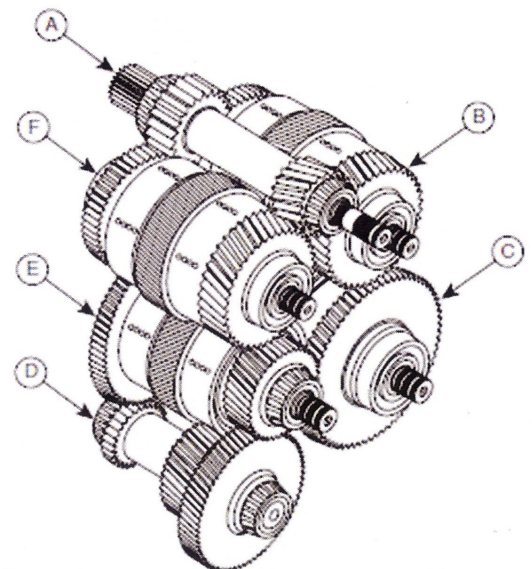
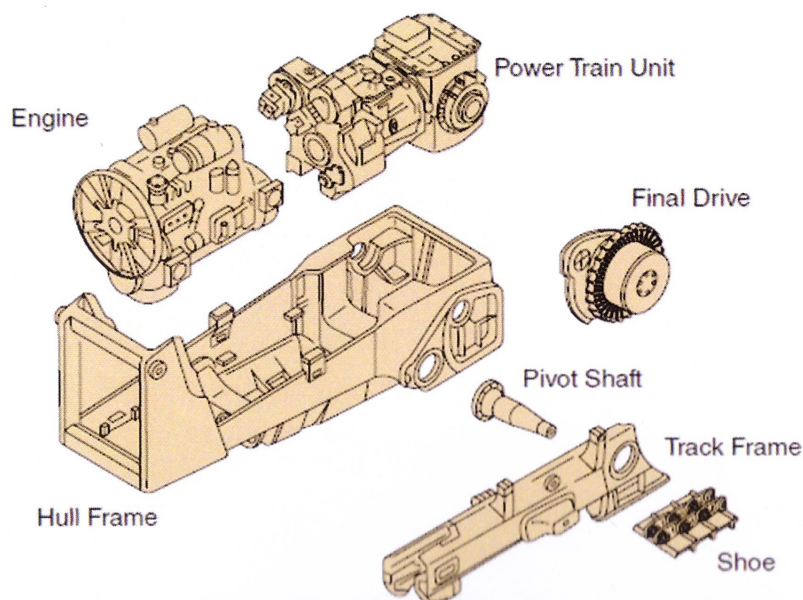


І.І.Назаренко,
М.М. Ручинський,
Є.О.Міщук

Теорія пружності в прикладній механіці



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

І.І. НАЗАРЕНКО
М.М.РУЧИНСЬКИЙ
Є.О. МІЩУК

ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ В ПРИКЛАДНІЙ МЕХАНІЦІ

**Навчальний посібник
для студентів спеціальності
131 «Прикладна механіка»**

Київ 2024

УДК 6339.5 (075.8)

ББК 34.4

Рецензенти: **О.С. Ланець** – д.т.н., професор, директор інституту механічної інженерії та транспорту, Національний університет «Львівська політехніка»

В.В. Гайдайчук – д.т.н., професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури

М.П. Кузьмінець – д.т.н., професор, завідувач кафедри комп'ютерної, інженерної графіки та дизайну, Національний транспортний університет

Затверджено на засіданні Вченої ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол №19 від 23 лютого 2024 року.

Т8 Теорія пружності в прикладній механіці. Навчальний посібник / І.І.Назаренко, М.М. Ручинський, Є.О. Міщук./ – Київ: ФОП Ямчинський О.В., 2024. – 167 с.

