МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

А.М. Котенко, Ю.І. Хлапонін

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ

Конспект лекцій
для студентів спеціальності
123 «Комп’ютерна інженерія»

Київ 2024

УДК 004.383.3(076.5)
К-73

Рецензент О.О. Терентьєв , д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні вченої ради факультету автоматизації і інформаційних технологій, протокол № 6 від 24 січня 2024 року.

Котенко А.М.

К-73 Цифрова обробка сигналів : конспект лекцій / А.М. Котенко, Ю.І. Хлапонін. – Київ: КНУБА, 2024. – 96 с.

Лекції з дисципліні «Цифрова обробка сигналів» охоплюють розділи курсу, що пов’язані з методами цифрової обробки сигналів.

Призначений для студентів з галузі знань 12 «Інформаційні технології» спеціальності 123 «Комп’ютерна інженерія».

УДК 004.383.3(076.5)

ЗМІСТ

1. Загальні положення 4

2. Лекції 5

Лекція № 1. Класифікація сигналів та їх перетворювачів. 5

Лекція № 2. Спектральний спосіб опису сигналів. 14

Лекція № 3. Дискретизація аналогових сигналів. 26

Лекція № 4. Квантування та компаундування цифрових сигналів. 36

Лекція № 5. Модуляція сигналів. 46

Лекція № 6. Імпульсно-кодова модуляція. 60

Лекція № 7. Лінійна система та її властивості. 71

Лекція № 8. Цифрові фільтри. 84

Список використаної літератури 94

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

1. **Лекції** з дисципліні «Цифрова обробка сигналів» у студентів спеціальності 123 «Комп’ютерна інженерія» охоплюють розділи курсу, що пов’язані з методами цифрової обробки сигналів.

2. **Мета лекційних** занять полягає у ознайомленні студентів з існуючими методами перетворення та обробки сигналів.

Цифрова обробка сигналів вивчає методи перетворення аналогових сигналів у цифрові з подальшою їх обробкою відповідно до конкретної області використання.

Результатом вивчення навчальної дисципліни є набуття студентом наступних компетентностей пов’язаних із здатністю:

- вільного володіння професійними знаннями для аналізу і синтезу фізичної інформації (відповідно до профілю підготовки);
- самостійного здобування за допомогою інформаційних технологій і практичної діяльності нових знань та вмінь, розширювання і поглиблювання свого наукового світогляду;
- демонстрації поглиблених знань з математичних і природничих наук;
- використання вільного володіння професійно-профільованими знаннями в галузі інформаційних технологій, сучасних комп’ютерних мереж, програмних продуктів і ресурсів Інтернет для вирішення завдань професійної діяльності, у тому числі, що знаходяться за межами профільної підготовки.

2. ЛЕКЦІЇ

Лекція № 1. Класифікація сигналів та їх перетворювачів.

ПЛАН ЛЕКЦІЇ

1. Вступ.
2. Базові позначення та означення
3. Класифікація сигналів
4. Класифікація перетворювачів сигналів

1. Вступ

На сьогодні методи цифрової обробки сигналів (digital signal processing – DSP) знаходять все більш широке застосування, ніж методи аналогової обробки.

Бурхливий прогрес обчислювальної техніки в останні десятиліття призвів до широкого впровадження методів цифрової обробки інформації практично у всіх сферах наукових досліджень і народно-господарської діяльності. При цьому серед різних застосувань засобів обчислювальної техніки одне з найважливіших місць займають системи цифрової обробки сигналів (ЦОС), знайшли використання під час оброблення даних дистанційного зондування, медично-біологічних досліджень, вирішенні задачнавігації аерокосмічних і морських об’єктів, зв’язку, радіофізики, цифровий оптики і в ряді інших додатків

Цифрова обробка сигналів (ЦОС) – це область обчислювальної техніки, що динамічно розвивається та яка охоплює як технічні, так і програмні засоби. Родинними областями для цифрової обробки сигналів є теорія інформації, зокрема, теорія оптимального приймання сигналів і теорія розпізнавання образів.

За означенням ЦОС – це обробка цифрових сигналів *цифровими методами* і *цифровими засобами*.

Методами ЦОС є математичні співвідношення або алгоритми, відповідно до яких виконуються обчислювальні операції над цифровими сигналами. До них відносяться алгоритми цифрової фільтрації, спектрально-кореляційного аналізу, модуляції і демодуляції сигналів, адаптивної обробки та ін.

Алгоритми ЦОС, на відміну від інших обчислень ний на ЕОМ, передбачають, як правило, їх виконання в реальному масштабі часу.

Засобами реалізації ЦОС є жорстка логіка, програмовані логічні інтегральні схеми (ПЛІС), мікропроцесори загального призначення, мікроконтролери, персональні комп'ютери (комп'ютерна обробка сигналів), одноплатні комп'ютери і цифрові сигнальні процесора (ЦСП). Останні апаратно і програмно оптимізовані на задачі ЦОС і утворюють її спеціалізовану елементну базу. Сукупність апаратних засобів, що здійснюють цифрову обробку сигналів, називають *процесором* ЦОС.

Таким чином, ЦОС узагальнено можна визначити формулою: ЦОС = Алгоритм + Програма (мікропрограма, схема) + Процесор.

У широкому сенсі під системами ЦОС розуміють комплекс алгоритмічних, апаратних і програмних засобів.

2. Базові позначення та означення

Сигнал – матеріальний носій інформації. У найбільш загальному формулюванні це залежність однієї величини від іншої (тобто з математичної точки зору сигнал є *функцією*). Найчастіше розглядаються залежності від часу, хоча це не є обов'язковим. Фізична природа сигналу може бути вельми різноманітною. Найчастіше це напруга, дещо рідше – струм.

Види сигналів:

У вигляді фізичного процесу, який забезпечує передачу інформації від джерела до споживача. Кодовий або дискретний сигнал (інформація в кількості елементів, їх розташуванні в просторі та часі).

Система – це деяке перетворення сигналу. Система переводить вхідний сигнал u (t) у вихідний сигнал v (t). Будемо це позначати таким чином: $u(t) \rightarrow v(t)$.

Система зв'язку складається з ряду підсистем кожна з яких включає в свою чергу кілька пристроїв-перетворювачів (рис. 1.1).

Підсистеми та перетворювачі можуть бути з'єднані послідовно, паралельно, охоплені зворотним зв'язком.

Для розуміння того, як трансформується вхідний сигнал у вихідний,необхідно:

- Описати вхідні та вихідні сигнали.
- Описати властивості кожного пристрою, як перетворювача сигналу.
- Описати принципи визначення властивостей групи пристроїв при заданих властивостях кожного з них та заданих з'єднувань.

Рис. 1. Перетворювач сигналу.

Дана схема описується виразом:

$$v(t) = O[u(t)],$$

де:

O[u(t)] – оператор перетворення.v(t);

u(t), – скалярні функції.

Будемо поки для визначеності розглядати одномірні сигнали, що залежать від часу, і позначати їх в загальному випадку *x (t)*. Характер перетворення залежить від виду сигналу.

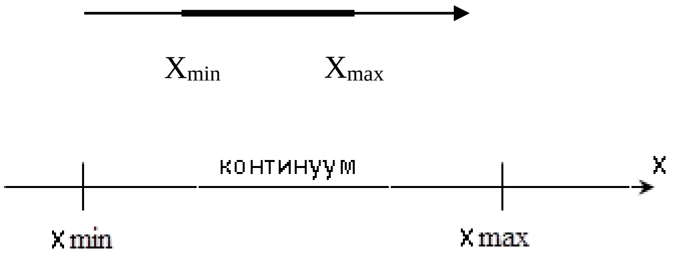
Множина допустимих значень часу і сигналів подається як:

$u(t)$ є U, U= $[u_{min},u_{max}]$
$v(t)$ є V, V= $[v_{min},v_{max}]$ x
(t) є X, X= $[x_{min},x_{max}]$ t є
τ, τ= $[t_{min},t_{max}]$

Властивості сигналу залежать від характеру (типу) множин X і τ.
Типи множин.

1. Множина X містить континуум.

Континуум (від лат. Continuum – безперервне, суцільне). X = {x} – континуум – множина, що складається з нескінченно великого числа елементів, які нескінченно мало відрізняються один від одного



$x_{min} \le x \le x_{max}$

Рис. 2. Графічна інтерпретація поняття Continuum

Наприклад: всі числа в інтервалі [X_{min}, X_{max}] можуть бути дробовими, раціональними та ірраціональними (рис. 2.1).

2. X = {x_1,…,x_m} – кінцева (дискретна) множина (рис. 3.1).

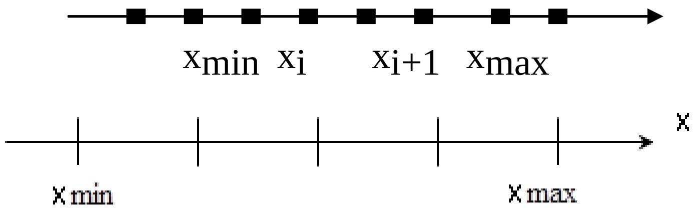


Рис. 3. Значення *X* – кінцева (дискретна множина).

Всі числа в інтервалі [X_{min}, X_{max}] можут бути лише цілими і складати обмеженумножину цілих чисел. $X_{i+1} = X_i + 1$.

Наприклад: множина цілих чисел

Для часу ми можемо мати такі ж два типи множин.

3. Класифікація сигналів

У будь-який цифровий системі зв'язку або електронній схемі є цифрові і (або) аналогові сигнали.

3.1. Неперервні (аналогові) сигнали

Аналогові сигнали описуються неперервною (або кусково-неперервною) функцією, причому сама функція і аргумент *t* можуть набувати будь-яких значень на деяких інтервалах (рис. 4.1). Аналоговий сигнал має значення у будь-який момент часу.

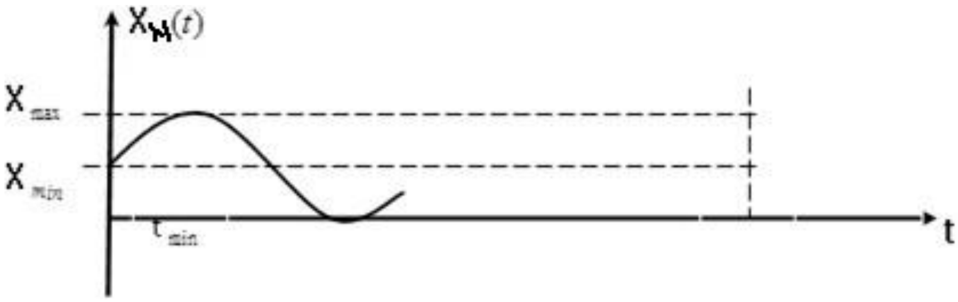


Рис. 4. Приклад аналогового сигналу

Ознаки аналогового сигналу:

X - континуум.

t – континуум

$x_н(t)$ – неперервна функція часу t.

В будь-який момент $t_{min} \le t \le t_{max.}$ існує значення сигналу $x_{min} \le x_н(t) \le x_{max.}$

Аналогові сигнали використовують для представлення різних фізичних величин, що змінюються безперервно. Наприклад, електричний аналоговий сигнал, що знімається з вихідних кінців термопари відображає реальні дані про температурні зміни. Сигнал з мікрофона, — про часті зміни повітряно-звукового тиску. Напруга у побутовій мережі електроживлення.

3.2. Неперервно-дискретні сигнали.

Дискретний сигнал – сигнал, що має кінцеве число значень (рівнів). Дискретні сигнали відрізняються від аналогових тим, що їх значення відомі лише у дискретні моменти часу (рис. 5.1).

У даному випадку здійснюється дискретизація аналогового сигналу і виходить ступінчастий сигнал. Цей сигнал набуває не будь-які значення, а тільки відповідні рівням квантування.

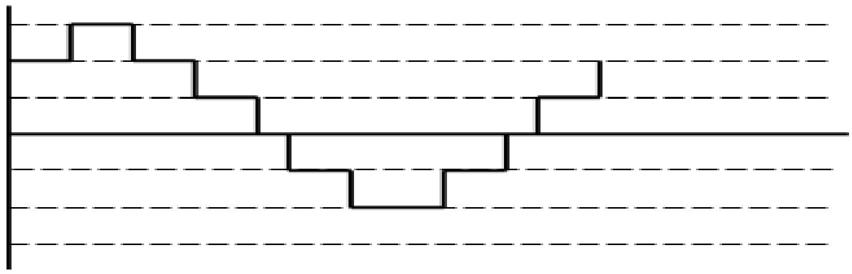


Рис. 5. Неперервно-дискретний сигнал

Ознаки неперервно-дискретного сигналу:

X – кінцеве число;

t – континуум

$x_{нд}(t)$ – східчаста функція**.** Значення – ближче до квантованого.

Квантування (англ. Quantization) – в інформатиці – розбиття діапазонузначень неперервної або дискретної величини на кінцеве число інтервалів. Найпростішим видом квантування є ділення цілого значення на натуральне число, зване коефіцієнтом квантування.

Не слід плутати квантування з дискретизацією (і, відповідно, крок квантування з частотою дискретизації). При дискретизації величина, що змінюється в часі (сигнал) замірюється із заданою частотою (частотою дискретизації), таким чином, дискретизація розбиває сигнал по часовій складовій (на графіку – по горизонталі). Квантування ж призводить сигнал дозаданих значень, тобто, розбиває за рівнем сигналу (на графіку – по вертикалі). Сигнал, до якого застосовані дискретизація і квантування, називається **цифровим.**

Приклад: сигнал цифро-аналогового перетворювача.

У будь-який момент $t_{min} \leq t \leq t_{max.,}$ Значення сигналу $x_{нд}(t)$ є $\{x_1,x_{2,\ldots\ldots,}x_м\}$. Сигнал квантується за рівнем.

3.3. Дискретно-неперервні сигнали (ДНС).

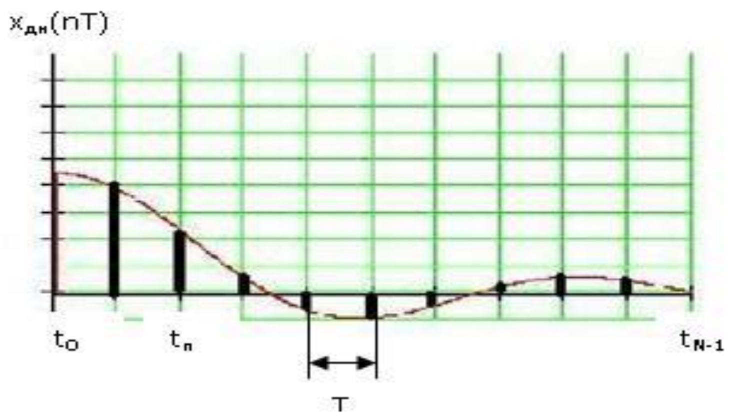
У даному випадку інтервал часу включає поняття числа моментів часу, азначення сигналів можуть бути довільними в інтервалі від X_{min} до X_{max}.

T – інтервал дискретизації, або період дискретизації за часом. Таким чином, сигнал відраховується тільки в моменти T_i, а саме значення сигналів в інтервалах T_i може бути будь-яким (рис. 6.1).

Ознаки дискретно-неперервного сигналу:

X – континуум

t – кінцеве число



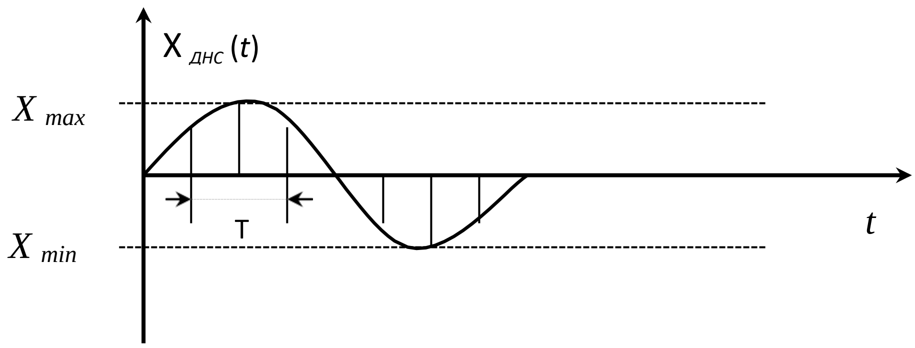


Рис. 6. Дискретно-неперервний сигнал.

$X_{днс}$(t) – з точки зору математики являє собою гребінчасту функцію.

$X_{днс}(nT) = X_{н}(t)$, де n – ціле число (номер відліку решітчастої функції).

Послідовність значень ДНС описується виразом:

$$X_{дн}(nT) = \sum_{k=k_{min}}^{k_{max}} x_n(kT)\,\delta(nT-kT),$$

де:

δ - одинична функція.

3.4. Дискретні сигнали.

Ознаки дискретного сигналу:

- *t* – кінцеве
- *X* – кінцеве.

Математично дискретний сигнал (рис. 7.1) описується виразом:

$$X_д(nT)=0_к[X_{дн}(nT)],$$

тобто по суті являє собою решітчасту функцію.

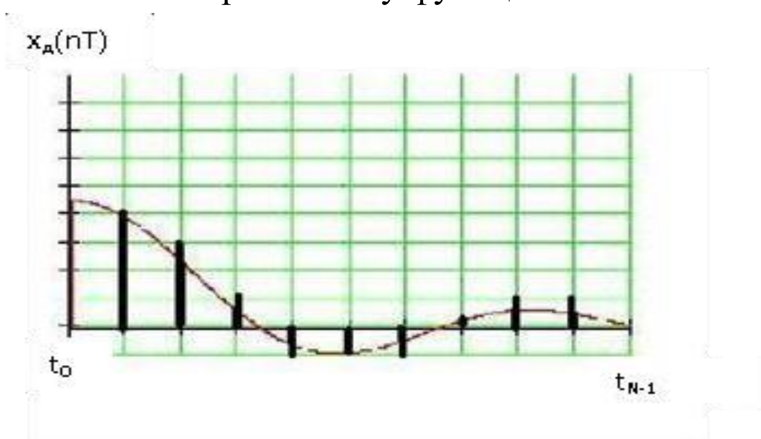


Рис. 7. Приклад дискретного сигналу.

При числі рівнів квантування M → ∞ властивості дискретного сигналу прямують до властивостей дискретно-неперервного сигналу.

3.5. Цифрові сигнали.

Цифровий сигнал є формою подання дискретного сигналу, дискретні значення якого кодуються зазвичай двійковим кодом, або цифровий сигнал це сигнал, який можна представити у вигляді послідовності дискретних значень. У наш час найбільш поширені двійкові цифрові сигнали (бітовий потік) у зв'язку з простотою кодування та використанням у двійковій електроніці.

Якщо позначити: M – число рівнів квантування, а m – число розрядів двійкового коду, тоді маємо: $\mathbf{M = 2^m}$**;** або $\mathbf{m = \log_2 M}$.

4. Класифікація перетворювачів сигналів

Відповідно до класу вхідних і вихідних сигналів розрізняють наступні типи перетворювачів.

Аналого-цифровий перетворювач.

Призначений для перетворення неперевного (аналогового сигналу) у цифровий (рис. 8.1).

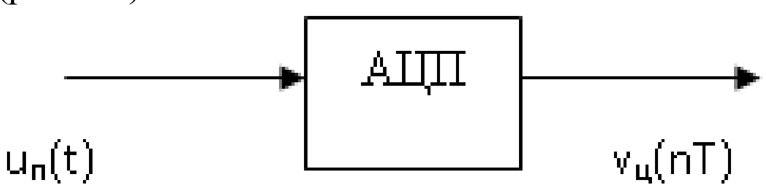


Рис. 8. Аналогово-цифровий перетворювач.

Цифро-аналоговий перетворювач.

Призначений для перетворення цифрових сигналів у неперевні (аналогові сигнали) (рис. 9.1).

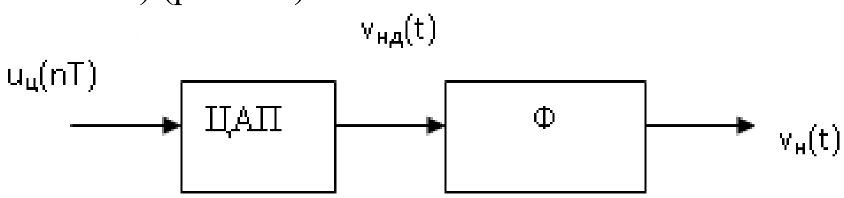


Рис. 9. Цифро-аналоговий перетворювач.

На рис.9.1 квадратиком Ф позначено електричний фільтр частот. Він потрібен для усунення різних перешкод які обов’язково будуть виникати під час цифро-аналогового перетворення.

Дискретний перетворювач.

Призначений для перетворення цифрових (дискретних сигналів) у цифрові (дискретні сигнали) (рис. 10.1).

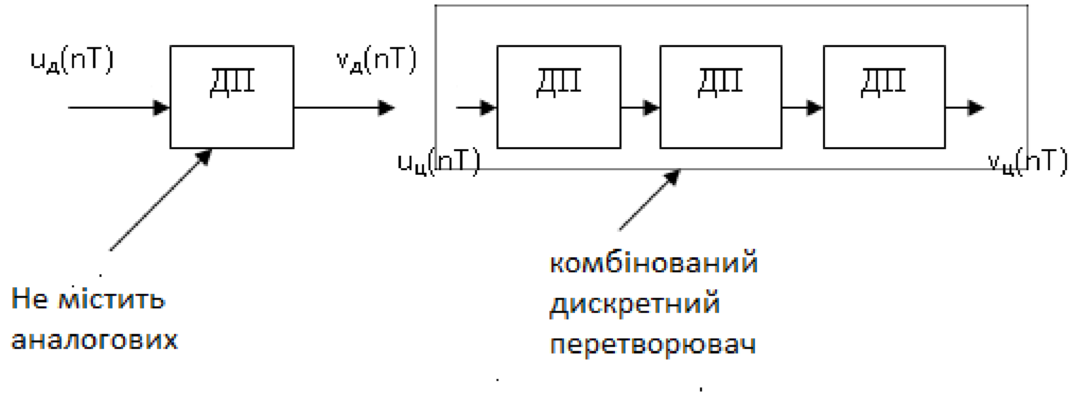


Рис. 10. Дискретний перетворювач.

Неперервний перетворювач.

Призначений для перетворення неперервних (аналогових сигналів) у неперервні (аналогові сигнали) (рис. 10.1). На рис. 10.1 ДП – дискретний перетворювач.

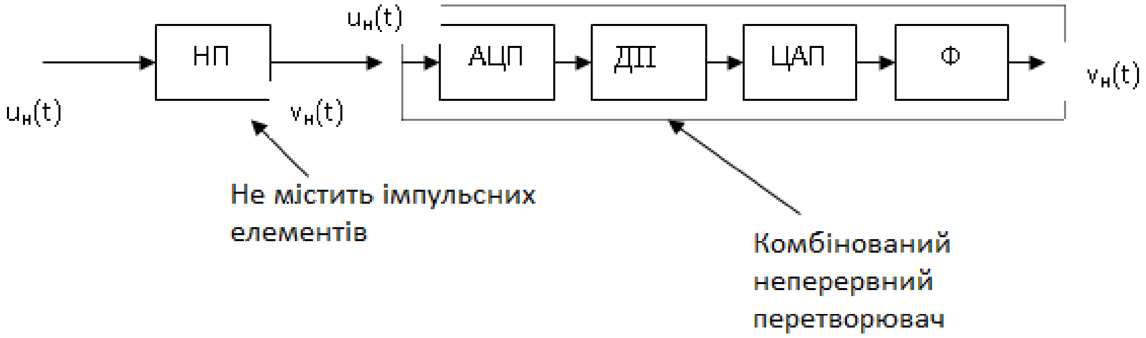


Рис. 11. Неперервний перетворювач.

Контрольні запитання.

1. Визначення сигналу. Що необхідно зробити для трансформування (перетворення) одного типу сигналу у інший.
2. Визначення аналогового сигналу. Його ознаки. Намалювати графік.
3. Визначення дискретного сигналу. Його ознаки. Намалювати графік.
4. Назвати типи існуючих перетворювачів сигналів.

Лекція № 2. Спектральний спосіб опису сигналів.

ПЛАН ЛЕКЦІЇ

1. Параметри електричних сигналів.
2. Спектральний спосіб опису сигналів.
3. Спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів.

1. Параметри електричних сигналів

Перш ніж говорити про інформаційні можливості сигналу, необхідно ознайомитися з його основними характеристиками. Доцільно розглядати окремо детерміновані і випадкові сигнали.

Детермінованим називають будь-який сигнал, параметри і миттєве значення якого відомі у будь-який момент часу.

Детерміновані сигнали класифікують за наступними властивостями:

1. За величиною інтервалу часу τ, в якому існують відмінні від нуля значення сигналу. Якщо інтервал τ нескінченний (тобто $\tau \to \infty$), то сигнал називають безперервним (аналоговим). Якщо ж інтервал τ кінцевий, то сигнал називають імпульсним (дискретним, або цифровим) а τ – тривалістю імпульсу.
2. Детерміновані сигнали можуть бути підрозділені на *періодичні і неперіодичні.*

Періодичним називається будь-який сигнал, миттєві значення якого повторюються через рівні проміжки часу і для якого виконується умова:

$$u(\tau)= u(\tau+nT),$$

де:

T - період сигналу;

n - будь-яке ціле число.

Простим періодичним детермінованим аналоговим сигналом є сінусоідальне гармонійне коливання (струм, напруга) (рис. 1).
Описується виразом:

$$i(t)=I_m \sin(\omega t+\psi) \quad (1)$$

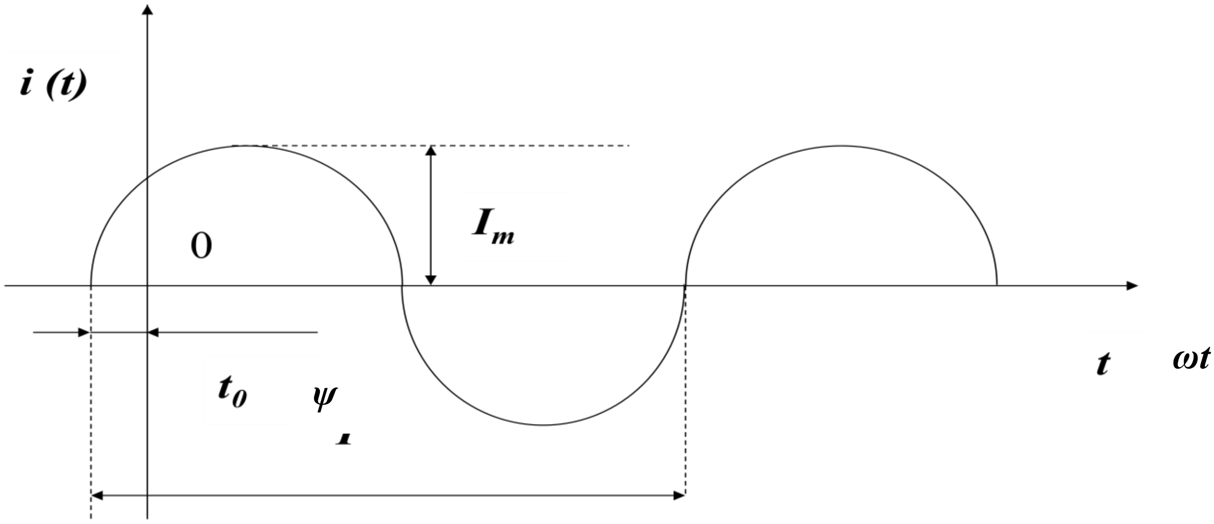


Рис. 1. Періодичний аналоговий (гармонійний) сигнал.

Розглянемо змінні у виразу (1).

Значення струму або напруги у даний момент часу називають його миттєвим значенням (миттєвим струмом, напругою). Для позначення миттєвого струму, напруги, застосовують літери латинської абетки: ***i, u***. Щоб підкреслити, що змінний струм, напруга є функціями часу, їх позначають як ***i(t), u(t).***

Амплітуда струму I_m (або напруги U_m) - це його найбільше за абсолютною величиною значення за період.

