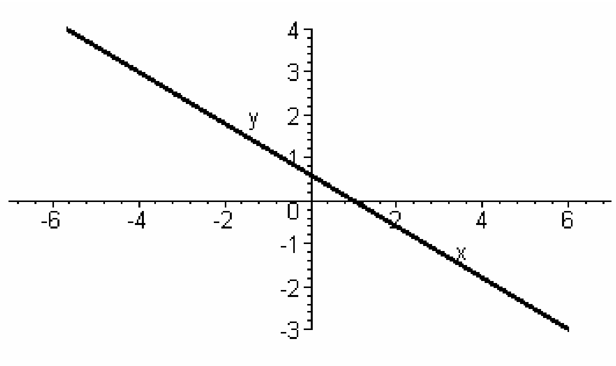

Рис. 2

Сума ряду Фур'є збігається до періодичного продовження функції, в точках розриву ряд Фур'є збігається до середнього арифметичного границь справа і зліва. На графіку сума ряду в точках розриву зображена точками.

Графік суми ряду Фур'є (рис. 3):

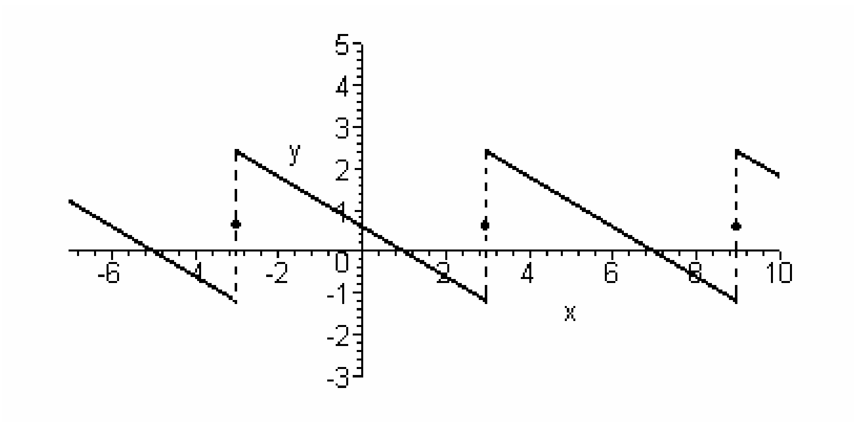

Рис. 3

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\quad f(x)=2x \quad x\in \left]0,\pi\right[; \qquad б)\quad f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<2; \\ 0 & 2<x<4, \end{cases}$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графіки сум отриманого ряду.

Розв'язання

а) Задана функція неперервна на інтервалі $[0, \pi]$. Довизначимо функцію $f(x)$ періодично на всю числову вісь у парний спосіб (рис. 4).

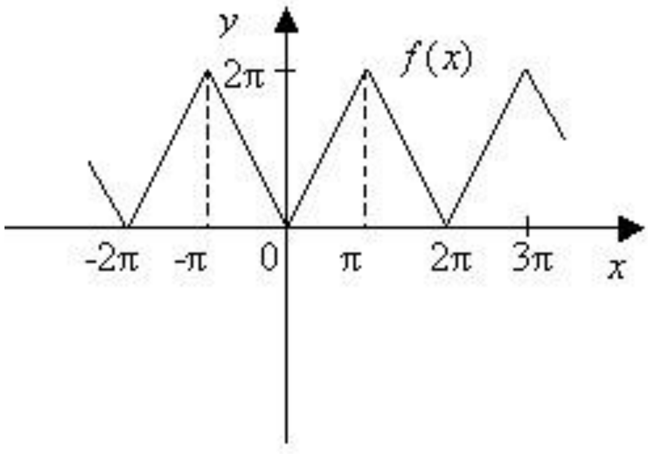

Рис. 4

У підсумку отримаємо періодичну функцію, яка задовольняє умовам Діріхле, отже, розкладається в ряд Фур'є.

Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є функції $f(x)$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2xdx = \frac{4}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = 2\pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos nx dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \left\{ \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{x\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx = \frac{4}{\pi n}(\pi\sin\pi n - 0\sin 0) - \frac{4}{\pi n}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}(\cos\pi n - \cos 0) = \left\{\cos\pi n = (-1)^n, \cos 0 = 1\right\} = \frac{4[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}.$$

Отже, маємо:

$$x = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi n^2}\cos nx.$$

б) Графік заданої функції має вигляд (рис. 5):

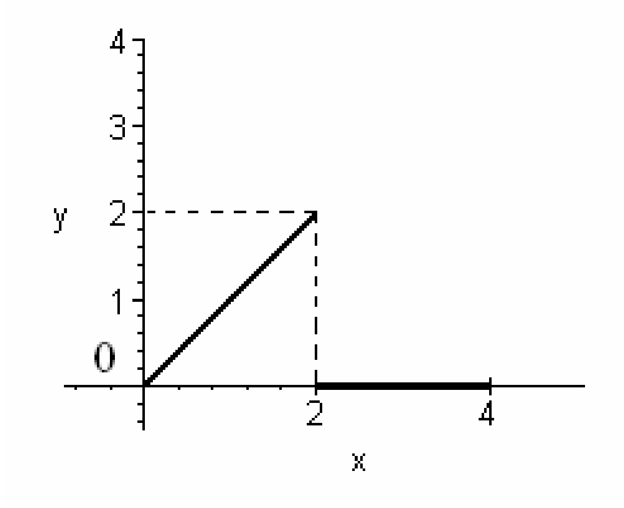

Рис. 5

Продовжимо задану функцію $f(x)$ на відрізок $(0,4)$ у непарний спосіб (рис. 6).

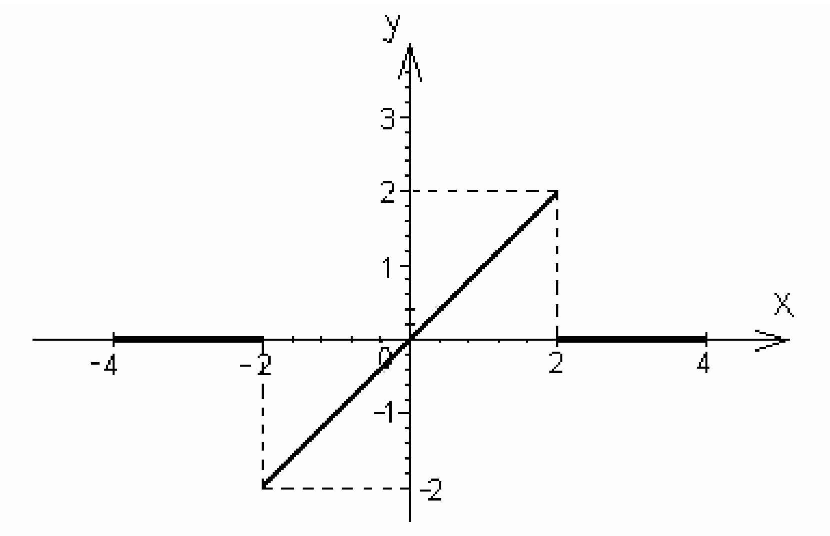

Рис. 6

Обчислимо коефіцієнти ряду Фур’є непарного продовження

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \; n = 1, 2, ...,$$

оскільки функція непарна, $2l = 4 - (-4) = 8, \quad l = 4,$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\sin\frac{\pi n x}{3}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{\pi n x}{4}dx + \frac{1}{2}\int_2^4 0\sin\frac{\pi n x}{4}dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \sin\frac{\pi n x}{4}dx & v = -\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{4} \end{array} \right\} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{4} \right)\Bigg|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{4}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}2\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + 0 + \frac{2}{\pi n}\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{4}\Bigg|_0^2 =$$

$$-\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{8}{\pi^2 n^2}\left(\sin\frac{\pi n}{2} - \sin 0 \right) =$$

$$= \{\sin 0 = 0\} = -\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2} + \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Отже,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right)\sin\frac{\pi nx}{4},$$

рівність має місце для всіх тих $x\in(0{,}4)$, у яких функція $f(x)$ неперервна.

25. Знайти спектральну щільність, модуль і фазу спектральної щільності експоненціального імпульсу

$$f(x)=\begin{cases} Be^{-\beta t}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Розв'язання

Знаходимо спектральну щільність функції $f(x)$

$$S(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} Be^{-(\beta+i\omega)t}dt=\frac{B(\beta+i\omega)}{\beta^2+\omega^2}.$$

Виділяємо її дійсну $a(\omega)$ та уявну $b(\omega)$частини:

$$a(\omega)=\frac{B\beta}{\beta^2+\omega^2};$$

$$b(\omega)=\frac{B\omega}{\beta^2+\omega^2}.$$

Знаходимо амплітудний спектр функції, який за означенням є модулем спектральної функції

$$S(\omega)=\sqrt{[a(\omega)]^2+[b(\omega)]^2}=\frac{B}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}}.$$

Знаходимо фазу спектральної функції, який за означенням є аргументом спектральної функції

$$\alpha(\omega) = arctg\frac{b(\omega)}{a(\omega)} = -arctg\frac{\omega}{\beta}.$$

26. Функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0,\ x = 1, \\ 0, & x < 0,\ x > 1. \end{cases}$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

Розв'язання

Ця функція є кусково-гладкою, оскільки вона складається з трьох частин: $y = 0$ на $(-\infty, 0)$, $y = 1$ на $(0, 1)$ і $y = 0$ на $(1, \infty)$ і має точки розриву першого роду $x_0 = 0$ та $x_0 = 1$. Очевидно, що ця функція абсолютно інтегрована на всій числовій осі, оскільки поза відрізком $[0,1]$ вона дорівнює нулю, і інтеграл від неї по всій числовій осі зведеться до інтегралу по відрізку $[0,1]$.

Таким чином, цю функцію можна подати інтегралом Фур'є. За формулою Фур'є маємо

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\omega(x-t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega \int_0^1 1\cdot\cos\omega(t-x)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega(t-x)}{\omega}\Bigg|_0^1 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega(1-x) + \sin\omega x}{\omega} d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega(1-2x)}{2}}{\omega} d\omega.$$

У точках розриву $x = 0$ і $x = 1$ одержане подання зберігається, оскільки в цих точках

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{2}=f(x).$$

Зокрема, якщо $x=0$, одержимо

$$f(0)=\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}}{\omega}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega,$$

що рівносильно рівності

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}.$$

27. Знайти перетворення Фур’є функції

$$f(x)=e^{-x^2}.$$

Розв’язання Парна функція $f(x)=e^{-x^2}$ є диференційованою і абсолютно інтегрованою, оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-x^2}\right|dx=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx<2\int_0^{\infty}e^{1-x}=2e. \tag{2}$$

Унаслідок парності функції $f(x)$ косинус-перетворення Фур’є має вигляд

$$\varphi_c(u)=F_c\left[e^{-x^2}\right](u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}\cos utdt. \tag{3}$$

Функція $f(x)=xe^{-x^2}$ є також диференційованою і абсолютно інтегрованою на R, оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|xe^{-x^2}\right|dx=2\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx=-e^{-x^2}\Big|_0^{\infty}=1. \tag{4}$$

Унаслідок цього підінтегральний вираз $e^{-t^2}\cos ut$ в (3) та його похідна

$$\frac{d}{du}\left(e^{-t^2}\cos ut\right) = -te^{-t^2}\sin ut$$

неперервні й абсолютно інтегровані в квадраті $]0,\infty[\times]0,\infty[$, оскільки вони мажоруються інтегралами (2) і (4). Враховуючи ознаку Вейерштраса, інтеграл збігається рівномірно, тож його можна інтегрувати за параметром u.

Диференціювання (3) по u дає вираз

$$\varphi_c'(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty te^{-t^2}\sin ut dt,$$

проінтегрувавши який частинами, отримаємо

$$\varphi_c'(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin ut\Big|_0^\infty - \frac{u}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos ut dt\right] = -\frac{u}{2}\varphi_c(u).$$

Інтегруючи отримане диференціальне рівняння із змінними, що розподіляються, знаходимо

$$\ln|\varphi_c(u)| = -\frac{u^2}{4} + \ln c$$

або

$$\varphi_c(u) = ce^{-u^2/4},$$

де c – довільна стала. Її можна знайти, якщо застосувати інтеграл Ейлера – Пуассона

$$\varphi_c(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = c.$$

Тоді

$$\varphi_c(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-u^2/4}$$

і

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi_c(u) \cos uxdx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-u^2/4} \cos uxdx.$$

28. Для функції

$$f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2}, \quad a > 0,$$

заданій на $]0, \infty[$, знайти косинус-перетворення Фур'є.

Розв'язання

Парна функція $f(x)$ є диференційованою і абсолютно інтегрованою на R, оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{a^2 + x^2} \right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{2}{a} arctg \frac{x}{a} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{a}.$$

Унаслідок парності функції $f(x)$ косинус-перетворення Фур'є має вигляд

$$\varphi_c(u) = F_c\left[\frac{1}{a^2 + x^2}\right](u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos ut}{a^2 + t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ut}{a^2 + t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re}\left[2\pi i \operatorname{Res}_{t=ia} \frac{e^{iut}}{a^2 + t^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re}\left[2\pi i \frac{e^{-au}}{2ia}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-au}}{a}.$$

Тоді

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-au}}{a} \cos uxdu = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-au} \cos uxdu.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n(2n)!!}, \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2}}{2^{n^2}\sqrt{n}}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}, \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+5n-1}{5n^2+2n+1}\right)^{n}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}, \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sin n\alpha}, \qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2arctg\sqrt{n^2-1}-\pi}{\sqrt{n^2-n}}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n}, \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)^2}}{\ln(n+1)}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sin\frac{1}{n},\quad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+n+1},\quad в)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{2^n},$$

$$г)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n-a}-\sqrt{n^2+n+1}\right),\quad д)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right),\quad е)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{[(n+2)!]^2}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!!}{n^n}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3},\quad \alpha=0{,}001;\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)}}{n!},\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+1+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(3x-1)};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4}\right)^x.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $[0, 3]$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x}{\left(\sqrt{x}+1\right)^{n}},$$

виходячи з означення, і ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}\sqrt{3+nx}},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-5)^{n}}{n3^{n}}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\frac{x^{n}}{n!}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(n!)^{2}}{(2n)!}tg^{n}x; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n}}\right)}{x^{n}}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad tgx; \qquad б)\quad e^{\sin x}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=\frac{\pi}{4}$ та $x_0=\frac{\pi}{2}$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad \frac{1}{x^{2}+9x+20}, \quad б)\quad \ln\left(1-5x+4x^{2}\right), \quad в)\quad (1+x)e^{-2x}$$

в околі точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=0$, $x_0=-2$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{n}\right]x^{2n};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(tgx-\sin x)-x^3}{x^5}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1 x^{-x}dx,\quad \sigma=10^{-2}.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'=2\cos x-xy^2,\quad y(0)=1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(1-x^2\right)y''-4xy'-2y=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\quad f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0;\\ 0, & 0\le x\le\pi;\end{cases}\qquad б)\quad f(x)=e^x,\quad 0<x\le\frac{\pi}{2}.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\quad f(x)=x^2\quad x\in\,]0,\pi[;\qquad\qquad б)\quad f(x)=\frac{l}{4}-\frac{x}{2},\quad x\in\,]0,l[,$$

розкласти в ряд Фур’є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графікі отриманого ряду.