ISBN 978-617-8171-25-4

Розглянуто основні закони і рівняння теорії пружності, які застосовують у проектуванні деталей машин та їх конструкцій. Наведено методи розв'язування прикладних задач. Представлено основні положення методу кінцевих елементів.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 131 «Прикладна механіка»

УДК 6339.5 (075.8)

ББК 34.4

ISBN 978-617-8171-25-4

©І.І. Назаренко, М.М.Ручинський, Є.О.Міщук 2024

©ФОП Ямчинський О.В. 2024

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ	7
1.1 Загальні поняття	7
1.2. Теорія напруженого стану в точці навантаженого тіла	12
1.3. Визначення максимального дотичного напруження	17
1.4. Диференціальні рівняння рівноваги	18
1.5. Теорія деформованого стану в точці навантаженого тіла	20
1.6. Теорія взаємозв'язку між напруженнями і деформаціями у точці навантаженого пружного тіла	24
РОЗДІЛ 2. ДВОВИМІРНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ	28
2.1. Основні рівняння плоскої задачі теорії пружності.	28
2.2. Двовимірні задачі в декартовій системі координат	38
2.3. Рішення двовимірних задач за допомогою рядів Фур'є	50
2.4. Двовимірні задачі в полярній системі координат	54
2.4.1. Вплив круглого отвору на розподілення напружень в пластинці	60
2.4.2. Зосереджена сила, яка прикладена в деякій точці прямолінійної границі	63
2.4.3. Сила, яка діє на вістрі клина	67
2.4.4. Визначення напружень у круглому диску	70
РОЗДІЛ 3. ПРОСТОРОВІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ	72
3.1. Кручення круглих валів постійного перерізу	72
3.2. Чистий згин призматичних стержнів	73
3.3. Кручення прямолінійних стержнів	76
РОЗДІЛ 4. МЕТОДИ РІШЕННЯ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ	81
4.1. Огляд методів рішення рівнянь теорії пружності	81
4.2. Принцип мінімуму потенціальної енергії	84
4.3. Наближені методи розв'язання рівнянь теорії пружності методом сил та методом переміщень	86
РОЗДІЛ 5. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ	90
5.1. Вісесиметричні напруження і деформації в тілах обертання	90
5.2. Обертові диски	94
5.3. Товстостінна сферична оболонка	97
5.4. Зосереджена сила, яка діє на площину, що обмежує напівнескінченне тіло	100
5.5. Товстостінний циліндр під дією внутрішніх та зовнішніх сил	102
РОЗДІЛ 6. ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ	105
6.1 Елементи теорії коливань дискретних систем	105
6.1.1 Основні поняття та визначення	105
6.1.2 Вібраційний рух	106

6.1.3 Класифікація сил	109
6.1.4 Число ступенів вільності вібросистеми	111
6.1.5 Методи складання рівнянь руху	112
6.1.6 Вимушені коливання системи при наявності сил опору	114
6.1.7 Аналіз руху вібромашини	117
6.2 Елементи теорії коливань континуальних систем	119
6.2.1 Основні поняття та визначення	119
6.2.2 Моделі для визначення напружено-деформованого стану матеріалів	121
6.2.3 Рівняння руху та визначення основних параметрів пружного середовища	123
6.2.4 Фізичні аспекти розсіювання енергії в матеріалах	128
6.3 Енергія континуальних вібросистем	132
6.3.1 Загальні підходи до визначення енергії на деформування матеріалу	132
6.3.2 Енергія хвильового руху пружного середовища	134
6.3.3 Енергія хвильового руху дисипативного середовища	137
РОЗДІЛ 7. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ МЕТАЛЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ	139
7.1 Методи розрахунків на міцність та стійкість	139
7.2 Центральний розтяг та стиск	138
7.3 Розрахунки на зріз та зминання	139
7.4 Зварні з'єднання	140
7.5 Заклепочні та болтові з'єднання	141
7.6 Циліндричні пружини	145
7.7 Вільне кручення тонкостінних профілів	146
7.8 Кручення стрижнів прямокутного перерізу	147
РОЗДІЛ 8. ОСНОВИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	149
8.1. Основні поняття	149
8.2. Матричне формулювання основних рівнянь теорії пружності	153
8.3. Розуміння варіаційного підходу до рішення задач теорії пружності	156
8.4. Варіаційний метод в МСЕ	157
8.5. Точність і конвергенція по МСЕ	159
8.6. Види скінченних елементів та інтерполяційні функції	161
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	165