Періодом сигналу називається найменший відрізок часу, через який повторюються миттєві значення сигналу. Позначається буквою *T*, вимірюється у секундах, мілісекундах, мікросекундах.

Величину, обернену до періоду , називають дінійною частотою гармонійного струму ***f:***

$$f = 1 / T.$$

Кругова частота ω – це швидкість зміни фази струму, що дорівнює лінійній частоті синсоїдального струму (*f*), помноженій на 2π. Вимірюється у (рад/с):

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

$\omega t + \psi = \varphi(t)$ - фаза гармонійного аналогового сигналу (фазовий кут). $\varphi(t)$ - це аргумент синусоїдального струму, що визначає стадію зміни синусоїдальної величини.

ψ - початкова фаза – значення фази синусоїдального струму в початковий момент часу (при t = 0).

ωt – миттєва (залежна від часу) фаза.

На рис. 2 наведено приклад періодичної послідовності прямокутних імпульсів (цифровий сигнал).

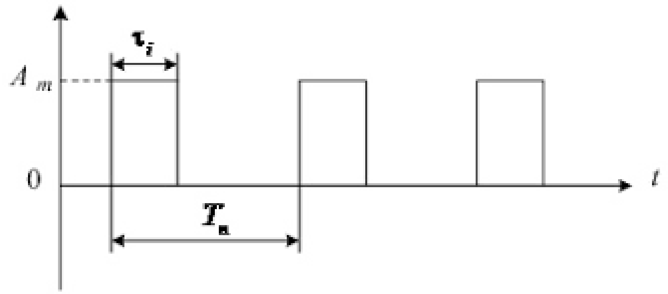


Рис. 2. Періодична послідовність прямокутних імпульсів.

Параметри цифрових сигналів:

- тривалість (τ) вимірюється: мілісекунда, мікросекунда, наносекунда;
- період повторення (Т) вимірюється: с мс мкс нс;
- частота повторення $F = \frac{1}{T}$ Гц, кілоГерць, мегаГерць;
- скважність q = Т/τ.
- амплітуда - (U_m) (Вольт), на рис. 2 – A_m.

Якщо скважність дорівнює 2 то таку послідовність ще називають меандр.

Неперіодичним детермінованим сигналом називається будь-який детермінований сигнал, для якого не виконується умова:

$$s(t)= s(t+nT) \ .$$

Неперіодичні сигнали можуть бути поодинокі і групові.

Сигнал називається **поодиноким**, якщо сукупність його миттєвих значень і параметрів не повторюється в інтервалі часу **($-\infty<t<\infty$)** (рис.3).

Якщо ж електричний сигнал складається з декількох наступних один за одним імпульсів, то він називається груповим або пачковим.

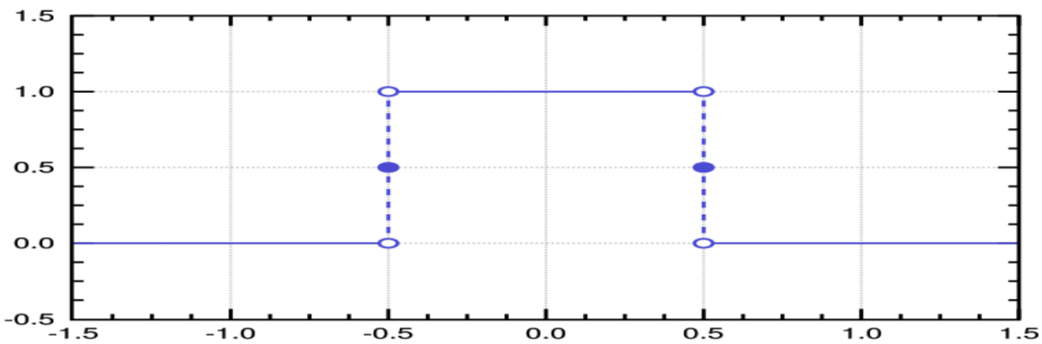


Рис. 3. Поодинокий неперіодичний сигнал.

До **випадкових** сигналів відносять функції часу, значення яких заздалегідь невідомі і можуть бути передбачені лише з деякою вірогідністю, меншої одиниці. Такими функціями є, наприклад, електрична напруга, що відповідає мові, музиці, послідовності знаків телеграфного коду при передачі тексту, що не повторюється. До випадкових сигналів відноситься також послідовність радіоімпульсів на вході радіоприймального пристрою. По суті, будь-який сигнал, що несе в собі інформацію, повинен розглядатися як випадковий.

Для характеристики і аналізу випадкових сигналів застосовується статистичний підхід. Як основні характеристики випадкових сигналів приймають: а) закон розподілу вірогідності і б) спектральний розподіл потужності сигналу.

Разом з корисними випадковими сигналами в теорії і практиці доводиться мати справу з випадковими перешкодами - "шумами". Як вже згадувалося вище, рівень шумів є основним чинником, що обмежує швидкість передачі інформації при заданому сигналі. Тому вивчення випадкових сигналів невід'ємне від вивчення шумів.

2. Спектральний спосіб опису сигналів

При теоретичному дослідженні використовують, як правило, математичну модель сигналу. Залежно від способу опису сигналу вона може бути побудована по-різному. Найбільш універсальним виявляється представлення складних сигналів у вигляді сукупності елементарних складових. У тимчасових методах аналізу процесів в електричних ланцюгах в якості елементарних складових були вибрані типові функції: одинична і дельта-функція. У спектральному методі аналізу сигнали довільної форми представляють у вигляді сукупності гармонійних складових (коливань).

Гармонійне коливання — коливання амплітуда якого змінюється у часі по гармонійному (сінусоідальному, косинусоідальному) закону.) Їх застосування пояснюється наявністю добре розробленого математичного апарату, хорошою фізичною наочністю і простотою експериментальної перевірки результатів аналізу.

Сукупність гармонійних складових, на які розкладається сигнал довільної форми, називається його спектром.

У основі класичного спектрального представлення сигналу лежить його розкладання за системою косинусоїдальних функцій. Проте відомо і використовується на практиці розкладання і за системою інших ортогональних функцій (функції Бесселя, Хаару, Уолша та ін.). В. загальному випадку сигнали можуть бути представлені у вигляді суми ортогональних складових незліченною кількістю способів. Вибір тієї або іншої системи функцій в якості основної визначається зручністю рішення поставленої практичної задачі.

Отже, можливі два класичні способи представлення сигналу: **часовий і спектральний** (частотний). Сигнал може бути представлений цими способами в області як речових, так і комплексних величин.

Кожна синусоідальна складова спектру сигналу (іноді їх ще називають гармоніками спектру або спектральними складовими сигналу) має свою частоту, амплітуду і початкову фазу. Тому розрізняють окремо спектри **амплітудно-частотні** (АЧС) і **фазочастотні** (ФЧС).

Під **амплітудно-частотним спектром** (АЧС) розуміють сукупність амплітуд спектральних складових сигналу.

Під **фазочастотним** спектром розуміють сукупність їх початкових фаз.

Для отримання спектрів сигналів використовують наступні математичні прийоми:

- тригонометричні перетворення;
- розкладання в ряд Фур'є;
- інтегральне перетворення Фур'є.

Вибір того або іншого прийому залежить від властивостей сигналу. Так, якщо сигнал періодичний, то для його розкладання на синусоїдальні складові необхідно використати ряд Фур'є або в простих випадках, формули тригонометричних перетворень.

Ряд Фур'є, як відомо, записується в комплексній або тригонометричній формах. Загальнішою є комплексна форма запису

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\dot{S}_{mk}e^{jk\Omega t}$$

Тут:

$$\dot{S}_{mk}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}s(t)e^{-jk\Omega t}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}s(t)\cos k\,\Omega t dt-j\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}s(t)\sin k\,\Omega t dt=$$

$$a_k-jb_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\cdot e^{-jarctg\frac{b_k}{a_k}}=S_{mk}\cdot e^{-j\psi_k}.$$

комплексна амплітуда k-того члена ряду;

$\Omega = \frac{2\pi}{T}$ - углова частота періодичного сигналу.

Комплексна форма запису ряду Фур'є у багатьох випадках спрощує математичні перетворення. Проте негативні значення частот $(-k\Omega)$ спектральных складових не мають фізичного сенсу, тому комплексні амплітуди $\dot{S}_{mk}$ не є комплексними амплітудами реальних синусоїдальних складових сигналу. Щоб отримати реальні гармоніки, що становлять реальний спектр сигналу, перейдемо до тригонометричної форми запису ряду. Можна записати:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \dot{S}_{mk} e^{jk\Omega t} = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_{mk} \cos(k\Omega t - \psi_k).$$

Де $S_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)dt$ - середнє за період значення сигналу, тобто його постійна складова, яку часто називають гармонікою нульової частоти.

Отримана сума є спектром несинусоїдального періодичного сигналу. Спектр є дискретним і займає в загальному випадку діапазон частот $0 \le \Omega \le \infty$.

Таким образом, періодичний сигнал можна розглядати як результат накладення постійної складової і нескінченно великого числа косинусоїдальних (гармонійних) коливань з частотами $k\Omega$, амплітудами S_{mk} і начальними фазами ψ_k.

Гармонійні коливання з частотами Ω, 2Ω, 3Ω і т. д. називаються першою, другою, третьою і так далі гармоніками. Постійна складова дорівнює середньому значенню коливання за період.

Легко дійти висновку про можливість повного опису сигналу послідовністю величин, що носить назви спектрів: спектр частот; спектр амплітуд; спектр фаз. Таке представлення сигналу називається спектральним.

Експериментальне визначення спектрів робиться за допомогою спеціальних приладів - аналізаторів спектру частот.

3. Спектри періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів

Скважність періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів це відношення періоду слідування імпульсів до тривалості імпульсу.

$$q = T/t_и$$

Нехай ***u(t)*** визначає періодичну послідовність прямокутних імпульсів з амплітудою $\boldsymbol{U_m}$, тривалістю τ_i і періодом слідування $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ (рис.4).

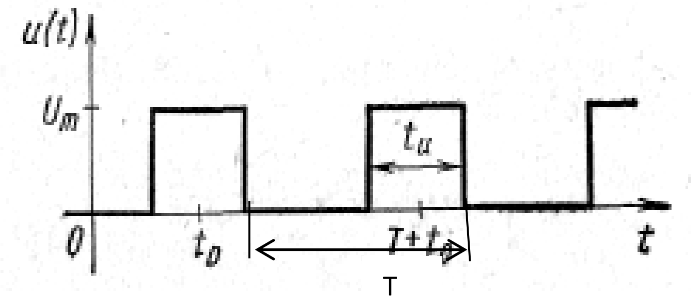


Рис. 4. Періодична послідовність прямокутних імпульсів.

Функція ***u(t)*** в межах періоду може бути описана як:

$$u(t) = \begin{cases} U_m \text{ при } (t_0 - \frac{\tau_u}{2}) \langle t \langle (t_0 + \frac{\tau_u}{2}) \\ 0 \text{ при } (t_0 + \frac{\tau_u}{2}) \langle t \langle (t_0 - \frac{\tau_u}{2}) \end{cases}$$

Перейдемо до спектрального представлення. Провівши розрахунок в комплексній формі, використовуючи формули Ейлера і перейшовши до тригонометричної форми, отримаємо:

$$u(t) = \frac{U_m}{q} + \frac{2U_m}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{k\pi}{q}}{\frac{k\pi}{q}} \cos k\Omega(t - t_0).$$

Тобто періодична послідовність імпульсів складається з суми гармонік (рис. 5).

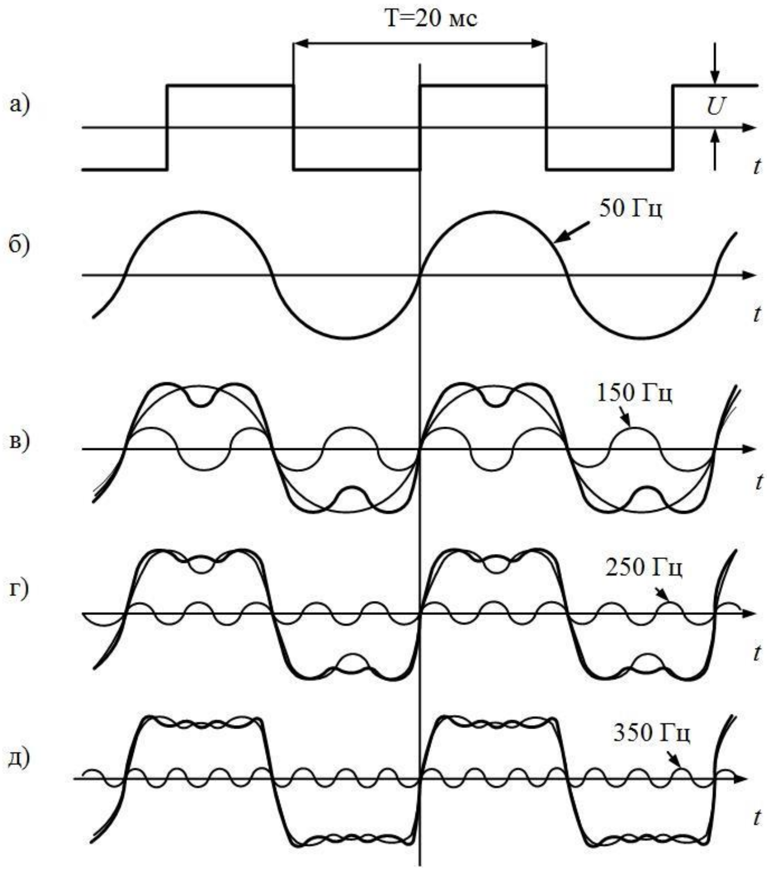


Рис. 5. Розкладання періодичної послідовності прямокутних імпульсів на гармоніки.

Значення амплітуд спектральних складових, тобто амплітудно – частотний спектр, розраховуємо у відповідності з формулами:

- Для постійної складової (нульової гармоніки)

$$U_0 = \frac{U_m}{q},$$

де:

U_m - амплітуда імпульсів;

$q = \frac{T}{\tau_i}$ - скважність;

Т – період повторення імпульсів;

τ_i - тривалість імпульсів.

- Для спектральних складових, починаючи з першої гармоніки:

$$U_{mk} = \frac{2U_m}{q}\left|\frac{\sin\frac{k\pi}{q}}{\frac{k\pi}{q}}\right|$$

де:

k- номер гармоніки.

Максимальне значення k (кількість гармонік у одній аркі спектру) визначають в межах одного пелюстка АЧС, включая нульове значення. Це значення дорівнює $\lfloor q \rfloor$, де знак $\lfloor \quad \rfloor$ визначає округлення до найближчого цілого числа, меншего q (якщо скважність – дробне число), або q (при цілому значенні скважності).

Відстань між гармоніками у спектрі розраховується:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \text{ (рад/с)}$$

або

$$F = \frac{1}{T} \text{ (Гц)}$$

Графічне представлення спектрів здійснюють відрізками прямих ліній в координатах $\{\omega, U_{mk}\}$; довжина яких в відповідності з вибраним масштабом визначає амплітуди відповідних складових.

Аналіз отриманих виразів дозволяє зробити наступні висновки:

1. Постійна складова і амплітуди усіх гармонік пропорційні амплітуді імпульсів і зменшуються із зростанням їх скважності, що пояснюється фізично зменшенням енергії в імпульсі .
2. Амплітуди U_{mk} гармонік не залежать від зміщення імпульсів в часі t_0, а залежать лише від їх тривалості.
3. Розподіл амплітуд гармонік за величиною підкоряється закону арочного синуса: $Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$, де $x = \frac{k\pi}{q}$.Така функція має арочну структуру і визначає появу перед амплітудами знаку плюс або мінус, що відповідає зміні від арки до арки фази гармонік на $\pm\pi$. З урахуванням цього можна записати:

   $$u(t) = \frac{U_m}{q} + \frac{2U_m}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{k\pi}{q}}{\frac{k\pi}{q}} \right| \cos[k\Omega t - k\Omega t_0 \mp (n-1)\pi]$$

   де:

   n=1, 2, 3, ... — номер арки або інтервалу значень змінної $x = \frac{k\pi}{q}$, при яких функція $Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$ приймає визначені по знаку значення (позитивні або негативні)
4. Спектральні лінії знаходяться один від одного на однаковій відстані, рівній частоті дотримання імпульсів Ω.

5. Розподіл спектральних ліній по висоті визначається такою, що огинає спектру, характер якої залежить від форми сигналу.
6. Для побудови спектрів можна скористатися методикою, суть якої в наступному. У точках $k\Omega$ на відстані Ω одна від одної проводяться лінії, перпендикулярні осі частот з розрахованими амплітудами за виразом 4.1.

3.1. Амплітудно-частотний спектр

Огинаюча АЧС послідовності прямокутних відеоімпульсів описується функцією:

$$U_{mn} = \frac{2U_m}{q}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{2U_m}{q}|Sa(x)|$$

де:

$$x = \frac{k\pi}{q} = k\Omega\frac{\tau_u}{2}.$$

Огинаюча перетинає вісь частот, коли x кратне π, тобто k кратне q, чи при номерах гармонік, кратних скважності.

$$\Omega_{01}\frac{\tau_и}{2} = \pi$$

$$\Omega_{0K}\frac{\tau_u}{2} = k\pi$$

Тому саме ці частоти, рівні

$$\Omega_{0K} = k\frac{2\pi}{\tau_И}\text{ (рад)}$$

$$f_{0K} = k\frac{1}{\tau_И}\text{ (Гц)}$$

відсутні у спектрі (рис. 6).

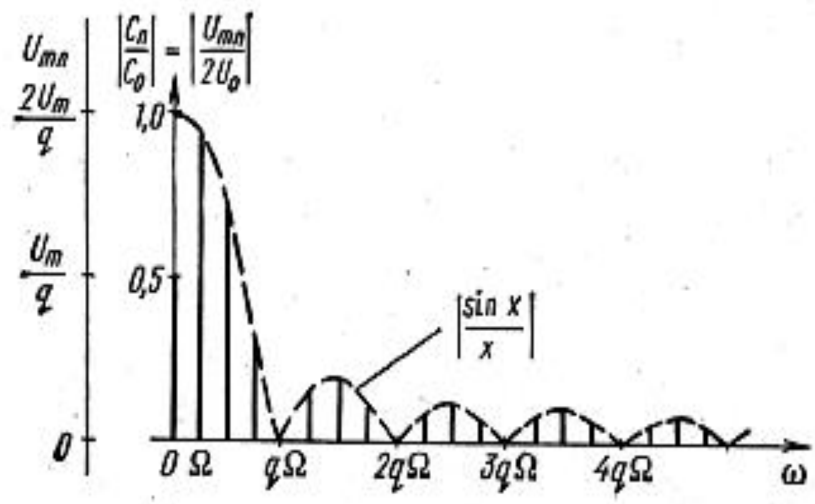


Рис. 6. Спектр періодичної послідовності імпульсів.

Спектральні складові з найбільшою амплітудою розташовані під першими арками, в них зосереджена і основна частина енергії сигналу.

Теоретично ширина спектру нескінченна, проте не усі його складові роблять дієвий вплив на форму сигналу і мають практичне значення. Тому під шириною спектру зазвичай розуміють обмежений діапазон частот, усередині якого розподілена велика частина енергії сигналу. Ширина спектру, так само як, наприклад, смуга пропускання контура, - поняття умовне.

Розглянемо особливості АЧС при зміні тривалості і частоти слідування імпульсів (рис. 7).

Зі зменшенням частоти слідування Ω при $\tau_И$=const відбувається згущування спектру: відстань між спектральними лініями зменшується. Ширина спектру що визнаачється його огинаючою, не змінюється, а основна частина енергії розподілюється на більшому числі гармонік.

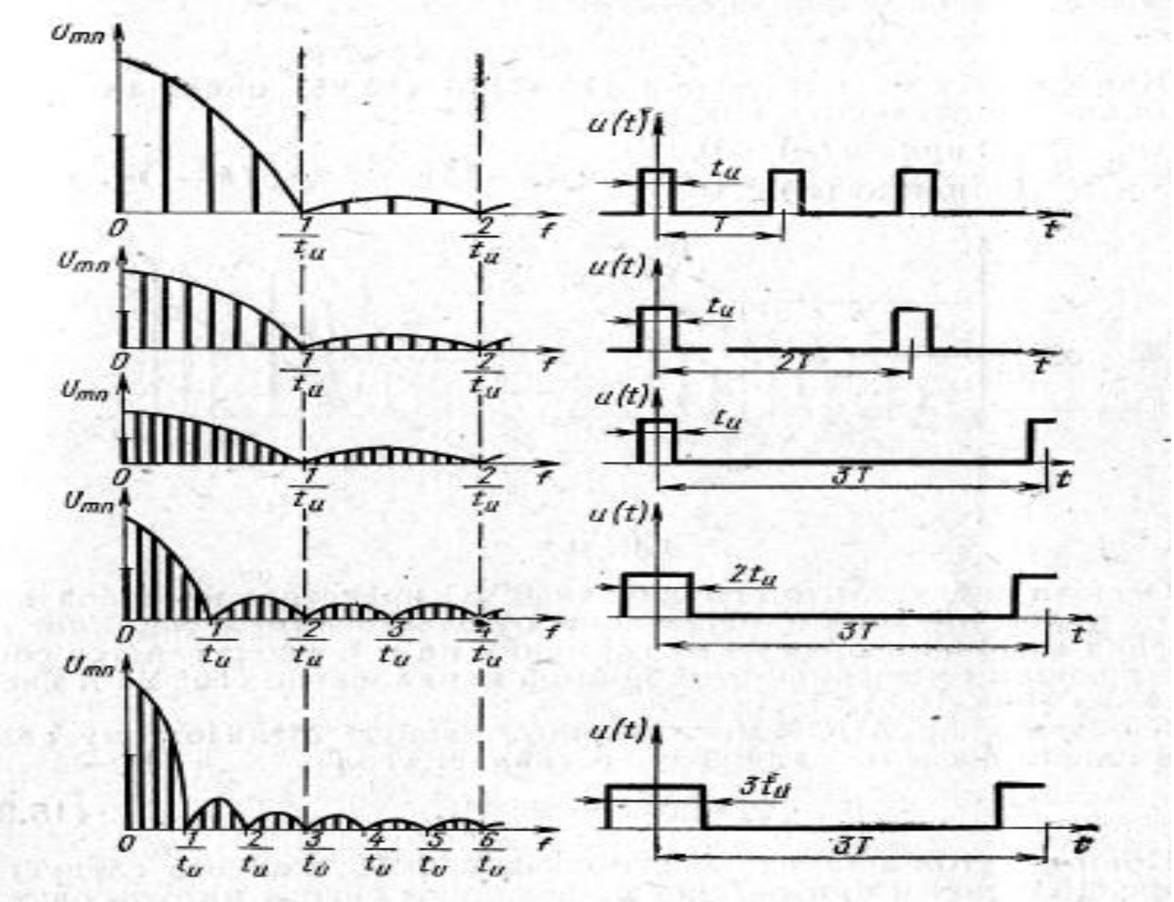


Рис. 15.7

Рис. 7. Особливості АЧС при зміні тривалості і частоти слідування імпульсів.

Зі збільшенням тривалості імпульсів при Ω=const ширина арок і пов'язана з нею ширина спектру зменшуються: відбувається відносне стискування спектру. Основна частина енергії розподіляється на меншому числі гармонік і зосереджується в області усе більш низьких частот.

Таким чином, чим коротше імпульси і більше їх скважність, тим ширше і густіше їх спектр, і навпаки.

Контрольні запитання.

1. Визначення детермінованого сигналу. Періодичного та неперіодичного.
2. Сутність спектрального представлення сигналів. Які існують спектри сигналів.
3. Що таке період слідування імпульсів та скважність.
4. Чому дорівнює ширина однієї арки спектру послідовності імпульсів.
5. Як розрахувати відстань між гармоніками амплітудно-частотного спектру.
6. Як впливає збільшення тривалості імпульсів при незмінній частоті їх слідування на ширину амплітудно-частотного спектру.

Лекція № 3. Дискретизація аналогових сигналів.

ПЛАН ЛЕКЦІЇ

1. Теорема відліків.
2. Частота дискретизації, теорема Найквіста і накладення спектрів.
3. Інтерполяційна формула Уіттекера – Шенона.

1. Теорема відліків

Усі фізичні природні явища (світло, звук, тиск, температура та ін.) являють собою аналогові сигнали. На практиці виникає задача обробляти ці сигнали, тобто змінювати їх властивості, відфільтровувати від різного роду завад. У сучасний час розвитком цифрової і обчислювальної техніки наявні потужні можливості для цього з усіма перевагами цифрової обробки. Але для використання сучасних засобів комп'ютерної техніки необхідно перетворювати сигнал з аналогової форми)S(t) (рис. 1.2) до цифрової S(kΔt).

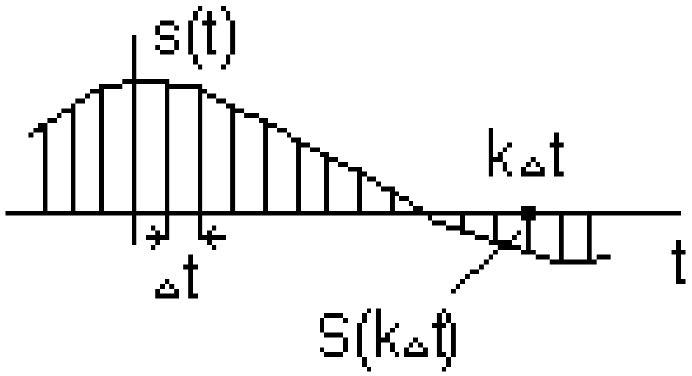


Рис. 1. Аналоговий та цифровий сигнал.

Проблема вибору частоти дискретизації аналогового сигналу.

Чим менше частоти оцифрування (або більше період дискретизації) і грубіше квантування сигналу по його величині, тим менше даних необхідно для представлення аналогового сигналу в цифровому виді і менше витрати часу на його обробку. Але при цьому зі зменшенням об'єму даних збільшується ймовірність втрати інформації, що міститься в сигналі.

Щоб продемонструвати спотворення інформації при неправильному виборі частоти оцифрування сигналу розглянемо приклад.

Приклад 1.

Нехай на вхід АЦП поступає гармонійний сигнал з частотою $\boldsymbol{f}$ (період $\boldsymbol{T=1/f}$) частоти початкового сигналу.

Проведемо дискретизацію вхідного аналогового сигналу з періодом дискретизації $\boldsymbol{T_д}$ більшим половини періоду вхідного сигналу T (рис. 2.2).

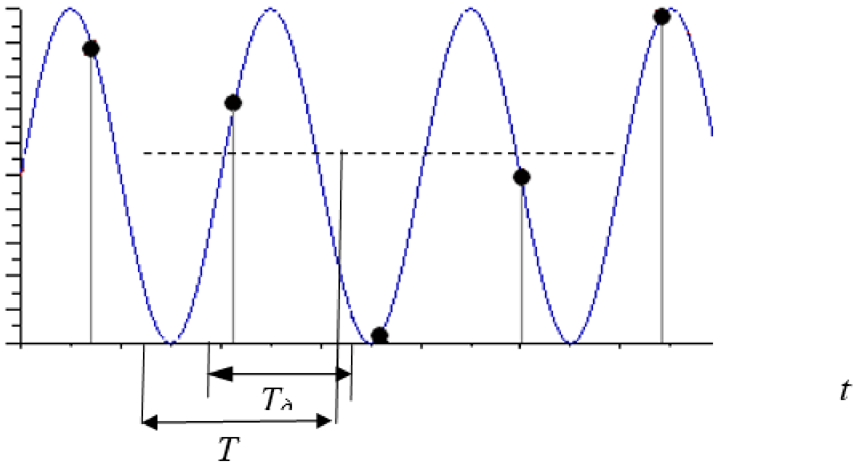


Рис. 2. Дискретизація при $T_д > T$.