25. Задану на $]-l,l[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 1.1)

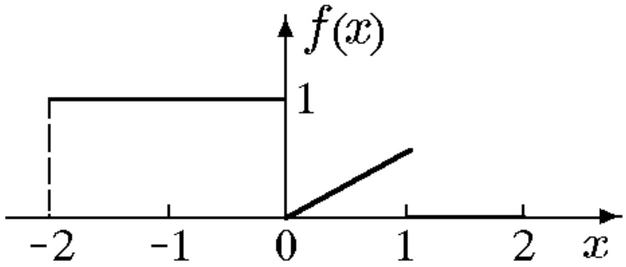

Рис. 1.1

представити рядом Фур’є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\le\pi;\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$$

представити інтегралом Фур’є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур’є функції

$$f(x)=(2x+1)e^{-|x|}.$$

28. Для функції

$$f(x)=\frac{x}{9+x^2},$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти синус-перетворення Фур’є.

Варіант 2

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{1}{2n^2}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^6}{6^n}, \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ 3+(2{,}1)^2+(2{,}01)^3+(2{,}001)^4+\ldots, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{3n}\sin^n\frac{1}{n^2}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}, \qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{arctg n}{\sqrt{n}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi n}{3}}{3^n+2}, \qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(n-1)^n}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{n}, \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n+2)}}{\sqrt{n}}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+3}}\sin\frac{\pi n}{8},\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{4n^2+4n-3},\quad в)\quad \sum_{n=3}^{\infty}\ln\frac{ch\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)},$$

$$г)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right),\ д)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}+1\right)^{n^2},\ е)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\cos\left(\frac{3}{\sqrt{n+2}}\right)}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n)!}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{n^2}},\quad \alpha=0{,}01;\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{3^n(n+1)},\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+4+0+0+0+\ldots,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n;\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}x^{-nctgx}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $[-\infty, \infty]$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^2}{(x^2+1)^n},$$

виходячи з означення, і на проміжку $[1+\delta, \infty]$, $\delta > 0,$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(2-x)^n\sin\frac{\pi}{2n}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln^n(1+x^2); \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(4-x^2)^n.$$

16. Для функцій

$$a)\quad \sin(2\arcsin x); \qquad б)\quad \ln^2(1-2x)$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=\frac{1}{2}$ та $x_0=0$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad \frac{1}{2+x}, \qquad б)\quad x\cos x, \qquad в)\quad \arcsin x$$

в околі точки x_0 $\left(x_0=\frac{\pi}{4},\ \ x_0=0,\ \ x_0=-1\right.$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(x^2-1\right)^n; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(4n^2+9n+5\right)x^{n+1}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x}{x-\sin x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{x}e^x dx, \quad \sigma=10^{-2}.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'=x+x^2+y^2, \quad y(0)=1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$\left(1+x^2\right)y''+4xy'+2y=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур’є на вказаному проміжку функцію

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\pi+x, & -\pi<x<0;\\ \dfrac{(x-\pi)^2}{2}, & 0\le x\le\pi;\end{cases} \qquad б)\ f(x)=6-3x, \quad 0<x<4.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\quad f(x)=2x-3\quad x\in\,]0,\pi[;\qquad б)\quad f(x)=e^{2x},\quad x\in\,]0,l[,$$

розкласти в ряд Фур'є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $]-l,l[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 2.1)

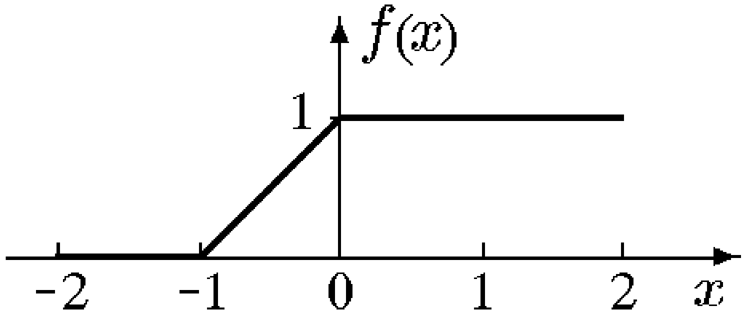

Рис. 2.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\,]-1,0[;\\ x, & x\in\,]0,1[;\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x)=\begin{cases}x\cos 3x, & |x|\le 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

28. Для функції

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4},$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 3

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ 2+1+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{5}{7}\right)^4+\ldots, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}tg^n\,\frac{\pi}{2^n}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2-1\right)\ln n}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}2^n\,arctg\,\frac{\pi}{3^n}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n!}}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{(\ln n)^3}}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+n-2}, \quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n},$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right), \quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2\cdot 7\cdot 12\cdots(5n-3)}, \quad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n^2]{n!}}{n}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^n}{n^{n!}}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n}, \quad \alpha=0{,}01; \quad б)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(3n+1)}, \quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+6+0+0+0+\ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}, \qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $[0,\infty]$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\left(\sqrt{x}+1\right)^n},$$

виходячи з означення, і на проміжку $[1,10]$, $\delta > 0,$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}(x-3)^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2(4x+7)^{2n-1}}; \qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n n\ln n}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad e^x\cos^2 x; \qquad б)\quad \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = \frac{\pi}{3}$ та $x_0 = \frac{1}{2}$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad \arccos(x+1), \qquad б)\quad \frac{1}{x^2-4x+3}, \qquad в)\quad \ln(2+x)$$

в околі точки x_0 ($x_0=-1$, $x_0=-2$, $x_0=-1$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n(n-1)}; \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2-2n+1\right)x^{n+1}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\,arctg\sqrt{x}-x}{x\sqrt[3]{8+x}-2x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1\sqrt{e^{3x^2}}\,dx, \quad \sigma=10^{-2}.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'=2x+\cos 2y, \quad y(0)=0,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(1-x^3\right)y''-6x^2y'-6xy=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$а)\quad f(x)=3-|x|,\quad x\in\left]-\pi,\pi\right[;\qquad б)\quad f(x)=x^2-x,\quad 0<x<4.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$а)\quad f(x)=\sin x,\quad x\in\left]0,\pi\right[;\qquad б)\quad f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{2x}{\pi}, & x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[;\\[2mm] 0, & x\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[,\end{cases}$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l,l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 3.1)

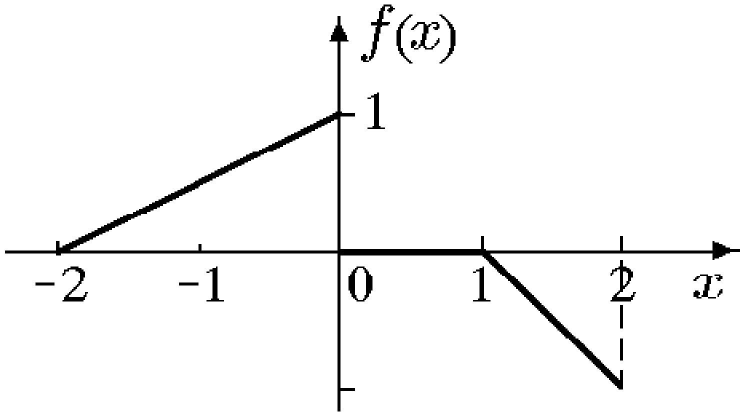

Рис. 3.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію $f(x)=e^{-|x|}$ представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & |x|\le 1; \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$$

28. Для функції

$$f(x)=\frac{1}{4+x^2},$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 4

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\left(n^2-4\right)}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+5)^2}{2^n}, \qquad б)\quad \frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{5}{9}+\ldots,$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ \frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\left(\frac{4}{5}\right)^{16}+\ldots, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\cos^n\frac{\pi n}{2(n+1)}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}, \qquad б)\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)2^n}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\ln^2 n}+n^2\ln n}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-n}}{n}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}, \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{1}{n^2+n}, \qquad в)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(2n)!!},$$

$$г)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{5n-1}}tg\,\frac{\pi}{4\sqrt{n}}, \quad д)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-e^{-\frac{1}{n}}}{tg\left(\frac{2}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}, \quad е)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\ln^{\frac{1}{2}} n\sin\frac{\pi n^2}{n+1}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^n}{n^{n^3}}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^8+1}, \quad \alpha=0{,}01; \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n)!3n}, \quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = 3+1+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin 2n\alpha; \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\left(n+x^2\right)}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]-\infty, \infty[$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^n},$$

виходячи з означення, і ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{x}{n^3+x^2},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(nx)^n}{(n!)^2}; \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[3+(-1)^n\right]^n\frac{(x+3)^n}{n}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{nx^n}}; \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(x^2+1\right)^n}{\ln^2\sin\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad (1-x)\sqrt{1+x}; \qquad\qquad б)\quad tg\left(1+e^x\right)$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = 0$ та $x_0 = 0$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad x2^x,\qquad б)\quad \sqrt{2+x},\qquad в)\quad x^{-2}$$

в околі точки x_0 ($x_0 = 3$, $x_0 = -1$, $x_0 = -2$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + (-1)^n}{n(n-1)} x^n\ ;\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2 - 2\right)^{n-1} 2nx$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1\cos x} - 1}{tg^4 x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1 x^x dx,\quad \sigma = 10^{-2}.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y' + 2xy^2 = 4y + e^{3x},\quad y(0) = 2,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$\left(1 + x^3\right)y'' + 6x^2 y' + 6xy = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$а)\ f(x) = \frac{\pi - x}{3}, \quad x \in \left]-\pi, \pi\right[; \qquad б)\ f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left]0, 1\right[; \\ 1, & x \in \left]1, 2\right[, \end{cases}$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$а)\ f(x) = 3 - 4x^2, \quad x \in \left]0, \pi\right[; \qquad б)\ f(x) = e^{x-1}, \quad 0 < x < 2.$$

розкласти в ряд Фур'є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 4.1)

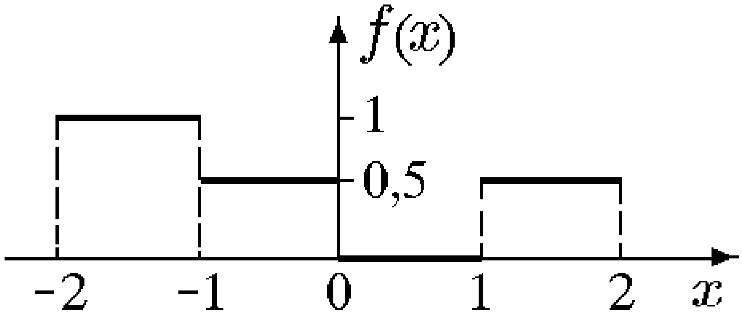

Рис. 4.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію $f(x)=\begin{cases}-x-2, & x\in(-2,-1);\\ x, & x\in\,]-1,1[;\\ -x+2, & x\in\,]1,2[;\\ 0, & |x|>2\end{cases}$ представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

28. Для функції

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\,]0,\pi[;\\ 0, & x\in\,]\pi,\infty[,\end{cases}$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти косинус-перетворення Фур'є.

Варіант 5

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\left(5+b^2\right)^{n-1}}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^2\frac{1}{3^n},\qquad\qquad б)\quad 1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\ldots$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$а)\ \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots,\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{4n^2-3}\right)^{\frac{n}{3}}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4+n^2},\qquad б)\ \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt{(n-2)}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots,\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\,\frac{1}{n}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg\left(\frac{2}{n}\right)}{\sin 2\pi\left(10+\frac{1}{n}\right)},\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n+2},\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi n}{12}\right)}{\ln\sqrt{n}},$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right),\quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 13\cdots(6n+1)}{1\cdot 8\cdot 27\cdots n^3},\quad е)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4},\quad \alpha=0{,}01;\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n,\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+8+0+0+0+\ldots,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n+|x|^{-n}}{2};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{ntgx}}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]0,1[$ ряд

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{x}}{(1-x)^n},$$

виходячи з означення, і на проміжку $[0,10]$ ряд

$$б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{(2n-1)!!}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n}+\frac{3^n}{n^2}\right)x^n.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}\left(x^2-1\right)^n}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n.$$

16. Для функцій

$$а)\quad e^{\frac{1-x}{x}}; \qquad б)\quad \sin(\alpha\arcsin x)$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=2$ та $x_0=0$ відповідно.

17. Функції

$$а)\quad \sin\left(x^2+2x\right), \qquad б)\quad \frac{1}{x^2+4x+3}, \qquad в)\quad \ln\frac{2+x}{3+4x}$$

в околі точки x_0 ($x_0=-1$, $x_0=-2$, $x_0=-0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$а)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(x^3-1\right)^{n+1}}{n+1}; \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+2n+5\right)x^{n+1}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\ln\left[\left(1+x+x^2\right)\left(1-x-x^2\right)\right]^{1-\cos x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx, \quad \sigma = 10^{-2}.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2(1 + 2x)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$а) \quad f(x) = \begin{cases} -2, & x \in \left]-\pi, 0\right[; \\ 1, & x \in \left]0, \pi\right[; \end{cases} \qquad б) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left]0, 1\right[; \\ 2 - x, & x \in \left]1, 2\right[. \end{cases}$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$а) \quad f(x) = \pi - 2x, \quad x \in \left]0, \pi\right[; \qquad б) \quad f(x) = (x-1)^2, \quad x \in \left]0, 2\right[,$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 5.1)

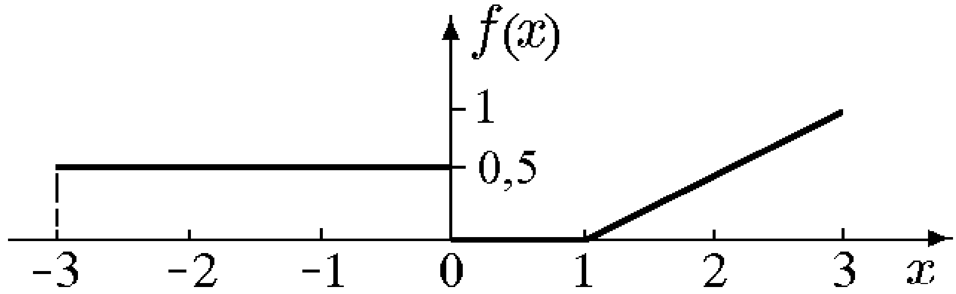

Рис. 5.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію $f(x)=\dfrac{1}{4+x^2}$ представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1; \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$$

28. Для функції

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\in \left]0,\infty\right]; \\ 0, & x\in \left[\pi,\infty\right[, \end{cases}$$

заданій на $\left]0,\infty\right[$, знайти косинус-перетворення Фур'є.