ВСТУП

Теорія пружності сформувалася як один із важливих розділів математичної фізики у першій половині XIX сторіччя. До цього часу працями вчених XVII та XVIII ст. Галілея, Маріотта, Гука, Бернуллі, Ейлера, Кулона та ін. була детально розроблена теорія вигинання тонких пружних стрижнів. На початку XIX ст. Лагранжем та Софі-Жермен був отриманий розв'язок задачі про вигинання та коливання тонких пружних пластинок. Основи теорії пружності належать французьким математиками і механікам Коші, Нав'є та Пуассону, які отримали основні диференціальні рівняння цієї теорії. Основною метою теорії пружності є вивчення дії сил на пружні тіла та визначення тих напружень і деформацій, що при цьому виникають, як у стані рівноваги, так і у стані руху.

Теорія пружності дозволяє отримувати точні розв'язки поставленої задачі, хоча це не виключає використання різних приблизних методів. Висновки теорії пружності широко використовуються у різних галузях науки і техніки. Інженери-будівельники використовують висновки та методи теорії пружності для розрахунку напружень і деформацій в інженерних спорудах. Інженери-механіки займаються тими самими питаннями у машинобудуванні (визначають запаси міцності). Геологи використовують теорію пружності для визначення тиску гірських порід. Фізики широко використовують теорію пружності при розробленні хвильової теорії світла. Розв'язок цілого ряду задач газодинаміки та аерогідродинаміки, що прямо не стосуються розрахунку на міцність, зводиться до розгляду рівнянь, що є подібними з рівняннями теорії пружності. Отже, інженер будь-якої спеціальності прямо або побічно використовує результати та методи теорії пружності.

По вивченню дисципліни студент повинен знати теоретичні основи і методи визначення напруженого та деформованого стану елементів конструкцій будівельних машин та робочих середовищ.

Студент повинен вміти вибирати метод розрахунку для відповідної схеми навантаження конструктивного елементу машини, розрахувати напружений і деформований стан конструктивного елементу або робочого середовища, виконувати розрахунки на міцність, витривалість, стійкість, довговічність, жорсткість конструктивних елементів машин.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

1.1 Загальні поняття

Механіка в цілому об'єднує широкий комплекс наукових дисциплін, багато з яких відокремились із загальної механіки. Визначимо із комплексу механічних дисциплін місце яке займає теорія пружності, а також дамо визначення теорії пружності.

В загальному поведінку навантаженого тіла описує теорія суцільного середовища.

Механіка суцільного середовища – розділ механіки, фізики суцільного середовища який вивчає рівновагу і рух газоподібних, рідких і деформованих твердих тіл, а також силову взаємодію в цих тілах.

Суцільним середовищем є механічна система, яка володіє нескінченним числом внутрішніх степенів вільності. Її рух в просторі описується скалярним полем щільності і векторним полем швидкостей. Математичний опис механічних систем суцільного середовища виконується за допомогою законів механіки суцільного середовища.

Основні припущення механіки суцільного середовища полягають в тому, що тіло можна розглядати як неперервне суцільне середовище, нехтуючи його молекулярною будовою при цьому приймаються безперервними в середовищі всі його характеристики, такі як щільність, напруження, швидкість частинок і т.д.

Вихідними даними в механіці суцільного середовища при вивченні будь-якого середовища є: 1) рівняння руху або рівноваги середовища, виведені із основних законів механіки; 2) рівняння нерозривності середовища, які є наслідком закону збереження маси; 3) рівняння енергії.

Механіка суцільного середовища ділиться на такі розділи:

- 1) механіка деформованого твердого тіла;
- 2) механіка рідин та газів

Кожен з цих розділів ділиться на підрозділи, рис.1.1

Частиною механіки суцільних середовищ є реологія, яка охоплює задачі механіки твердого деформованого тіла, а також задачі механіки рідин та газів. **Реологія** – це наука, яка встановлює загальні закони утворення і розвитку в часі деформації будь-якої речовини від різних причин в різних термодинамічних і фізико-хімічних умовах [3].