Очевидно, що дискретні відліки сигналу однозначно не відображають форму початкового сигналу, зокрема по точках, що вийшли, можна побудувати гармонійний сигнал з періодом $\boldsymbol{T_{спотвор}}$, що відрізняється від періоду початкового сигналу $\boldsymbol{T}$. Період $\boldsymbol{T_{спотвор}}$ більше періоду початкового сигналу $\boldsymbol{T}$, відповідно частота менша, частоти початкового сигналу $\boldsymbol{f}$ (рис. 3.3).

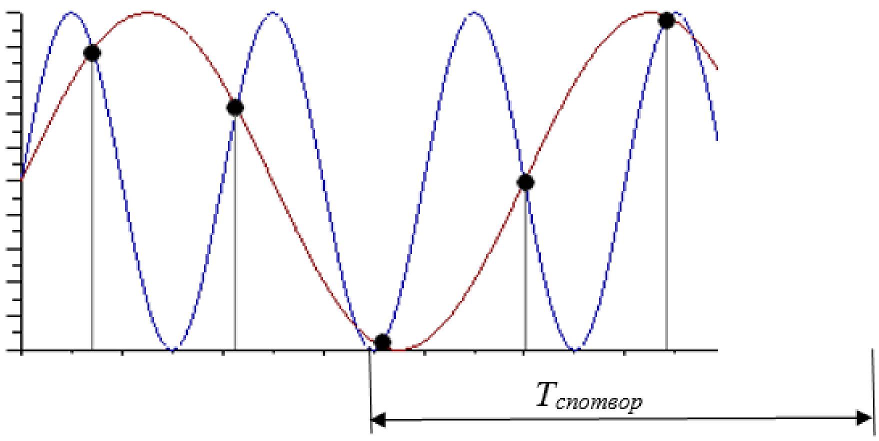


Рис. 3. Період початкового сигналу менше періоду спотвореного.

Цей ефект називається стробоскопічним ефектом або аліасінгом. Він полягає в появі неправдивої низькочастотної складової при дискретизації сигналу з частотою меншої подвоєної частоти початкового сигналу (чи з періодом більшим половини періоду початкового сигналу), відсутньої в початковому сигналі.

Приклад 2.

Зменшимо період дискретизації до половини періоду початкового аналогового сигналу (частоту дискретизації збільшимо до половини частоти початкового сигналу). У цій ситуації виникає невизначеність початкової фази і амплітуди сигналу, при цьому частота початкового сигналу не спотворюється. В крайньому випадку ми можемо отримати відліки сигналу рівні нулю (рис. 4.3).

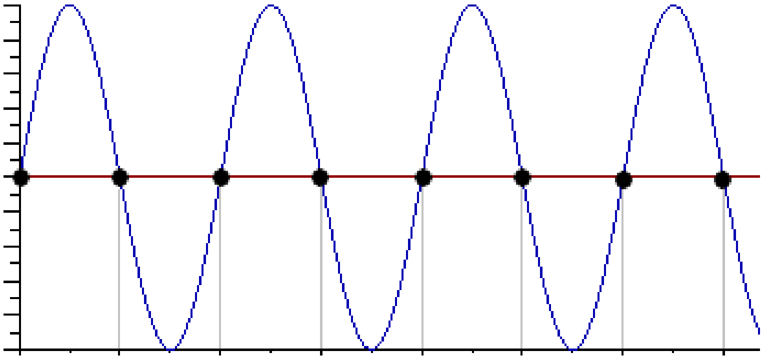


Рис. 4. Період дискретизації дорівнює періоду сигналу.

Приклад 3.

Продовжимо зменшення періоду дискретизації. Якщо період дискретизації менше половини періоду початкового сигналу, то очевидно, що через точки, що вийшли після оцифрування, можна побудувати тільки один гармонійний сигнал, відповідний початковому, без спотворення початкової фази, амплітуди і частоти (рис. 5.3). Це твердження теоретично обґрунтоване і ми його візьмемо без доведення.

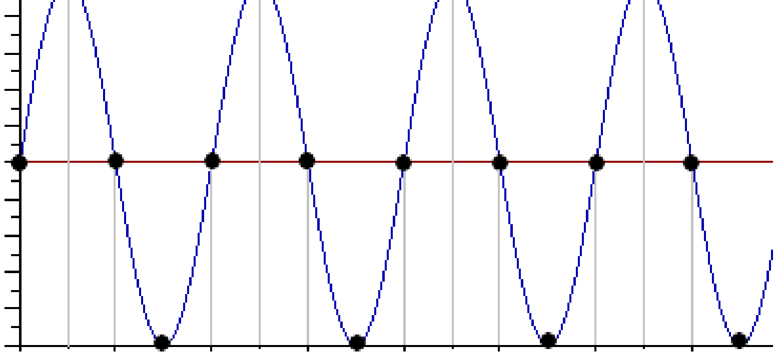


Рис. 5. Період дискретизації менше половини періоду вхідного сигналу.

Підводячи підсумок трьох прикладів.

1. Частота дискретизації менша подвоєної частоти вхідного сигналу. Точне відновлення сигналу початковому вигляді стає неможливим. З'являються додаткові частоти, яких у спектрі вихідного сигналу. Це явище зветься ”аліасинг”.
2. Частота дискретизації дорівнює частоті вхідного сигналу. Сигнал може бути відновлений у початковому вигляді, але амплітуда та фаза його можуть бути спотворені.
3. Частота дискретизації більша за частоту вхідного сигналу. Аналоговий гармонійний сигнал щодо його дискретних вибірок відновлюється без спотворень.

Таким чином, для адекватного відновлення гармонійного сигналу по дискретних відліках, частота дискретизації має бути не менше подвоєної частоти сигналу. Ця частота дискретизації, що принаймні удвічі більша максимальної частоти у спектрі вхідного сигналу називається *частотою Найквіста*: $f_{Д} \geq 2f_c$.

Це твердження можна узагальнити таким чином:

Аналоговий сигнал з обмеженим спектром може бути відновлений однозначно і без спотворень по своїх дискретних відліках, узятих з частотою більшої подвоєної максимальної частоти у своєму спектрі.

$$f_{д} > 2 \cdot \boldsymbol{F_{max}} \quad (1)$$

Також це твердження відоме як теорема Котельникова (у західній літературі теорема Найквіста) або теорема відліків. У різних джерелах у формулюванні цієї теореми можуть бути відмінності, основним з яких є знак порівняння у формулі 1.3:

$$fд \geq 2 \cdot F_{max} \text{ або } fд > 2 \cdot F_{max}.$$

З точки зору коректності слід дотримуватися формулювання зі знаком строго більше, оскільки при частоті оцифрування рівній максимальній частоті в спектрі виникають неоднозначності початкової фази і амплітуди.

На практиці аналоговий сигнал, як правило, оцифровують з частотою такою, що у декілька разів перевищує подвоєну частоту в спектрі сигналу, хоча існують методики оцифрування сигналу з порушенням теореми відліків.

2. Частота дискретизації, теорема Найквіста і накладення спектрів

Як нам вже відомо, швидкість, з якою проводиться дискретизація аналогового сигналу за часом, називається частотою дискретизації. Наприклад від неї залежить максимальна частота звукового сигналу, який можна правильно закодувати. Частота дискретизації має бути як мінімум удвічі вище за максимальну частоту кодованого звукового сигналу. ***Наприклад***, при записі на компакт-диск частота дискретизації складає 44100 Гц або 44,1 кГц. Це забезпечує ширину смуги частот звукового сигналу, рівну 20 кГц.

Співвідношення між частотою дискретизації і шириною смуги частот аналогового сигналу було встановлено в знаменитій теоремі Найквіста (також вона відома під назвою теореми Котельникова). У 1928 році інженер-телеграфіст Гаррі Найквист розробив теорію про те, що у будь-якій системі, що здійснює дискретизацію за часом, частота дискретизації має бути як мінімум удвічі вище, ніж найбільша частота, яку ми хочемо передати.

Якщо ми порушимо теорему Найквіста і робитимемо дискретизацію сигналу, що має частоту вище, ніж половина частоти дискретизації, то з'являться своєрідні нелінійні спотворення, що називаються *накладенням спектрів*. Із-за них в спектрі сигналу, що дискретизує, з'являються складові, відсутні в початковому сигналі.

Наприклад, якщо дискретизацію сигналу синусоїдальної форми, що має частоту 33 кГц, проводити з частотою 48 кГц, з'явиться новий сигнал з частотою 15 кГц (48 кГц мінус 33 кГц). Якщо з'явилися спотворення накладення спектрів, то що вносяться ними в сигнал нові компоненти неможливо видалити.

Уникнути накладення спектрів можна, правильно вибравши співвідношення між частотою дискретизації і шириною частотного спектру аналогового сигналу. Для цього на вході цифрового тракту запису-відтворення, перед АЦП, включають фільтр нижніх частот (ФНЧ), який затримує складові спектру аналогового сигналу з частотою вище за половину частоти дискретизації. Вхідний фільтр, що перешкоджає виникненню спотворень накладення спектрів, є важливою частиною усіх цифрових аудіосистем.

Він безперешкодно пропускає сигнали звукового діапазону частот, а за його межами загасання фільтру різко зростає. Ці фільтри були істотним джерелом погіршення звуку в цифровій аудіоапаратурі, особливо в перших версіях програвачів компакт-дисків, коли використовувалися фільтри з низькою вибірковістю.

І якщо частота дискретизації пов'язана правильним співвідношенням з частотою зрізу фільтру, то пристрій дискретизації прекрасно кодує будь-який пода ний на нього сигнал, а після зворотного перетворення числових відліків в аналоговий сигнал і згладжування його вихідним фільтром нижніх частот, відновлюється форма тимчасової функції профільтрованого вхідного сигналу.

Давайте розглянемо випадок дискретизації частотою 40 кГц синусоїдального сигналу з частотою 20 кГц. Попри те, що пристрій дискретизації бере в кожному періоді синусоїди тільки два відліки, цього цілком достатньо для її кодування. На рис. .5 показана початкова форма сигналу з частотою 20 кГц (в горі) і форма сигналу, отриманого в результаті квантування (прямокутний сигнал). На (рис. 6.3) синусоїда з частотою 20 кГц дискретизована за часом з частотою 40 кГц. В результаті отримано сигнал у формі прямокутних імпульсів. ФНЧ видалить гармоніки з частотами більше ніж 20 кГц та поновить синусоідальний сигнал з частотою 20 кГц.

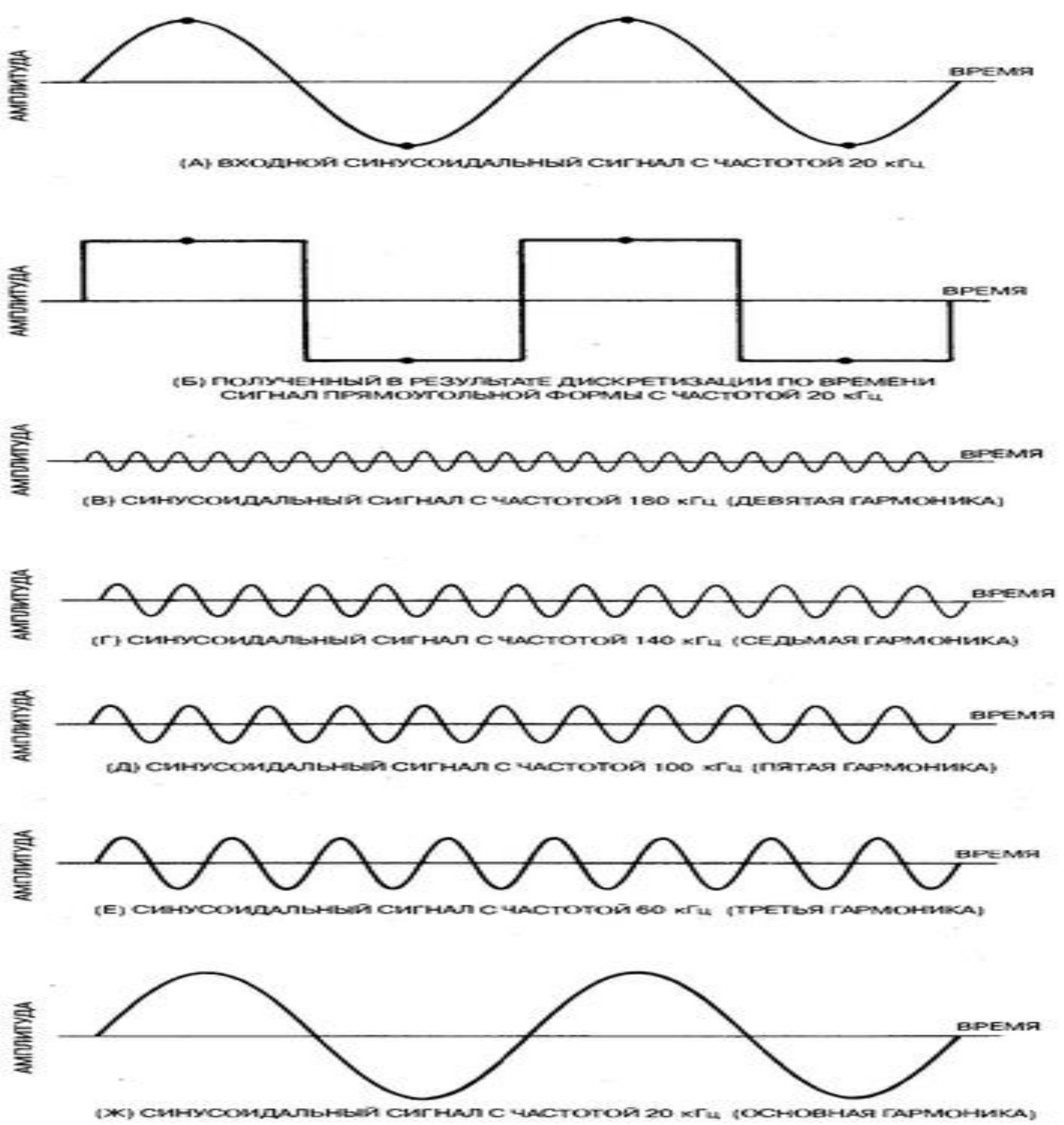


Рис. 6. Дискретизація синусоїди з частотою 20 кГц.

Відомо, що сигнал прямокутної форми виходить в результаті додавання до синусоїдального сигналу гармонік непарного порядку. Ці гармоніки представлені як чотири високочастотні синусоїдальні сигнали, розташовані під сигналом прямокутної форми з частотою 20 кГц. Для неспотвореної дискретизації синусоїди з частотю 20 кГц частотою $f_д$ = 40 кГц, з наступним відновленням, необхідно після її відновлення видалити усі гармоніки з частотою більшою 20 кГц. Потрібно застосувати фільтр (Ф) рис. 7.3.

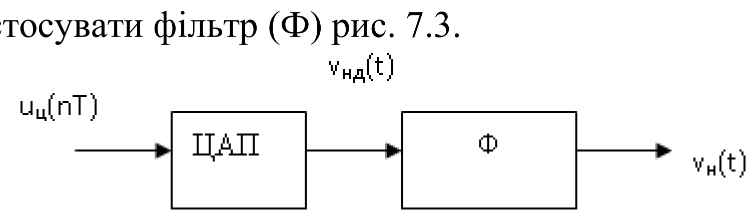


Рис. 7. Відновлення оцифрованого сигналу.

Після видалення цих гармонік вихідним фільтром нижніх частот у нас залишиться синусоїда з частотою 20 кГц, тобто той же сигнал, з якого ми розпочинали.

Розглянувши цей приклад, ми переконуємося, що процес дискретизації за часом відбувається без яких-небудь втрат: відновлений сигнал теоретично має та ку саму форму, що і початкова синусоїда. Це справедливо лише у тому випадку, якщо частотний спектр вхідного сигналу належним чином обмежений і вибрана правильна частота дискретизації.

Проте існує причина, що погіршує якість звуку сучасної цифрової аудіоапаратури, - занадто низька частота дискретизації. Хоча максимальна чутна частота людського вуха складає 20 кГц (якщо вам більше 30 років, то точніша цифра - 16 кГц), дослідження показали, що розширення смуги частот до 40 кГц покращує якість звучання музики.
Хоча ми не можемо чути синусоїдальні сигнали з частотою 40 кГц, видалення з сигналу спектральних складових з частотами, що перевищують 20 кГц, зменшує відчуття відкритості, погіршує природність звучання. Крім того, надмірна крутизна амплітудно-частотної характеристики цифрового фільтру, яка потрібна при дискретизації з частотою 44,1 кГц, також погіршує якість звуку.

Теоре́ма Котельникова (у англомовній літературі - теорема Найквіста - Шенона або теорема відліків) свідчить, що, якщо аналоговий сигнал $\boldsymbol{x(t)}$ має фінітний (обмежений по ширині) спектр, то він може бути відновлений однозначно і без втрат по своїх дискретних відліках, узятих з частотою, строго більшої подвоєної верхньої частоти $\boldsymbol{f_c}$. . Зрозуміло, реальні сигнали (наприклад, звук на цифровому носії) не мають таких властивостей, оскільки вони кінцеві за часом і, зазвичай, мають в часовій характеристиці розриви. Відповідно, їх спектр нескінченний. У такому разі повне відновлення сигналу неможливе і з теореми Котельникова витікають 2 слідства:

- будь-який аналоговий сигнал може бути відновлений з якою завгодно точністю по своїх дискретних відліках, узятих з частотою $\boldsymbol{f>2f_c}$, де $\boldsymbol{f_c}$, - максимальна частота, якою обмежений спектр реального сигналу.
- якщо максимальна частота в сигналі перевищує половину частоти дискретизації, то способу відновити сигнал з дискретного в аналоговий без спотворень не існує.).

Говорячи ширше, теорема Котельникова стверджує, що безперервний сигнал x(t) можна представити у вигляді інтерполяційного ряду:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)\right],$$

де:

sinc(x)=sin(x)/x — функція сінус кардінальний**.**

Інтервал дискретизації задовільняє обмеженням $0 < \Delta \leq 1/(2f_c)$.

Миттєві значення цього ряду є дискретні відліки сигналу $x(k\Delta)$.

sinc (від лат. sinus cardinalis - "кардинáльный сíнус") - математична функція. Позначається ***sinc(x)***. Має два визначення - відповідно, для нормованої і ненормованої функції ***sinc*** :

У цифровій оброці сигналів та теорії зв’язку нормована функція sinc зазвичай визначається як:

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

У математиці ненормована функція sinc визначається як:

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

У обох випадках значення функції в особливій точці x=0 явним чином задається рівним одиниці (рис. 8).

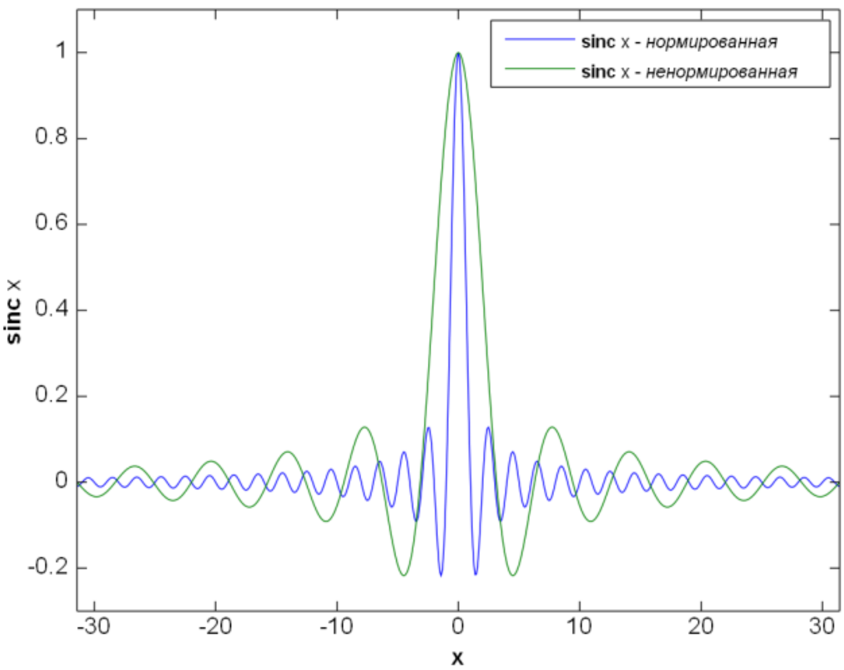


Рис. 8. Графік функції синус кардінальний.

3. Інтерполяційна формула Уіттекера – Шенона.

Інтерполяційна формула Уіттекера – Шенона служить для відновлення безперервного сигналу з обмеженим спектром з послідовності рівновіддалених відліків.

Інтерполяційну формулу зазвичай називають інтерполяційною формулою Шенона, або інтерполяційною формулою Уіттекера.

Теорема відліків свідчить, що за деяких обмежуючих умов, функція ***x(t)*** може бути відновлена з її дискретизації, ***x[n]=x(nT)***, згідно з інтерполяційною формулою Уіттекера - Шенона:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right),$$

де:

$T=1/f_c$ — період дискретизації4

f_c — частота дискретизації,

sinc*x* — нормалізирована **sinc**-функция.

Приклад.

Сигнал звукового супроводу в телевізійному каналі обмежений верхньою частотою $f_{max}=12$ ***кГц***. Визначити інтервал Δt між відліками цього сигналу, необхідний для неспотвореного відтворення сигналу при передачі його дискретним способом.

$\Delta=1/2\ f_{max}=1/(2\cdot 12\cdot 10)^3=41.67\cdot 10^{-6}c/$

Контрольні запитання.

1 Який проявляється недолік під час оцифровки сигналу з частотою дискретизації, що дорівнюю половині частоти аналогового сигналу?

2. Доповісти теорему Найквіста

3. Для чого призначена формула Уіттекера-Шенона.

Лекція № 4. Квантування та компаундування цифрових сигналів.

ПЛАН ЛЕКЦІЇ.

1. Квантування сигналів.
2 Компаундування сигналів.

1. Квантування сигналів

Перед розглядом основних питань нашого заняття розглянемо найвагоміші технічні переваги цифрової обробки сигналу перед аналоговою:

- стабільність параметрів обробки. Якщо стабільність частоти налаштування і в аналогових приймачах з синтезаторами частоти досить висока, то характеристики аналогових елементів змінюються від часу і температури;
- здатність працювати як з традиційними, так і з новими видами модуляції, з кодованими сигналами і сигналами з часовим і частотним ущільненням каналів при прийнятних маса/габарити/вартість показниках (при чисто аналоговій обробці ці показники катастрофічно зростають при ускладненні модуляції);
- скорочення часу налаштування, можливість роботи із стрибаючою частотою за рахунок нових підходів до побудови гетеродина (синтезатора частоти), отримання за рахунок цифрової обробки сигналу проміжної частоти (ПЧ) з широкою смугою панорами спектру діапазону частот, що приймаються, і цифрового аналізу цього спектру;
- багатоканальність з ідентичними характеристиками каналів. Реалізація принципу : один приймач - багато каналів прийому
- можливість моніторингу спектру частот, що приймаються;
- нові можливості при вбудовуванні приймача в обчислювальний оброблювальний комплекс;
- зниження маси, габаритів і спрощення схемотехніки, і, як наслідок, істотне підвищення надійності;

- зниження ціни в порівнянні з аналоговим приймачем завдяки більшої технологічності, невеликої кількості і невисокої ціни компонентів при масовому виробництві.
- простота обробки інформації.
- інтеграція систем передачі та комунікації.
- можливість працездатності при малих відношеннях сигнал/шум.

Процес перетворення безперервного аналогового сигналу в послідовність його миттєвих значень (вибірок) називається **дискретизацією**. Визначення чисельного значення величини (амплітуди) вибірки (відліку) називається **квантуванням.** Для цього весь діапазон можливих змін амплітуди перетворюваного сигналу ділиться на певну кількість рівнів квантування, яка визначається розрядністю використовуваного при цьому двійкового числа (рис. 1). Чим більше число розрядів квантування, тим менше відстань між рівнями_квантування (**δ**-крок квантування) і тим вище виходить точність перетворення.

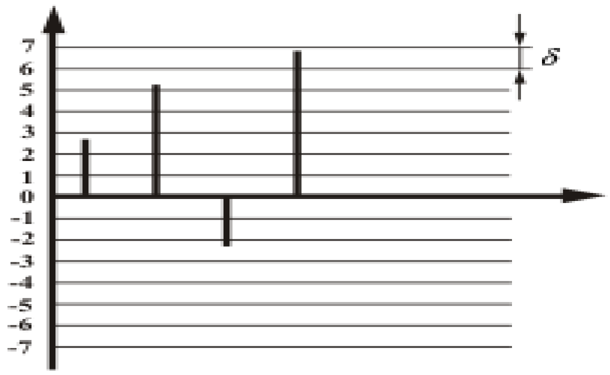


Рис. 1. Квантування сигналу.

Амплітудна розрядність квантування. δ - крок квантування.

Розглянемо питання дискретизації та квантування більш детально.

Дискретизація.

Дискретизація - перетворення неперервної функції в дискретну. Використовується в обчислювальних системах і цифрових пристроях при імпульсно-кодовій модуляції (ІКМ) сигналів в системах передачі даних. При передачі зображення використовують для перетворення безперервного аналогового сигналу в дискретний або дискретно-безперервний сигнал. Зворотний процес називається відновленням. При дискретизації тільки за часом, безперервний аналоговий сигнал замінюється послідовністю відліків, величина яких може дорівнювати значенню сигналу в даний момент часу. Можливість точного відтворення такого представлення залежить від інтервалу часу між відліками Δt. Згідно з теоремою Котельникова:

$$\Delta t < 1/2 \cdot F_{max}$$

де: F_{max} - найбільша частота спектра сигналу.

1. Квантування сигналів

Квантування (англ. quantization) - в інформатиці розбивка діапазону значень безперервної або дискретної величини на кінцеве число інтервалів (рис. 2).

Існує також векторне квантування - розбивка простору можливих значень векторної величини на кінцеве число областей. Квантування часто використовується при обробці сигналів, у тому числі при стисканні звуку й зображень. Найпростішим видом квантування є розподіл цілочисельного значення на натуральне число, називане коефіцієнтом квантування.

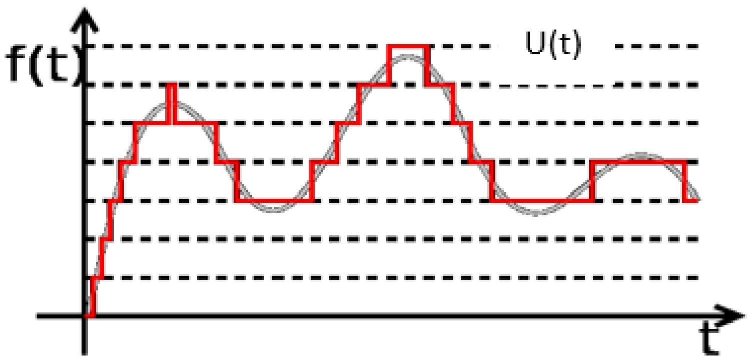


Рис. 2. Квантований сигнал.

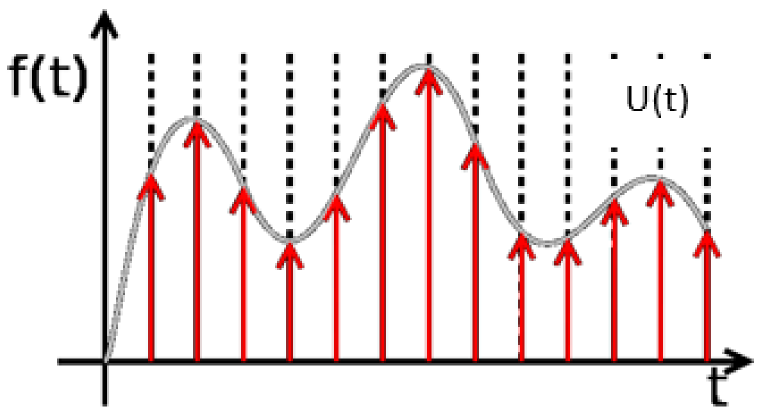


Рис. 3. Неквантований сигнал з дискретним часом

Не слід плутати квантування з дискретизацією (і, відповідно, крок квантування з частотою дискретизації). При дискретизації сигнал, що змінюється в часі заміряється із заданою частотою (частотою дискретизації), таким чином, дискретизація розбиває сигнал за часовою складовою (на рис. 3. - по горизонталі). Квантування ж приводить сигнал до заданих значень, тобто, розбиває за рівнем сигналу (на графіку - по вертикалі).