Варіант 6

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерію Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{7\cdot 9\cdots(2n+5)},\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{4^n}$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$а)\ \frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\frac{1}{\ln^3 4}+\frac{1}{\ln^4 5}+\ldots,\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)},\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right),\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\left[2+(-1)^n\right]}{\ln(1+n)}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(3n-2)!},\qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^{10} n}{n}\sin\frac{\pi n}{4}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}},\quad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)},\quad в)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^2 n}{n},$$

$$г)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{2}-1\right),\quad д)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)^n}{(2n-1)!},\quad е)\quad \sum_{n=1}^{\infty}arctg\,\frac{2+\sqrt{n}}{n^2}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5^n n},\quad \alpha=0{,}01;\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!3^n},\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4+1+0+0+0+\ldots,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!},\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n;\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}2^{3n}n^3\sin^{3n}x.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]0,1[$ ряд

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1-x)^n},$$

виходячи з означення, і на проміжку $[0.5,\,2]$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\left(x^n+x^{-n}\right),$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{n^2+3}{n^2+1}x^n; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)^n}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}; \qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(3x-2)}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad \ln(2+\sin x); \qquad б)\quad \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1-x}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=\frac{\pi}{4}$ та $x_0=2$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad (x-1)\sin 5x, \qquad б)\quad \frac{1}{x^2-6x+5}, \qquad в)\quad \left(2+e^{-x}\right)^2$$

в околі точки x_0 ($x_0=1,\ x_0=3,\ x_0=0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)x^n; \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2-n-1\right)\left(x^2-1\right)^n$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left[e^{\sin^2 x}-\ln\left(x^2+e\right)\right]}{tgx-\sin x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1 chx^2dx, \quad \sigma = 10^{-2}.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'' = xy + (y')^2, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy'' - (2+x)y' + 2y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\quad f(x) = x, \quad x \in \left]-\pi, \pi\right[; \qquad б)\quad f(x) = x-1, \quad 0 < x < 2.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1, \quad x \in \left]0, \pi\right[; \qquad б)\ f(x) = |x-1|, \quad x \in \left]0, 3\right[,$$

розкласти в ряд Фур'є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 6.1)

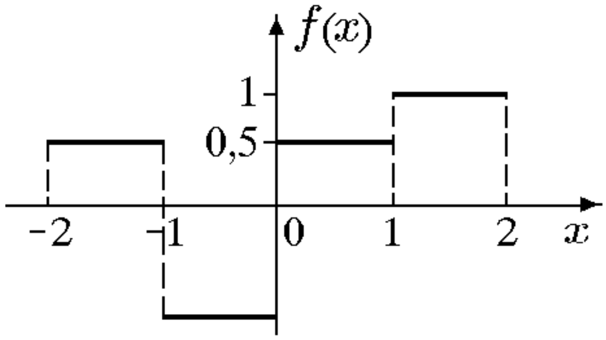

Рис. 6.1

представити рядом Фур’є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\frac{x}{4+x^2}$$

представити інтегралом Фур’є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур’є функції

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\left]1,2\right[;\\ 0, & x\notin\left]1,2\right[.\end{cases}$$

28. Для функції

$$f(x)=\frac{1-e^{-2x}}{x},$$

заданій на $\left]0,\infty\right[$, знайти синус-перетворення Фур’є.

Варіант 7

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^n}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ 1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{(n!)^2}{2^{n^3}}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ 1+2\sin^2\frac{\pi}{4}+3\sin^3\frac{\pi}{8}+4\sin^4\frac{\pi}{16}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\sin\frac{2+(-1)^n}{6}\pi,\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+7n}{5^n+n}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\alpha^2\right)^n,\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+k^2}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}},\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2},\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{1}{n^2+4},$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\,\frac{\pi}{2(n+2)}-tg\,\frac{\pi}{2(n+1)}\right),\ д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{4^{n^2}},\ е)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^{40}}{n}\cos\frac{\pi n}{4}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!}{n^n}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{5^n},\quad \alpha=0{,}01;\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{7^n},\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+10+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n\left(n+e^x\right)};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln^n\frac{x}{2}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $[0,1]$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^n},$$

виходячи з означення, і на проміжку $-2<x<\infty$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+11)^n}{n^n};\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^n(n^2+1)}};\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{x+4}{x-4}\right)^n \ln\frac{n+4}{n-4}.$$

16. Для функцій

$$а)\quad \cos(\mu \arcsin x);\qquad\qquad б)\quad 2^{\frac{x}{1-x}}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=0$ та $x_0=\dfrac{1}{2}$ відповідно.

17. Функції

$$а)\quad \ln(5x+3),\qquad б)\quad \cos\frac{\pi x}{4},\qquad в)\quad \frac{1}{(1-x)^2}$$

в околі точки x_0 ($x_0=1$, $x_0=-2$, $x_0=3$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)};\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^2\left(x^3-1\right)^{n-1}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[x\cos x-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\right]}{1-\cos x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}, \quad \sigma = 10^{-2}.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'' = ye^x - x(y')^2, \quad y(0) = y'(0) = 1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2 y'' - 2xy' + \left(2 + x^2\right) y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\ f(x) = \begin{cases} (x-\pi)^2, & x \in \left]-\pi, 0\right[; \\ \pi^2, & x \in \left]0, \pi\right[; \end{cases} \qquad б)\ f(x) = 4 - 2|x|,\ x \in \left]-2, 4\right[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\ f(x) = x(\pi - x), \quad x \in \left]0, \pi\right[; \qquad б)\ f(x) = \sin x,\ \ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 7.1)

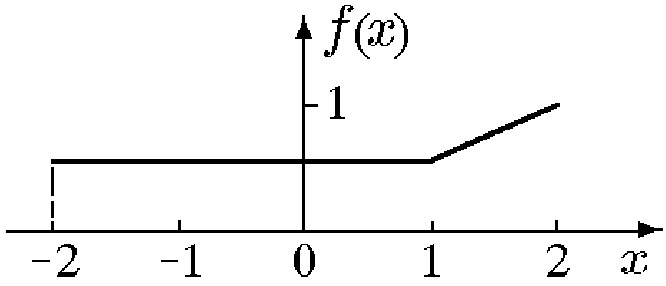

Рис. 7.1

представити рядом Фур’є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x) = e^{-|x|}\cos x$$

представити інтегралом Фур’є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур’є функції

$$f(x) = \begin{cases} x\cos x, & |x| \le 3; \\ 0, & |x| > 3. \end{cases}$$

28. Для функції

$$f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{x\left(x^2 + 4\right)^2},$$

заданій на $\left]0, \infty\right[$, знайти синус-перетворення Фур’є.

Варіант 8

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n-1}}{6^{n+1}}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$а)\ \frac{1}{(\ln 3)^3}+\frac{1}{2!(\ln 4)^3}+\frac{1}{3!(\ln 5)^3}+\dots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$а)\ \frac{\pi}{2}+\arcsin^2\frac{1}{2}+\arcsin^3\frac{1}{3}+\arcsin^4\frac{1}{4}+\dots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(2n)},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-\sqrt{n^3}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{2+(-1)^n}{n^3}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\ \sin 1+\sin\frac{1}{2}-\sin\frac{1}{3}-\sin\frac{1}{4}+\sin\frac{1}{5}+\sin\frac{1}{6}-\dots,\ б)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\sqrt{\frac{n+1}{n}},\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}},\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{1}{n}}{n-n\cos\left(\frac{1}{n}\right)},$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(ctg\frac{\pi n}{24n-2}-\sin\frac{\pi n}{2n+1}\right),\ д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n},\ \ е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^{40}}{9n^2+3n+20}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{3n}}{n!}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-5}{2^{2n-1}},\quad \alpha=0{,}01;\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}{n^3},\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5+1+0+0+0+\ldots,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!},\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2n+2x^2}{\left(n+x^2\right)\left(n+1+x^2\right)};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\frac{x+1}{n}}}\arcsin^n\frac{x-3}{n+1}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $|x|<\infty$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin^2 x}{\left(2-\cos^2 x\right)^n},$$

виходячи з означення, і ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nx}{1+n^6x^2},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}9^n\left(n^2+1\right)(x+5)^n; \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\frac{x^{3n}}{3^n}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n.$$

16. Для функцій

$$а)\quad \ln\left(1+8\sin^3 x\right); \qquad б)\quad e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1-x}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=0$ та $x_0=\frac{1}{3}$ відповідно.

17. Функції

$$а)\quad \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \qquad б)\quad \sqrt[3]{x}, \qquad в)\quad e^{x^2-4x}$$

в околі точки x_0 ($x_0=0,\ x_0=1,\ x_0=2$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}tg^n x}{n(n+1)}; \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}n(2n-1)x^{n+2}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2 x\right).$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_2^3 arctg\frac{1}{x}dx,\quad \sigma=10^{-2}.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y''-e^y\sin y'=0,\quad y(\pi)=1,\ y'(\pi)=\frac{\pi}{2},$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(x^2-x+1\right)y''-(4x-2)y'+2y=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\quad f(x)=\begin{cases} x+\pi, & x\in\,]-\pi,0[;\\ \dfrac{(x-\pi)^2}{\pi}, & x\in\,]0,\pi[;\end{cases}\qquad б)\quad f(x)=e^{|x|},\ x\in\,]-2,4[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\quad f(x)=1-x^2,\quad x\in\,]0,1[;\qquad б)\quad f(x)=\sin\frac{\pi x}{4l},\ x\in\,]0,l[,$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 8.1)

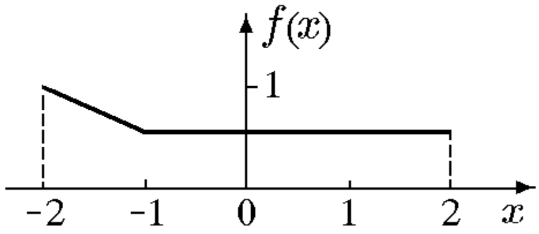

Рис. 8.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x) = e^{-|x|}\cos x$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} x\cos x, & |x| \le 3; \\ 0, & |x| > 3. \end{cases}$$

28. Для функції

$$f(x) = \frac{1}{x\left(x^2+4\right)},$$

заданій на $\left]0, \infty\right[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 9

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3n-1}{n\left(n^2-1\right)}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ \frac{11}{2}+\frac{21}{4}+\frac{31}{8}+\frac{41}{16}+\ldots,\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{3^{16}}+\ldots,\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^3 arctg^n\,\frac{\pi}{3n}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ \sum_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{\left(5n^2-9\right)\ln(n-2)},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3n}\right)}{\sqrt[4]{n^4-1}},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n^2}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt[3]{n}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n\ln n^n},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(4+\frac{1}{n}\right)^n,\qquad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 10\cdots(6n-2)}{1\cdot 16\cdots(3n-2)^2},$$

$$г)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n(\ln\ln n)^2},\qquad д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\cos n^2,\qquad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^n}{(2n-1)!}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n^5+1\right)},\quad \alpha=0{,}01;\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n+1\right)!!},\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=6+1+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{n!},\qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos\frac{n\alpha}{2};\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n\sin^n x}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $|x|<\infty$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}shx}{\left(2+sh^2x\right)^n},$$

виходячи з означення, і ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt[3]{n}},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+4}}{(n+2)!};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n^2}}{(n+1)^n}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}[x(x+2)]^n;\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tgx)^n}{2^n}.$$

16. Для функцій

$$а)\quad e^{\sqrt{1+x^2}},\qquad б)\quad \ln|\cos x|$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = 0$ та $x_0 = \frac{1}{2}$ відповідно.

17. Функції

$$а)\quad \ln\left(x^2+6x+12\right),\qquad б)\quad \frac{1}{x^2+3x+2},\qquad в)\quad xe^{2x-x^2}$$

в околі точки x_0 ($x_0 = -3$, $x_0 = -4$, $x_0 = 1$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^n}{3^n};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos^{n+1}x}{n(n+1)}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+arctgx-2\sin x}{(e^{x^2}-1)\ln(1+2x^3)}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1 \frac{\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)dx}{x}, \quad \sigma=10^{-2}.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'=\arcsin y-x^2, \quad y(0)=0.5,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(1+4x^2)y''+16xy'+8y=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\ f(x)=\pi-x, \quad x\in\left]-\pi,\pi\right[; \qquad б)\ f(x)=|x|-5,\ x\in\left]-2,4\right[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\quad f(x)=\begin{cases} 0, & x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[;\\ \sin x, & x\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[;\end{cases}\qquad б)\quad f(x)=1-e^{x},\ x\in\left]0,1\right[.$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l,l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 9.1)

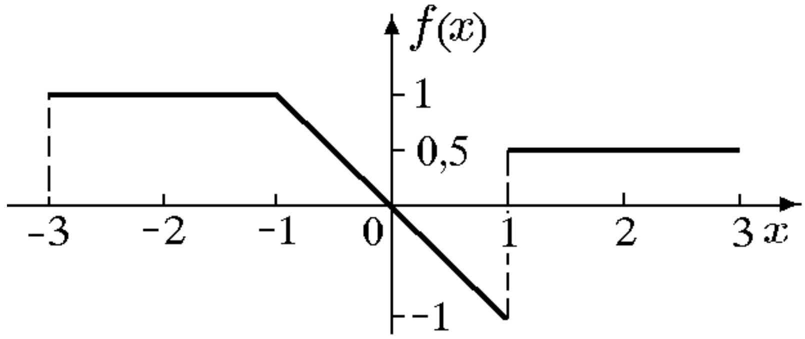

Рис. 9.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=e^{-2x^2}$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

28. Для функції

$$f(x)=\begin{cases}4x-1, & x\in\left]0,\dfrac{1}{4}\right[;\\ 0, & x\in\left]\dfrac{1}{4},\infty\right[,\end{cases}$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 10

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ 1+\frac{2}{5}+\frac{6}{25}+\frac{24}{125}+\frac{120}{625}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{7^{n-1}}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ \frac{\pi}{4}+arctg^2\frac{1}{2}+arctg^3\frac{1}{3}+arctg^4\frac{1}{4}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^3}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}tg\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\ \sum_{n=5}^{\infty}\frac{\sin n}{2n+\sin n},\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^3}}{2^n}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^{\alpha-1}},\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{(3n+2)(3n-1)},\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n,$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right),\ д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{2^{n^2}},\quad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n^2}}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n)!}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)},\quad \alpha=0{,}05;\qquad б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4-\ln n},\quad \alpha=0{,}01.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=7+1+0+0+0+\ldots,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n!},\qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{1}{2^n x^2 + 1}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $|x| \le 10$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{(2 - \cos x)^n},$$

виходячи з означення, і ряд

$$б)\ \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^4}{n \ln^2 n}\right),$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Діні.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} (x+2)^{n^2}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cos^n x; \qquad б)\quad \sum_{n=o}^{\infty} (x^2 - 1)^{n!}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad б)\quad \frac{\sin x}{x^4 - 6x^2 + 25}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = \frac{\pi}{4}$ та $x_0 = 3$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad \ln\left(1-x+x^2\right),\qquad б)\quad \left(x^3+2ctgx\right)\sin x,\quad в)\quad \sin\frac{x}{2}$$

в околі точки x_0 ($x_0=0,\ x_0=0,\ x_0=\frac{\pi}{2}$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2-n+1\right)(x-1)^n$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x-\sin^2(x-1)}{e^{(x-1)^2}-1}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1 ch\sqrt{x}dx,\quad \sigma=0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'=e^x+\frac{1}{y},\quad y(0)=1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$x^2(x+1)y''-2xy'+2y=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\quad f(x)=\begin{cases}-1, & x\in\left]-\pi,0\right[;\\ 3, & x\in\left]0,\pi\right[;\end{cases}\qquad б)\quad f(x)=e^{x}-1,\quad x\in\left]-1,3\right[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\ f(x)=\frac{x^2}{2}-1,\quad x\in\left]0,\pi\right[;\qquad б)\ f(x)=x\sin x,\ \ x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,$$

розкласти в ряд Фур'є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l,l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 10.1)

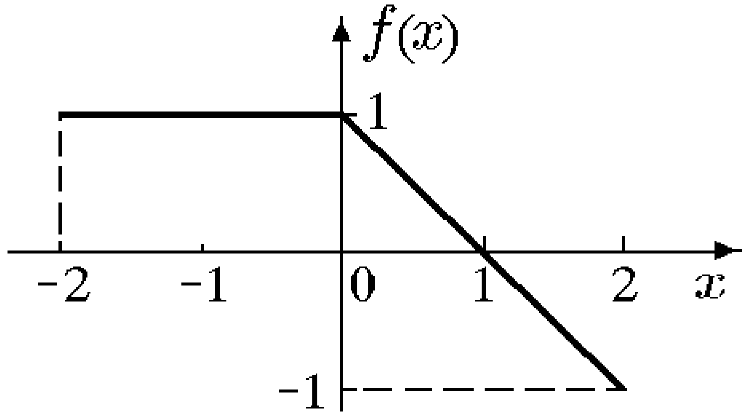

Рис. 10.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\frac{x}{4x^2+1},$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = e^{-|x|}\sin x.$$

28. Для функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left]0, \alpha\right[; \\ 0, & x \in \left]\alpha, \infty\right[. \end{cases}$$

заданій на $\left]0, \infty\right[$, знайти косинус-перетворення Фур'є.