В основі реології лежать основні закони гідромеханіки та теорії пружності і пластичності. Основне завдання реології – встановити залежність між механічними напруженнями, що виникають у тілі і викликаними ними деформаціями та їх змінами в часі.

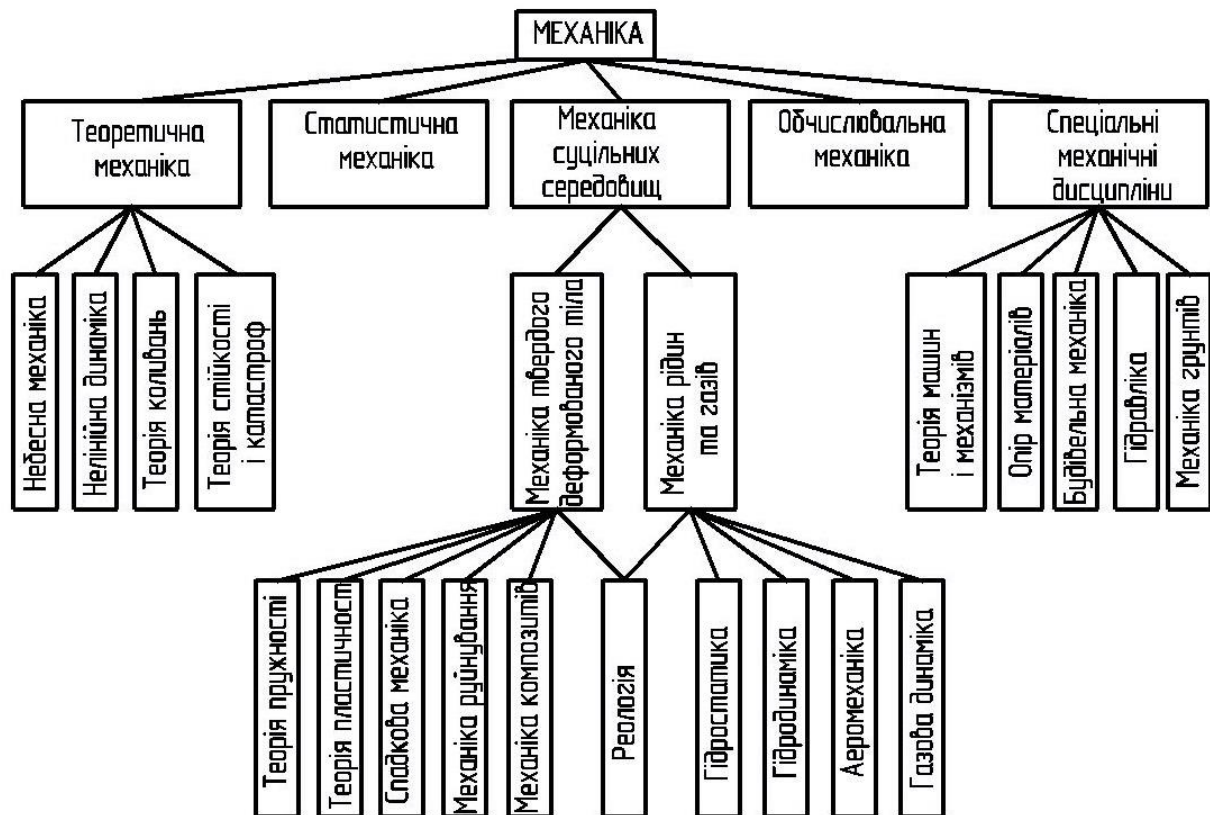


Рис. 1.1. Місце теорії пружності серед інших дисципліни механіки

Механіка деформованого твердого тіла вивчає зміни форми твердих тіл при зовнішній і внутрішній взаємодії та русі.

При розрахунках конструкцій машин або будівель часто доводиться спрощувати розрахункові схеми, так як при врахуванні всіх умов розрахунки стають занадто трудомісткими. При цьому спрощення розрахункових схем відбувається в допустимих межах, тобто за умов що похибка розрахунків буде не значною і це не вплине на загальну стійкість конструкції. Так, наприклад інженери ідеалізують розрахункові схеми та тверді тіла або рідини та гази. Одною із таких ідеалізацій твердих тіл є властивість ідеальної пружності. Ця властивість закладена в основі дисципліни **теорія пружності**.