Таким чином сигнал, до якого застосована дискретизація й квантування, називається цифровим (рис. 3).

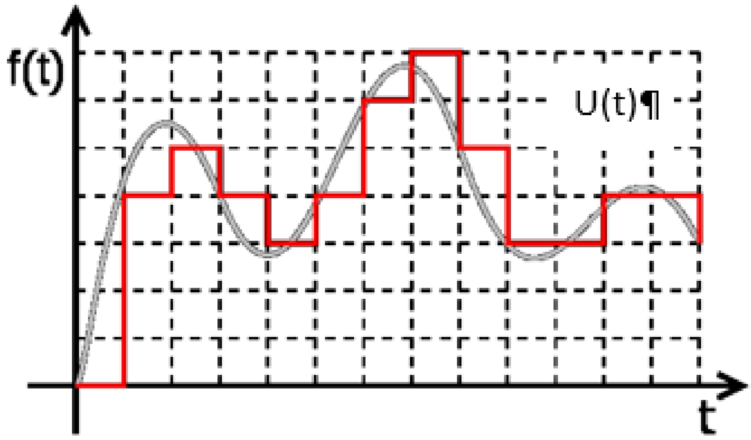


Рис. 3 - Цифровий сигнал.

Квантування за рівнем - представлення величини відліків цифровими сигналами. Для квантування в двійковому коді діапазон напруги сигналу від Umin до Umax ділиться на 2^n інтервалів. Величина отриманого інтервалу (кроку квантування) обраховуэться за виразом:

$$\Delta = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2^n}.$$

Кожному інтервалу присвоюється n-розрядний двійковий код - номер інтервалу, записаний двійковим числом. Кожному відліку сигналу присвоюється код того інтервалу, в який потрапляє значення напруги цього відліку. Таким чином, аналоговий сигнал представляється послідовністю двійкових чисел, відповідних величині сигналу в певні моменти часу, тобто цифровим сигналом.

Квантування миттєвих значень.

Як вже було сказано раніше, операції дискретизації та квантування зручно розглядати окремо, хоча часто розділяти їх важко.

Припустимо, що аналоговий сигнал пропущено через фільтр НЧ і в результаті дискретизації отримано послідовність безперервних величин {x(n)}.

У більшості випадків послідовність {x(n)} розглядається, як випадковий процес у дискретному часі. Для того, щоб передати таку послідовність відліків по цифровому каналу зв'язку або зареєструвати її в цифровому блоці пам'яті кожний відлік необхідно проквантувати до кінцевої множини значень, яке можна описати кінцевою множиною символів.

Схематично такий процес квантування та кодування зображений на рис. 4.

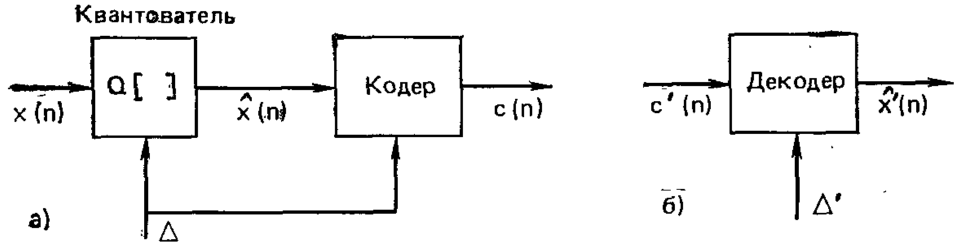


Рис. 4. Квантування та кодування а – кодер, б – декодер.

Так як корисно розділяти операції дискретизації та квантування, доцільно розділяти також процеси уявлення послідовності *{x(n)}* множиною символів на два етапи: **квантування**, результатом чого є послідовність величин $\{\hat{x}(n)\}$ = *{Q[x(n)]},* і **кодування**, при якому кожній квантованій величині ставиться у відповідність кодове слово *c(n).*

Цей процес зображений на рисунку 4а). (Величина Δ на рисунку означає шаг квантування у квантувателі.).

Аналогічно визначимо декодер, як пристрій, який послідовності кодових слів {c'(n)} ставить у відповідність послідовність квантованих відліків $\{\hat{x}'(n)\}$, як показано на рис. 4.б.

Якщо послідовність кодових слів c'(n) точно співпадає з послідовністю кодових слів c(n), тобто помилки відсутні, то сигнал на виході ідеального декодера точно співпадає з послідовністю квантованих відліків вхідного сигналу тобто $\hat{x}'(n) = \hat{x}(n)$.

Діапазон зміни вхідного сигналу ділиться на інтервали і операція квантування зводиться до того, що усім відлікам вхідного сигналу, який потрапив у деякий інтервал, приписується одне й теж значення. Такий процес ілюструє рис. 5 для восьмирівневого квантувателя.

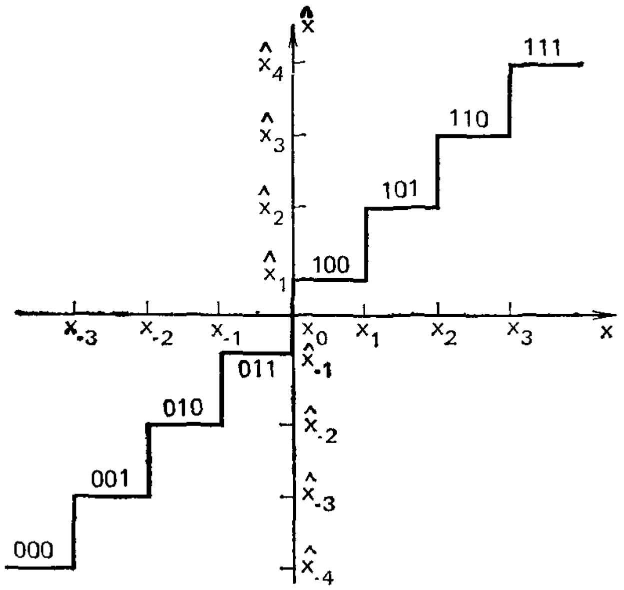


Рис. 5. Характеристика трьорозрядного квантувателя.

Наприклад, для всіх значень вхідного сигналу x(n), розташованого між x_1 та x_2, значення сигналу на виході буде:

$$\hat{x}(n) = Q[x(n)] = \hat{x}_2,$$

Кожному рівню поставлено у відповідність трьох розрядне слово, яким кодується значення відповідного рівня. Наприклад, якщо відлік попадає в інтервал між x_1 та x_2 (рис. 5) то на виході кодера з'явиться слово 101.

Рівномірне квантування

Інтервали і рівні квантування можна вибирати по-різному в залежності від запропонованого використання цифрового уявлення. Коли цифрове уявлення сигналу призначено для обробки у деякій системі, рівні та інтервали квантування вибирають звичайно рівномірно. Таким чином для рівномірного квантувателя рис 4.5 отримуємо:

$$x_i - x_{i-1} = \Delta$$

де:

Δ - шаг квантування.

Для випадку восьми рівнів квантування на рис 4.6 наведені характеристики двох зазвичай використовуваних квантувателів.

На рис. 6 зображено випадок коли начало відліку приходиться на середину вертикальної ділянки ступінчастої функції. Такий клас квантувателів має нзву квантувателі з усіченням. Аналогічно на рис 6 б наведено приклад квантувателів з округленням.

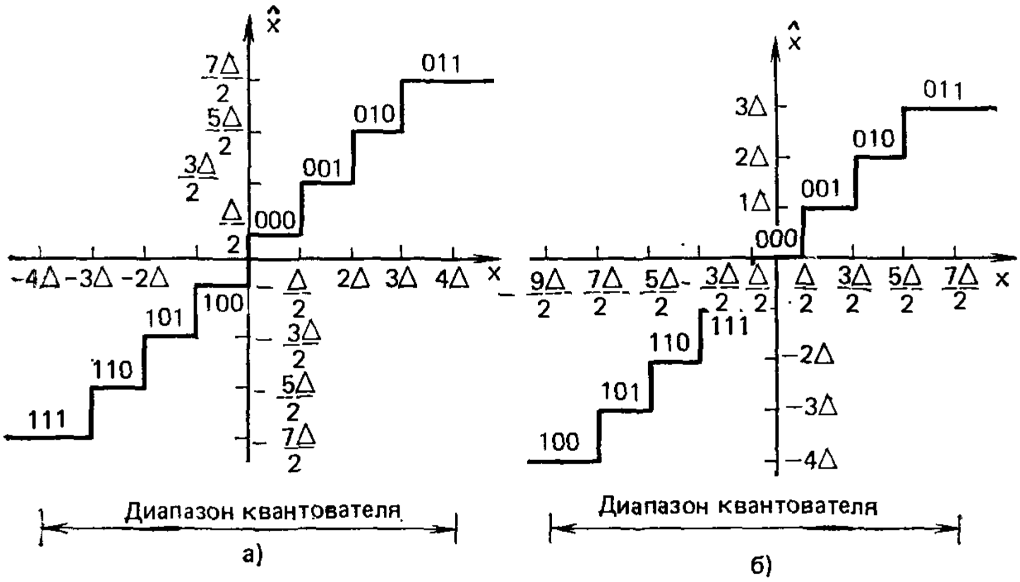


Рис. 6. Рівномірні квантувателі: а) з усіченням; б) з округленням.

Легко помітити, що на відміну від кватувателя з усіченням (рис. 6а) квантуватель з округленням має на один від'ємний (отрицательный) рівень більше, але при цьому має нульовий рівень, який відсутній у квантувателі з усіченням. Одиниця у крайніх розрядах ліворуч позначає, уявлення сигналу зі знаком.

При вивчені ефекту квантування корисно уявити квантований сигнал у вигляді:

$$\hat{x}(n) = x(n) + e(n),$$

де:

x(n) – безперервний відлік,

e(n) – помилка, або шум квантувателя.

На рис. 6 легко встановити, що якщо шаг квантування - Δ і кількість розрядів квантувателя – *B*, то помилка, або шум квантувателя буде складати:

$$-\Delta/2 \leqslant e(n) \leqslant \Delta/2.$$

Відомо, що помилка квантування залежить від відношення сигнал/шум.

Для підтримки помилки квантування на відповідному рівні необхідно обирати значно більше рівнів квантування, ніж це випливає з попереднього аналізу в рамках заздалегідь уявленої стаціонарності сигналу.

Таким чином, бажано мати пристрій квантування, при якому відношення сигнал/шум не залежить від рівня сигналу. Це досягається шляхом використання нерівномірного розподілу рівнів квантування.

2. Компаундування сигналів.

При рівномірному квантуванні крок квантування на вході і виході системи однаковий і не залежить від номера області квантування. Рівномірне квантування реалізується простіше, але при нерівномірному квантуванні, якщо крок вибирати відповідно до характеристик повідомлення, можна забезпечити більш високу точність передачі.

Компаундування - метод зменшення впливу спотворень сигналу при його передачі через канали з обмеженим динамічним діапазоном. Для цифрових сигналів базується на збільшенні числа кроків квантування в області малих значень вхідного сигналу і зменшення в області максимальних значень, для аналогових — стисканні динамічного діапазону сигналу при передачі і розширення при відтворенні. Динамічний діапазон сигналу стискається перед передачею і повертається в початковий стан на приймачі (рис. 7).

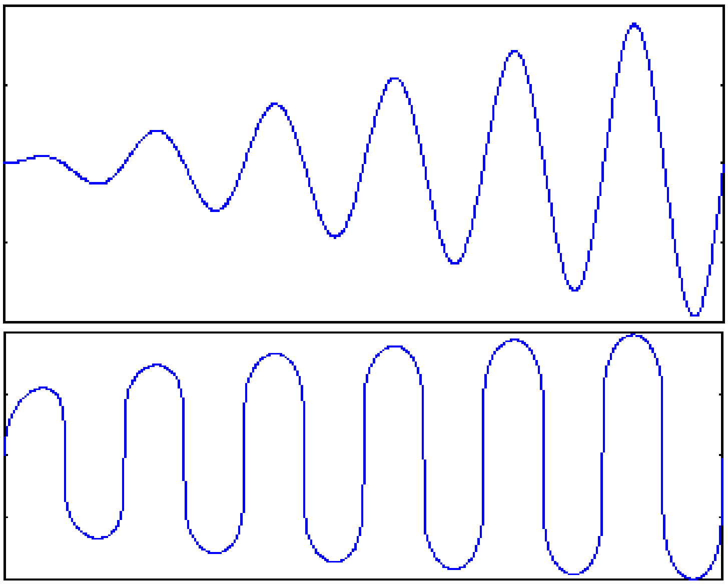


Рис. 7. Стискання динамічного діапазону сигналу.

Для того, щоб відносна помилка квантування була постійною при будь-яких рівнях вхідного сигналу, рівні квантування мають бути розподілені логарифмічно. З іншого боку, замість квантування вихідного сигналу можна квантувати його логарифм. Цей процес зображено на рис. 8 де вхідний сигнал компресується перед квантуванням за допомогою логарифмічного перетворювача, а вихідний сигнал після декодування експандується за допомогою експоненціального перетворювача.

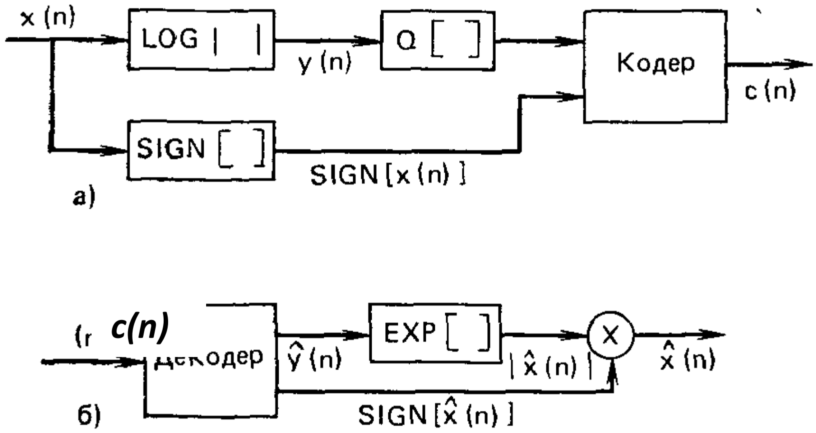


Рис. 8. Структурна схема системи логарифмічного кодування.

Завдяки застосуванню такої схеми перетворення відношення сигнал/шум не залежить від потужності сигналу, а залежить тільки від шагу квантування. Але квантуватель такого типу не має практичного значення оскільки динамічний діапазон (відношення максимального значення до мінімального) безкінечний і таким чином, потрібна безкінечна кількість рівнів квантування. Але це дозволяє зробити певний висновок про те, що характеристика компресора може бути близькою до логарифмічної.

Використання системи компресор-експандер для квантування показано на рис. 9.

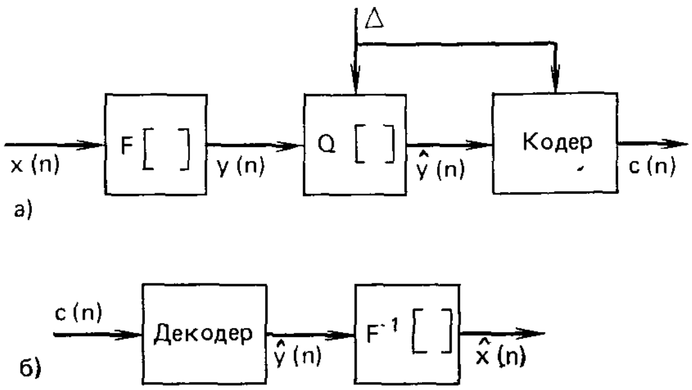


Рис. 9. Структурна схема системи компресор-експандер для квантування.

Таким чином, використовуючи великі значення коефіцієнта компресії, ми отримуємо виграш у динамічному діапазоні ціною програшу у відношенні сигнал/шум.

Контрольні запитання.

1 Що називається квантуванням сигналу та кроком квантування?

2. Сутність квантування сигналу за рівнем з використанням двійкового коду.

3. Яке квантування називається рівномірним?

4 Доповісти відмінність квантування з усіченням від квантування з округленням

5. Що називається шумом квантувателя, або помилкою квантуванн?

6. доповісти про процес компаундування сигналу

Лекція № 5. Модуляція сигналів.

ПЛАН ЛЕКЦІЇ.

1. Основні види модуляції.
2. Амплітудна модуляція. Спектри сигналів з амплітудною модуляцією
3. Частотна модуляція.
4. Фазова модуляція.
5.Спектри сигналів з кутовою модуляцією
6. Спектр прямокутного відеоімпульса

Основні види модуляції.

Для передачі інформації в радіотехніці використовуються радіохвилі - високочастотні електромагнітні коливання, які можливо ефективно випромінювати за допомогою антенних пристроїв і які здатні поширюватися в просторі. Інформація, яка передається, має бути тим або іншим способом закладена у високочастотне (що несе) коливання. Це здійснюється за допомогою модуляції.

Модуляцією називається зміна параметрів несущого коливання, за законом того повідомлення, що передається. Цей термін зазвичай застосовують для аналогових сигналів.

Стосовно цифрових сигналів існує інший термін – *маніпуляція* сигналу. Маніпуляція це в принципі та сама модуляція, але коли у нас модулюючий сигнал, тобто сигнал який потрібно передати по каналу зв'язку, має дискретний (цифровий) характер.

Оскільки у процесі модуляції змінюються інформаційні параметри несущого коливання, та назва виду модуляції залежить від змінюваного параметра цього коливання

Взагалі існують: амплітудна і кутова модуляція. Кутова, у свою чергу, підрозділяється на частотну і фазову модуляції.

Види модуляцій сигналів:

- амплітудна модуляція (АМ), відбувається зміна амплітуди несущого коливання;
- частотна модуляція (ЧМ), відбувається зміна частоти несущого коливання;

- фазова модуляція (ФМ), відбувається зміна фази несущого коливання.

Типи маніпуляцій сигналу

Амплітудна маніпуляція (рис. 1).

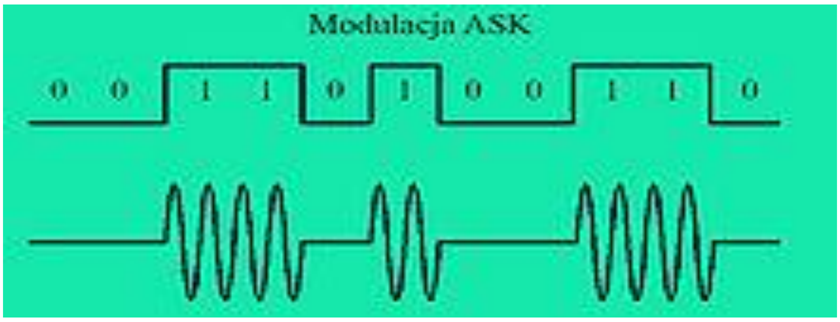


Рис. 1. Приклад амплітудної маніпуляції.

Фазова маніпуляція (рис. 2).

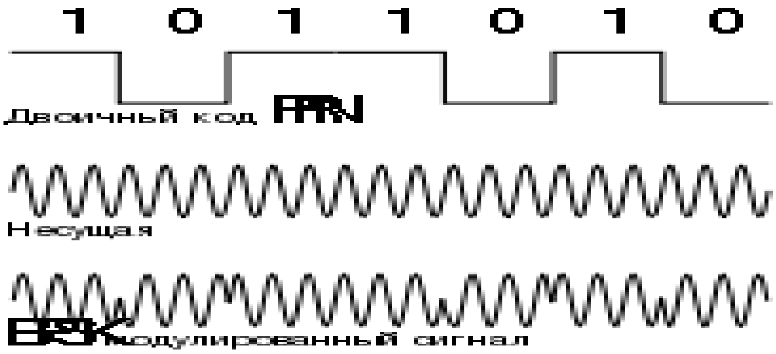


Рис. 2. Приклад фазової маніпуляції.

Частотна маніпуляція (рис. 3).

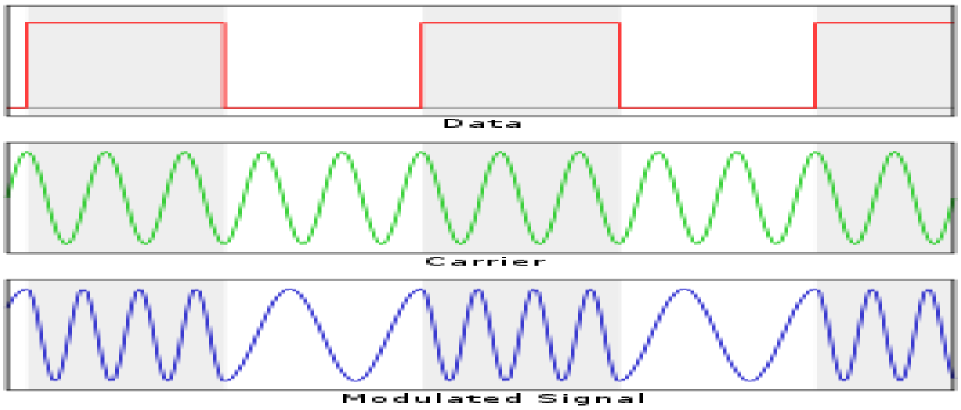


Рис. 3. Приклад частотної маніпуляції.

Типи імпульсної модуляції (маніпуляції):

- амплітудно-імпульсна модуляція (АІМ), відбувається зміна амплітуди імпульсів несущого сигналу ;
- частотно-імпульсна модуляція (ЧІМ), відбувається зміна частоти дотримання імпульсів несущого сигналу;
- фазо-імпульсна модуляція (ФІМ), відбувається зміна фази імпульсів несущого сигналу ;
- широтно-імпульсна модуляція (ШІМ), відбувається зміна тривалості імпульсів несущого сигналу.

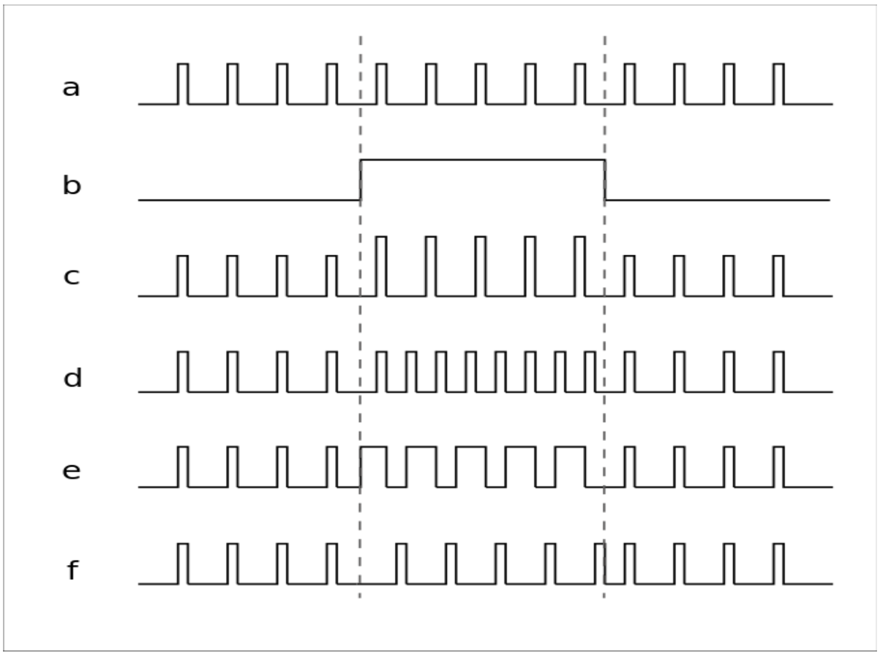


Рис. 4. Типи маніпуляцій сигналів: a — несущий сигнал; b — корисний сигнал; c — амплітудно-імпульсна модуляція; d — частотно-імпульсна модуляція; e — широтно-імпульсна модуляція; f — фазово-імпульсна модуляція.

2. Амплітудна модуляція. Спектри сигналів з амплітудною модуляцією.

Амплітудна модуляція (**АМ – amplitude modulation**) відноситься до числа найпростіших і отримавших широке застосування завдяки своїй простоті в здійсненні і використанні (рис. 5).

У радіотехніці широкого поширення набули системи модуляції, які використовують в якості несущого просте гармонійне коливання $u_{нес}(t) = U_m\ cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, у якого є три постійних параметра U_m, ω_0 і

φ_0.(рис. 5) $s(t) = S_0\, cos(\Omega t)$ – сигнал який потрібно передати по каналах зв'язку.

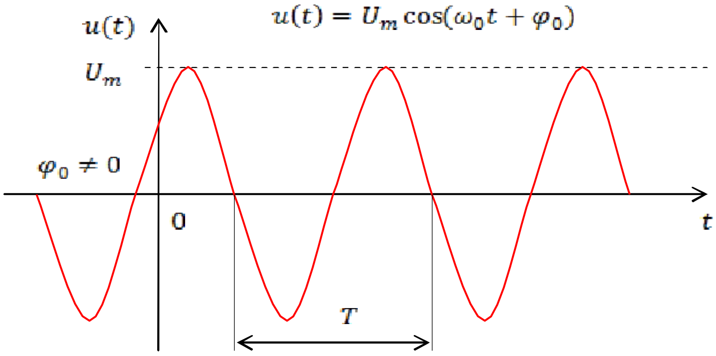


Рис. 5. Параметри несущого коливання.

АМ відповідає переносу інформації $s(t) \Rightarrow U(t)$ при постійних значеннях параметрів несучої частоти ω і фази φ. АМ - сигнал являє собою здобуток інформаційної обвідної $U(t)$ і гармонійного коливання її заповнення з більш високими частотами. Математична запис амплітудно-модульованого сигналу (рис. 6):

$$U(t) = U_m \cdot [1 + M \cdot s(t)],$$

де:

U_m - постійна амплітуда несучого коливання за відсутності вхідного (модулюючого) сигналу $s(t)$;

m - коефіцієнт амплітудної модуляції.

Значення m характеризує коефіцієнт амплітудної модуляції.

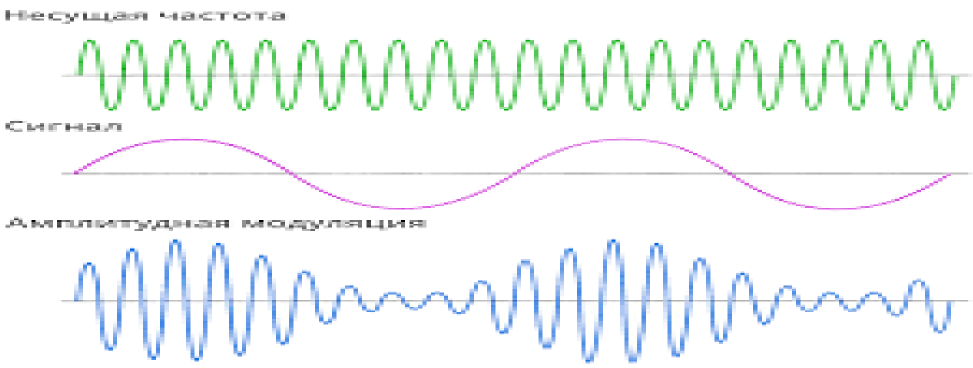


Рис. 6. Амплітудна модуляція.