Варіант 11

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$а)\ \frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{3\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9} + \ldots, \quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty} \cos\frac{\pi n}{2^n}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$а)\ \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln^2 3} + \frac{3}{\ln^3 4} + \frac{4}{\ln^4 5} + \ldots, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+2)}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$а)\ 1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \ldots, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\left(2n^2+1\right)^2},\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right).$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\quad \sum_{n=5}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n^2},\qquad б)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdots(2n+5)}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln^2 n},\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n}\sin\sqrt[3]{n}},\qquad в)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{\left(3^n+1\right)(2n)!},$$

$$г)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+6}}{n(n+1)(n+2)},\quad д)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right),\quad е)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{n^n}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{2^{n^2}}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n^6+1\right)},\quad \alpha=0{,}01;\quad б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)^2(2n-1)^2},\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+3+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16^n}{n}x^{2n}\sin(x+\pi n); \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n\ln^{n-1}\left(1+x^2\right).$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $|x|<\infty$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{\left[(n-1)\sin^2 x+1\right]\left[n\sin^2 x+1\right]},$$

виходячи з означення, і ряд

$$б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{\sin nx}}{n\ln^3 n},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n}{n+3}+\frac{5^n}{n+5}\right)(x-15)^{2n}; \qquad\qquad б)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+5}{6n+7}\right)^n x^n.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}e^{-2nx}; \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\left(x^2-2x\right)^n}{2^n}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad \frac{1}{\sin x}, \qquad б)\quad \frac{1}{arctgx}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = \frac{\pi}{6}$ та $x_0 = 1$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad \frac{\sin 3x}{x} - \cos x, \qquad б)\quad \frac{4x-1}{\sqrt{3-4x}}, \qquad в)\quad x \arcsin\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)$$

в околі точки x_0 ($x_0 = 0,\ x_0 = \frac{1}{4}$, $x_0 = 0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)e^{-x} - (1-x)e^{x}}{\arcsin x - arctgx}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_5^{10} \frac{\ln\left(1+x^2\right)dx}{x}, \quad \sigma = 10^{-2}.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'' = xyy', \quad y(0) = y'(0) = 1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(4-x^2)y''-4xy'-2y=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$а)\, f(x)=2x+3,\quad x\in\left]-\pi,\pi\right[;\qquad б)\, f(x)=\begin{cases} x, & x\in\left]0,\pi\right[;\\ \pi, & x\in\left]\pi,2\pi\right[.\end{cases}$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$а)\quad f(x)=\begin{cases} 0, & x\in\left]0,1\right[;\\ x^2, & x\in\left]1,2\right[;\end{cases}\qquad б)\quad f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x^2}{2},\ x\in\left]0,\pi\right[,$$

розкласти в ряд Фур'є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l,l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 11.1)

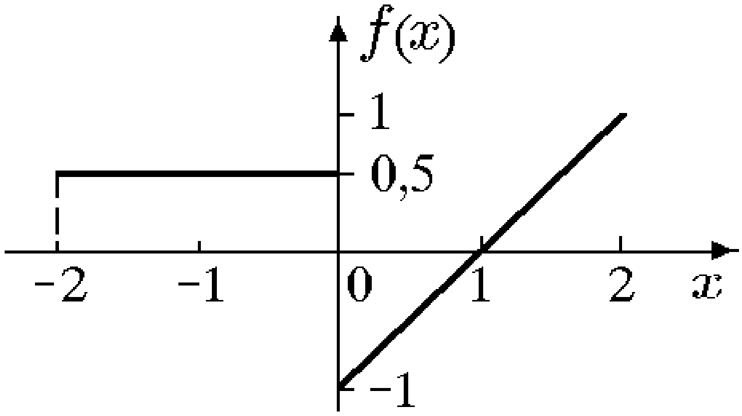

Рис. 11.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\frac{1}{9+x^2}.$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x)=e^{-|x|}\cos x.$$

28. Для функції

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\,]0,1[;\\ 2-x, & x\in\,]1,2[;\\ 0, & x\in\,]2,\infty[, \end{cases}$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти косинус-перетворення Фур'є.

Варіант 12

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ \frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{27}+\frac{16}{81}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+6}{6^n}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$а)\ \frac{3}{2}+1+\frac{27}{4^3}+\frac{81}{5^4}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(4+\frac{1}{n^4}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{\sqrt{n}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} tg^2\frac{\pi}{4\sqrt{n}},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!!}{n^n},\qquad б)\ \sum_{n=5}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n\ln\left(2n^2\right)},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n},\qquad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}},$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+2\sqrt{n}\cos\pi n}{\sqrt{n^3+1}}\right),\quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n^n},\quad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{[(n+2)!]^2}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\,2n},\quad \alpha=0{,}01;\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1},\quad \alpha=0{,}01.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 + 2 + 0 + 0 + 0 + \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \qquad б) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right); \qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[5]{nx+1} - \sqrt[5]{n}\right) n^{\frac{4n}{5}}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]-0,1[$ ряд

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})},$$

виходячи з означення, і на проміжку $|x| \le 10$ ряд

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{x^2+n^2},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \sqrt[n]{5}\right)(x-5)^n; \qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{\sqrt{n^5+1}}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(3x^2+4x+2)}; \qquad б)\quad \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n.$$

16. Для функцій

$$а)\quad \frac{\ln(1+x)}{\cos x}; \qquad б)\quad e^{-x}\cos x^2$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = 0$ та $x_0 = 0$ відповідно.

17. Функції

$$а)\quad \arcsin\left(1+4x+4x^2\right), \qquad б)\quad \frac{1}{(3-x)^2}, \qquad в)\quad \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

в околі точки x_0 ($x_0 = -\frac{1}{2}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{tg^{2n-1}x}{2n-1}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(3^n + \frac{(-1)^n}{n}\right)x^n$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) + \frac{x^2}{2} - \sin x}{arctg^3 x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^2 x^{-x}dx, \quad \sigma = 0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'x^2 + xy = y^{(4)}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(8x^3 + 1\right)y'' + 48x^2y' + 48xy = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\quad f(x) = \pi^2 - x^2, \quad x \in \left]-\pi, \pi\right[; \qquad б)\quad f(x) = \sin\frac{2\pi x}{3}, \; x \in \left]-3, 3\right[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\quad f(x) = x, \; x \in \left]0, \pi\right[\qquad б)\quad f(x) = e^{\frac{x}{3}}, \quad x \in \left]0, 3\right[,$$

розкласти в ряд Фур'є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис.12.1)

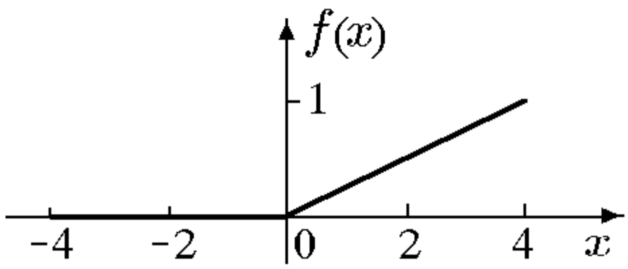

Рис.12.1

представити рядом Фур’є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le \pi;\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$$

представити інтегралом Фур’є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур’є функції

$$f(x)=xe^{-|x|}.$$

28. Для функції

$$f(x)=\frac{1}{x^4+16},$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти косинус-перетворення Фур’є.

Варіант 13

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n(n-1)}{(n+1)!}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ \frac{2}{2\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 8}+\frac{8}{8\cdot 11}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\,tg\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$а)\ 3+\left(\frac{5}{2}\right)^4+\left(\frac{7}{3}\right)^9+\left(\frac{9}{4}\right)^{16}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right)^n.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$а)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n\left(\ln^4 n+1\right)},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[7]{n}}}{\sqrt[7]{n^6}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\ \frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{3}{11}+\frac{4}{19}+\ldots,\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt[4]{n^5}}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots,\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{3n+1}}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6+n}{4n^2-9},\quad б)\ \sum_{n=4}^{\infty}\frac{\arcsin\frac{3+(-1)^n}{n}}{\sqrt[4]{n^5+1}},\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}},$$

$$г)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\left(n^3+3\right)\ln n},\qquad д)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2},\qquad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n)!}{2^{n^2}}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)!}{n^n}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n+1}},\quad \alpha=0{,}01;\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n},\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+5+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}n^n\ln^n\left(1+\frac{x}{(x+1)^n}\right);\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^{nctgx}}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $|x|<\infty$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\sin^2 x+n\right]\left[\sin^2 x+n+1\right]},$$

виходячи з означення, і ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-nx^4}}{n^4},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}(3x-1)^{2n};\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sqrt{n!}}{n}x^n.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}8^n n^2\sin^{3n}x;\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{(x+1)^{2n}}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad \sqrt{1+\sin x},\qquad\qquad б)\quad (\arcsin x)^2$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=\frac{\pi}{4}$ та $x_0=\frac{1}{2}$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad arctg\frac{2-2x}{1+4x},\qquad б)\quad \frac{3^{x^2}-1}{x^2},\qquad в)\quad chx(x-1)$$

в околі точки x_0 ($x_0=0,\ x_0=0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1(-1)^{n-1}\pi^{2n-1}}{2^{n-1}(4n-2)!!}x^{4n-2};\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(3n^2+7n+5\right)x^n$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right].$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{x^2} dx}{x^2}, \quad \sigma = 10^{-2}.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'' = x^2 + y^2, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 0{,}5,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$x^2(4 - x)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур’є на вказаному проміжку функцію

$$а)\, f(x) = 8 - 4x, \quad x \in \left]-1, 3\right[; \qquad б)\, f(x) = \begin{cases} -x, & x \in \left]-\pi, 0\right[; \\ \dfrac{x^2}{2}, & x \in \left]0, \pi\right[. \end{cases}$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$а)\, f(x) = sign(1 - x), \quad x \in \left]0, 2\right[; \qquad б)\, f(x) = \cos 2x, x \in \left]0, \pi\right[,$$

розкласти в ряд Фур’є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис.13.1)

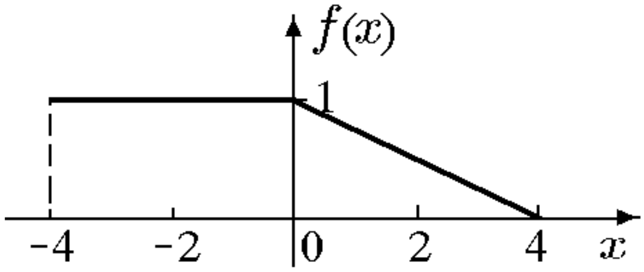

Рис.13.1

представити рядом Фур’є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x) = e^{1-x^2}$$

представити інтегралом Фур’є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур’є функції

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x \in \left]-3, 0\right[; \\ x, & x \in \left]0, 3\right[; \\ 0, & |x| > 3, \end{cases}$$

28. Для функції

$$f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

заданій на $\left]0, \infty\right[$, знайти синус-перетворення Фур’є.

Варіант 14

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2+n} \sin\frac{2n+1}{n^2+n}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ \frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{19}{19\cdot 25}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{3^n}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ \frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^9}{27}+\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{27}}{81}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n^3+1\right)\ln n},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n^5+5}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n(n+1)(n+2)},\qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\ln n}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\ln n},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2+(-1)^n}{n}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n!)^2}{(2n)!};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-15};\quad в)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}};$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+3n}{2+3n^2}\right)^2;\quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty} arctg^n\,\frac{n}{n+1};\quad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n)^n}{(2n+1)!}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{n^n}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\, n!}, \quad \alpha = 0{,}01; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+4)^2}, \quad \alpha = 0{,}01.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 + 2 + 0 + 0 + 0 + \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]-1, 1[$ ряд

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{x+1}}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)^n},$$

виходячи з означення, і на проміжку $|x| \le 100$ ряд

$$б)\ \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+8}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+27}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+64}}+\ldots,$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(x+e)^n e^{-\sqrt[3]{n}}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!\,x^n}{4^{n^2}}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2x-1)^{2n-1}}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}\,tg^{2n}x.$$

16. Для функцій

$$а)\quad \ln tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right); \qquad б)\quad 2^{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=0$ та $x_0=0$ відповідно.

17. Функції

$$а)\ln\left(1-5x+4x^2\right), \qquad б)\frac{1}{x^2-4x+3}, \qquad в)\,arctg\,\frac{2-2x}{1+4x}$$

в околі точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=-2$, $x_0=0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^{2n-1}x}{2n-1}; \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}n(2n-1)x^{n+2}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}} dx, \quad \sigma = 0{,}01.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y' = e^y + xy, \quad y(0) = 1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(1 - 4x^2\right)y'' - 16xy' - 8y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left]-\pi, 0\right[; \\ x, & x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[; \\ \frac{\pi}{2}, & x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[; \end{cases} \qquad б) \quad f(x) = 2x - 5, \quad x \in \left]0, 2\right[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a) \quad f(x)=\frac{\pi}{8},\ x\in\left]0,\pi\right[\qquad б) \quad f(x)=e^{\frac{x}{2}}, \quad x\in\left]0,2\right[,$$

розкласти в ряд Фур'є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l,l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 14.1)

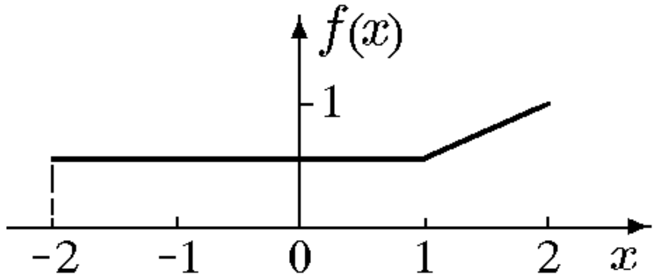

Рис. 14.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=(2-x)e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}.$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x)=\frac{x}{x^2+16}.$$

28. Для функції

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin 3x, & x\in \left]0,\dfrac{4\pi}{3}\right[; \\ 0, & x\notin \left]0,\dfrac{4\pi}{3}\right[\end{cases}$$

заданій на $\left]0,\infty\right[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 15

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-2\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}\right)$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ \sin\frac{\pi}{2}+2\sin\frac{\pi}{4}+6\sin\frac{\pi}{8}+24\sin\frac{\pi}{16}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^2\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ \frac{1}{3}+\frac{4}{25}+\frac{27}{343}+\frac{256}{6561}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}3^n}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\ \ln 2+\frac{\ln 4}{8}+\frac{\ln 8}{27}+\frac{\ln 16}{64}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n},\qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{20}}{2^n}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{3n+1}}\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+3)!};\quad в)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n};$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(3n+2)}{3n+2};\quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty}n\,arctg^n\frac{\sqrt{3}n}{n+4};\quad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)5^{2n}}{(2n-1)!}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^n}{(2n-1)!}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\sum_{n=3}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right),\quad \alpha=0{,}01;\qquad б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^3+1)},\quad \alpha=0{,}05.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2+7+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$а)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\left(1+n^2x^2\right)};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{3^n}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]1,2[$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(x-1)}{(1+x)^n\left(1+x^{n+1}\right)},$$

виходячи з означення, і на проміжку $[0,\infty[$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}3^n\ln\left[1+\sin\frac{1}{4^n(x+1)}\right],$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Діні.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]}{\sqrt[n]{e^3}}x^n;\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2nx)^n}{(2n-1)!}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 3^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}}tg^n 2x;\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n x}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2};\qquad б)\quad tgx$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=\frac{1}{2}$ та $x_0=\frac{\pi}{4}$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad \ln\left(1+8x^3\right),\qquad б)\quad \sqrt{x},\qquad в)\quad e^x\cos x$$

в околі точки x_0 ($x_0 = 0,\ x_0 = 2,\ x_0 = 0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-\sin^2 x}{e^{x^2}-1}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^2 x^2 dx,\quad \sigma = 0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y' = x^2y^2 - 1,\quad y(0) = 1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(4x^3-8\right)y'' + 6x^2y' + 6xy = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\, f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad x \in \left]-2, 4\right[; \qquad б)\, f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left]-\pi, 0\right[; \\ 2x, & x \in \left]0, \pi\right[. \end{cases}$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\, f(x) = \cos\frac{\pi x}{4}, \quad x \in \left]0, 2\right[; \qquad б)\, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[; \\ -x^2, & x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\end{cases}$$

розкласти в ряд Фур'є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 15.1)

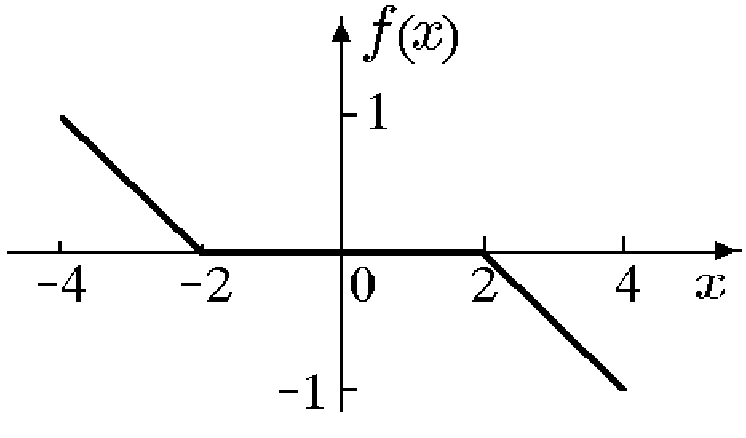

Рис. 15.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x) = sign(x-2) - sign(x-3)$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = (1 + x)e^{-|x|}.$$

28. Для функції

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

заданій на $\left]0, \infty\right[$, знайти косинус-перетворення Фур'є.