Для більш кращого розуміння матеріалу запишемо визначення, що таке пружність. **Пружність** – властивість тіл відновлювати свою форму і

об'єм або лише об'єм (рідини або газоподібні тіла) після припинення дії зовнішніх сил, що спричинили їх деформацію.

Всі матеріали в світі володіють в тій чи іншій мірі пружністю. Мабуть всі помічали, що якщо до пружного тіла прикласти відповідне зусилля, то тіло починає деформуватись. Проте при знятті навантаження матеріал відновлює свою форму, рис.1.2. У випадку рідких або газоподібних тіл відновлюється об'єм. При ідеальній пружності тіло повністю відновлює свою початкову форму. Така властивість ідеально пружного тіла, приводить до того що форма тіла залежить тільки від навантажень, які діють в даний момент часу, і не залежить від того як ці навантаження змінювались в часі.

Таким чином **теорія пружності** вивчає дію сил на пружні тіла і визначає виникаючі при цьому напруження і деформації, як в стані рівноваги так і в стані руху (пружні коливання, малі переміщення).

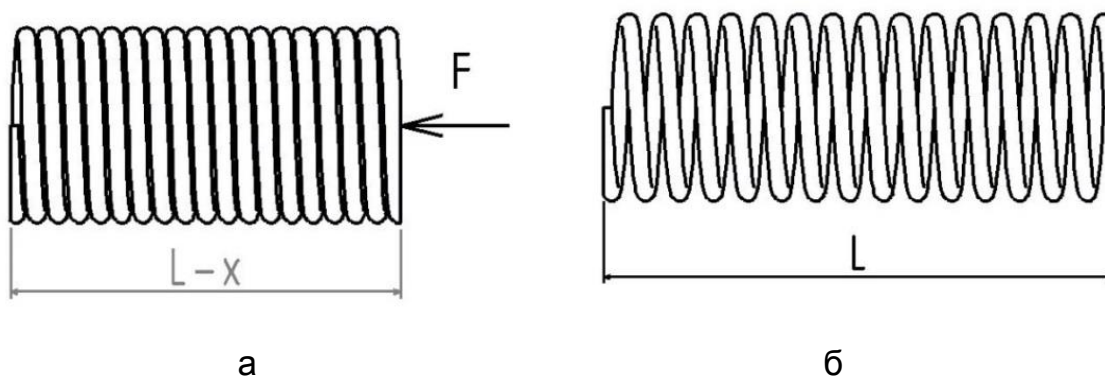


Рис.1.2. Зміна довжини пружини при дії зовнішнього зусилля

Схожі задачі до теорії пружності вирішує теорія опору матеріалів. Відмінність між теорією пружності і опором матеріалів полягає у початкових умовах, в методах рішення задач і в діапазоні останніх. Так вирішувати задачі по знаходженню напружено-деформованого стану тіла, якщо його форма відмінна від стержня або бруса (оболонка, пластина або масив) для теорії опору матеріалів складно.

Класична теорія пружності побудована на лінійній залежності між напруженнями та деформаціями, які виникають в тілі при дії зовнішнього зусилля. Лінійну залежність між напруженнями та деформаціями описує узагальнений закон Гука, який записується наступним чином:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.1)$$

де σ - напруження; E – коефіцієнт пружності (модуль Юнга); ε - деформація.

Отже класична теорія пружності є лінійною. Одразу виникає питання, щодо розуміння нелінійної теорії пружності. Для цього слід звернути увагу на графіки рис.1.3.