У простому випадку, якщо модулюючий сигнал представлений одночастотнимгармонійним коливанням:

$$s(t) = S_0\, cos(\Omega t),$$

де:

S_0 - амплітуда коливання;

Ω, - частота коливання,

то коефіцієнт амплітудної модуляції (коефіцієнт АМ) - основна характеристика амплітудної модуляції - безрозмірна величина, чисельно рівна відношенню різниці між максимальним і мінімальним значеннями цих амплітуд промодульованого сигналу до суми цих значень виражена у відсотках (рис. 7):

$$m = 100\,(U_{макс} - U_{min})/\,(U_{макс} + U_{min})$$

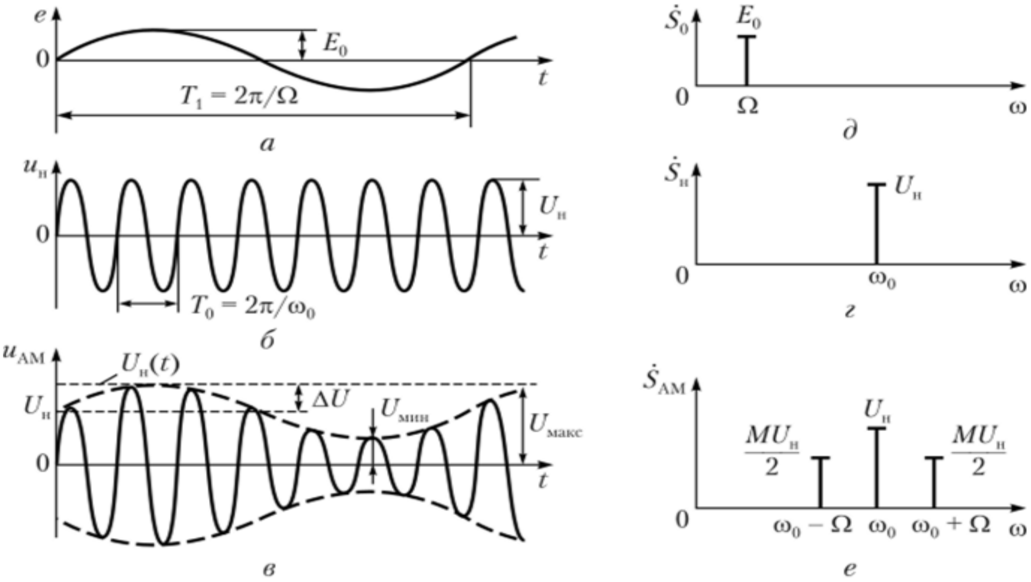


Рис. 7 (а, б, в).. Графічне зображення амплітудної модуляції

Коефіцієнт модуляції m називають також глибиною модуляції. При $0 \le m \le 1$ амплітуда АМ коливання не набуває негативних значень. Така модуляція називається неспотвореною.

При m>1 (рис. 8) значення $U_m(t)$ на деяких інтервалах часу стають негативними, що призводить до перемодуляції, пов'язаної із спотворенням коливання, що передається. Щоб уникнути цього коефіцієнт модуляції вибирають не більше одиниці.

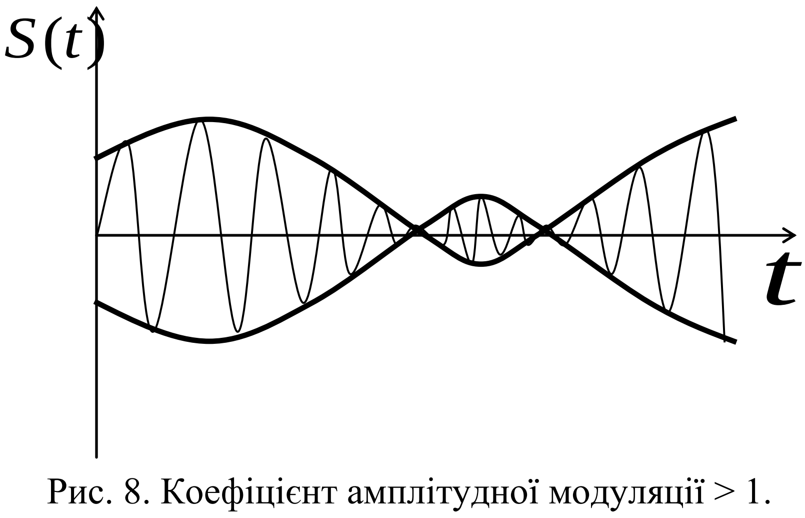


Рис. 8. Коефіцієнт амплітудної модуляції > 1.

Спектри сигналів з амплітудною модуляцією.

При гармонійній (однотональній) амплітудній модуляції скористаємося тригонометричним перетворенням - перемноження косинусів двох кутів дорівнює (рис. 9):

$$a(t) = A_{m0}[1 + m\cos(\Omega t + \phi_0)]\cos(\omega_н t + \psi_н) =$$
$$A_{m0}\cos(\omega_н t + \psi_н) + \frac{mA_{m0}}{2}\cos[(\omega_н + \Omega)t + (\psi_н + \phi_0)] +$$
$$+ \frac{mA_{m0}}{2}\cos[(\omega_н - \Omega)t + (\psi_н - \phi_0)] \quad (1)$$

Таблиця 1.

Пояснення до виразу 1.

к	$\omega_к$	U_{mk}	ψ_k
к=1 перша гармоніка	$\omega_н$ - Ω	$mA_{m0}/2$	$\psi_н - \varphi_0$
к=2 друга гармоніка	ω	A_{m0}	$\psi_н$
к=3 третя гармоніка	$\omega_н + \Omega$	$mA_{m0}/2$	$\psi_н + \varphi_0$

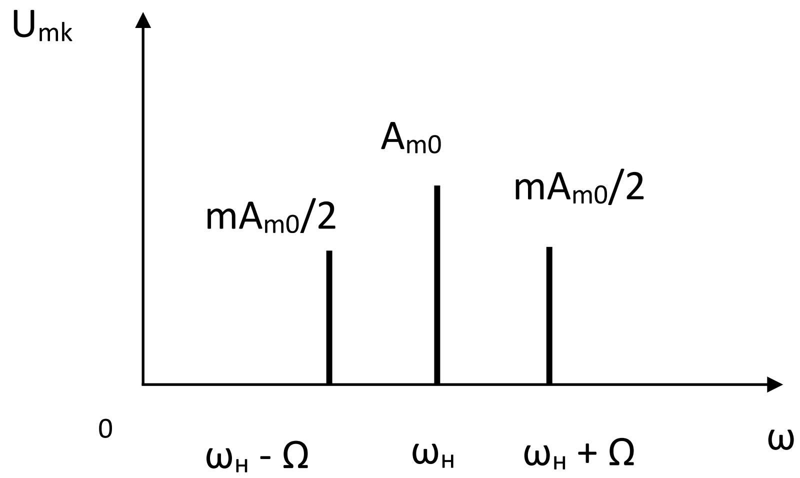


Рис. 9. Графічна інтерпретація виразу 1 (спектр АМ коливання).

Перший доданок тут представляє несуще коливання, з частотою $\omega_н$. Другий і третій доданки називаються бічними гармонійними складовими. Частоти цих коливань ($\omega_н + \Omega$) і ($\omega_н — \Omega$) називаються верхньою і нижньою бічною частотою відповідно. Амплітуди цих складових однакові і залежать від глибини модуляції, а їх фази симетричні відносно фази несущого коливання. Чим менше коефіцієнт *m,* тим менше амплітуди бічних складових, і в межі при m=0 вони відсутні.

Якщо смуга частот модулюючого сигналу обмежена зверху максимальною частотою Ω_{max}, то відповідний йому АМ сигнал буде мати спектр, ширина якого вдвічі більше:

$$\Delta\omega_C = 2\Omega_{\max}$$

Досить широкий діапазон частот, занятий АМ сигналами, є недоліком такого виду модуляції. До числа інших серйозних недоліків АМ слід віднести погану перешкодозахищеність і низьку економічність радіопередавачів. Зазначені недоліки усуваються або в значній мірі знижуються при інших видах модуляції.

Різновидом **АМ** є **SSB (Single-Sideband modulation)** - односмугова модуляція або амплітудна модуляція з однією бічною смугою, яка може бути LSB (Lower Side Band) - нижня бічна модуляція (Америка) і USB (Upper Side Band) - верхня бічна модуляція (Європа). SSB широко застосовується для ефективного використання спектра частот і потужності передавальної апаратури.

При SSB модуляції несуча і одна з бічних смуг не випромінюється, що дозволяє випромінювати сигнал у вигляді однієї бокової смуги (рис. 10).

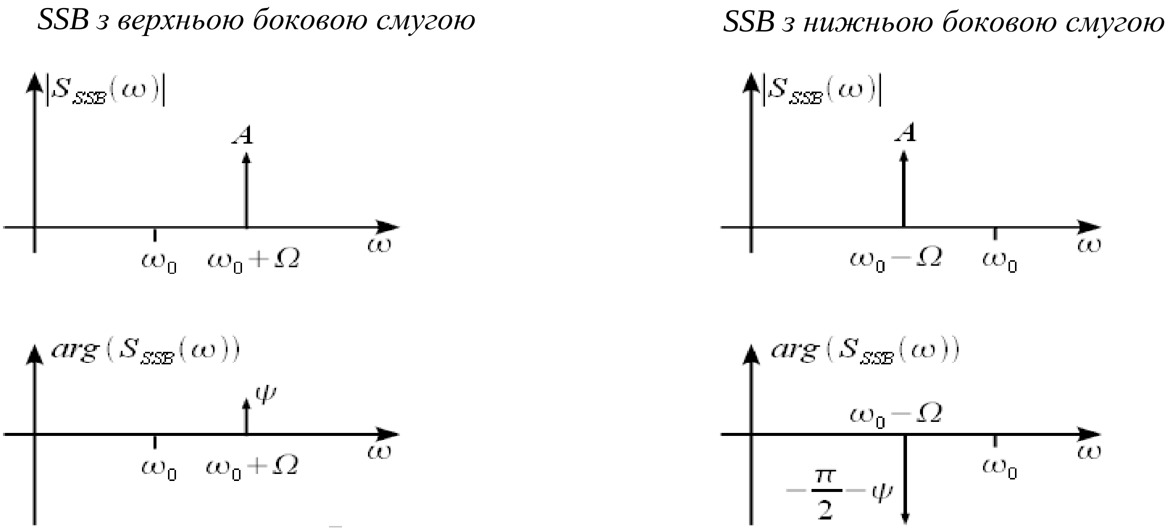


Рис. 10. Спектри SSB.

Однак переваги SSB не обмежуються тільки цим. АМ і FM станції випромінюють потужність несучої постійно, незалежно від того, вимовляєте ви перед мікрофоном звуки або мовчите. SSB станції не випромінюють ніякої потужності в паузах між словами.

3. Частотна модуляція.

Частотна модуляція **(ЧМ або FM - Frequency Modulation)** застосовується для високоякісної передачі звукового (низькочастотного) сигналу в радіомовленні (в діапазоні УКВ), для звукового супроводу телевізійних програм, передачі сигналів кольоровості, відеозапису на магнітну стрічку, музичних синтезаторах.

При ЧМ модулюючий сигнал впливає на частоту несучого коливання, яка змінюється щодо середнього рівня $\boldsymbol{\omega_н}$ (рис. 11):

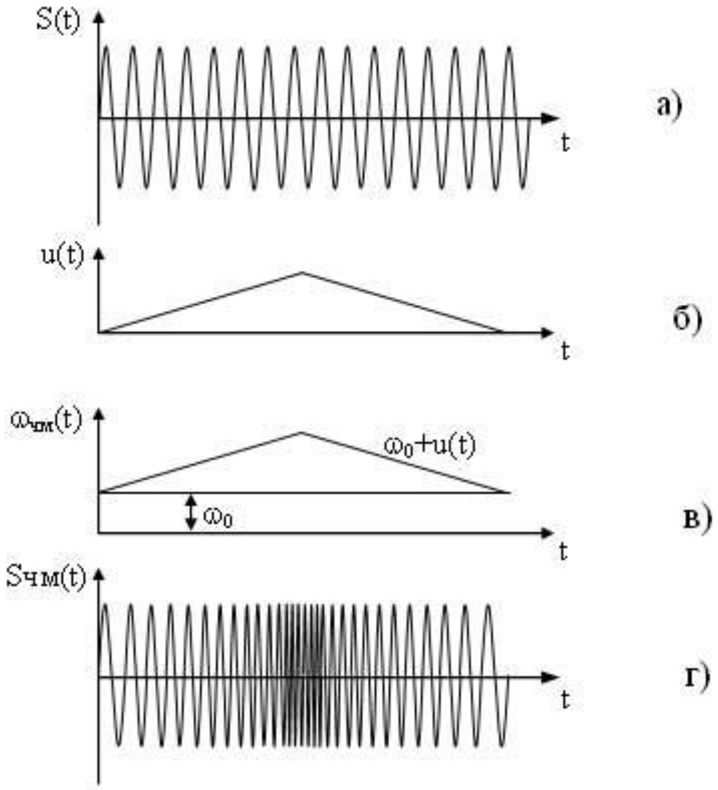
$$\omega(t) = \omega_0 + u(t)$$

де:

$\omega(t)$– миттєва кутова частота сигналу з ЧМ;

$\boldsymbol{\omega_0}$ – частота несущого коливання;

$u(t)$– модулюючий сигнал.



f = 1/T

Рис. 11. Графічне зображення ЧМ.

Математичний опис частотно-модульованих коливань у загальному випадку має вид:

$$u(t) = U_{m0}\cos\Theta(t) = U_{m0}\cos\left[\int_0^t \omega(t)dt + \psi_0\right] =$$
$$U_{m0}\cos\left[\omega_0 t + \int_0^t F(t)dt + \psi_0\right] \qquad (2)$$

Характеризується девіацією частоти *(Δω)*, яка дорівнює різниці між найбільшим значенням частоти у промодульованому сигналу та частотою несущого коливання ω_0:

$$\Delta\omega = \omega_{max.} - \omega_0.$$

При гармонійній (однотональній) частотній модуляції:

$$F(t) = \Delta\omega\cos(\Omega t + \phi_0)$$
$$\text{и } \omega(t) = \omega_н + \Delta\omega\cos(\Omega t + \phi_0) \qquad (3)$$

Після підстановки виразу (3) у вираз (2) отримуємо конкретний вираз для ЧМ коливання:

$$u(t) = U_{m0}\cos\left[\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin(\Omega t + \phi_0) + \psi_{н0}\right] \qquad (4)$$

де:

$\frac{\Delta\omega}{\Omega} = m_\omega$ носить назву індекс частотної модуляції;

Ω – частота модулюючого коливання (сигнал що треба передати).

Різновиди ЧМ.

WFM (wide FM) «Уайд» - широкосмугова частотна модуляція, з смугою сигналу 50-150 кГц. Використовується для радіомовлення зі стереозвуком і передачі звукового супроводу телебачення. Вимагає великої потужності радіопередавача.

NFM (narrow FM) «нароу»– вузькосмугова частотна модуляція, основний вид модуляції. Використовується в рухливому радіозв'язку. Смуга 3-5, іноді до 10 кГц, іноді до 25 кГц.

4. Фазова модуляція.

Розглянемо радіосигнал, який представляє собою несуче високочастотне гармонійне коливання

$$u(t) = U_{m0}\cos(\omega t + \psi)$$

Аргумент гармонійного коливання **$\Theta(t)=\omega t+\psi$** називається повною фазою і визначає поточне значення фазового кута.

При фазовій модуляції (**ФМ, phase modulation - PM)** керуючий (модулюючий) сигнал впливає на початкову фазу несучого коливання.

Початкова фаза стає змінною величиною і змінюється за законом модулюючого сигналу щодо середнього рівня $\psi_{н0}$:

$$\psi(t) = F(t) + \psi_{н0}$$

де:

$\psi_{н0}$ — постійна складова початкової фази ;

F(t)— модулюючий сигнал.

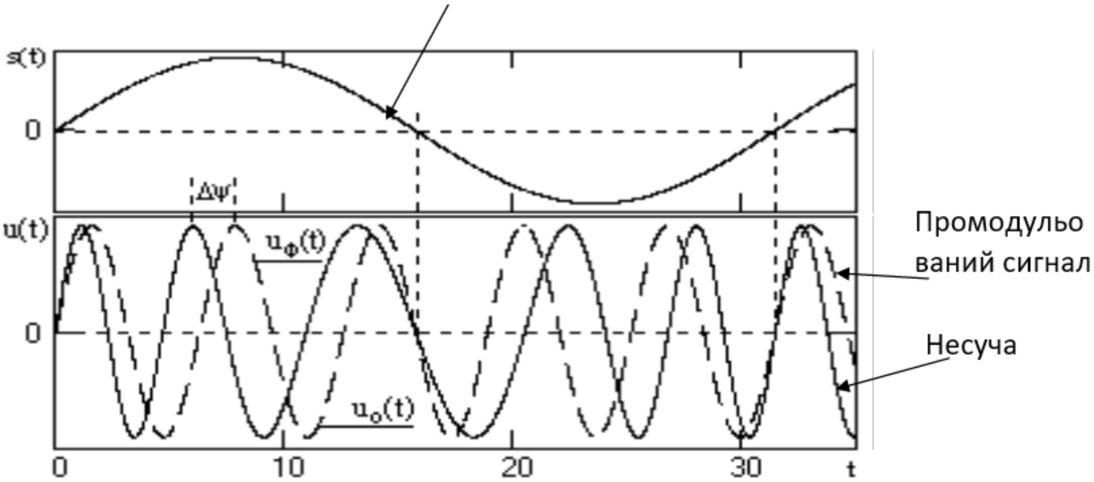


Рис. 12. Графічне зображення фазової модуляції.

Аналітично фазо-модульовані коливання в загальному з нагоди описуються рівнянням:

$$u(t) = U_{m0}\cos[\omega_н t + F(t) + \psi_{н0}] = U_{m0}\cos\Theta(t)$$

При гармонійній (однотональній) фазовій модуляції, коли:

$$F(t) = \Delta\psi\cos(\Omega t + \phi_0)$$

отримуємо:

$$u(t) = U_{m0}\cos\left[\omega_н t + \Delta\psi\cos(\Omega t + \phi_0) + \psi_{н0}\right]$$

Величина $\Delta\psi = m_\psi$ (на попередньому рис) визначає максимальне відхилення фази від величини її постійної складової $\psi_{н0}$ і називається фазовим відхиленням, девіацією фази або індексом фазової модуляції m_ψ. Величина Ω - частота модулюючої функції, φ_0 – початкова фаза модулюючої функції.

По виду сигналу з фазовою модуляцією можна зробити висновок, що зміна початкової фази викликає зміну періоду коливань, а значить, і частоти коливань (T '> T' '). Іншими словами, фазова модуляція призводить до частотної.

При кутовій модуляції амплітуда ФМ і ЧМ коливань залишається незмінною. Це підвищує економічність радіопередавачів за рахунок більш повного використання їх потужності. Крім того, внаслідок незмінності амплітуди ФМ і ЧМ сигнали більш перешкодостійкі.

5. Спектри сигналів з кутовою модуляцією.

При аналізі спектрів обмежимося розглядом найпростішого випадку кутової модуляції за гармонійним законом. Вирази ЧМ і ФМ можна звести до вигляду:

$$u(t) = U_{m0}\cos\left[\omega_н t + m\sin(\Omega t + \phi_0) + \psi_{н0}\right] \qquad (5)$$

фм

$$u(t) = U_{m0}\cos\left[\omega_н t + \Delta\psi\cos(\Omega t + \phi_0) + \psi_{н0}\right]$$

чм

$$u(t) = U_{m0}\cos\left[\omega_н t + \frac{\Delta\omega}{\Omega}\sin(\Omega t + \phi_0) + \psi_{н0}\right]$$

де:

$m = m_\omega$, при ЧМ і $m = m_\psi$ при ФМ.

З виразу (5) слідує, що спектр ЧМ або ФМ коливання навіть у випадку найпростішої гармонійної модуляції має безліч парних гармонік, що утворюють верхню і нижню бічні смуги, з частотами $\omega_н + k\Omega$, *і* $\omega_н - k\Omega$..

Тоді ширина спектра модульованого коливання складе:

$$\Delta\omega_C = 2k_{\max}\Omega = 2(m+1)\Omega,$$

або для значень $m >> 1$

$$\Delta\omega_C \approx 2m\Omega.$$

Тобто, ширина спектру при кутовій модуляції в залежності від її виду визначається девіацією фази або частоти.

При малих m амплітудно-частотні спектри ФМ, ЧМ і АМ коливань практично збігаються. Різниця в спектрах зростає при великих індексах модуляції (широкосмугова ЧС). У радіомовних систем ЧС девіація частоти зазвичай вибирається рівної 75 кГц. При частоті модуляції F = 1 кГц цьому відповідає індекс модуляції: $m_\omega = 75/1 = 75$ і ширина спектра 150 кГц. У випадку амплітудної модуляції ширина спектра буде лише 2 кГц.

Передача широкосмугових ЧМ і ФМ сигналів практично можлива тільки в діапазоні ультракоротких хвиль (УКХ).

Відмінною особливістю спектру ЧМ коливання в порівнянні з ФМ є практично незалежність його ширини від частоти модуляції. При ЧМ зі зменшенням Ω індекс модуляції $m_{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\Omega}$ збільшується пропорційно Ω, а ширина спектру:

$$\Delta\omega_c \approx 2m_{\omega}\Omega = 2\Delta\Omega$$

залишається незмінною.

У разі ж ФМ індекс модуляції m_{ψ}=Δψ не залежить від Ω. Тому зі зміною Ω число врахованих гармонік залишається незмінним, а ширина спектра змінюється:

$$\Delta\omega_C \approx 2m_{\psi}\Omega = 2\Delta\psi\Omega$$

Таким чином, ЧМ на відміну від ФМ характеризується великою постійністю спектрів сигналів, що є однією з причин кращого застосування ЧС на практиці. ФМ і ЧМ коливання в порівнянні з АМ займають більш широку смугу частот, але володіють двома важливими перевагами: високою завадостійкістю і можливістю забезпечити передачу більш потужного сигналу при рівній потужності радіопередавача,

6. Спектр прямокутного поодинокого відеоімпульсу

Нехай поодинокий відеомпульс ***u(t)*** здвинутий щодо початку координат на відрізок часу t_0 (рис. 13). Аналітично його можна представити у вигляді:

$$u(t) =$$

де:

τ_i—тривалість імпульсу.

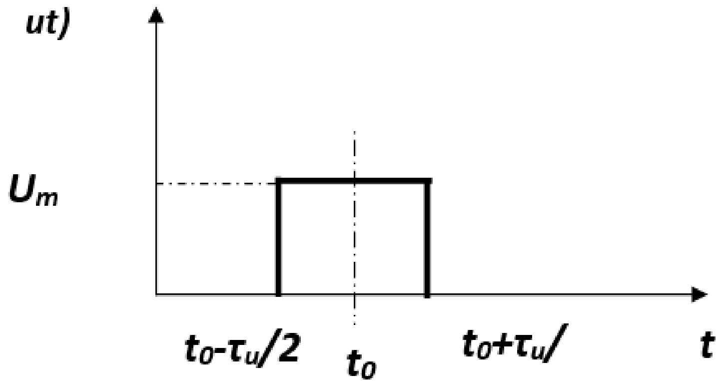


Рис. 13. Поодинокий прямокутний відеоімпульс.

Спектральну щільність сигналу знаходимо за допомогою прямого перетворення Фур'є:

$$s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{u(t)e^{-j\omega t}dt} = \boldsymbol{\frac{U_m}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Bigg|_{t_0-\frac{\tau_u}{2}}^{t_0+\frac{\tau_u}{2}}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{U_m}{j\omega}e^{-j\omega t_0}\left(e^{j\frac{\omega\tau_u}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau_u}{2}}\right) = U_m\tau_u \frac{sin\frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}}e^{-j\omega t_0}}$$

$$\boldsymbol{= U_m\tau_u \left|\frac{sin\frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}}\right| e^{-j[\omega t_0 \pm \pi(k-1)]}}$$

де:

k=1, 2, 3,… — номер арки.

Звідси отримуємо вирази для АЧС. Вираз:

$$S(\omega) = U_m\tau_u \left|\frac{\sin\frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}}\right|$$

На рисунках приведені графіки АЧС (рис. 14 а), та ФЧС (рис. 14 б):

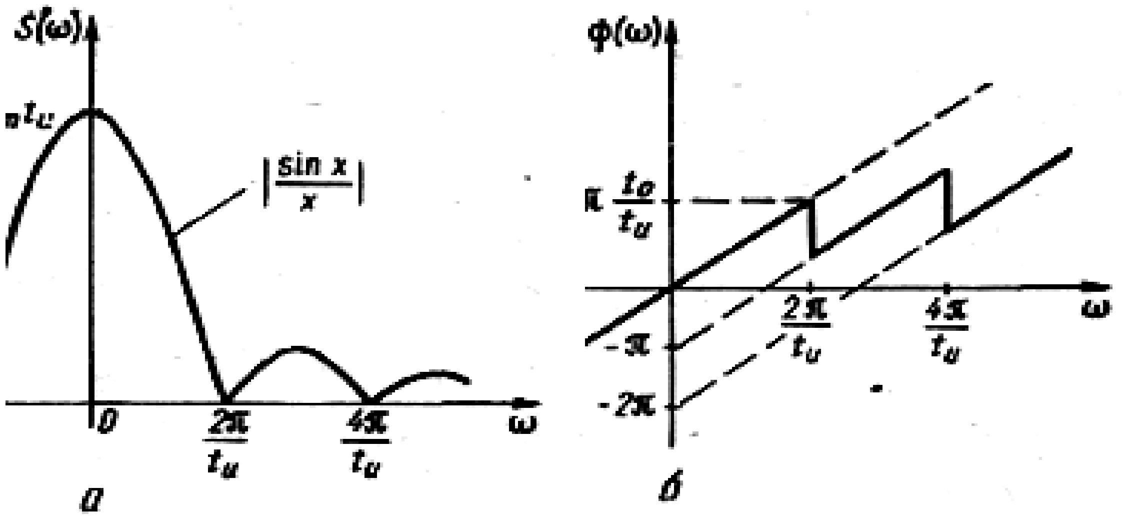


Рис. 14. АЧС (а) та ФЧС (б) поодинокого прямокутного відеоімпульсу.

Характер АЧС істотно залежить від тривалості імпульсу і не пов'язаний з його зсувом у часі. Вони збігаються з огинаючою спектрів періодичної послідовності таких же імпульсів. Аналогічної залишається і залежність амплітуди і ширини "пелюсток" від тривалості імпульсу - при збільшенні тривалості імпульсу спектр "стискається по частоті, а амплітуда" пелюсток "збільшується, і навпаки.

Контрольні запитання.

1. Що називається модуляцією сигналу. Що називається маніпуляцією сигналу
2. Назвіть види модуляції. Зобразіть графічно сигнали промодульвані по амплітуді та по частоті.
3. Назвіть види модуляцій імпульсного сигналу. Зобразіть графічно с амплітудно-імпульсну модуляцію, частотно-імпульсну модуляцію, широтно-імпульсну модуляцію.
4. Зобразити графічно вигляд амплітудно-модульованого сигналу. Яким параметром характеризується АМ сигнал. Привести формулу.
5. Привести вигляд спектру АМ коливання при використанні однотонального (гармонійного) сигналу. Пояснити його.
6. Що називається фазовою модуляцією. Чим характеризується
7. Показати сигнал типу поодинокий відеоімпульс. Привести вигляд його спектру.

Лекція № 6. Імпульсно-кодова модуляція.

ПЛАН ЛЕКЦІЇ

1. Лінійна імпульсно-кодова модуляція.
2. Диференціальна імпульсно-кодова модуляція (дельта модуляція).

1. Лінійна імпульсно-кодова модуляція.