Варіант 16

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)2^n}{n(n+1)}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$а)\ 1 + \frac{2}{4} + \frac{6}{27} + \frac{24}{256} + \frac{120}{3125} + \ldots, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{2^{n+5}\left(n^2 + 1\right)}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$а)\ \frac{1}{15} + \left(\frac{2}{25}\right)^4 + \left(\frac{3}{35}\right)^9 + \left(\frac{4}{45}\right)^{16} + \ldots, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\left(2n + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}, \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-1}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2+n+2};\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[2+\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n)!},\qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+2}}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt[5]{n^3}}\cos\frac{1}{\sqrt[5]{n^3}};\quad б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}{1-\cos\sqrt{\frac{1}{n}}};\quad в)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n}{6}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{1+2n}};$$

$$г)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^3}-(-1)^n};\ д)\ \sum_{n=1}^{\infty}n\,arctg^n\frac{3}{2n^2};\ е)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^{2e^{-2n}}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5n)!}{2^{n^2}}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{e^n+1}},\quad \alpha=0{,}05;\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(2n+1)^n},\quad \alpha=0{,}01.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7 + 2 + 0 + 0 + 0 + \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!}, \qquad б) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + 2^n x^n\right)\sqrt[n]{n!}}; \qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{ntgx}}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]-1,1[$ ряд

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctgnx}{\sqrt[4]{n^5 + x^6}},$$

виходячи з означення, і на проміжку $|x| < \infty$ ряд

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}}\right),$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-35)^{2n+1}}{3^n + 5^n}; \qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{\left(x^2 - 9\right)^n}}; \qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}\left(x^2 - 2\right)^n}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad arctg\frac{1}{1+x};\qquad б)\quad \ln(1+x)$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = 0$ та $x_0 = -1$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad x\sqrt[3]{27-2x},\qquad б)\quad \ln\frac{1}{x^2-2x+2},\qquad в)\quad \sin^3 x$$

в околі точки x_0 ($x_0 = 0,\ x_0 = 1,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1-2x)^n};\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln\sqrt{2x+\sqrt{1+4x^2}}}{x-\sin x\cos x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x^2}}dx,\quad \sigma = 0{,}01.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$\left(1+x^2\right)y'' + xy' - y = 0,\quad y(0) = y'(0) = 1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(16 - x^2\right)y'' - 4xy' - 2y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left]-2, 0\right[; \\ \dfrac{x}{2}, & x \in \left]0, 1\right[; \end{cases} \qquad б)\quad f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in \left]-\pi, 0\right[; \\ 1, & x \in \left]0, \pi\right[. \end{cases}$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\, f(x) = e^{\frac{x}{3}}, \quad x \in \left]0, 1\right[; \qquad б)\, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[; \\ 4 - x^2, & x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[\end{cases}$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 16.1)

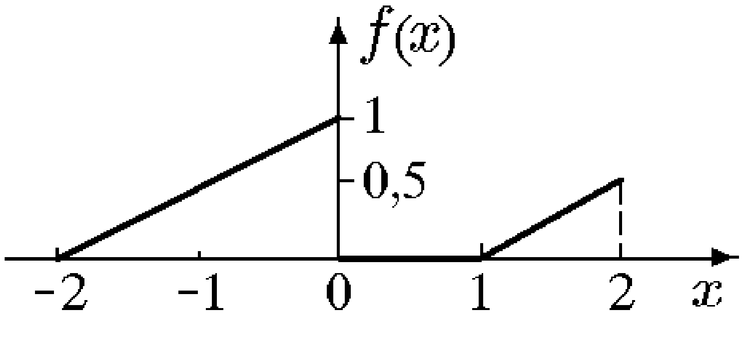

Рис. 16.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}2\left(1-\dfrac{|x|}{3}\right), & x\le 3;\\ 0, & |x|>3\end{cases}$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x)=e^{-|x|}\cos\beta x.$$

28. Для функції

$$f(x)=\frac{x}{16x^4+1}$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 17

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n^2+1}{2n^2+3n+1}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ \frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{24}{10000}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(n+1)^n}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ \frac{10}{11}+\left(\frac{10}{11}\right)^2+\left(\frac{10}{11}\right)^3+\left(\frac{10}{11}\right)^4+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}, \qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n+2)\ln^2 n}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n+\cos^2 n}}; \qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\arcsin[(n-1)/n]}{\sqrt[3]{n^3-3n}}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(2+1/n)^n}, \qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2}{n}\cos\frac{\pi n}{8}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}\right); \quad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt[n]{2}}; \quad в)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \arcsin^{3n}\frac{1}{2^n};$$

$$г)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^n}; \qquad д)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{4n^2-10}; \qquad е)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{(\ln 3)^n}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5}{(2n)!}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}, \quad \alpha = 0{,}1; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}, \quad \alpha = 0{,}05.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2+9+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}, \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{9^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{n/\ln x}; \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}\left(x^2-4x+6\right)^n.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $\left]-1,0\right[$ ряд

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^2}{\left(2(1+x)+x^2\right)^n},$$

виходячи з означення, і на проміжку $|x|<\infty$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty} arctg\,\frac{2x}{x^2+n^4},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$а)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n}{4n^2+4n-3}(x-3)^{2n}; \quad б)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)(3x-2)^n}{2\cdot7\cdot12\cdots(5n-3)}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}x^{-n}tg\,\frac{1}{2n}; \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln^4\left(\frac{x}{e}\right).$$

16. Для функцій

$$а)\quad \frac{1}{(arctgx)^2}; \qquad\qquad б)\quad tg^2x$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = 1$ та $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ відповідно.

17. Функції

$$a)\ \frac{1+x^3}{(1-x)^3}, \qquad б)\ sh^2 x, \quad в)\ \sqrt{x}\,arctg\sqrt{x}$$

в околі точки x_0 ($x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}; \qquad б)\ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n-1}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x(x+1) - x^3 \cos x}{x^5 \cos x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x}\, dx, \quad \sigma = 0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$\left(1 + x^2\right) y' = x + y, \quad y(0) = 1,$$

е ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2(x+2)y''-4xy'+4y=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$а)\, f(x)=x+|x|, \quad x\in\left]-\pi,\pi\right[; \qquad б)\, f(x)=2x-5, \quad x\in\left]0,4\right[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$а)\, f(x)=(x-\pi)^2, \quad x\in\left]0,\pi\right[; \qquad б)\, f(x)=\frac{3}{4}-\frac{x}{2}, \quad x\in\left]0,3\right[,$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l,l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 17.1)

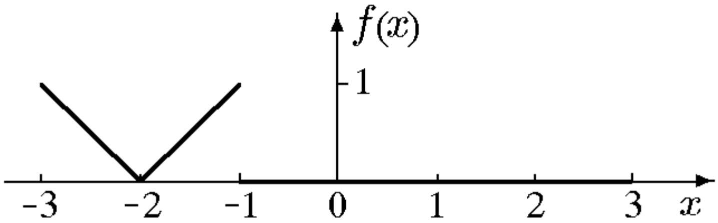

Рис. 17.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\begin{cases} 3\sin x, & |x|\le \dfrac{2\pi}{3}; \\ 0, & |x|>\dfrac{2\pi}{3}, \end{cases}$$

представити інтегралом Фур’є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур’є функції

$$f(x) = (x-2)e^{-|x|/2}.$$

28. Для функції

$$f(x) = \frac{1}{x^4+1}$$

заданій на $]0, \infty[$, знайти синус-перетворення Фур’є.

Варіант 18

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ arctg5 + \frac{1}{2} arctg\frac{5}{2} + \frac{1}{6} arctg\frac{5}{3} + \frac{1}{24} arctg\frac{5}{4} + \ldots, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{2}{7}\right)^5 + \left(\frac{3}{10}\right)^7 + \left(\frac{4}{13}\right)^9 + \ldots, \quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty} n^4 arctg^{2n} \frac{\pi}{4n}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}, \qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(2n+3)\ln^2(n+1)}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right); \qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln n}{n^3-3}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{10^n}{n}, \qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(\pi n/4)}{n\sqrt{n}+\sin(\pi n/4)}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\sin^2\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}; \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{2+(-3n)^{2n}}; \quad в)\ \sum_{n=2}^{\infty}2^{-(\ln n)^2}\frac{\ln n}{n};$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^3}}; \quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+6}{n^2+5n}; \quad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+e^2}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n)!!}{n^n}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n-3}}, \quad \alpha=0{,}05; \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n!}, \quad \alpha=0{,}01.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 9+2+0+0+0+\ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-9)^n}{n!}, \qquad б) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\sqrt{\pi}\ ; \qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n+1}{1-x^n}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]0,1[$ ряд

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}(x-1)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})},$$

виходячи з означення, і на проміжку $[0,10]$ ряд

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{nx}},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1}\right)(x-3)^n; \quad б) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n; \qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi/2^n\right)}{x^n}.$$

16. Для функцій

$$а)\quad e^{1/(x-1)};\qquad\qquad б)\quad \sin^2 x$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = 0$ та $x_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ відповідно.

17. Функції

$$а)\quad \frac{1+4x+x^3}{x^3-1},\qquad б)\quad \cos^2 x,\qquad в)\quad arctg\frac{2-2x}{1+4x}$$

в околі точки x_0 ($x_0 = 0,\ x_0 = \dfrac{\pi}{3},\ x_0 = 0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!(e^x+1)^{2n}};\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^2-n-2\right)x^{n+1}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,arctg\,x - x^2}{x\sqrt{27+x^2}-3x^2}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1 x^6 ch\,x\,dx,\quad \sigma = 0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'' = xy' - y + 1, \quad y(0) = y'(0) = 1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$\left(8x^3 + 1\right)y'' + 48x^2 y' + 48xy = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур’є на вказаному проміжку функцію

$$а)\, f(x) = e^{x-1}, \quad x \in]-2, 0[; \qquad б)\, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in]-\pi, 0[; \\ (x-\pi)^2, & x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$а) \quad f(x) = e^{2x}, \quad x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[; \qquad б) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{\pi}, & x \in]0, \pi[; \\ 0, & x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

розкласти в ряд Фур’є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $]-l, l[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 18.1)

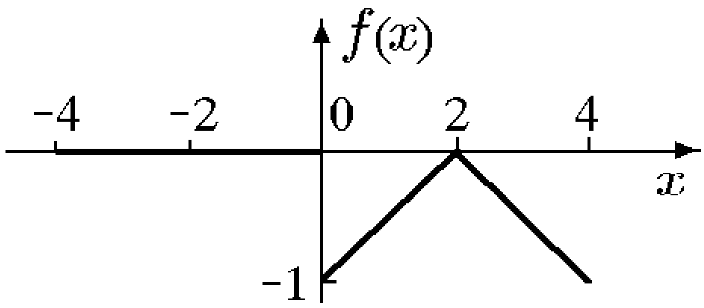

Рис. 18.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\begin{cases} signx, & |x|\le 2; \\ 0, & |x|>2, \end{cases}$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}\sin x, & |x|\ge 0; \\ 0, & |x|<0. \end{cases}$$

28. Для функції

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4}$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 19

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}, \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n 2n!}{(2n)!}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$а)\ \left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\ldots, \quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n^2}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$а)\ \sum_{n=2}^{\infty} n^6 e^{-n^7}, \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt[3]{n^2}}{1+n^3}\right)^3; \qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{7/3}}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2n}{3n+6}\right)^n, \qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2(n+1)}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{10}}\right); \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}(n!)^3}{(3n)!}; \quad в)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{\lg n};$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right); \quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-n}+2^{1-n}}{3^{1-n}}; \quad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^n)!}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!!}{n^n}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}},\quad \alpha=0{,}05;\qquad б)\quad \sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-2)}{(n^2-1)^2},\quad \alpha=0{,}01.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3+4+0+0+0+\ldots,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!},\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e^{n\sin x}};\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{\ln^{2n}(3x-1)}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]-2,1[$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^2}{\left[(1+x)+x^{2n}\right]},$$

виходячи з означення, і на проміжку $[-2, 2]$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{3^{n^2}},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)};\quad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n+2} \ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right).$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(x^2-4x+6\right)^n;\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 4^{nx} arctg \frac{1}{4^n}.$$

16. Для функцій

$$а)\quad e^{x^2};\qquad б)\quad \sin(\pi / x)$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = 1$ та $x_0 = \frac{1}{2}$ відповідно.