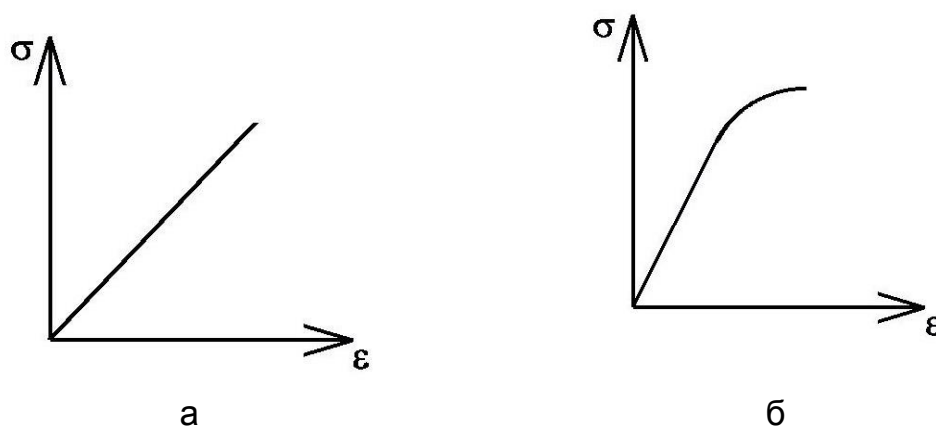


Рис.1.3. Графік залежності напруження від деформації:
а – пружно лінійна залежність; б – пружно нелінійна залежність

Поведінку пружно-нелінійного тіла описується рівнянням кривої рис.3, б, при цьому виконується умова, що при знятті навантаження тіло повністю відновлює свою форму, тобто процес розвантаження відбувається по кривій рис.3,б в зворотному напрямку.

Для багатьох будівельних матеріалів процес розвантаження відбувається по прямій ВС (рис.1.4), внаслідок чого виникають пластичні деформації. Наука, яка вивчає пластичні деформації називається теорією пластичності.

Якщо змодельовати процес при якому тіло навантажують періодично з деяким періодом в часі, тоді при розрахунках важливо враховувати історію навантаження тіла. Деформація, особливо за умови, що тіло навантажуються в зоні підвищеної температури, може зростати в часі незалежно від зовнішнього навантаження. З іншого боку напруження в тілі можуть змінюватись при постійній деформації. Проблематикою вирішення вище зазначених процесів займається теорія повзучості. Слід зазначити, що явище зміни деформації при постійному навантаженні називається **пружним наслідком**. А явище зміни напружень при постійній деформації називають **релаксацією**.

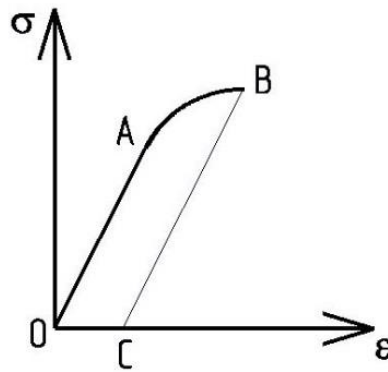


Рис.1.4. Графік залежності напруження від деформації для пластичного матеріалу

Розглянемо основні гіпотези та принципи на яких будується теорія пружності.

1. Гіпотеза про суцільність будови пружного тіла.

Суцільне тіло до деформації, залишається неперервним і після деформацій. Отже деформації і переміщення точок тіла вважаються неперервними функціями координат. Це вказує на те, що в класичній теорії пружності не враховується дискретна будова тіла (не врахування руху атомів і молекул). Прийняття цієї гіпотези пов'язано із складністю розрахунків при врахуванні атомної структури тіла.

2. Гіпотеза про природний ненавантажений стан тіла.

Існуючі до прикладення поверхневих навантажень початкові напруження в тілі приймаються рівними нулю. Отже, напруження в теорії пружності не є фактичними напруженнями в тілі, а складають приріст напружень в розглядуваних точках над початковими напруженнями в тих самих точках, які є невідомими.

Слід зазначити, що не врахування дискретності тіла та початкових навантажень не призводить до значних відмінностей між теорією і експериментальними даними.

3. Гіпотеза про ідеальну пружність, ізотропність, досконалу однорідність тіла.

Ізотропія – однаковість фізико-механічних властивості в будь-якому напрямку відносно розглядуваної точки матеріалу.

4. Принцип Сен-Венана.