На сьогоднішній день в нашій країні найінтенсивніше розвиваються мережі зв'язку. В умовах сучасного суспільства для успішного ведення бізнесу своєчасний швидкий і якісний обмін різного роду інформацією займає домінуючу позицію. Щоденно зростає об'єм інформації, що передається, підвищуються вимоги до якості її передачі. За останні роки з нуля було побудовано величезну кількість мереж мобільного зв'язку, що охопили майже всю територію нашої країни. Якщо кілька років тому мобільний телефон був швидше предметом розкоші, то сьогодні не можна уявити собі сучасну ділову людину, що не володіє якісним мобільним зв'язком.

Поряд з мережами мобільного зв'язку прокладаються нові кабельні магістралі, застаріла аналогова апаратура замінюється сучасною і технічно досконалішою цифровою апаратурою, розширюються ємкості мереж зв'язку, швидкість передачі і перешкодозахищеність інформації.

Останніми роками все ширше упроваджуються цифрові системи зв'язку (ЦСЗ) для передачі мови і даних. ЦСЗ дозволяють досягти високих швидкостей передачі, високої продуктивності вузлів комутації, високої завадостійкості. Найбільш відомі системи цифрової передачі телефонних сигналів за допомогою імпульсно-кодової модуляції (ІКМ). Перехід до цифрової передачі аналогових повідомлень і використання ІКМ має ряд переваг:

- системи з часовим розділенням каналів ІКМ мають вищу завадостійкість, ніж системи з частотним ущільненням і з односмуговою модуляцією, що дозволяє використовувати їх в лініях з великим рівнем шумів і значним рівнем нелінійних спотворень. Таким чином, якість передачі інформації майже не залежить від відстані і топології мережі;

- у системах з ІКМ відсутнє накопичення шумів при ретрансляції завдяки можливості регенерації сигналу і вживанню корегуючих кодів;
- дозволяють спростити комутацію сигналів, оскільки цифрова апаратура порівняно просто контролюється і вимагає мінімуму регулювальних операцій;
- системи з ІКМ легко сполучаються з електронними АТС, що дозволяє простішими методами створювати інтегральні мережі зв'язку;
- крім усього іншого системи з ІКМ економічно вигідні як при розробці, так і при виробництві.

При всіх вище перелічених перевагах у цифрових систем з ІКМ є недоліки, основним з яких є значне розширення смуги частот. При одному і тому ж числі каналів для передачі групового сигналу системі з ІКМ буде потрібно смугу частот приблизно в 15 разів більше, ніж системі з частотним ущільненням. При організації лінії зв'язку з використанням металевого кабелю зменшується довжина регенераційної ділянки, оскільки передача ведеться на вищій частоті, а при підвищенні частоти передачі зростає кілометричнє загасання в кабелі зв'язку. Проте ці недоліки компенсується перерахованими вище перевагами.

Імпульсно-кодова модуляція (ІКМ) (Pulse-code Modulation - PCM-модуляція) дозволяє представити безперервний аналоговий сигнал у формі послідовності рівновіддалених один від одного імпульсів (дискретизація за часом), амплітуда яких представлена двійковим кодом (квантування по рівню). Використовується для оцифровування аналогових сигналів перед їх передачею. Практично всі види аналогових даних (відео, голос, музика, дані телеметрії, віртуальні світи тощо) допускають вживання PCM-модуляції. Подібне перетворення дозволяє істотно підвищити надійність передачі і зберігання сигналу.

Лінійна імпульсно-кодова модуляція (Linear Pulse Code Modulation) – вид PCM у якому рівні квантування лінійно однорідні. Використовується як формат аудіо без стискування для дисків CD, DVD і Blu-ray Disc. Він забезпечує до 8 каналів об'ємного звучання при високих частотах дискретизації 48 кГц, 96 кГц і 192 кГц з розрізненням до 24 біт. Це технологія без втрат. Вона забезпечує точнішу передачу звучання джерела.

Щоб отримати ІКМ сигнал з аналогового, амплітуда аналогового сигналу вимірюється через рівні проміжки часу. Кількість оцифрованих значень в секунду (або швидкість оцифрування) кратна максимальній частоті (Гц) в спектрі аналогового сигналу.

Миттєве виміряне значення аналогового сигналу округляється до найближчого рівня з декількох заздалегідь визначених значень. Цей процес називається квантуванням, а кількість рівнів завжди береться кратною ступеню двійки, наприклад, 8, 16, 32 або 64. Номер рівня може бути відповідно представлений 3, 4, 5 або 6 бітами. Таким чином, на виході модулятора виходить набір бітів (0 або 1).

На приймальному кінці каналу зв'язку демодулятор перетворить послідовність бітів в імпульси з тим же рівнем квантування, який використовував модулятор. Далі ці імпульси використовуються для відновлення аналогового сигналу.

До складу апаратної складової ІКМ входять наступні основні вузли і блоки: Апаратура АЦП (аналогово-цифровий перетворювач) та ЦАП (цифрово-аналоговий перетворювач) (рис. 1).

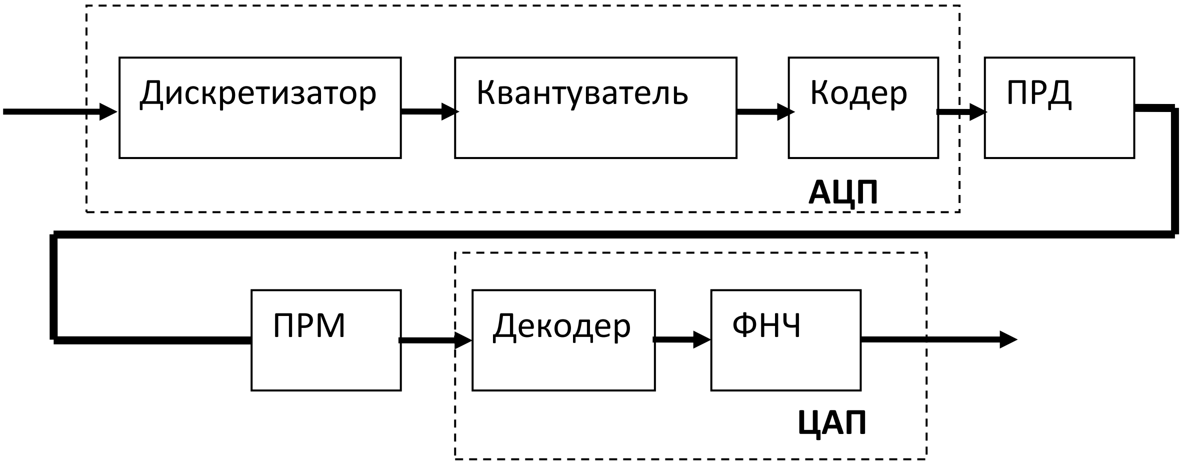


Рис. 1. Склад апаратури ІКМ.

АЦП забезпечує перетворення аналогових сигналів що приходять від абонентів зв'язку в цифрові сигнали для їх подальшого ущільнення і передачі по лінії зв'язку. На приймальній стороні ЦАП забезпечує перетворення цифрового сигналу в аналоговий для відправки до абонента.

Можуть застосовуватися мультиплексори часового группоутворення. Вони ущільнюють цифрові сигнали від різних каналів (потоків) в загальний цифровий потік. Кінцева апаратура лінійного тракту (КАЛТ) виконує завдання перекодування сигналу цифрового групового тракту в лінійний цифровий сигнал, а також завдання узгодження електричних характеристик станційного устаткування з лінією.

При виборі кроку квантування (або числа N) слід враховувати два чинника.

З одного боку, збільшення числа рівнів квантування збільшує точність передачі сигналу, з іншого – вимагає подовження кодової комбінації (n). Так для телефонної передачі встановлено, що задовільна якість передачі досягається при ***N≈100***, тобто при семизначному коді. На рис.2 представлено тимчасові діаграми, що пояснюють роботу апаратури ІКМ.

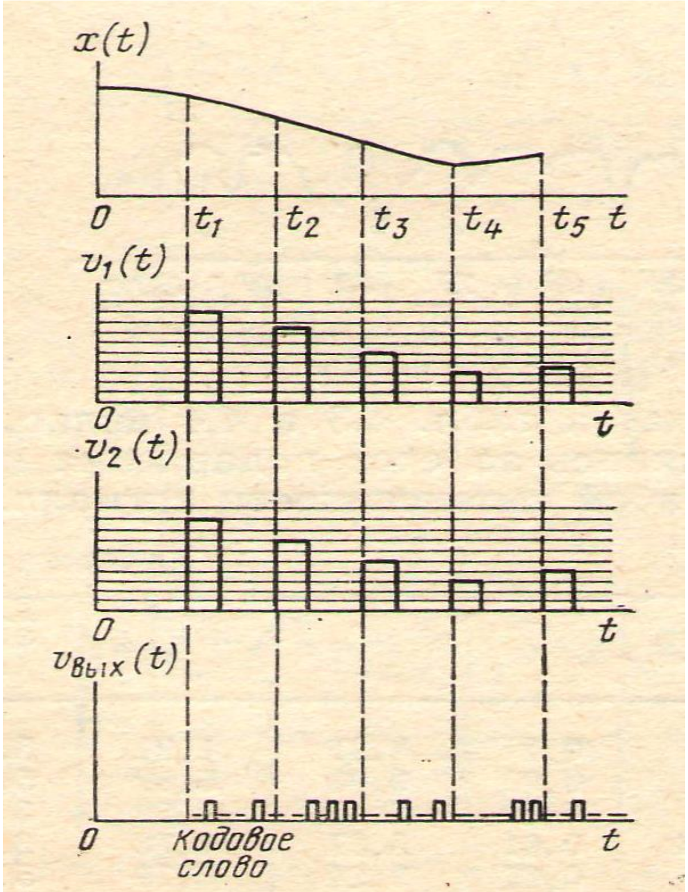


Рис. 2. Часові діаграми сигналів, що сформовані в схемі кодера з ІКМ.

На виході кодера формуються кодові слова, приписані кожному відліковому значенню мовного сигналу. Часто кодер джерела при ІКМ називають ІКМ-модулятором.

Різновидами ІКМ є:

- диференціальна (або дельта) імпульсно-кодова модуляція (ДІКМ) кодує сигнал у вигляді різниці між поточним і прогнозуємим значенням. Для звукових даних такого типу модуляції зменшує необхідну кількість біт на відлік приблизно на 25 %.

- адаптивна ДІКМ (АДІКМ, ADPCM) є різновидом ДІКМ, яка змінює рівень кроку квантування, що дозволяє ще більше зменшити вимоги до смуги пропускання при заданому співвідношенні сигналу і шуму.

На рис. 3 графічно представлено принцип функціонування дінійної ІКМ.

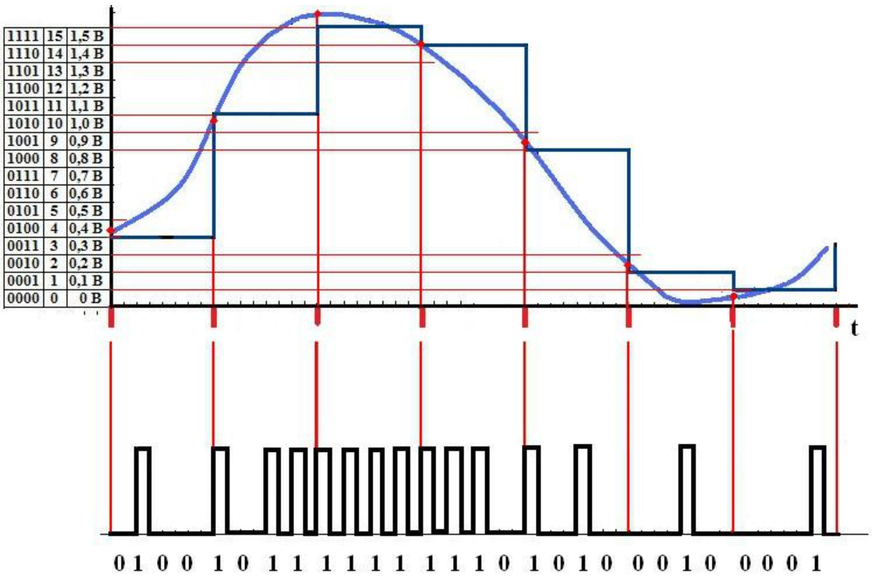


Рис. 3. Принцип функціонування лінійної ІКМ.

2. Диференціальна імпульсно-кодова модуляція (дельта модуляція).

При передачі мови, телевізійних зображень, даних телеметрії між відліками передаваних повідомлень є кореляційні зв'язки. Наявність таких взаємозв'язків дозволяє прогнозувати значення відліків, виходячи із значень попередніх відліків. При дельта-імпульсно кодовій модуляції (ДІКМ) квантується не відлік, а різниця між прогнозуємим $\boldsymbol{\lambda_v^*}$ і поточним $\boldsymbol{\lambda_v}$ значеннями відліку.

Послідовність відліків вхідного сигналу $\boldsymbol{\lambda_v}$ подають на один з входів віднімаючого пристрою (рис. 4), а на його інший вхід поступає сигнал передбачення $\boldsymbol{\lambda_v^*}$, сформований з попередніх відліків. ($\boldsymbol{\lambda_v^*}$ найбільш вірогідне значення вхідного сигналу в $\boldsymbol{n}$-й тактовий момент, прийняте на основі відліків сигналу до ($\boldsymbol{n}$-$\boldsymbol{1}$) - го тактового моменту включно із статистичних відомостей вхідного сигналу. Окремим випадком провісника (предсказателя) є інтегруючий RC-ланцюг, з параметром $1/RC \approx \Delta F_c$ на рівні 0.5).

Отриманий таким чином сигнал помилки передбачення поступає в тракт передачі (канал зв'язку). Оскільки в сигналі помилки якраз і містяться нові відомості, то такий спосіб передачі називається передача з передбаченням. На приймальній стороні (рис. 4) є такий же провісник, як і на передавальній.

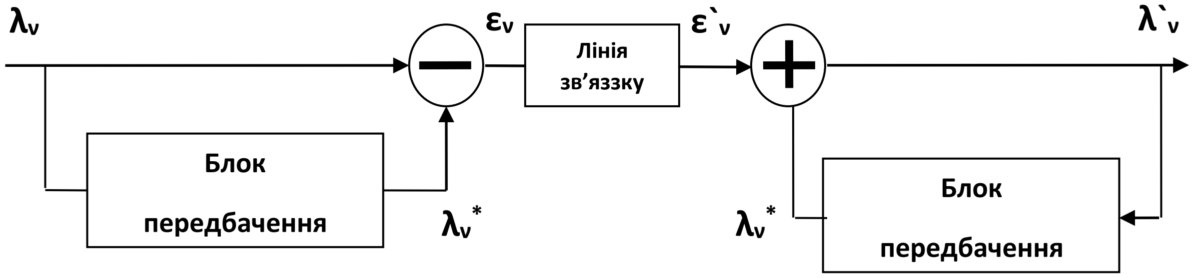


Рис.4. Структурна схема системи з ДІКМ.

Оскільки він оперує з тими ж попередніми відліками, то передбачене ним значення нового відліку λ_v^* буде таким же, як і на передавачі. Додавши до нього набутого значення помилки передбачення, можна відновити дійсний відлік: $\bar{\lambda}_v = \bar{\lambda}_v^* + \bar{\varepsilon}_v$

При ДМ каналом зв'язку передається не абсолютне значення сигналу, а сигнал різниці між вихідним аналоговим сигналом і апроксимуючою напругою (пилкообразний сигнал).

Основна відмінність між варіантами технічної реалізації ДІКМ, полягає в операціях формування різницевого сигналу. У одних системах він формується в аналоговій формі, а потім квантується і кодується, в інших - повідомлення перетворюється на цифрову форму і всі операції виконуються в цифровому вигляді.

Переваги. Оскільки в системі зв'язку з ДІКМ по каналу зв'язку передається не само повідомлення, а помилка його передбачення, то для забезпечення однакової з ІКМ якості передачі потрібне менше число розрядів коду.

Недоліки ДІКМ:

1. Специфічна помилка, пов'язана з “перевантаженням по нахилу”. Вона виникає при швидкій зміні повідомлення, коли різницевий сигнал більший, ніж можна передати за допомогою кодової комбінації.
2. Існує ефект, пов'язаний з “накопиченням“ помилок, оскільки помилковий прийом кодової комбінації супроводжується помилкою прийому не лише даного, але і подальших відліків.

Схема ДІКМ з ланцюгом зворотнього зв’язку. Перевага реалізації з ланцюгом зворотного зв'язку полягає в тому, що при цьому помилки квантування не накопичуються необмежено. Якщо сигнал в ланцюзі зворотного зв'язку відхиляється від вхідного в результаті накопичення помилок квантування, то при наступній операції кодування різницевого сигналу це відхилення автоматично компенсується. У системі без зворотного зв'язку (рис. 5) вихідний сигнал, що формується декодером на протилежному кінці лінії, може необмежено накопичувати помилки квантування.

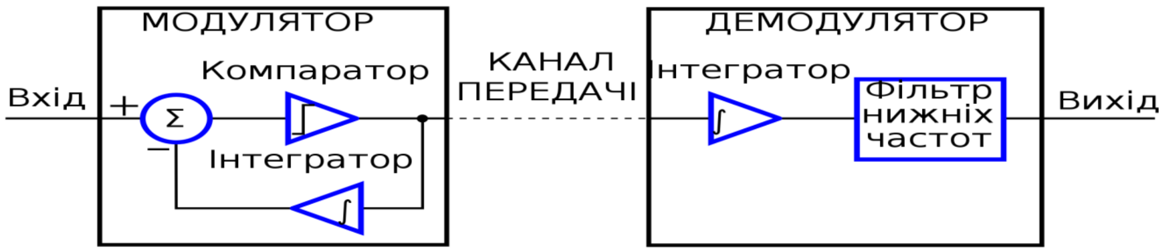


Рис. 5. Структурна схема ДІКМ без ланцюга зворотнього зв'язку.

Варіанти реалізації ДІКМ.

Кодери і декодери диференціального ІКМ можуть бути виконані безліччю способів залежно від розділення функцій обробки сигналу між аналоговими і цифровими ланцюгами. У одному крайньому випадку функції диференціювання і інтеграції можуть бути реалізовані за допомогою аналогових ланцюгів, тоді як в іншому крайньому випадку вся обробка сигналів може бути виконана цифровим способом, а на вхід поступають дискрети у формі звичайного ІКМ сигналу.

На рис. 6 представлені структурні схеми трьох різних варіантів реалізації з різним об'ємом цифрової обробки сигналу. На рис. 6,а намальована система з аналоговим диференціюванням і інтеграцією. Аналого-цифровому перетворенню піддається різницевий сигнал, а цифро-аналоговому в ланцюзі зворотного зв'язку — безпосередньо код різниці, що має обмежений діапазон.

На рис. 6б представлена система, яка виконує інтегрування в цифровій формі. Код різниці замість безпосереднього перетворення знову в аналогову форму в ланцюзі зворотного зв'язку піддається тут підсумовуванню і накопичується в регістрі для здобуття цифрового представлення попереднього вхідного дискрету. Потім для здобуття з ланцюга зворотного зв'язку аналогового сигналу, вживаного для віднімання, використовується ЦАП на повний динамічний діапазон сигналу. Відзначимо, що ЦАП на рис.8,б повинні забезпечувати перетворення повного діапазону амплітуд дискретів, тоді як ЦАП на рис. 8,а перетворять більш обмежені по амплітуді сигнали різниці.

На рис. 8,в представлена система, де вся обробка сигналу виконується за допомогою цифрових логічних схем. Аналого-цифровий перетворювач формує кодові комбінації, відповідні дискретам з повним амплітудним діапазоном, які порівнюються з апроксимаціями кодових комбінацій попереднього дискрету, отриманими цифровим способом.

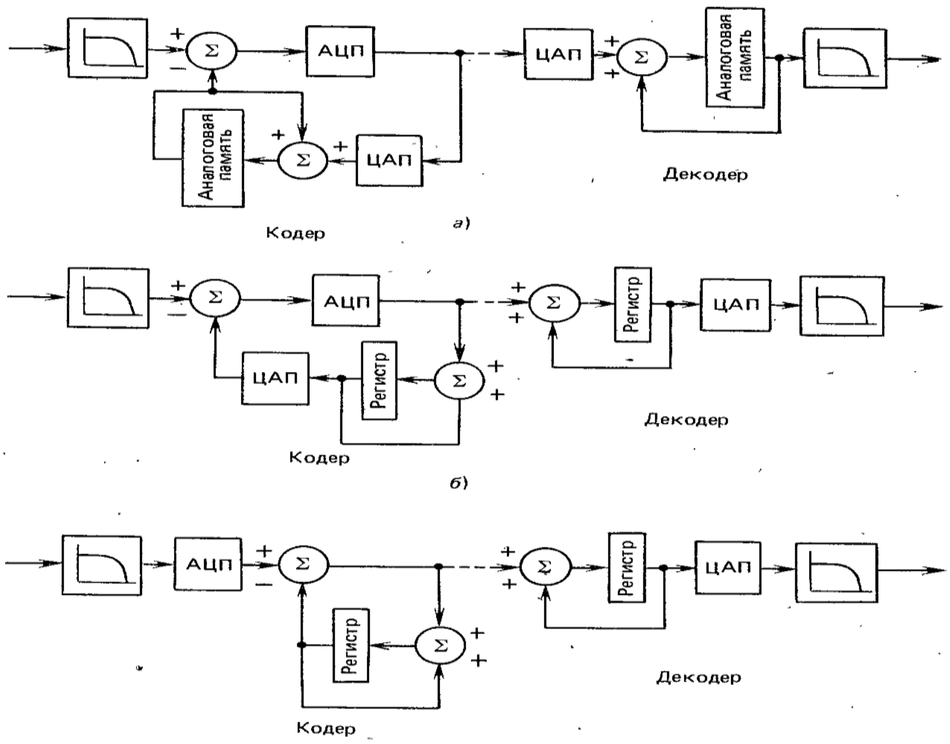


Рис. 8 - Варіанти реалізації ДІКМ: *а*- аналогове інтегрування; *б* — цифрове інтегрування; *в* – цифрове диференціювання.

Відзначимо, що в цьому випадку АЦП повинен формувати кодові комбінації у всьому динамічному діапазоні вхідних сигналів, тоді як АЦП в двох інших варіантах обробляють лише різницеві сигнали. Переваги цифрових варіантів обробки полягають у тому, що цифрові схеми не вимагають налаштування, а також придатні до реалізації у вигляді інтегральних мікросхем з великою мірою інтеграції (БІС).

Декодери у всіх трьох варіантах, показаних на рис. 8, реалізуються точно так, як і ланцюги зворотного зв'язку відповідних кодерів. Це пов'язано з тим, що в ланцюзі зворотного зв'язку формується апроксимація вхідного сигналу (затриманого на один період дискретизація). Якщо в каналі не відбуваються помилки, то сигнал на виході декодера (перед фільтрацією) ідентичний сигналу в ланцюзі зворотного зв'язку.

Таким чином, чим точніше сигнал в ланцюзі зворотного зв'язку повторює вхідний сигнал, тим точніше сигнал на виході декодера повторює вхідний сигнал.

ДІКМ з передбаченням вищого порядку

Із загальнішої точки зору ДІКМ-кодер являє собою особливого роду лінійний провісник з кодуванням і передачею помилок передбачення. Сигнал в ланцюзі зворотного зв'язку системи з ДІКМ є передбаченням **першого порядку** значення наступної дискрети, а різниця між значеннями дискретів є помилкою передбачення.

З цієї точки зору концепцію ДІКМ можна розширити так, щоб включити в ланцюг передбачення значення більш ніж однієї попередньої дискрети. За рахунок цього додаткова надмірність, витягувана зі всіх попередніх дискретів, може бути зважена і підсумована для здобуття кращої оцінки значення наступної вхідної дискрети.

У зв'язку з поліпшеною оцінкою діапазон помилок передбачення зменшується, що дає можливість кодувати з меншим числом розрядів. Для систем з постійними коефіцієнтами передбачення велика частина виграшу, що реалізовується, досягається, коли використовуються значення лише трьох останніх дискретів. Типовий варіант кодера з лінійним передбаченням на основі значень трьох останніх дискретів, показаний на рис. 7.

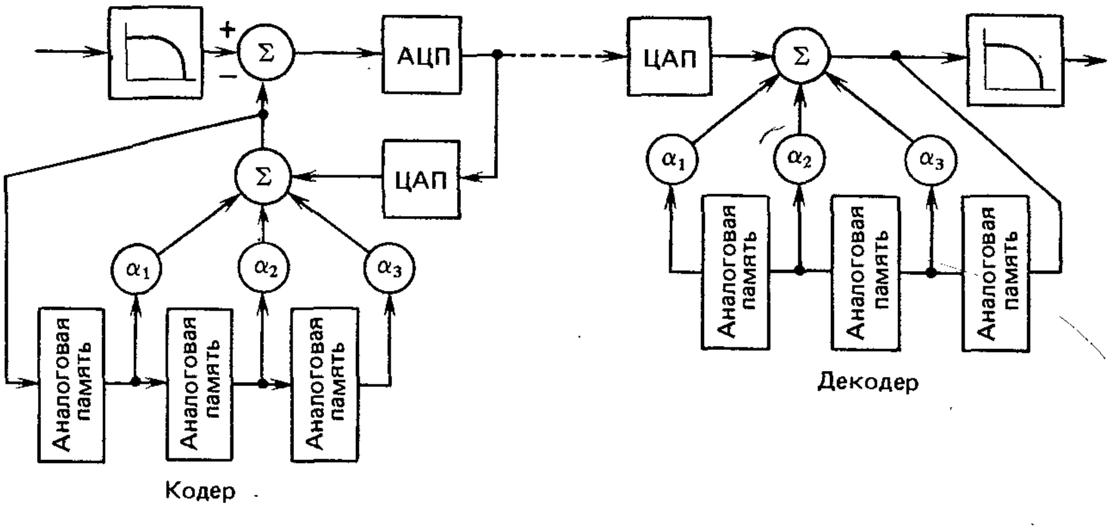


Рис. 7. Система ДІКМ з трьома порядками передбачення.

У цьому варіанті застосовується аналогова інтеграція, як показано на рис. 6,а для стандартної ДІКМ.

Природно, що можливі також варіанти з більшою долею цифрової обробки сигналу, як на рис. 6б і 6в.

При аналізі систем з ДІКМ і передбаченням першого порядку зазвичай виходить зменшення довжини кодової комбінації, відповідною дискретою, на один розряд у порівнянні з її довжиною в системах з ІКМ при еквівалентних показниках систем. У системах з ДІКМ з передбаченням третього порядку може бути досягнуте зменшення на 2 розряди на дискрету.

Таким чином, звичайна система з ДІКМ може забезпечити ту ж якість, що і система з ІКМ із швидкістю передачі 64 кбіт/с, при швидкості передачі 56 кбіт/с, а в системі з передбаченням третього порядку можна отримати порівнянну якість при швидкості передачі 48 кбіт/с.

Хоча описані тут способи ДІКМ можуть відчутно зменшити швидкість передачі, їх використання в телефонному зв'язку загального користування невелике по двох причинах. По-перше, ІКМ-системи із швидкістю передачі 64 кбіт/с завоювали тверді позиції системи, здатні забезпечити бажану якість. По-друге, дельта-модуляція, що є особливим випадком ДІКМ, дає порівнянну якість і набагато простіше реалізується. У міру розробки великих інтегральних схем, для складніших алгоритмів кодування значення відмінностей в реалізації буде зменшуватися. На рис. 8 представлено графічне зображення принципу ДІКМ.