17. Функції

$$а)\quad x arctg x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right),\qquad б)\quad xe^x,\quad в)\quad \frac{1}{3+x}$$

в околі точки x_0 ($x_0 = 0$, $x_0 = -1$, $x_0 = -2$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin x)^{2n+1}(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)};\qquad б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)x^{n-1}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+\cos 2x\right)/2}}{(\cos^{-2}x-1)^2}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1\frac{1}{x}shx^2dx,\quad \sigma=0{,}01.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y'=\sin(x+y),\quad y(0)=\frac{\pi}{3},$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(1-9x^2\right)y''-36xy'-18y=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\quad f(x)=-\frac{|x|}{\pi},\quad x\in\left]-\pi,\pi\right[;\qquad б)\quad f(x)=\begin{cases}x, & x\in\left]-1,0\right[;\\ 2x, & x\in\left]0,2\right[.\end{cases}$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\quad f(x)=3x-2,\quad x\in\,]0,\pi[;\qquad б)\quad f(x)=\sin\frac{2}{\pi x},\quad x\in\,]0,2\pi[,$$

розкласти в ряд Фур'є по синусах(а) та по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $]-l,l[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 19.1) представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

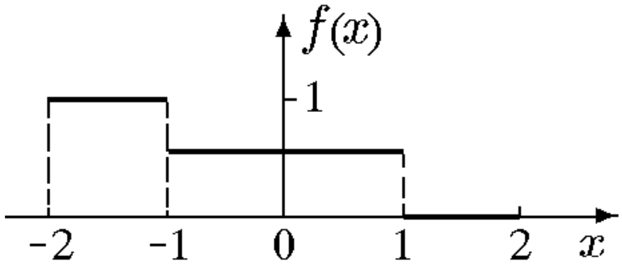

Рис. 19.1

26. Функцію $f(x)=e^{-\alpha^2|x|}$ представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x)=\begin{cases} x\cos x, & |x|\le\pi; \\ 0, & |x|>\pi. \end{cases}$$

28. Для функції

$$f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x},$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 20

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n++2}\right)$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$а)\ 2+\frac{1}{2}+\frac{8}{9}+1+\frac{32}{25}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\alpha}}{4^{n}}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$а)\ arctg^{2}\frac{1}{2}+arctg^{4}\frac{1}{4}+arctg^{6}\frac{1}{6}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{5}\left(1+\frac{n}{n+1}\right)^{n}\right]^{n}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^{3}},\qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^{2}+5)\ln n}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{n},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^{2}+2)}arctg\frac{1+(-1)^{n}}{2}n.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+3)}{\ln(n+4)};\qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin^{2}n}{n}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{n/3};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}n!}{n^{n}};\quad в)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt[3]{n}};$$

$$г)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)};\qquad д)\quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n};\qquad е)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{n!}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!!}{n^{n}}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{4+n^{2}},\quad \alpha=0{,}03;\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n^{2}}{(n^{4}+1)^{2}},\quad \alpha=0{,}01.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4+3+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^{n}}{n!},\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n}}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{1+x^{2n}};\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}e^{n\sin x}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]0,1[$ ряд

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{\left[(n-1)\sqrt{x}+1\right]\left(n\sqrt{x}+1\right)},$$

виходячи з означення, і на проміжку $[-3, 0]$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!(x+3)^n}{n^n};\quad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$а)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{n^2+1}\left(27x^2+12x+2\right)^{-n};\qquad б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{(x+1)^n}}.$$

16. Для функцій

$$а)\quad |\cos x|;\qquad\qquad б)\quad tgx$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=0$ та $x_0=-\frac{\pi}{4}$ відповідно.

17. Функції

$$а)\quad \frac{sh2x}{x}-2,\qquad б)\quad \frac{x}{(1-x)\left(1-x^2\right)},\quad в)\quad \frac{1}{\sqrt{4+x}}$$

в околі точки x_0 ($x_0=0,\ x_0=0,\ x_0=0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^{2n-1}x}{2n-1};\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{x^n}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}e^{-x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1 x^2\left(1+e^{x^2}\right)dx,\quad \sigma=0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти п’ять членів розвинення рішення задачі Коші

$$y''=x\sin y',\quad y(0)=0,\quad y'(1)=\frac{\pi}{2},$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$x^2(1-2x)y''-2xy'+2y=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур’є на вказаному проміжку функцію

$$a)\ f(x)=x+1,\quad x\in\left]-2,4\right[;\qquad б)\ f(x)=\begin{cases}-x, & x\in\left]-\pi,0\right[;\\ \dfrac{x}{2}, & x\in\left]0,\pi\right[.\end{cases}$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\ f(x)=x-2x^2,\quad x\in\left]0,\pi\right[;\qquad б)\ f(x)=e^{1-x},\quad x\in\left]0,1\right[,$$

розкласти в ряд Фур’є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 20.1)

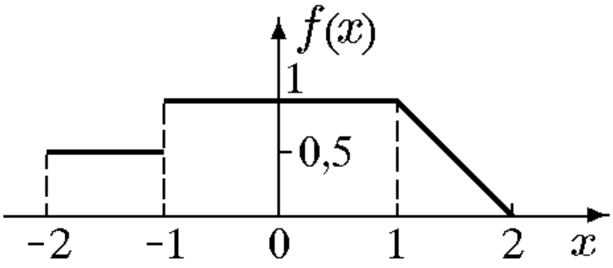

Рис. 20.1

представити рядом Фур’є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}2x, & |x|\le 6;\\ 0, & |x|>6\end{cases}$$

представити інтегралом Фур’є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур’є функції

$$f(x)=\frac{1}{64+x^2}.$$

28. Для функції

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in\left]0, \pi\right[;\\ \dfrac{x}{2}, & x\notin\left]0, \pi\right[,\end{cases}$$

заданій на $\left]0, \infty\right[$, знайти синус-перетворення Фур’є.

Варіант 21

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right]$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ 1+\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\frac{7}{24}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)}{(2n)!}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ 2+1+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{2}{5}\right)^5+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{n!}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1},\qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln^2(n+7)}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\frac{1}{\sqrt{n}};\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\sqrt{n}/\left(n^2-1\right)}-1\right).$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{1+(-5)^{2n}};\qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)\frac{\sin n}{n}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}\right);\quad б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n^2}};\quad в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{(n+1)(n+2)/n};$$

$$г)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{\sqrt[3]{n^4}+n};\qquad д)\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sin 2n}{2n+\sin n};\qquad е)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^n}{(2n-1)!}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(2n-1)!}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n-1)},\quad \alpha=0{,}05;\quad б)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{\left(n^2+1\right)^3},\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3+5+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n;\qquad б)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2+x)(n-1+x)}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $\left]0, 1/2\right[$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x\left(x^2 + x - 1\right)^n,$$

виходячи з означення, і на проміжку $[0, 2]$ ряд

$$б)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} cosnx}{\sqrt[3]{n^5+1}},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{3n}(3-x)^n;\quad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-23)^n}{2^n+3^n}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n+1}\left(\frac{x}{x+3}\right)^n;\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (2tgx)^n arctg\frac{1}{3^n}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad x^x;\qquad б)\quad \sin e^x$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = 1$ та $x_0 = 0$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad \frac{1}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}},\qquad б)\quad x\sin 2x,\quad в)\quad \ln\frac{1}{2-2x+x^2}$$

в околі точки x_0 ($x_0 = 0,\ x_0 = \dfrac{\pi}{6},\ x_0 = 1$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}; \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(3n^2 + 8n + 5\right) x^{n+2}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x [e^{\sin^2 x} - 1 - \ln(1 + x^2 / e)]}{2 \sin x - \sin 2x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1 sh^2 \sqrt{x} dx, \quad \sigma = 0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y' = x + y + y^2, \quad y(2) = 2,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 4xy' - 2y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$a)\, f(x) = |\cos x|, \quad x \in \left]-\pi, \pi\right[; \qquad б)\, f(x) = x + sign x, \quad x \in \left]-2, 1\right[.$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$a) \quad f(x) = 2 - x, \quad x \in \left]0, \pi\right[; \qquad б) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in \left]0, 1\right[; \\ x^2, & x \in \left]1, 2\right[, \end{cases}$

розкласти в ряд Фур'є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 21.1)

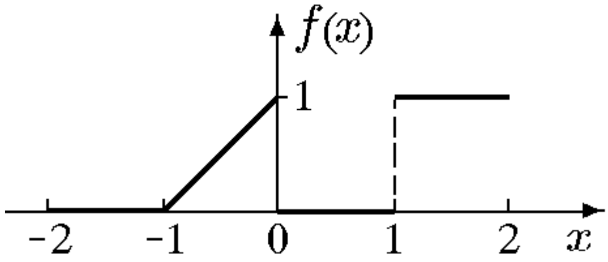

Рис. 21.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x) = \begin{cases} \sin \varpi x, & |x| \le 2\pi k / \varpi; \\ 0, & |x| > 2\pi k / \varpi, \end{cases}$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = sign(x-1) - sign(x-2).$$

28. Для функції

$$f(x)=\frac{1-e^{-2x}}{x},$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти косинус-перетворення Фур'є.

Варіант 22

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1}{5n^2-n-6/5}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ \frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 8}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(3+1/n)^n.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ 1+\frac{2}{5}+\frac{6}{25}+\frac{24}{125}+\frac{120}{625}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^n(n+1)^3.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln^2 n+1)}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}; \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}, \qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\cos^2 n}{n}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+3)}{3n+1}; \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}; \quad в)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{\lg n};$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}; \quad д)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^5 n}{n}\sin\frac{\pi n}{4}; \quad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{4^{n^2}}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n^2}}, \quad \alpha=0{,}01; \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}, \quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5+3+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n!}, \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$а)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]0,1[$ ряд

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+n\right)\left(\sqrt{x}+n+1\right)},$$

виходячи з означення, і на проміжку $[0,\infty[$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{e^{nx}},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n; \quad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-3)^n}{n}(x+1)^n.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{2-x}{1+2x}\right)^n; \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}n^n\left(e^x-1\right)^n.$$

16. Для функцій

$$а)\quad tg^2x; \qquad б)\quad \ln(2+e^{x-1})$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = \frac{\pi}{4}$ та $x_0 = 0$ відповідно.

17. Функції

$$а)\quad \ln(3 + x), \qquad б)\quad x^2 \sin x, \quad в)\quad (x-3)5^{2x}$$

в околі точки x_0 ($x_0 = -2$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $x_0 = 1$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$а)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)}; \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + n + n^2\right) x^{n+3}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x^2 - x \sin x}{\cos x^2 - 1}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^{0,5} \frac{x}{\sqrt[4]{1 + x^5}} shx^2 dx, \quad \sigma = 0,01.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y' = x + x^2 + y^2, \quad y(1) = 1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2(1+3x)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$а)\, f(x) = |\sin x|, \quad x \in]-\pi, \pi[; \quad б)\, f(x) = 2 + sign x, \quad x \in]-4, 2[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$а) \quad f(x) = e^{2x}, \quad x \in]0, \pi[; \qquad б) \quad f(x) = \frac{x^2}{2} - 1, \quad x \in]0, 2\pi[,$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $]-l, l[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 22.1)

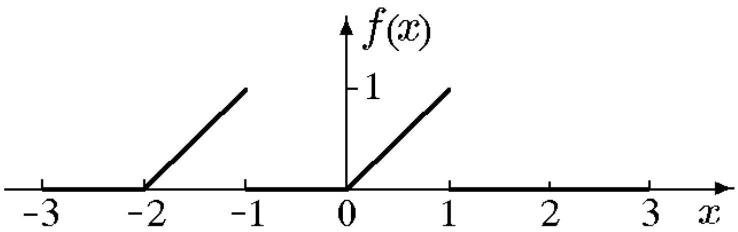

Рис. 22.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}4\left(1+\dfrac{|x|}{2}\right), & |x|\le 2;\\ 0, & |x|>2,\end{cases}$$

представити інтегралом Фур’є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур’є функції

$$f(x)=e^{-|x|}\cos x.$$

28. Для функції $f(x)=\dfrac{x}{2\left(4x^2+9\right)}$,

заданій на $]0,\infty[$, знайти косинус-перетворення Фур’є.

Варіант 23

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{3n-5}{n\left(n^2-4\right)}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ 2+1+\frac{8}{27}+\frac{16}{256}+\frac{32}{3125}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}tg\frac{1}{5^n}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ 1+\frac{2}{4}+\frac{6}{27}+\frac{24}{256}+\frac{120}{3125}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\sin^2 n\varphi,\quad 0<\alpha<1.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}, \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n+3)}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+4}}\sin\frac{1}{n-\frac{1}{2}}, \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-3n+1}\right)}{n};$$

б) ряд, отриманий з гармонічного, у якому за п’ятьома дотатними членами йдуть п’ять від’ємних.

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[n]{(n!)^2}}; \quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n\left(\ln^4 n+1\right)}; \quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n^2}};$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha\cos n\alpha}{n}; \quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^2+n-2}; \quad е)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(2n)!}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^n}{(n!)^2}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}e^{-\sqrt{n^3}}, \quad \alpha = 0{,}05; \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n(n+3)^2}, \quad \alpha = 0{,}01.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 + 7 + 0 + 0 + 0 + \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} tg^n\left(x + \frac{2}{n}\right); \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n(n-1)x^2}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]0, 1[$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sqrt{\ln x}}{\left(\sqrt{\ln x} + 1\right)^n},$$

виходячи з означення, і на проміжку $]0, \infty[$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n\left(n + (-1)^n\right)}{\ln(n+4)}; \quad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{1+n}{n}}\right).$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^n; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{3n} n^3 \sin^{3n} x.$$

16. Для функцій

$$a)\quad e^{x^2}\cos(x-1);\qquad\qquad б)\quad (arctgx)^2$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = 0$ та $x_0 = 1$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad \frac{9}{20 - x - x^2}\,,\qquad б)\quad (1-x)e^{2x},\qquad в)\quad \ln\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

в околі точки x_0 ($x_0 = 0,\ x_0 = 2,\ x_0 = 0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n(n-1)};\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(x)^{2-n}\left(n^2+2n+2\right)$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2x - x^2}{x^2tg^2x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^2\frac{\ln(1+5x)}{5x}dx,\quad \sigma = 0{,}01.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти п’ять членів розвинення рішення задачі Коші

$$y' = 4xy - 2xy^2,\quad y(1) = 1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(1+\frac{x^2}{9}\right)y'' + \frac{4}{9}xy' + \frac{2}{9}y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$а)\quad f(x) = e^{-x/2}, \quad x \in \left]-2, 2\right[; \qquad б)\quad f(x) = \sin^2 x, \quad x \in \left]0, 2\pi\right[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$а)\quad f(x) = (x-\pi)^2, \quad x \in \left]0, \pi\right[; \qquad б)\quad f(x) = 1 - 2|x|, \quad x \in \left]0, 1\right[,$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 23.1)

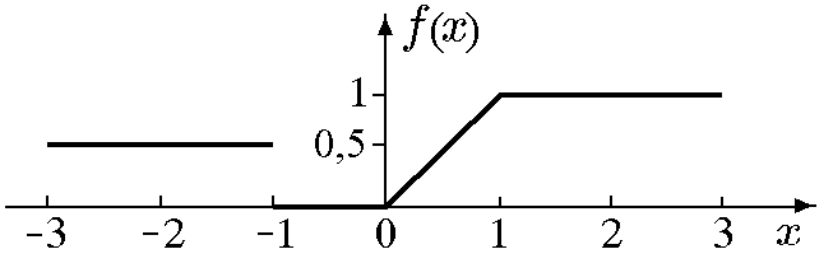

Рис. 23.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}-x-4, & -4<x<-2;\\ x, & -2<x<2;\\ -x+4, & 2<x<4;\\ 0, & |x|>4,\end{cases}$$

представити інтегралом Фур’є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур’є функції

$$f(x)=e^{-x^2/4}.$$

28. Для функції

$$f(x)=\frac{1}{3x(9x^2+4)},$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти синус-перетворення Фур’є.