Більшість задач теорії пружності вирішується з використанням даного принципу. Згідно з принципом, якщо в будь-якій малій частині тілі прикладена зрівноважена система сил, то вона викликає в тілі нерівномірно розподіленні напруження, які дуже швидко спадають по мірі відда-

лення від місця прикладання. Іншими словами в точках твердого тіла достатньо віддалених від місця прикладення зовнішніх навантажень, деформації та напруження тіла мало залежать від конкретного способу прикладення навантаження і можуть визначатись статично еквівалентними навантаженнями.

Задачі в яких розглядаються області, які лежать в безпосередній близькості до місця прикладення зосереджених зусиль мають назву **контактні задачі**.

5. Принцип малих деформацій для лінійної теорії пружності.

Приймаються наступні припущення:

- 1) переміщення тіла є малими в порівнянні із розмірами тіла;
- 2) відносні подовження та відносні здвиги в матеріалі є малими в порівнянні з одиницею;
- 3) кути повороту малі в порівнянні з одиницею, а квадрати кутів повороту є малими в порівнянні з відносними подовженнями або здвигами.

Отже в зв'язку з прийнятими вище припущеннями для класичної теорії пружності з неї виключаються задачі в яких розглядаються нелінійні проблеми – задачі згину брусів, пластин і оболонок при прогинах величина яких рівна їх товщині, а також при деформаціях, які перевищили межу пружності і т.д.

1.2 Теорія напруженого стану в точці навантаженого тіла

Щоб прийти до розуміння, що таке напруження потрібно розглянути тіло довільної форми на яке діють зовнішні зусилля, рис. 1.5. Внаслідок дії зовнішніх зусиль в тілі між його окремими частинками виникають сили взаємодії. Якщо розділити тіло на дві частини довільною площиною і розглянути більш детально площу перерізу, то можна стверджувати, що кожна з частин окремо знаходиться в рівновазі під дією зовнішніх і внутрішніх сил. Внутрішніми силами, в нашому випадку, є сили взаємодії двох частин тіла між собою. Умовно кожен частину тіла можна поділити на велику кількість дрібних частин і кожна дрібна частинка одного тіла буде взаємодіяти з протилежною в перерізі дрібною частинкою другого тіла. Виходячи з цього можна зазначити про те, що внутрішні сили рівномірно розподілені по перерізу. Величина таких сил визначається їх **інтенсивністю** (величина сили віднесена до площі на яку вона діє). Таким чином **напруження** є інтенсивність внутрішніх сил.

Виріжемо дуже малих розмірів паралелепіпед із тіла зображеного на рис. 1.5 та розглянемо напруження, які виникають на поверхні внаслідок дії зовнішніх сил на тіло. Для знаходження повного напруження та його орієнтації в просторі, зручно розглядати його складові по координатних осях. Таким чином на кожній поверхні паралелепіпедів діють складові загального напруження рис.1.6. За звичай складові напрямлені перпендикулярно до площадки паралелепіпедів називають нормальними напруженнями і позначають літерою σ , а складові що лежать у площині площадки – дотичними напруженнями, і позначають літерою τ . Для позначення орієнтації площини в якій діє напруження до літери додають відповідні індекси.