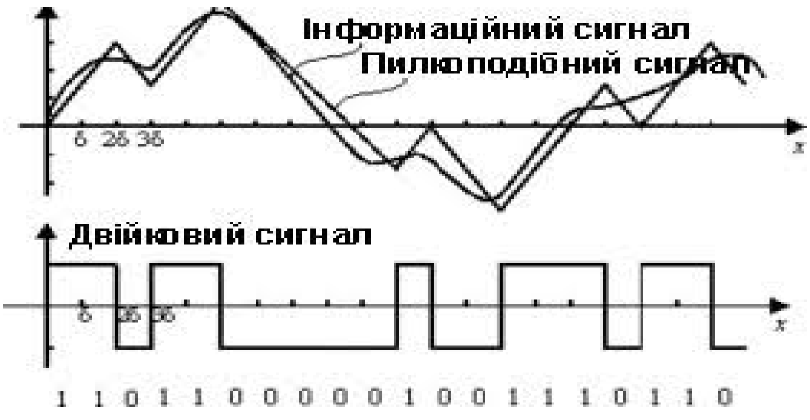


Рис. 8. Принцип дельта модуляції.

У кожний момент відліку перетворюємий сигнал порівнюється з пилоподібною напругою на кожному кроці дискретизації. Пилоподібна напруга надходить з інтегратора, який замикає ланцюг зворотного зв'язку дельта-модулятора. Таким чином, сигнал, що надходить у суматор, порівнюється зі значенням сигналу в кінці попереднього кроку дискретизації. Якщо в момент порівняння поточна величина сигналу перевищує миттєве значення пилкоподібної напруги (вихідна напруга інтегратора), то останнє наростає до наступної точки дискретизації, інакше вона спадає. У найпростішій системі модуль швидкості зміни пилкоподібної напруги зберігається незмінним у процесі перетворення. Отриманий бінарний сигнал можна розглядати як похідну від пилкоподібної напруги. Вибираючи досить малим значення кроку, можна отримати будь-яку задану точність подання сигналу.

Контрольні запитання.

1. Назвати переваги та недоліки цифрової передачі аналогових повідомлень
2. Визначення імпульсно-кодової модуляції.
3. Намалювати схему апаратури імпульсно-кодової модуляції та пояснити принцип дії.
4. Що таке диференційна ІКМ. Її переваги та недоліки
5. Чим відрізняється система ДІКМ з передбаченням вищого порядку від ДІКМ з передбаченням першого порядку (переваги, кратко принцип дії).

Лекція № 7. Лінійна система та її властивості.

ПЛАН ЛЕКЦІЇ

1. Лінійна система.
2. Імпульсна характеристика лінійних систем.
3. Перетворення Лапаласа. Z – перетворення.
4. Кореляція сигналів. Згортка сигналів.

1. Лінійна система.

Перетворення і обробка сигналів здійснюється в системах. Поняття сигналу і системи нерозривні, так як любий сигнал існує в будь-якій системі його звернення. Система обробки сигналів може бути реалізована як у *матеріальній формі* (спеціальний пристрій, вимірювальний прилад і т.п.), так і *програмно на ЕОМ* або на будь-якому іншому обчислювальному пристрої. Існують і комплексні вимірювально-обчислювальні системи (ІОС), які виконують як реєстрацію та первинну обробку сигналів безпосередньо в матеріальній формі їх подання, так і перетворення сигналів в цифрову форму, і подальшу програмну обробку. Форма реалізації систем істотного значення не має і визначає тільки їх можливості при аналізі і обробці сигналів. Основна увага при розгляді даної теми будемо приділятися цифровим системам і дискретної математики їх відображення та аналізу, застосовуючи аналітичну математику при розгляді загальних питань, якщо останнє спрощує виклад і розуміння теоретичного матеріалу.

Загальні поняття дискретних систем.

Під дискретною системою розумітимемо технічний пристрій або програму, яка здійснює перетворення дискретної послідовності ***x(n)*** в іншу дискретну послідовність ***y(n)*** відповідно до заданого алгоритму (рис. 1).

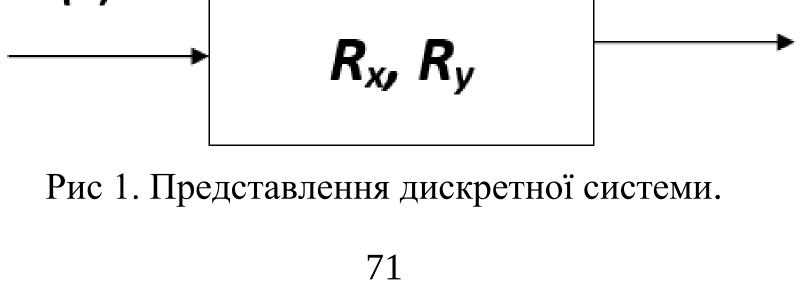


Рис 1. Представлення дискретної системи.

Незалежно від призначення і виконання система завжди має вхід, на який подається вхідний сигнал або вхідний вплив, в загальному випадку багатовимірний, і вихід, з якого знімається оброблений вихідний сигнал. Якщо пристрій системи і внутрішні операції перетворень принципового значення не мають, то система в цілому може сприйматися як "чорний ящик", в формалізованому вигляді. Алгоритм перетворення вхідної послідовності ***x(n)*** у вихідну послідовність ***y(n)*** описується співвідношенням:

$$R_y[y(n)]=R_x[x(n)]$$

де:

R_x, R_y – оператори.

По вигляду оператора *R* дискретні системи ділять на:

- лінійні або нелінійні;
- стаціонарні або нестаціонарні;
- що фізично реалізовуються (**каузальні**) або не реалізовуються (**не каузальні**).

Вхідний сигнал системи може являти собою *m* - мірний вектор (m вхідних сигналів), а вихідний сигнал n - мірний вектор, при цьому система буде мати m входів і n виходів.

Для детермінованих вхідних сигналів співвідношення між вихідними і вхідними сигналами однозначно задається системним оператором. У разі реалізації на вході системи випадкового вхідного процесу також існує однозначна відповідність процесів на виході і вході системи, однак при цьому одночасно відбувається зміна статистичних характеристик вихідного сигналу (математичного очікування, дисперсії, кореляційної функції та ін.), яке також визначається системним оператором.

Для визначення системи необхідно задати характер, тип і області допустимих величин вхідних і вихідних сигналів. Будь-які перетворення сигналів супроводжуються зміною їх спектру і за характером цих змін поділяються на два види: лінійні і нелінійні. До нелінійних відносять зміни, при яких в складі спектра сигналів з'являються нові гармонійні складові. При лінійних змінах сигналів змінюються амплітуди і / або початкові фази гармонічних складових спектру. Обидва види змін можуть відбуватися як зі збереженням корисної інформації, так і з її спотворенням. Це залежить не тільки від характеру зміни спектра сигналів, але і від спектрального складу найкориснішої інформації.

Лінійні системи складають основний клас систем обробки сигналів. Термін лінійності означає, що система перетворення сигналів повинна мати довільну, але в обов'язковому порядку лінійний зв'язок між вхідним сигналом (збудженням) і вихідним сигналом (відгуком). У нелінійних системах зв'язок між вхідним і вихідним сигналом визначається довільним нелінійним законом. Система вважається лінійною, якщо в межах встановленої області вхідних і вихідних сигналів її реакція на вхідні сигнали аддитивна (виконується принцип суперпозиції сигналів) і однорідна (виконується принцип пропорційного подібності).

Властивості лінійної системи..

Лінійність. Дискретна система називається лінійною тоді і лише тоді, якщо її оператор ***R*** володіє наступними властивостями *аддитивності і однорідності:*

1) $R[x_1(n)+x_2(n)]=R[x_1(n)]+R[x_2(n)]$ *для будь яких* $x_1(n)$ *і* $x_2(n)$;
2) $R[\alpha \cdot x(n)]=\alpha \cdot R[x(n)]$ *для будь яких* α *і* $x(n)$.

Ці властивості можна записати у вигляді однієї умови:

$$R[\alpha \cdot x_1(n)+\beta \cdot x_2(n)]=\alpha \cdot R[x_1(n)]+\beta \cdot R[x_2(n)] \, . \tag{1}$$

Згідно (1) реакція лінійної системи на складну дію дорівнює сумі реакцій на окремі дії, узятих з тими ж коефіцієнтами $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$.

Стаціонарність. Дискретна система називається стаціонарною (інваріантною в часі), якщо її параметри не змінюються в часі. При цьому дана дія, подана на вхід системи, завжди приводитиме до однієї і тієї ж реакції незалежно від часу надавання дії. Математично це означає завдання системи рівняннями типу з постійними значеннями коефіцієнтів a_j і b_i і реакція системи на будь-який вплив не залежить від часу (координат) його застосування. В іншому випадку система є нестаціонарною або параметричною (системою зі змінними параметрами). Серед останніх велике значення мають так звані адаптивні системи обробки даних. У цих системах виробляється, наприклад, оцінювання певних параметрів вхідних і вихідних сигналів, за результатами порівняння яких здійснюється підстроювання параметрів перетворення (перехідної характеристики системи) таким чином, щоб забезпечити оптимальні по продуктивності умови обробки сигналів або мінімізувати похибку обробки.

Фізична реалізованість. Фізично реалізованою називається система, у якої реакція в даний момент часу не залежить від значень дії в подальші моменти. Наприклад, система, що описується оператором: ***y(n)=0.2·x(n−1),*** буде такою, що фізично реалізовується, оскільки для визначення ***y(n)*** використовується значення вхідної послідовності ***x(n)*** в попередній момент часу.

Система, оператор перетворення якої описується виразом:

$$y(n)=0.2\cdot x(n+1),$$

є такою, що фізично не реалізовується. У такій системі для розрахунку вихідної послідовності ***y(n)*** потрібні майбутні значення вхідної послідовності ***x(n).***

Відгук лінійної системи на зважену суму вхідних сигналів повинен бути рівний зваженій сумі відгуків на окремі вхідні сигнали незалежно від їх кількості і для будь-яких вагових коефіцієнтів, в тому числі комплексних. При програмній реалізації лінійних систем на ЕОМ особливих труднощів із забезпеченням лінійності в розумних межах значень вхідних і вихідних сигналів, як правило, не виникає. При фізичній (апаратній) реалізації систем обробки даних діапазон вхідних і/або вихідних сигналів, в якому забезпечується лінійність перетворення сигналів, завжди обмежений і повинен бути спеціально обумовлений в технічній документації або методичної інструкції.

Передавальною функцією *H(z)* дискретної системи називається відношення **z** -зображення вихідної послідовності ***y(n)*** до **z** -зображення вхідної послідовності ***x(n)*** за нульових початкових умов:

$$H(z) = \frac{Z\{y(n)\}}{Z\{x(n)\}} = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

де:

z зображення – представлення послідовності імпульсів у комплексному вигляді, тобто перехід від часового опису дискретної послідовності до комплексного вигляду.

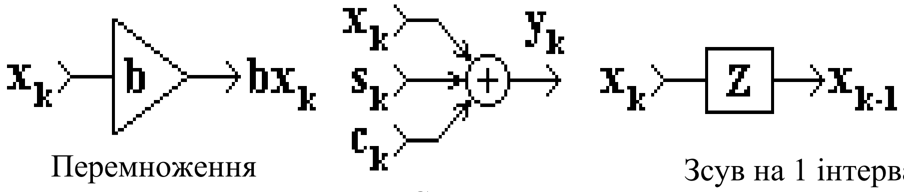
Основні системні операції. До базових лінійних операцій, з яких можуть бути сформовані будь-які лінійні оператори перетворення, відносяться операції скалярного множення, зсуву (затримка цифрової послідовності на 1 інтервал) і складання сигналів:

$$y(k) = b\ x(k),$$

$$y(k) = x(k-1),$$

$$y(k) = x(k) + s(k) + c(k).$$

Графічне відображення операцій (цифрова форма) наведено на рис. 2.



Перемноження на коефіцієнт

Складання

Зсув на 1 інтервал

Рис. 2. Графічне зображення системних операцій.

Інваріантність систем до зрушення. Система називається інваріантною до зрушення (інваріантною в часі, а так само по будь-яких інших аргументах), якщо зсув вхідного сигналу по аргументах викликає відповідний зсув вихідного сигналу:

$$s(x,t) = T[a(x,t)],\ T[a(x-\Delta x,t-\Delta t)] = s(x-\Delta x,t-\Delta t).$$

Лінійність і інваріантність до зрушення є незалежними властивостями систем і не визначають один одного. Так, наприклад, операція квадратування сигналу (зведення в квадрат всіх значень сигналу) інваріантна до зрушення, але нелінійна.

У теорії аналізу і обробки даних основне місце займають системи, лінійні і інваріантні до зсуву (ЛІС - системи). Вони мають досить широкі практичні можливості при відносній простоті математичного апарату. Надалі, якщо це спеціально не обмовляється, будемо мати на увазі саме такі системи.

Перевага, яка віддається ЛІС - системам в методах обробки інформації, базується на можливості розкладання вхідного сигналу будь-який, як завгодно складної форми, на складові найпростіших форм, *відгук системи на які відомий і добре вивчений,* з подальшим обчисленням вихідного сигналу у вигляді суми відгуків на всі складові вхідного сигналу. Як найпростіші форми розкладання сигналів використовуються, як правило, поодинокі імпульси і гармонійні складові. Перша застосовується при поданні сигналу в динамічній формі і використовує перетворення **згортки**, друга - частотне подання сигналу **і перетворення Фур'є.**

Іншою важливою особливістю ЛІС - систем є те, що будь-які їх комбінації також є ЛІС - системами, а будь-яку складну ЛІС - систему можна розкласти на комбінації простих систем. Так, наприклад, при послідовному (каскадному) з'єднанні систем, коли вихідний сигнал однієї системи служить вхідним сигналом для другої і т.д., утворена система в цілому також є ЛІС - системою, якщо лінійні і інваріантні до зсуву всі системи, які в неї входять , при цьому по відношенню до загальної системної операції перетворення порядок з'єднання входять до неї систем значення не має.

2. Імпульсна характеристика системи.

Якщо на вхід лінійної системи в момент часу t = 0, тобто при нульових початкових умовах, подати одиничний імпульс (дельта функція **Дірака** для аналогової системи, або функцію **Кронекера** для цифрової системи) то на виході ми отримаємо реакцію системи на одиничний вхідний сигнал. Ця реакція називається функцією імпульсного відгуку системи або **імпульсною характеристикою.**

Дельта функція Дірака – ідеалізоване поняття у математиці - одиничний імпульс нескінчено короткий у часі і нескінчено великої амплітуди (рис. 3):

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty \text{ при } t = 0 \\ 0 \text{ при } t \neq \infty \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) d(x) = 1$$

$$f = 1/T$$

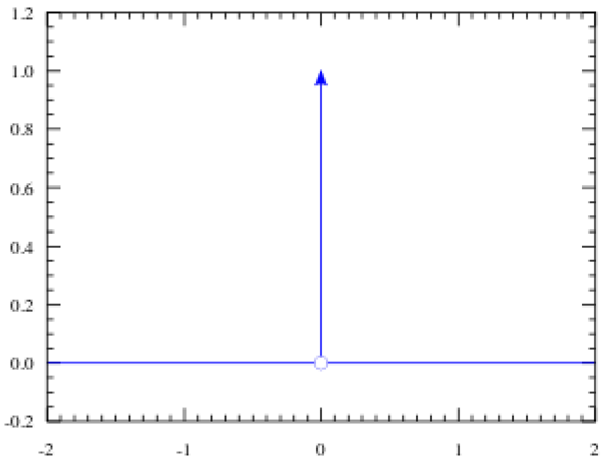


Рис. 3. Графічне зображення дельта функції як лінії з якої виступає стрілка.

Висота стрілки відображає число, яке можна розцінювати як площу під графіком функції.

Імпульсний відгук системи (цифрового фільтра). За визначенням, імпульсною характеристикою системи (цифрового фільтра) (другий широко використовуваний термін - імпульсний відгук систем) називається функція **h** (kΔt) для цифрових систем, яка є реакцією (відгуком) системи на одиничний вхідний сигнал: ***імпульс кронекера*** *δ(kΔt)*, що надходять на вхід систем відповідно при t = 0 і k = 0 (рис. 3). Ця реакція однозначно визначається оператором перетворення:

$$y(t) = T[\delta(t - 0)] = h(t); \tag{1}$$

$$y(k\Delta t) = T[\delta(k\Delta t - 0)] = h(k\Delta t), \tag{2}$$

де:

T — лінійний оператор.

Вираз (1) для аналогових систем, вираз (2) для цифрових систем.

Функцію імпульсного відгуку називають також імпульсною характеристикою системи (рис. 4).

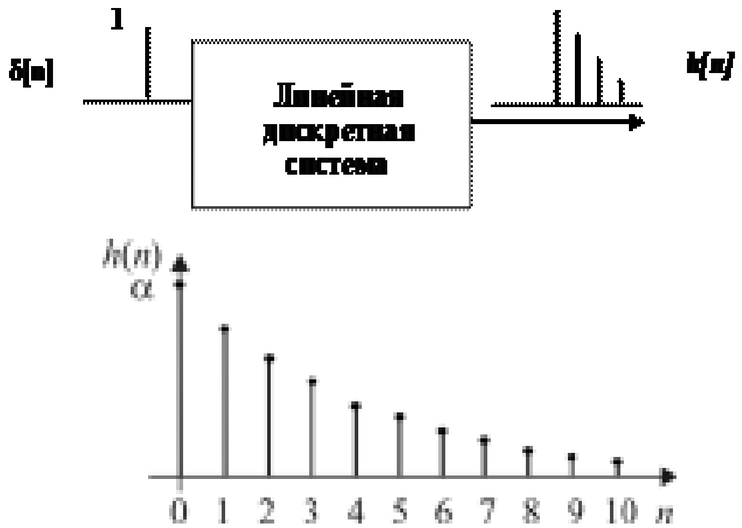
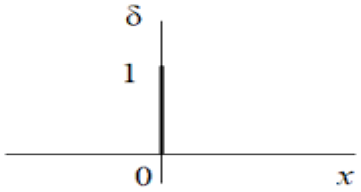


Рис. 4. Імпульсна характеристика цифрового фільтру.

Функція Кронекера. Для дискретних і цифрових систем у якості одиничного імпульсу використовується дискретний інтегральний аналог дельта-функції Дірака - функція одиничного відліку *d(kΔt-nΔt),,* яка дорівнює 1 у координатній точці *k* = *n*, і нулю у всіх інших точках, при цьому функція *d(kΔt-nΔt)* визначена лише для цілих значень координат *k* та. В математиці, функція Кронекера (названа на честь Леопольда Кронекера) - це функція двох змінних, зазвичай просто невід'ємних цілих чисел. Функція дорівнює 1, якщо змінні рівні, та 0 в іншому випадку (рис. 5):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$



$$\delta(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

Рис. 5. Функція Кронекера.

3. Перетворення Лапласа. Z-перетворення.

Перетворення Лапласа (S перетворення) - інтегральне перетворення, що зв'язує функцію *F(s)* комплексного змінного s (s = σ + jω) (зображення) з функцією *f(t)* речового змінного (оригінал). З його допомогою досліджуються властивості динамічних систем та вирішуються диференціальні та інтегральні рівняння.

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

Функцію *f(t)* називають оригіналом у перетворенні Лапласа, а функцію *F(s)* називають зображенням функції *f(t).*

При цьому пряме перетворення Фур'є може розглядатися як перетворення Лапласа, обчислене на уявній осі в **s**-площині:

X(ω)=X(s=jω).

В зв'язку із цим, у літературі часто можна зустріти позначення для Фур'є-спектра – ***X(jω)***, в якому є вказівка на те, що це спектр саме неперервного сигналу.

В теорії дискретних лінійних систем замість ***s*** - перетворення Лапласа широко використовується поняття ***Z*** - **перетворення дискретного сигналу** (перетворення Лорана):

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

$$Z(x(t))=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, z^{-n}$$

де:

T – період дискретизації, сигналу.

Z - перетворення має сенс, для тих значень комплексної змінної **z**, при яких ряд збігається.

Z перетворення лінійне, завдяки чому воно успішно використовується при описі лінійних дискретних систем.

Вихідна послідовність може бути відновлена за допомогою оберненого Z - перетворення:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X\,(z)z^{n-1}dz,$$

де:

C – замкнутий контур, що охоплює всі особливі точки функції **$X(z)z^{n-1}$**

4. Кореляція сигналів. Згортка сигналів.

Кореляція (correlation) – є методом аналізу сигналів. Цей математичний апарат знайшов застосування в обробці зображень у сфері комп'ютерного зору або дистанційного зондування з супутників, у яких порівнюються дані з різних зображень, у радарних або гідроакустичних установках для дальнометрії та місцевизначення, у яких порівнюються передані та відбиті сигнали. При обробці сигналів, *у радіолокації наприклад*, під терміном «кореляція» розуміють порівняння невідомого сигналу (сигналу з невідомими параметрами) з відомим еталонним сигналом для визначення ступеня їх схожості в залежності від неузгодженості (зміщення) одного щодо іншого.

Кореляція дозволяє визначити ступінь незалежності одного процесу від іншого або встановити подібність одного набору даних до іншого. Кореляція також є невід'ємною частиною процесу згортки, що, по суті, та ж кореляція двох послідовностей даних, при обчисленні якої одна з послідовностей звернена в часі. Це означає, що для обчислення кореляції та згортки можуть використовуватися ті ж самі алгоритми.

Для двох послідовностей $\{x_k\}$ і $\{y_k\}$ довжини N , оцінка їх взаємної кореляції здійснюється за формулою

$$\rho_{xy}(n) = \frac{r_{xy}(n)}{\sqrt{r_{xx}(0)\cdot r_{yy}(0),}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2,...$$

де $r_{xx}(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2,\ r_{yy}(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k^2,\ r_{xy}(n)$ – оцінка взаємної коваріації, що знаходиться за формулою

$$r_{xy}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{k+n}.$$

Автокореля́ція - іноді відома як послідо́вна кореля́ція, у випадку дискретного часу — це кореляція сигналу із затриманою копією самого себе як функція від затримки. Автокореляційна функція — залежність взаємозв'язку між функцією (сигналом) та її здвинутою копією від величини часового зсуву. Аналіз автокореляції — це математичний інструмент для пошуку повторюваних закономірностей, таких як наявність періодичного сигналу, заекранованого шумом, або визначення відсутньої основної частоти в сигналі, на яку натякають його гармонічні частоти. Його часто використовують у обробці сигналів для аналізу функцій або рядів значень, таких як сигнали часової області.

Для детермінованих сигналів автокореляційна функція сигнала визначається інтегралом:

$$\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t-\tau)\, dt$$

та показує зв'язок сигналу (функції) $f(t)$ з копією самого себе, зсунутого на величину τ. Зірочка означає комплексне спряжене.

Існує кілька способів розрахунку відклику системи на довільний вхідний сигнал. Найбільш розповсюджений спосіб розрахунку полягає в тому, що ми обчислюємо значення кожної точки в результуючому сигналі як зважену суму певної множини сусідніх точок вихідного сигналу. Коефіцієнти цієї суми збігаються з імпульсною характеристикою лінійної системи, розгорнутої відносно точки 0. Звідси й береться формула згортки функції $f(n)$ та імпульсної характеристики $g(n)$ для дискретних сигналів:

$$f(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, g(n-k)$$

Розглянута операція отримання результуючого сигналу по вхідному називається згорткою (compression). Отже, будь-яка лінійна система здійснює згортку вхідного сигналу зі своєю імпульсною характеристикою. Це записується так:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Функція $h[n]$ називається *ядром згортки* або імпульсною характеристикою лінійної системи, а його розмір (ядра) за кількістю відліків - *вікном оператора* згортки.

Зазвичай всі сигнали, що обробляються на ЕОМ, мають кінцеву тривалість (тобто відмінні від нуля лише на кінцевому відрізку).

Розглянемо, що відбувається з сигналом кінцевої тривалості, коли його згортають з кінцевим ядром згортки. Нехай сигнал *x[n]* відмінний від нуля тільки на відрізку від 0 до N-1 включно («має довжину К»). Нехай ядро згортки *h[n]* відмінне від нуля на відрізку від $-m_1$ до m_2 включно, що складається з М точок ($M = m_1 + m_2 + 1$). Тоді при підстановці цих сигналів в рівняння згортки, отримаємо сигнал $y[n]$, який відрізняється від нуля на відрізку від $-m_1$ до $N-1+m_2$ включно. Таким чином, довжина результуючого сигналу дорівнює $N+M-1$, тобто сумі довжин вихідного сигналу і ядра згортки мінус один. Отже, операція згортки розширює сигнал на *M-1* точку, де *M* – довжина ядра згортки.

Властивості згортки:

1. Закон комутативності: $x[n]*y[n]=y[n]*x[n]$ (тобто можна переставляти місцями вихідний сигнал і ядро згортки);

2. Закон асоціативності: $(x[n]*y[n])*z[n]=x[n]*(y[n]*z[n])$(тобто замість того, щоб проводити згортку по черзі в різних системах, можна отримати систему з ядром ($y[n]*z[n]$), яка є суперпозицією систем $y[n]$ і $z[n]$).

3. Закон дистрибутивності: $x[n]*y[n]+x[n]*z[n]=x[n](y[n]+x[n])$.

Теорема згортки. Згортка в часовій області еквівалентна множенню в частотній області; множення в часовій області еквівалентно згортці в частотній області. Це означає, що для виконання згортки двох сигналів можна перевести їх в частотну область, помножити їх спектри і перевести їх назад в часову область. Така операція виглядає громіздко. Однак з появою алгоритмів швидкого перетворення Фур'є, що дозволяють швидко обчислювати перетворення Фур'є, обчислення згортки через частотну область стало широко використовуватися. При значних довжинах ядра згортки такий підхід дозволяє в сотні разів скоротити час обчислення згортки.

Обчислення згортки і кореляції лежить в основі кореляційного методу придушення перешкод. Сутність такого методу полягає у використанні розходження між кореляційними функціями сигналу та завади. Даний метод ефективний лише у випадку обробки періодичних або квазіперіодичних сигналів. Графічне зображення техніки виконання операції згортки представлено на рис. 6.

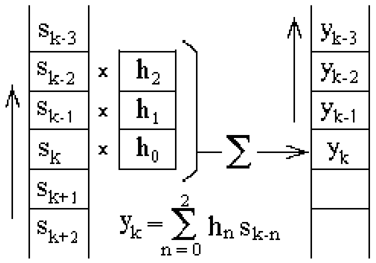


Рис. 6. Графічне зображення техніки виконання операції згортки.

Для обчислення згортки масив однією з функцій (s_k - вхідного або згортається сигналу) розташовується по ходу зростання номерів. Масив другий функції (більш короткого оператора h_n), будується паралельно першому масиву в зворотному порядку (в режимі зворотного часу, по ходу зменшення номерів першого масиву). Для обчислення y_k значення h_0 розташовується проти s_k, все значення s_{k-n} перемножуються з розташованими проти них значеннями h_n і підсумовуються. Результати підсумовування є вихідним значенням функції y_k, після чого оператор h_n зсувається на один номер k вперед (або функція s_k зсувається йому назустріч) і обчислення повторюється для номера k + 1 і т.д (рис. 7).