Варіант 24

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n-2}{(n^2-1)(n-2)}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ 10+\frac{100}{2}+\frac{1000}{6}+\frac{10000}{24}+\dots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{27}+\frac{1}{256}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n+1}\right)^{n} n^{5}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg n}{1+n^{2}},\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}+6}{n^{5}+5};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[\pi/(2n+1)]}{n[3+\sin(\pi n/4)]}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cos\pi/n}{n},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\left(\sqrt[n]{2}-1\right).$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^{2}(n+1)};\quad б)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+5}{5n+4}\right)^{n}\sqrt{n+2};\quad в)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{\sin\left(1/\sqrt{n}\right)}{\sqrt[3]{n}};$$

$$г)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg(-1)^{n}}{\sqrt{n\left(2+n^{2}\right)}};\qquad д)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2^{n}}{n^{2}};\qquad е)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n}}{(2n)!}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{4^{n^{2}}}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^{3/2}(n+1)},\quad \alpha=0{,}05;\qquad б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^{n^2}\,n!},\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=7+3+0+0+0+\ldots,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-7)^n}{n!},\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{2^n};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n}x^{2n}\sin(5x-\pi n).$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність ряд

$$а)\ \sum_{n=0}^{\infty}\sin^2 x\cos^{2n}x,$$

виходячи з означення, і на проміжку $[0,\pi]$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin x},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x-\sqrt{3}\right)^n 3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+\sqrt{3}}}x^n;\quad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(x-4)^n\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right).$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(4+e^x)^n};\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n\sin^n x}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad tg\frac{\pi}{1-x};\qquad б)\quad \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=-2$ та $x_0=0$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad ch^2\left(2x^3\right),\qquad б)\quad \frac{1}{1+x+x^2+x^3},\qquad в)\quad (10-x)^{1/3}$$

в околі точки x_0 ($x_0=0,\ x_0=0,\ x_0=2$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1+(-1)^n\right)x^{2n+1}}{2n+1};\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+n)\left(1-x^2\right)^n$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)(e^{x^2}-1)}{x+arctgx-2\sin x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}},\quad \sigma=0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y''=(y')^2-xy,\quad y(1)=y'(1)=1$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(1+\frac{x^3}{8}\right)y''+\frac{3}{4}x^2y'+\frac{3}{4}xy=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$а)\, f(x)=\cos^2 x,\quad x\in\left]-\pi,\pi\right[;\quad б)\, f(x)=|x|+signx,\quad x\in\left]-1,2\right[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$а)\quad f(x)=1-e^{2x},\quad x\in\left]0,1\right[;\qquad б)\quad f(x)=\pi-x,\quad x\in\left]0,\pi\right[,$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $]-l, l[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 24.1)

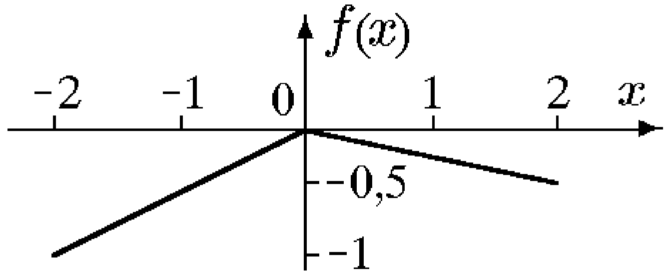

Рис. 24.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \le 1; \\ 3x, & 1 < |x| < 2; \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = xe^{-x^2/2}.$$

28. Для функції

$$f(x) = \frac{1}{4 + x^2},$$

заданій на $]0, \infty[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 25

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ 1+2tg\frac{\pi}{8}+3tg\frac{\pi}{16}+4tg\frac{\pi}{32}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{(n!)^2}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ arctg5+\frac{1}{2}arctg\frac{5}{2}+\frac{1}{6}arctg\frac{5}{3}+\frac{1}{24}arctg\frac{5}{4}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-4)^4}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}\arccos\frac{(-1)^n n}{n+1},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2^n}{n^2}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(3^n+1\right)}{n3^n};\qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}n^n\sin\frac{1}{n^2};\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\ln(2n)\left(n^2-2\right)};\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n)!}{2^{n^2}};$$

$$г)\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right); \quad д)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n; \quad е)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right).$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n)^n}{(2n+1)!}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+3^n}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right), \quad \alpha=0{,}01; \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{(n^5+1)^4}, \quad \alpha=0{,}01.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=8+7+0+0+0+\ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$а)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{n!}, \qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln^n(2x-1); \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^{-n^2\ln(1+x/n)}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]1, e[$ ряд

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln x}}{\left(\sqrt{\ln x}+1\right)^n},$$

виходячи з означення, і на проміжку $]0, \infty[$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{x3^n},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n x^{2n}}{2^n n!};\quad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n(x-2)^n.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n\ln^{n-1}(1+x^2);\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n 3^{-n/x^2}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad \sin\frac{\pi}{x};\qquad б)\quad e^{\frac{1}{x}}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = 4$ та $x_0 = 1$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad \frac{x}{\sqrt{4+3x}},\qquad б)\quad \sin^2\frac{\pi}{x},\qquad в)\quad \ln\left(1+x+x^2+x^3\right)$$

в околі точки x_0 ($x_0 = -1,\quad x_0 = 2,\quad x_0 = 0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n-1)x^{n+1}};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2nx\left(2-x^2\right)^{n-1}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 1}\frac{(e^{x-1}-1)(e^{x-1}+1)}{[\ln x-\sin(x-1)][\ln x+\sin(x-1)]}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^{1/2}\frac{(1+x)arctgx}{x}dx,\quad \sigma = 0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти п’ять членів розвинення рішення задачі Коші

$$y'' = xyy',\quad y(0) = y'(0) = 2,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$x^2(3+x)y'' - 6xy' + 6y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур’є на вказаному проміжку функцію

$$a)\ f(x) = x^2 - 1, \quad x \in \left]-1, 3\right[; \qquad б)\ f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in \left]-\pi, 0\right[; \\ \pi - x, & x \in \left]0, \pi\right[. \end{cases}$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a) \quad f(x) = x^2 - x, \quad x \in \left]0, 1\right[; \qquad б) \quad f(x) = x\sin x, \quad x \in \left]0, \pi\right[,$$

розкласти в ряд Фур’є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 25.1)

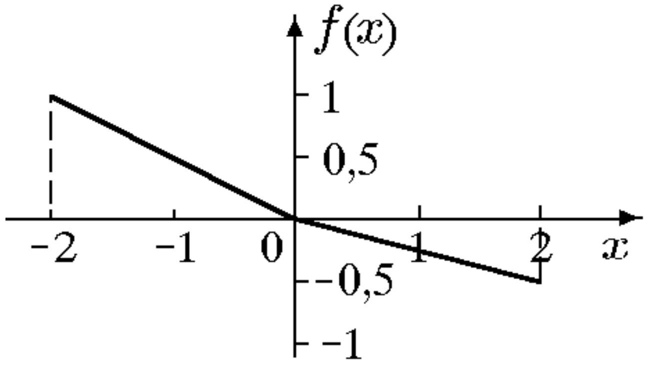

Рис. 25.1

представити рядом Фур’є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \le 2; \\ 4 - x^2, & 2 < |x| < 3; \\ 0, & |x| > 3, \end{cases}$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = e^{-3|x|}\sin 3x.$$

28. Для функції

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+4},$$

заданій на $]0, \infty[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 26

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{(2n+3)!!}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{27}+\frac{1}{256}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n!}}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ \frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{24}{10000}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2-3}{n^2+2}\right)^{n/2}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^{n^3}},\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln(3n-1)}}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\ \ln 2+\frac{\ln 4}{2^3}+\frac{\ln 8}{27}+\frac{\ln 16}{64}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+\sin(\pi n/4)}{}ctg\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\frac{\sin \pi n^2}{n+1},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{5}{\pi n}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n^3}}\sqrt{n};\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\sqrt[3]{8-n^3}\right);$$

$$г)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^3 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1};\quad д)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha^2-1/2)^{n-3}}{(\alpha^2+1/2)^{n+2}};\quad е)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n)!}{2^{n^2}}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3},\quad \alpha=0{,}05;\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,n!},\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4+5+0+0+0+\ldots,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!},\qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n+1)};\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(x+1)/n^2}-1}arctg^n\frac{x}{n^2+1}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 x}{(n\cos^2 x+\sin^2 x)(n\cos^2 x+1)},$$

виходячи з означення, і на проміжку $\left]-\infty,\infty\right[$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{-n^2x^2}}{n^3},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(x-\frac{1}{e}\right)^{2n};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}(x+2)^{2n}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin^n x\arcsin\frac{1}{2^n};\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-(1-x^2)n}.$$

16. Для функцій

$$a)\ \frac{\ln(2+x)}{\cos x};\qquad б)\ \sqrt{\arcsin x}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=0$ та $x_0=\dfrac{1}{2}$ відповідно.

17. Функції

$$a)\ \ln(1+x-6x^2),\qquad б)\ \sin^3 x,\quad в)\ x^2 2^x$$

в околі точки x_0 ($x_0=0$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$, $x_0=2$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^3-1)^{n+1}}{n+1};\qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n\left(1-n+n^2\right)$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-e^{2x}(1-x)}{e^x(arctgx-\arcsin x)}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}, \quad \sigma = 0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$y^{(4)} = (y')^2 x^2 + x^2 y, \quad y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(16+x^2\right)y'' + xy' + 2y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\, f(x) = \frac{\pi}{2} + x, \quad x \in \left]-\pi/2, 3\pi/2\right[; \qquad б)\, f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in \left]-\pi, 0\right[; \\ 1, & x \in \left]0, \pi\right[. \end{cases}$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a) \quad f(x) = (\pi - x)^2, \quad x \in \left]0, \pi\right[; \qquad б) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left]0, 1\right[; \\ x^2, & x \in \left]1, 2\right[, \end{cases}$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 26.1)

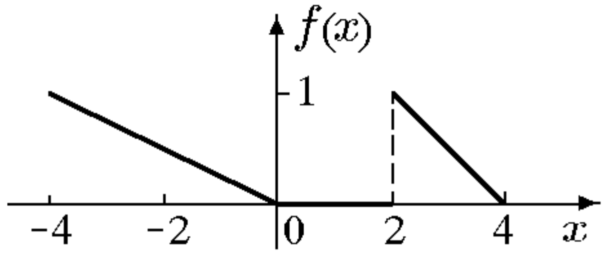

Рис. 26.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x) = \frac{1}{81 + x^4},$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = e^{-2x} \sin \beta x.$$

28. Для функції

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in \left]0, 1\right[; \\ x, & x \in \left]1, 2\right[; \\ 0, & x \in \left]2, \infty\right[, \end{cases}$$

заданій на $\left]0, \infty\right[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 27

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+2)!!}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ \frac{1}{\ln^2 2}+\frac{1}{2\ln^2 3}+\frac{1}{6\ln^2 4}+\frac{1}{24\ln^2 5}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ 2+1+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{5}{7}\right)^4+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n^3}\right)^{n^4}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ 1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{7\sqrt{7}}+\frac{1}{11\sqrt{11}}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n(\ln^6 n+1)}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+1},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\sqrt{3^n}}{\sqrt{3^n}}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\ -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[\sqrt{n}-(-1)^n]}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{4}{n}}{n^2};\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln^3 n}};\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{35n}{3n^2+\sqrt{n^5}};$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right);\qquad д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}};\qquad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}, \quad \alpha = 0{,}1; \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(3n+1)}, \quad \alpha = 0{,}01.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5+4+0+0+0+\ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n!}, \qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ne^n}{\ln^n(x-1)}; \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sin\frac{x}{3^n}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]-1,1[$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^n},$$

виходячи з означення, і на проміжку $[0, \infty[$ ряд

$$б)\ \frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{3\sqrt{1+3x}}+\frac{1}{9\sqrt{1+5x}}+\frac{1}{27\sqrt{1+7x}}+\ldots$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n^2}}{(n+2)^n}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right)^n;\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{nctgx}}.$$

16. Для функцій

$$а)\ e^x\cos x;\qquad б)\ \ln tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=\frac{\pi}{3}$ та $x_0=0$ відповідно.

17. Функції

$$а)\ \frac{1}{x^3},\qquad б)\ \sin^2\frac{\pi x}{6},\qquad в)\ \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$$

в околі точки x_0 ($x_0=3,\ x_0=2,\ x_0=0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)x^{n+2};\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^2\left(x^3-1\right)^{n-1}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg^3 x}{\ln(x^2+1)+x^2-2\sin x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_2^3 xarctg\frac{1}{x}dx,\quad \sigma=0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти п’ять членів розвинення рішення задачі Коші

$$y'=x^2y^2-2,\quad y(1)=1$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$\left(1+9x^2\right)y''+36xy'+18y=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур’є на вказаному проміжку функцію

$$a)\,f(x)=-x^2+1,\quad x\in\left]-\pi,\pi\right[;\qquad б)\,f(x)=5x+2,\quad x\in\left]-4,0\right[,$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\quad f(x)=e^{3x},\quad x\in\left]0,1/3\right[;\qquad б)\quad f(x)=\frac{x}{\pi},\quad x\in\left]0,\pi\right[,$$

розкласти в ряд Фур'є по синусах (а) і по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l,l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 27.1)

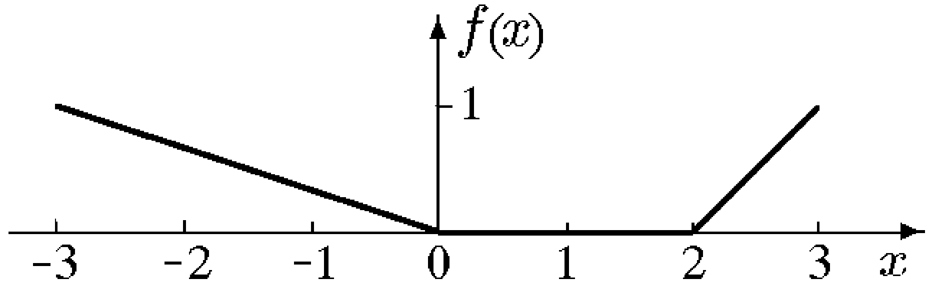

Рис. 27.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|\le\pi;\\ \cos x, & \pi<|x|<2\pi;\\ 0, & |x|>2\pi,\end{cases}$$

представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

28. Для функції

$$f(x) = \frac{2x}{25x^2 + 9},$$

заданій на $\left]0, \infty\right[$, знайти синус-перетворення Фур’є.

Варіант 28

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^3} + \frac{6}{e^4} + \frac{24}{e^5} + \ldots, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! + n}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{24}} + \ldots, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \frac{1}{1+4^2} + \ldots, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3+2n+4}, \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 n}{n^3+5}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+\sqrt[3]{n^4}\sqrt[4]{(n+1)^5}}; \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{40} n}{n}\cos\frac{\pi n}{4}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\sin\frac{\pi}{n}; \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n[n+(-1)^n]}{\ln(n+4)}; \quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2};$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2+n}\right)\cos\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right); \quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}; \quad е)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n^2/n+1)}{\ln^2(n+1)}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n)!}{2^{n^2}}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\ \sum_{n=4}^{\infty} n^2 e^{-n}, \quad \alpha = 0{,}05; \qquad б)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{n+2}\right)^n, \quad \alpha = 0{,}05.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4+7+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}, \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n+x^2)+1}{(n+x^2)(n+1+x^2)^2}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{4n}\cos(x+\pi n).$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]0,\infty[$ ряд

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+sh^2x)(n+ch^2x)}.$$

виходячи з означення, і на проміжку $[2,\,20]$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{x^n},$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^{n(n+1)/2}}{\sqrt{n^4+1}}; \quad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt[4]{n^2+n+1}-\sqrt{n+1/2}\right)(1-x)^{n+1}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}e^{n\sin x}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\ln^n(5x-1)}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad \ln^2(1-x); \qquad\qquad б)\quad 3^{\cos^2(x+\pi/4)}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = \frac{1}{2}$ та $x_0 = 0$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad \frac{1}{(3+x)^2}\,, \qquad б)\quad \sin\pi(x^2+2x), \qquad в)\quad \frac{x-1}{\sqrt{4+3x}}$$

в околі точки x_0 ($x_0 = -2,\quad x_0 = -1,\quad x_0 = -1$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}n}{(x^2+4)x^{n+1}}; \qquad\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(x^2-1\right)^n 2nx\left(2n^2-n-1\right)$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt[3]{1+x}-1)}{\sqrt{x}arctg\sqrt{x}-x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1 chx^2dx, \quad \sigma = 0{,}01.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти п’ять членів розвинення рішення задачі Коші

$$\left(1+x^2\right)y'' + xy' - 2y = 0, \quad y(1) = y'(1) = 1,$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2(4-x)y'' - 8xy' + 8y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\, f(x) = shx, \quad x \in \left]-\pi, \pi\right[; \quad б)\, f(x) = sign(\cos x), \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\, f(x) = x^2 - 1, \quad x \in \left]-1, 3\right[; \qquad б)\, f(x) = \begin{cases} -x, & x \in \left]0, \pi\right[; \\ x^2/2, & x \in \left]\pi, 2\pi\right[, \end{cases}$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l, l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 28.1)

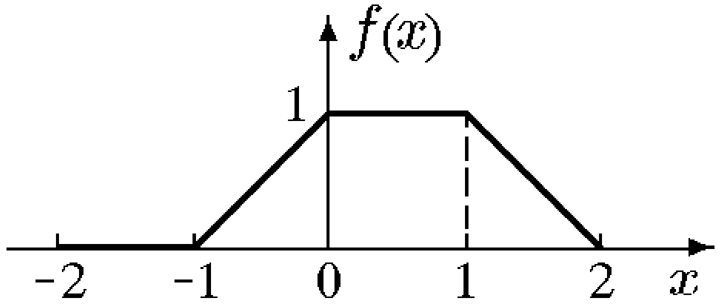

Рис. 28.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію $f(x)=e^{(1-x^2)/2}$ представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x)=e^{-|x+2|}.$$

28. Для функції

$$f(x)=\frac{x}{4x^2+9},$$

заданій на $]0,\infty[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 29

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)!!}$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ 1+\frac{1}{2}+\frac{6}{27}+\frac{24}{256}+\frac{120}{3125}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!+n}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ \frac{2}{\ln 2}+\frac{4}{\ln^2 3}+\frac{8}{\ln^3 4}+\frac{16}{\ln^4 5}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^2\frac{1}{3^n}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n^3}}},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$а)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}, \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2-\cos\pi n)}{2n^2-1}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}, \qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cos\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$а)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n; \quad б)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} arctg(-1)^n tg\frac{1}{n}; \quad в)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n^2};$$

$$г)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^6+6}} \arcsin\frac{3+(-1)^n}{4}; \quad д)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!}; \quad е)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ln n}{(\ln)^n}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+1)}{(2n)!!}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$а)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}+1}, \quad \alpha = 0{,}01; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(n)!!}, \quad \alpha = 0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7+4+0+0+0+\ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 7^n}{n!}, \qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+e^x)(n+1+e^x)}; \qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n arctg \frac{2x}{n+1}.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність ряд

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+n)(x^2+n+1)},$$

на проміжку $\left]-\infty, \infty\right[$ виходячи з означення, і на проміжку $\left[-1000, 1000\right]$ ряд

$$б) \sum_{n=2}^{\infty} \ln^4 \left(1+\frac{x^2}{n \ln n}\right),$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n^{\alpha}}; \quad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+5}\right)^{n^2} \left(\frac{x^5}{5}\right)^n.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(4+\frac{1}{n}\right) 4^{n^2/x}; \qquad б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n tgx}.$$

16. Для функцій

$$a) \quad \sin\left(\frac{\arcsin x}{\mu}\right); \qquad б) \quad \sin \frac{\pi |x|}{2}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, де $x_0 = 0$ та $x_0 = -\frac{1}{2}$ відповідно.

17. Функції

$$a) \ln(12+6x+x^2), \qquad б) e^{x\sqrt{3}/2} \sin\frac{x}{2}, \qquad в) (3x-2)\sqrt{9-2x}$$

в околі точки x_0 ($x_0 = -3$, $x_0 = 0$, $x_0 = 0$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n tg^n x}{n(n+1)};\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[2^n+\frac{(-1)^n}{n}\right]x^n$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{2\sin x\left[1-\frac{1}{\cos x}\right]+x^3}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{27-x^3}},\quad \sigma=0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти чотири члени розвинення рішення задачі Коші

$$\left(1+x^2\right)y'=x+y,\quad y(1)=1$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\left(1+\frac{x^2}{4}\right)y''+xy'+\frac{1}{2}y=0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0=0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур'є на вказаному проміжку функцію

$$a)\, f(x)=chx,\quad x\in\left]-\pi,\pi\right[;\quad б)\, f(x)=sign(\sin x),\quad x\in\left]-1/2,3/2\right[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$a)\quad f(x)=2-x,\quad x\in\left]0,2\right[;\quad б)\quad f(x)=(x-\pi)^2,\quad x\in\left]0,\pi\right[,$$

розкласти в ряд Фур'є по синусах (а) та по косинусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l,l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 29.1)

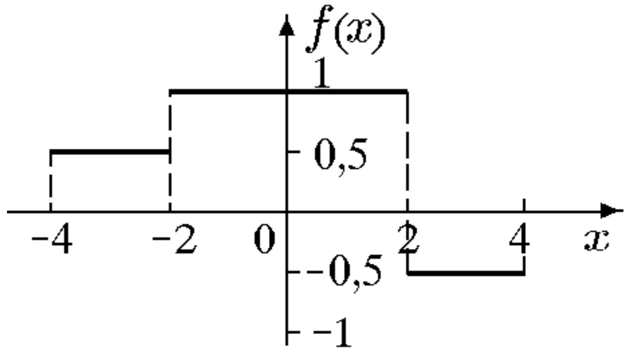

Рис. 29.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію $f(x) = e^{-x^2/2}\cos x$ представити інтегралом Фур'є у будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = (2 - |x|)e^{-|x|}.$$

28. Для функції

$$f(x) = \frac{x}{9 + x^2},$$

заданій на $]0, \infty[$, знайти синус-перетворення Фур'є.

Варіант 30

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)$$

або встановити його розбіжність за допомогою означення або критерія Коші.

2. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Даламбера

$$a)\ 1 + 2tg\frac{\pi}{8} + 3tg\frac{\pi}{16} + 4tg\frac{\pi}{32} + \ldots, \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n}}{n!}.$$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Коші

$$a)\ \frac{3}{2}+1+\frac{27}{4^3}+\frac{81}{5^4}+\ldots,\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n-2)}.$$

4. Дослідити ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{n^4}},\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}.$$

5. Дослідити ряд на збіжність за допомогою ознак порівняння

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right),\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}.$$

6. Дослідити ряд на абсолютну й умовну збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt[3]{n^4}+n},\qquad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln\sqrt{n}}\cos\frac{\pi n}{12}.$$

7. Дослідити ряд на збіжність

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n^n};\quad б)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{3n^2+1}}\sin\frac{\pi}{2\sqrt[3]{n}};\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2(n+\sqrt{n})}\cos\frac{\pi n^2}{n+1};$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n+1}\right);\quad д)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}};\quad е)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 13\cdots(6n+1)}{1\cdot 8\cdots n^3}.$$

8. Користуючись ознаками збіжності числових рядів, розкрити невизначеність $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n)^n}{(2n-1)!}$.

9. Оцінити залишок ряду і знайти його суму зі вказаною точністю α:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}},\quad \alpha=0{,}01;\qquad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)!!},\quad \alpha=0{,}001.$$

10. Знайти суму, різницю, добуток рядів (за Коші) і частку рядів. Зробити перевірку. Суму добутків рядів порівняти з добутком сум цих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4+9+0+0+0+\ldots,\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n=1+1+0+0+0+\ldots$$

11. Знайти добуток і частку рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n!},\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{9^n}{n!}.$$

12. Знайти області збіжності (абсолютної та умовної) рядів

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n;\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n \sin nx.$$

Обчислити суму одного з рядів, користуючись її означенням.

13. Дослідити на рівномірну збіжність на проміжку $]-\infty, \infty[$ ряд

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+n)(x^2+n+1)},$$

виходячи з означення, і на проміжку $]0{,}5,\ 2[$ ряд

$$б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x^n+x^{-n}\right),$$

використовуючи ознаки Вейєрштраса або Дині.

14. Знайти області збіжності степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(3^n+4^n)};\quad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(2n-1)!!}.$$

15. Знайти області збіжності узагальнених степеневих рядів

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n;\qquad\qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{e}{n}\right)^n e^{nx}.$$

16. Для функцій

$$a)\quad \cos\left(\frac{\arcsin x}{\mu}\right);\qquad\qquad б)\quad x^{2x}$$

записати три перші члени розвинення в ряд Тейлора за степенями $x-x_0$, де $x_0=0$ та $x_0=1$ відповідно.

17. Функції

$$a)\quad \frac{x}{\sqrt{9+x^2}},\qquad б)\quad \ln(5x+3),\qquad в)\quad (x+2e^x)$$

в околі точки x_0 ($x_0 = 0$, $x_0 = -2/5$, $x_0 = 1$ відповідно) представити рядом Тейлора і вказати інтервали їх збіжності.

18. Обчислити суми рядів

$$а)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+2n-1\right)x^{n+1}; \qquad б)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos^{n+1}x}{n(n+1)}$$

і вказати області збіжності функціональних рядів.

19. Використовуючи відомі розвинення функцій у ряд Тейлора, обчислити

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+x+1)+\ln(x^2-x+1)}{1-\cos x}.$$

20. Обчислити наближено із заданою похибкою:

$$\int_0^1 (x+1)e^{x^2}dx, \quad \sigma = 0{,}05.$$

21. Методом послідовного диференціювання знайти п’ять членів розвинення рішення задачі Коші

$$y' = \sin(x+y), \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

у ряд Тейлора.

22. Методом невизначних коефіцієнтів знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$x^2(1+4x)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

у вигляді змішаного ряду із центром у точці $x_0 = 0$. Суму отриманого ряду записати через елементарні функції.

23. Розкласти в ряд Фур’є на вказаному проміжку функцію

$$а)\, f(x) = \begin{cases} x, & x\in\,]0,1[; \\ 1, & x\in\,]1,2[\,; \\ 3-x, & x\in\,]2,3[, \end{cases} \qquad б)\, f(x) = x\cos x, \quad x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Побудувати графік суми отриманого ряду.

24. Задану на півперіоді функцію

$$а)\quad f(x) = 2e^{-3x}, \quad x\in\,]0,2[; \qquad б)\quad f(x) = \frac{\pi}{4}, \quad x\in\,]0,\pi[,$$

розкласти в ряд Фур'є по косинусах (а) і по синусах (б). Побудувати графік суми отриманого ряду.

25. Задану на $\left]-l,l\right[$ графічно функцію $f(x)$ (рис. 30.1)

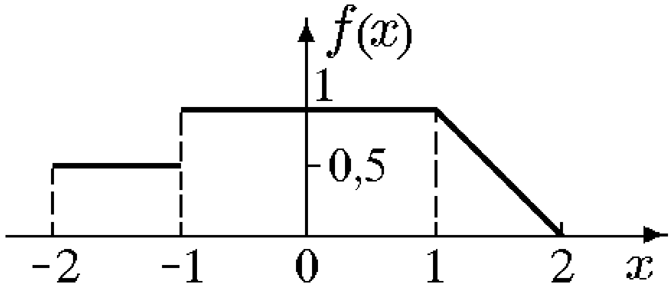

Рис. 30.1

представити рядом Фур'є в комплексній формі, записати спектральну функцію, амплітудний і фазовий спектри.

26. Функцію

$$f(x) = sign(x-3) - sign(x-4)$$

представити інтегралом Фур'є в будь-якій формі, попередньо обґрунтувавши можливість такого представлення.

27. Знайти перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \frac{1-e^{-3x}}{x}.$$

28. Для функції

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin 4x, & |x| \le \dfrac{\pi n}{2}; \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi n}{2}. \end{cases}$$

знайти косинус-перетворення Фур'є.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Безклубенко І. С.* Математичний аналіз : підручник у 2 ч. – Ч. 1. / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна. – Київ : КНУБА, 2024. – 220 с.

2. *Овчінніков Ф. П.* Вища математика: підручник у 2 ч. – Ч. 1. / Ф. П. Овчінніков, В. М. Яремчук. – Київ : Техніка, 2000. – 590 с.

3. *Овчінніков Ф. П.* Вища математика: підручник у 2 ч. – Ч. 2. / Ф. П. Овчінніков, В. М. Яремчук. – Київ : Техніка, 2000. – 790 с.

4. *Міхайленко В. М.* Математичний аналіз для економістів : навчальний посібник / В. М. Михайленко, Н. Д. Федоренко. – Київ : Європейський університет, 2002. – 297 с.

5. *Журавель О. О.* Вища математика : збірник завдань для курсових і самостійних робіт / О. О. Журавель. – Київ : КДТУБА, 1997. – 267 с.

6. *Федоренко Н. Д.* Вища математика : навчальний посібник / Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко. – Київ : КНУБА, 2003. – 165 с.

7. *Безклубенко І. С.* Математичний аналіз. Модуль 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, елементи математичного аналізу : конспект лекцій / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна, Ю. П. Буценко. – Київ : КНУБА, 2021. – 63 с.

8. *Сачанюк Н. В.* Теорія рядів : навчальний посібник / Л. І. Педорченко, М. Б. Ковальчук. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 138 с.

9. *Ламтюгова С. М.* Ряди та їх застосування. У схемах і таблицях : навчальний довідник / Ю. В. Ситнікова, Г. А. Кузнецова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 103 с.

10. *Безклубенко І. С.* Теорія функцій комплексної змінної : методичні вказівки / І. С. Безклубенко, О. І. Баліна, Ю. П. Буценко. – Київ: КДТУБА, 1999. – 35 с.

11. *Баліна О. І.* Вища математика. Модуль 3. Інтегральне числення : методичні вказівки / О. І. Баліна, І. С. Безклубенко, Ю. П. Буценко. – Київ : КДТУБА, 2020. – 31 с.

12. *Баліна О. І.* Вища математика. Модуль 4. Диференціальні рівняння : методичні вказівки / О. І. Баліна, І. С. Безклубенко, Ю. П. Буценко. – Київ : КДТУБА, 2021. – 31 с.

13. *Кадильнікова Т. М.* Математика в прикладах та задачах. Частина V : навчальний посібник / Л. П. Кагадій, І. Б. Кочеткова, Л. Ф. Сушко. – Дніпро : НМетАУ, 2011. – 88 с.

14. *Федоренко Н. Д.* Вища математика (Ряди та їх застосування. Теорія функції комплексної змінної) : конспект лекцій / Н. Д. Федоренко, І. С. Безклубенко, О. І. Баліна. – Київ : КНУБА, 2015. – 60 с.

15. *Дубовик В. П.* Вища математика : навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А. С. К., 2006. – 647 с. – ISBN 966-539-320-0.

16. *Стрельковська І. В.* Ряди Фур'є : навчальний посібник / В. М. Паскаленко. – Одеса, 2021. – 122 с.

Навчальне видання

БЕЗКЛУБЕНКО Ірина Сергіївна
БАЛІНА Олена Іванівна
СЕРПІНСЬКА Ольга Ігорівна

ТЕОРІЯ РЯДІВ ДІЙСНОЇ ТА КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Числові та функціональні ряди

Навчальний посібник

Редагування та коректура *Т. В. Івченко*
Комп'ютерне верстання *А.П. Селівестрової*

Підписано до друку 14.04.2026. Формат $60 \times 84_{1/16}$
Ум. друк. арк. 12,09. Обл.-вид. акр. 13,0.
Тираж 25 прим. Вид. № 9/І-26. Зам. №:6/1-26

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Проспект Повітряних сил України, 31, Київ, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002