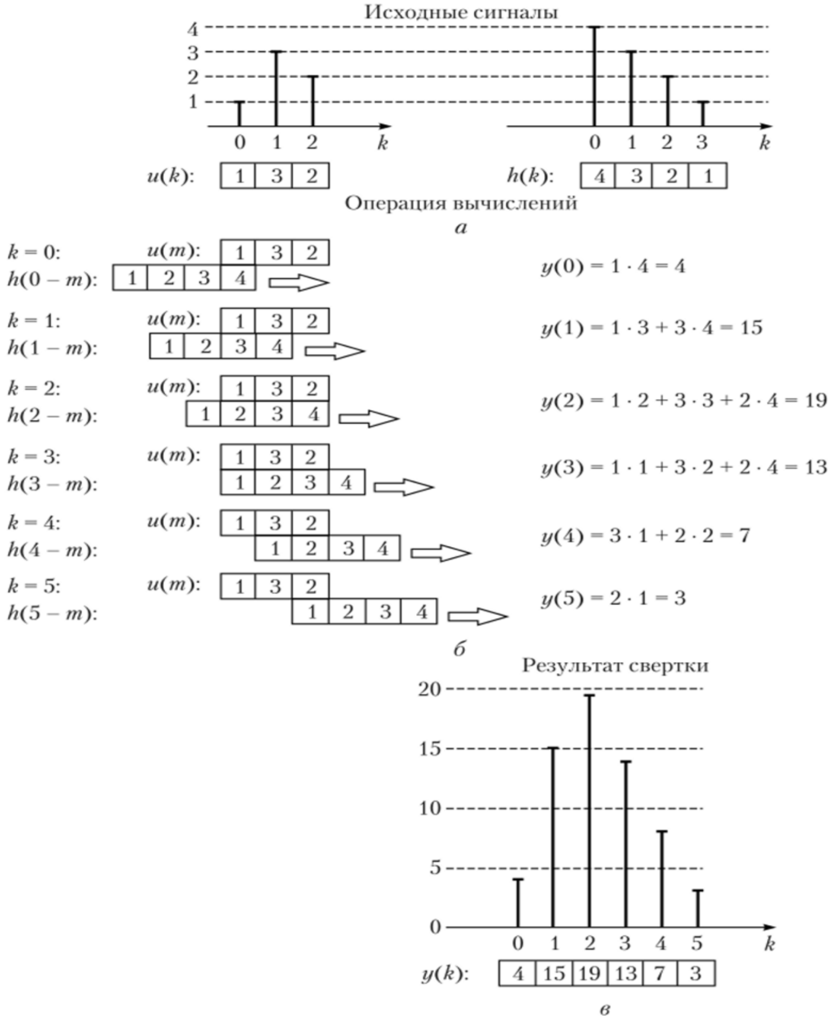


Рис. 7 Практичне виконання операції згортка.

Контрольні запитання.

1. Що називається дискретною системою. Як класифікуються дискретні системи.
2. Чим відрізняється лінійна система від нелінійної
3. Доповісти властивість лінійності системи.
4. Доповісти властивість стаціонарності системи.
3. Пояснити властивість фізичної реалізуємості та нереалізуємості системи.
4. Назвати основні системні операції лінійних систем.
5. Пояснити властивість інваріантність систем до зрушення**.**
6. Доповісти про дельта функцію Дірака та функцію Кронекера.
7. Що називається імпульсною характеристикою системи.
8. Що називається перетворенням Лапласа?
9. Що називається перетворенням Лорана?
10. Охарактеризувати кореляцію та взаємокореляцію функцій
11. Пояснити операцію згортки двох функцій

Лекція № 8. Цифрові фільтри.

ПЛАН ЛЕКЦІЇ

1. Цифрові фільтри
2. Типи цифрових фільтрів
3. Характеристики цифрових фільтрів
4. Синтез цифрового фільтра

1. Цифрові фільтри

Під електричним фільтром зазвичай розуміють систему, що одні частоти пропускає, а інші затримує. Однак у техніці цифрової обробки сигналів поняття фільтра трактується більш широко.

Дискретним фільтром називають довільну систему обробки дискретного сигналу, що має властивості лінійності й стаціонарності.

Існують також фільтри зі змінними параметрами, наприклад, адаптивні фільтри, що змінюють свої параметри залежно від статистичних властивостей вхідного сигналу.

У загальному випадку, фільтр змінює в спектрі сигналу і амплітуди гармонік, і їх фази. Однак фільтри можна проектувати так, щоб вони не змінювали фазу сигналу. Такі фільтри називаються фільтрами з лінійною фазою.

Це означає, що якщо вони і змінюють фазу сигналу, то роблять це так, що всі гармоніки сигналу зсуваються за часом на одну й ту ж величину. Таким чином, фільтри з лінійною фазою не спотворюють фазу сигналу, а лише зсувають весь сигнал у часі.

Сьогодні цифрові фільтри застосовуються практично всюди, де потрібна обробка сигналів, зокрема у спектральному аналізі, обробці зображень, обробці відео, мови та звуку і багатьох інших випадках.

Переваги та недоліки.

Перевагами цифрових фільтрів перед аналоговими є:

- висока точність (точність аналогових фільтрів обмежена допусками на елементи).
- на відміну від аналогового фільтру передаточна функція не залежить від дрейфу характеристик елементів.
- гнучкість налаштування, легкість зміни.

- компактність — аналоговий фільтр на дуже низьку частоту (долі герца, наприклад) вимагав би надзвичайно громіздких конденсаторів або індуктивностей.

Недоліки.

Недоліками цифрових фільтрів у порівнянні з аналоговими є:

- важкість роботи з високочастотними сигналами. Смуга частот обмежена частотою Найквіста, рівною половині частоти дискретизації сигналу. Тому для ВЧ сигналів застосовують аналогові фільтри, або, якщо на високих частотах немає корисного сигналу, спочатку придушують високочастотні складові за допомогою аналогового фільтру, потім обробляють сигнал цифровим фільтром.
- важкість роботи в реальному часі — обчислення мають бути завершені протягом періоду дискретизації.
- для більшої точності та високої швидкості обробки сигналів потрібен не тільки потужний процесор, але і додаткове, апаратне забезпечення у вигляді високоточних та швидких ЦАП і АЦП.

Терміном цифровий фільтр називають апаратну або програмну реалізацію математичного алгоритму, входом якого є цифровий сигнал, а виходом – інший цифровий сигнал, форма якого і/або амплітудна та фазова характеристики спеціальним чином модифіковані.

В аналогових системах під фільтром розуміють деякий лінійний пристрій зі спеціальною частотною характеристикою ***K(jω)***, який перетворює вхідний сигнал ***s(t)*** у вихідний ***y(t)*** (рис. 1), придушуючи певні частоти у спектрі вхідного сигналу. Вихідний сигнал ***y(t)*** знаходиться як згортка вхідного сигналу ***s(t)*** і імпульсної характеристики фільтра ***h(t)***:

$$y(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\, h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, s(t-\tau) d\tau \qquad (1)$$

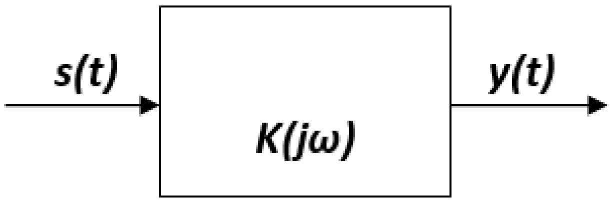


Рис. 1. Аналоговий фільтр.

Цифровим фільтром — в електроніці називається будь-який фільтр, що обробляє цифровий сигнал з метою відокремлення та/або придушення певних частот цього сигналу.

Цифровий фільтр (ЦФ) перетворює послідовність відліків вхідного сигналу $\{s_k\}$ у числову послідовність вихідного сигналу $\{y_k\}$. Для ЦФ також вводять поняття імпульсної характеристики $\{h_k\}$, що є реакцією ЦФ на «одиничний імпульс (скачок)» тобто.

Імпульсну характеристику $\{h_k\}$ ЦФ можна трактувати як результат дискретизації безперервної імпульсної характеристики $h(t)$ відповідного аналогового фільтра- прототипу (рис. 2).

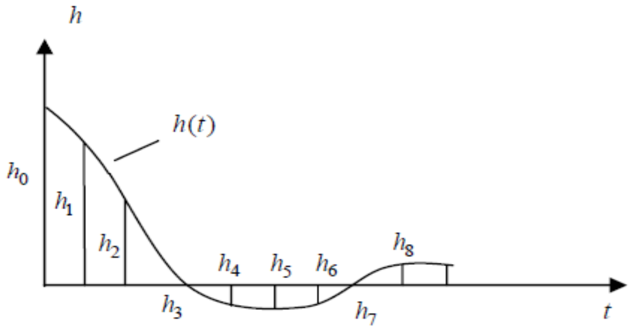


Рис. 2. Дискретизація імпульсної характеристикию.

2. Типи цифрових фільтрів.

Лінійна дискретна система задається композіцєю наступних трьох елементів:

Сумматор відліків: y(kT)=x1(kT) + x2(kT);

Помножувача на постійний коефіцієнт A: y(kT)=Ax(kT);

Лінії затримки на один такт дискретизації: y(k)=y(k-1).

Вихідний сигнал $y(k)$ фільтра, залежить від декількох відліків вхідного сигналу $x(k)$. У загальному випадку при обчисленні вихідного відліку може використовуватися також деяка кількість попередніх відліків вихідного сигналу. Для фільтрів, що не використовують вихідні відліки, рівняння фільтрації має вигляд:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{m} b_i x_{(k-i)}$$

Такі фільтри називаються нерекурсивними або трансверсальними. Кількість відліків m називається порядком фільтра. Структурна схема нерекурсивного фільтра показана на рис. 3. Імпульсна характеристика нерекурсивного фільтра визначається його коефіцієнтами $\boldsymbol{h(k) = b_m}$. Так як в реальному пристрої кількість ліній затримки обмежено, а отже, і кількість коефіцієнтів, нерекурсивні фільтри відносять до класу КІХ - фільтрів (з кінечною імпульсною хараетнристикою).

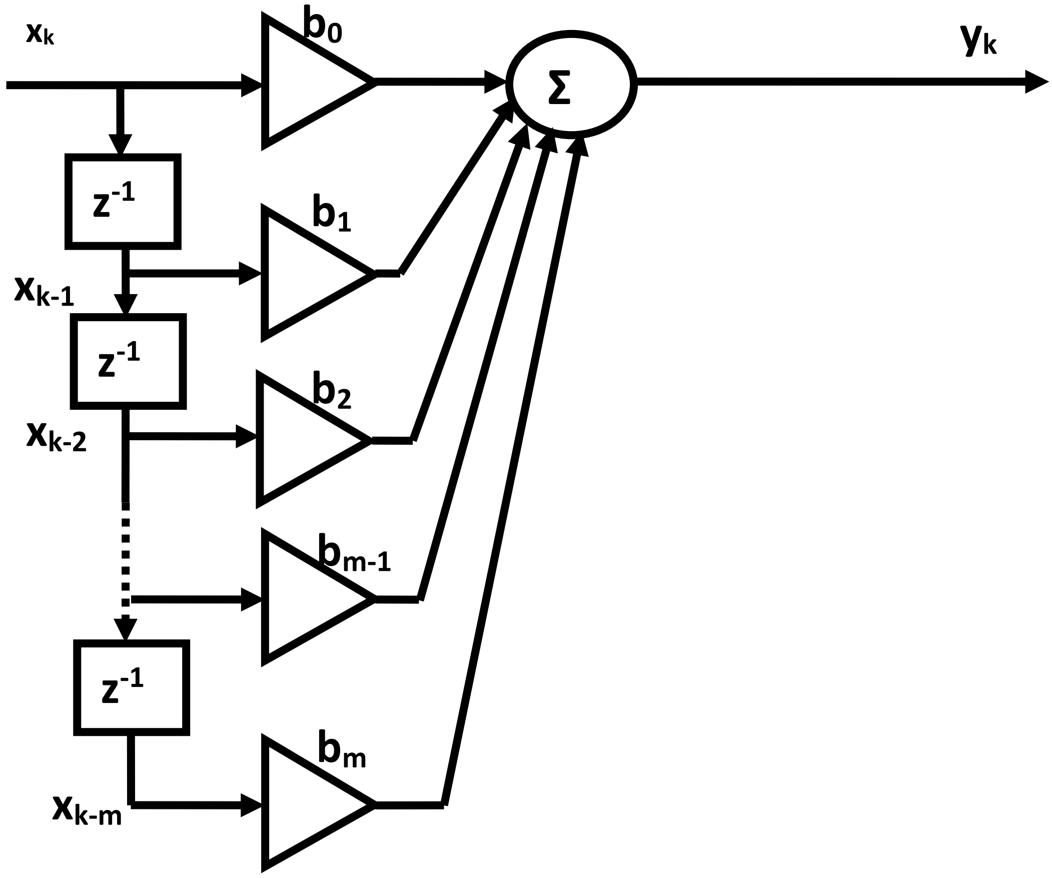


Рис. 3. Нерекурсивний фільтр (КІХ-фільтр)

Фільтр, у якому також використовуються і вихідні відліки при фільтрації, називається рекурсивним (рис. 4). Рівняння рекурсивного фільтра має вигляд:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{m} b_i x_{(k-i)} - \sum_{i=0}^{m} a_i y_{(k-i)}$$

Наявність у схемі рекурсивного фільтра зворотних зв'язків дозволяє одержати безкінечну імпульсну характеристику *h(t)* (БІХ), тому такі фільтри належать до класу БІХ-фільтрів.

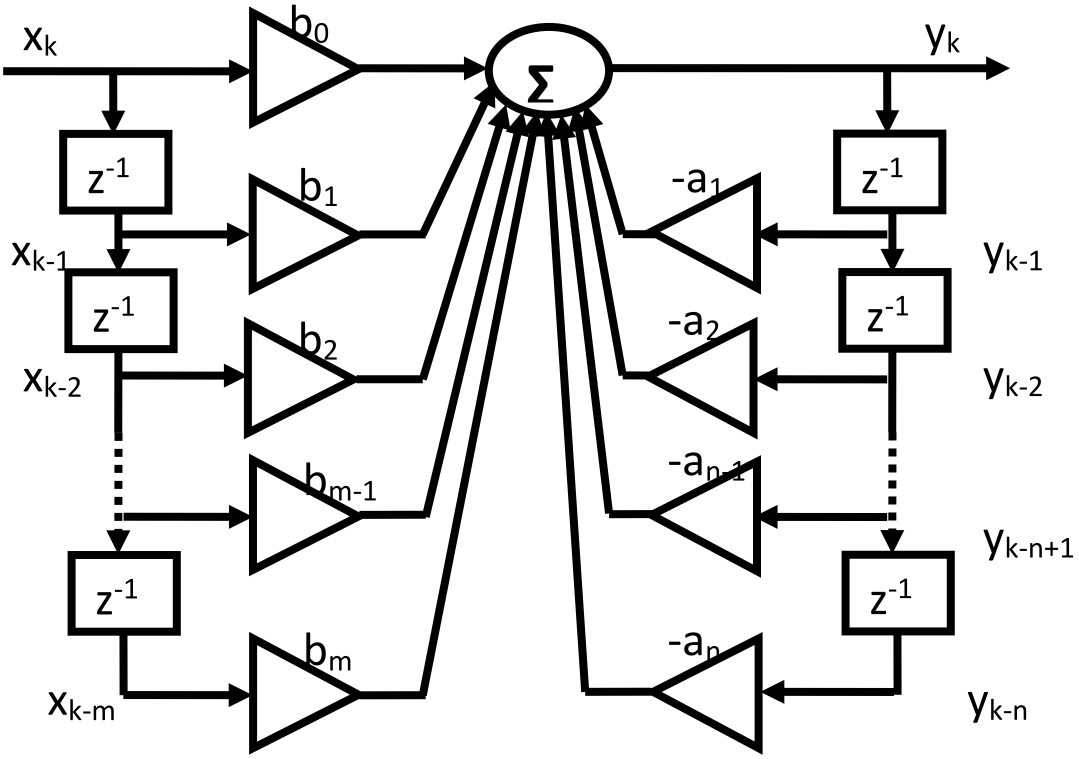


Рис. 4. – Рекурсивний фільтр (БІХ-фільтр).

3. Характеристика цифрових фільтрів

Якщо взяти кінцеве число відліків імпульсної характеристики фільтра ***h(t)***, тоді отримаємо ЦФ із зкінченою імпульсною характеристикою (КІХ-фільтр). Якщо взяти нескінченне число відліків імпульсної характеристики фільтра ***h(t)***, отримаємо ЦФ із безкінечно-імпульсною характеристикою (БІХ-фільтр).

Лінійний стаціонарний цифровий фільтр характеризується передаточною функцією. Передаточна функція може описати, як фільтр буде реагувати на вхідний сигнал. Таким чином, проектування фільтра має складатися з постановки завдання (наприклад, фільтр восьмого порядку, фільтр низьких частот з конкретною частотою зрізу), а потім проводиться розрахунок передаточної функції, яка визначає характеристики фільтра.

Передаточна функція цифрового фільтру описує, як фільтр буде реагувати на вхідний сигнал. Передаточна функція цифрового фільтру має вигляд (2) і задається як відношення z – образів вихідного сигналу *B(z)* до вхідного *A(z)* . У даному випадку це формула БІХ-фільтра. Якщо знаменник дорівнює одиниці (константі), то отримуємо формулу КІХ-фільтра (без зворотного зв'язку).

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_M z^{-M}} \qquad (2)$$

де порядок фільтру - більшеє *N* або *M*.

Основна властивість будь-якого фільтру – це його амплітудно-частотна і фазова характеристики. Вони показують, як фільтр впливає на амплітуду і фазу різних гармонік оброблюваного сигналу. *Якщо* фільтр має лінійну фазу, то розглядається лише частотна характеристика фільтру. Зазвичай частотна характеристика зображується у вигляді графіка залежності амплітуди від частоти (у децибелах). Наприклад, якщо фільтр пропускає всі сигнали в смузі 0 ... 10 кГц без зміни, а всі сигнали в смузі вище 10 кГц подавляє в 2 рази (на 6 дБ), то частотна характеристика буде мати такий вигляд:

$$A(f) = \begin{Bmatrix} 0\partial Б, f < 10кГц \\ -6\partial Б, f > 10кГц \end{Bmatrix}.$$

Частотна характеристика в 0 дБ показує, що дані частоти фільтр пропускає без зміни. Ті частоти, амплітуда яких послаблюється фільтром в 2 рази, повинні мати амплітуду на 6 дБ менше. Тому їх амплітуда становить -6 дБ. Якщо фільтр посилює частоти, то його частотна характеристика на цих частотах є позитивною.

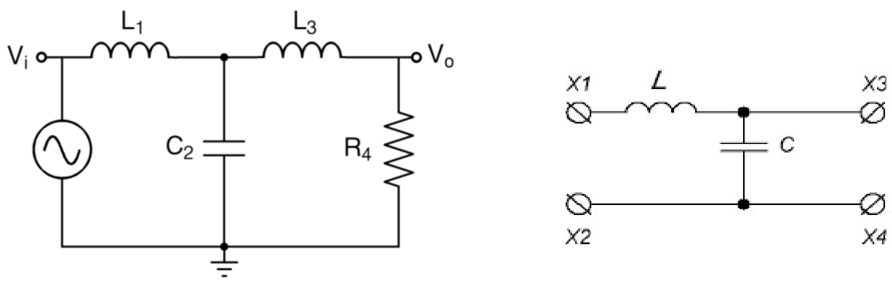
Найбільш видомі фільтри за видом передаточної функції (рис. 5):

Фільтр Баттерво́рта — це фільтр у якого амплітудно-частотна характеристика максимально гладка на частотах смуги пропускання.

Фільтр Чебишева - один з типів лінійних аналогових чи цифрових фільтрів, відмінною особливістю якого є більш крутий спад амплітудно-частотною характеристики (АЧХ) та значні пульсації амплітудно-частотної характеристики на частотах смуг пропускання (фільтр Чебишова I роду (порядку)) та придушення (фільтр Чебишова II роду), чим у фільтрів інших типів.

Род фільтра. По (роду) порядку розрізняють фільтри першого, другого и більш високих порядків.

Для аналогового фільтру порядок визначається кількістю реактивних елементів (котушка індуктивності, конденсатор), що входять до складу фільтра (рис. 5):



Фільтр третього порядку. Фільтр другого порядку.

Рис. 5. Порядок аналогового фільтру.

Для цифрового фільтру порядок це кількість попередніх відліків сигналу, що використовуються для отримання сигналу на виході фільтра, тобто найвища ступінь полінома його імпульсної характеристики, тобто кількість ліній затримки у складі фільтру (*m* на рис. 3 та *m* або *n* на рис. 4).

Довільний приклад для рис. 3:

$y_k = 3 + 2x + x^2 + 4x^3 + 3x^4$ - фільтр 4 порядку.

Еліптичний фільтр — фільтр характерною особливістю якого є наявність пульсацій АЧХ заданої величини як у смузі пропускання так і смузі придушення частотної характеристики За рахунок цього вдається забезпечити максимально можливу крутизну скату, т.б. перехідну зону між полосами пропускання та затримки (рис. 6).

Фільтр Бесселя – найбільш розповсюджений тип лінійного фильтру, у якого максимально гладка, лінійна фазо-частотна характеристика.

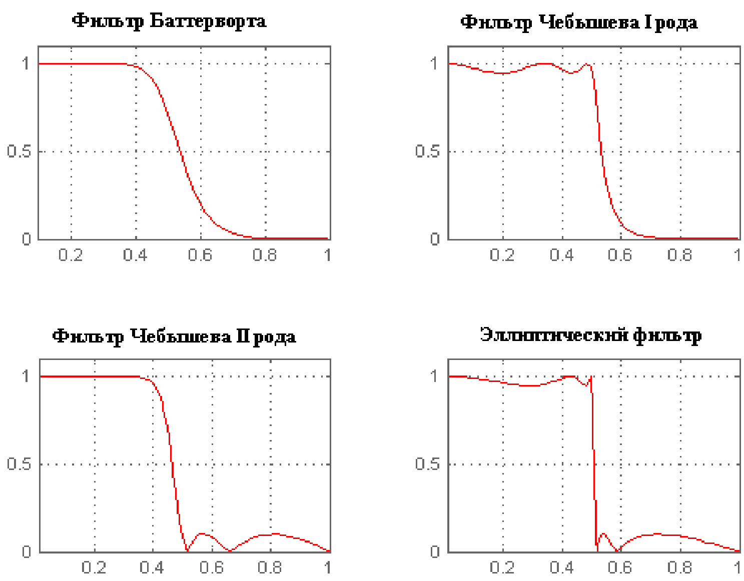


Рис. 6. АЧХ різних типів фільтрів.

4. Синтез цифрового фільтру.

Під проектуванням (синтезом) цифрового фільтра розуміють вибір таких наборів його коефіцієнтів $\{a_i\}$ і $\{b_i\}$ (рис.3, 4), які задовольняють заданим вимогам. У завдання проектування входить також і вибір потрібної структури фільтра з урахуванням необхідної точності обчислень.

У проектуванні та реалізації цифрових фільтрів застосовується безліч різноманітних підходів і методів, вибір яких залежить від багатьох факторів, зокрема – від того, як формулюється завдання фільтрації.

Як вже було відмічено, найчастіше цифрова фільтрація застосовується для виділення сигналу або для відновлення сигналу. Виділення "корисного" сигналу необхідно, коли сигнал, що надходить у систему із зовнішнього середовища, змішаний із шумами, викликаними різноманітними фізичними процесами, що мають, як правило, випадковий характер. Відновлення сигналу необхідно через можливі спотворення сигналу, викликані роботою апаратури.

У зв'язку з тим, що теорія апроксимації ідеальних АЧХ аналоговими засобами добре розвинена, широке поширення одержали методи синтезу цифрових фільтрів по аналогових прототипах.

У прямих методах синтезу без використання аналогових прототипів часто використовується той факт, що ДПФ можна трактувати як обробку сигналу фільтром з відповідною імпульсною характеристикою.

Взагалі алгоритм фільтрації у частотній області полягає в наступному:

- послідовність відліків вхідного сигналу та імпульсна характеристика фільтра доповнюються нулями так, щоб довжини послідовностей стали рівними і не меншими, ніж сума довжин вихідних послідовностей мінус одиниця;
- обчислюються ДПФ доповнених нулями послідовностей;
- обчислені ДПФ поелементно перемножуються;
- обчислюється обернене ДПФ від результату перемножування.

Способи реалізації цифрових фільтрів

Розрізняють два види реалізації цифрового фільтру: апаратний та програмний. Апаратні цифрові фільтри реалізуються на елементах інтегральних схем, тоді як програмні реалізуються за допомогою програм, виконуваних процесором або мікроконтролером. Перевагою програмних засобів перед апаратними є легкість втілення, а також налаштувань та змін, а також те, що у собівартість такого фільтру входить тільки праця програміста. Недолік — низька швидкість, що залежить від швидкодії процесора, а також важка реалізуймість цифрових фільтрів високого порядку.

При проектуванні цифрових фільтрів враховуються деякі моменти пов'язаний з особливостями технічної реалізації і рядом обмежень, обумовлених розрядністю цифрових обчислювальних пристроїв:

- шум квантування, що виникає при аналого-цифровому перетворенні;
- спотворення характеристик, що відбуваються при квантуванні коефіцієнтів цифрових фільтрів;
- переповнення розрядної сітки в процесі обчислень;
- округлення проміжних результатів обчислень.

Тому при проектуванні цифрових фільтрів важливо правильно вибрати способи й формати подання чисел (дійсні або комплексні числа, з фіксованою або плаваючою точкою тощо), динамічний діапазон подання даних, обумовлений розрядністю регістрів устаткування, а також оцінити можливий вплив шумів і спотворень.

На рис. 7 показано один з варіантів побудови КІХ фільтру.

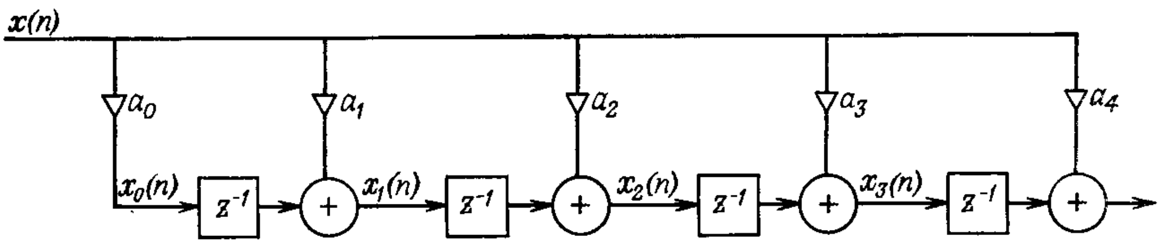


Рис. 7. Приклад реалізації КІХ фільтру

Ця схема описується наступним рівнянням:

$$x_1(n) = a_0 x(n-1) + a_1 x(n),$$

$$x_2(n) = x_1(n-1) + a_2 x(n) = a_0 x(n-2) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n),$$

$$x_3(n) = x_2(n-1) + a_3 x(n) = \sum_{i=0}^{3} a_i x(n-3+i),$$

$$y(n) = x_3(n-1) + a_4 x(n) = \sum_{i=0}^{4} a_i x(n-4+i).$$

Контрольні запитання:

1. Що називається цифровим фільтром?
2. Яке призначення цифрового фільтру?
3. Назвати переваги та недоліки цифрових фільтрів.
4. Склад цифрового фільтру.
5. Що називається порядком цифрового фільтру.
6. Охарактеризувати фільтр з кінечною імпульсною характеристикою.
7. Охарактеризувати фільтр з безкінечною імпульсною характеристикою.
8. У чому полягає суть проектування цифрового фільтру.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дікарєв О.В. Цифрова обробка сигналів. Учбово-методичний посібник. / Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій. – Київ, 2009. 117 с.
2. Тихонов Ю.О., Савченко В.А., Котенко А.М., Зідан А.М. Лабораторний практикум з теорії кіл і сигналів в інформаційному та кіберпросторах. Практикум. - К.: ДУТ, 2019.- 221с.
3. Егоров А.П., Малик П.В., Кузьменко М.Ю. Цифровые системы управления и обработки информации: Учебное пособие. – Днепропетровск: НМетАУ, 2012. – 178 с.
4. Айфичер Э., Дилервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2–е издание: Пер. с англ. – М.: Издательский дом Вильямс, 2004. – 992 с.
5. Михалев А. И. Цифровая обработка сигналов: от Фурье до Вейвлет / Михалев А.И. – Днепропетровск: Системные технологии, 2007. – 200 с.
6. Дікарев О.В. Навчально-методичний посібник по основам цифрової обробки сигналів. / Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій. – Київ, 2014. 105 с.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

Котенко Андрій Миколайович,
Хлапонін Юрій Іванович

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ

Конспект лекцій

Редагування та коректура *М.М. Власенко*
Комп'ютерне верстання *М.М. Власенко*

Підписано до друку 25.01.2024 Формат 60 х 84 $_{1/16}$
Ум. друк. арк. 5,58. Обл.-вид. арк. 2,88
Електронний документ. Вид. № 10/І-16 Зам. 40/1-16

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р