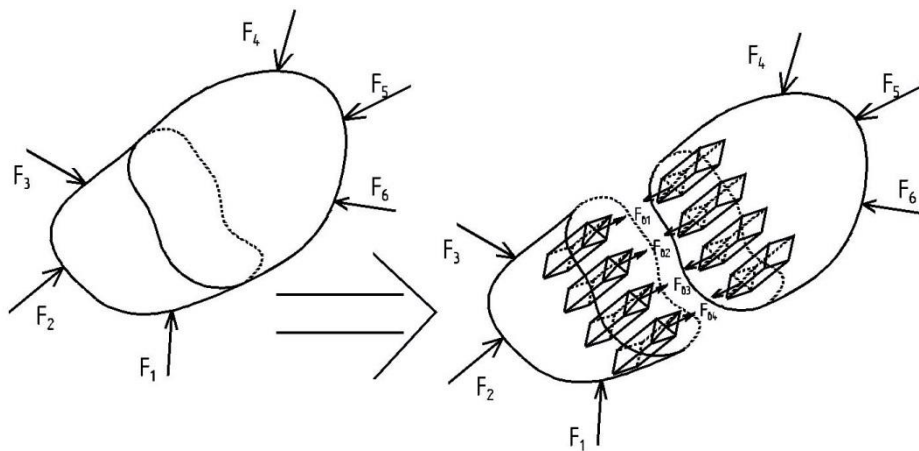


Рис. 1.5. Схема до визначення напруження

Для поверхні паралелепіпедів, що перпендикулярна осі Z нормальна компонента позначається через літеру σ_z . Індекс z зображує, що напруження діє на площадці, яка перпендикулярна осі Z . Дотичні напруження розкладаються на дві компоненти, які паралельні координатним осям. При позначенні дотичних напружень τ_{zy}, τ_{zx} використовуються два індекси. Перший індекс показує напрям нормалі до розглядуваної площини, другий індекс напрям компоненти напруження.

Тензор напружень. Девіатор напружень. Напружений стан у точці твердого деформованого тіла в декартовій системі координат характеризується симетричним тензором напружень, який позначається:

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \quad (1.2)$$

Спостереження показують, що міцність матеріалу залежить не тільки від величини компонентів напружень, але і від характеру напруженого стану. В зв'язку з цим для оцінки міцності необхідно із загальної деформації тіла виділити ті компоненти, які залежать від зміни об'єму і окремо розглянути ті компоненти, які впливають на зміну форми. Таким же чином необхідно розділити і компоненти напружень.

Таким чином тензор напружень можна представити у вигляді двох складових:

$$T_{\sigma} = T_{\sigma}^0 + D_H, \quad (1.3)$$

де T_H^0 - шаровий тензор напружень, який характеризує напружений стан елементарного об'єму (рис.1.6, а), і який можна представити наступним чином:

$$T_{\sigma}^0 = \begin{Bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{Bmatrix}, \quad (1.4)$$

$$\text{де } \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}.$$

а D_H - тензор-девіатор або девіатор напружень, який характеризує напружений стан елементарного об'єму (рис. 1.6, б), тобто:

$$D_H = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{Bmatrix}, \quad (1.5)$$

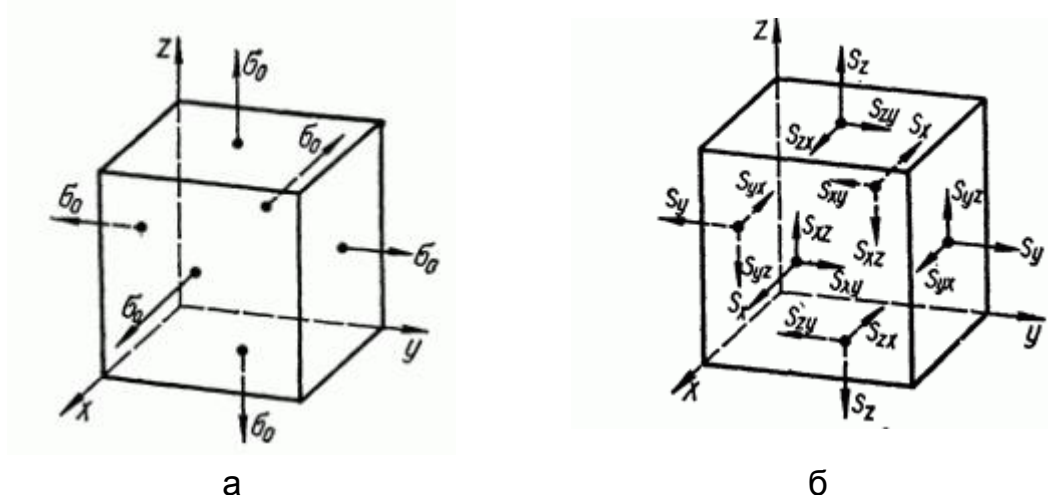


Рис.1.6. Складові тензора напружень

а- шаровий тензор напружень; б – девіатор напружень

Таким чином шаровий тензор напружень характеризує об'ємну деформацію в точці. Девіатори напружень характеризують формозміну навколо тієї ж самої точки.

Девіатор напружень зображує наскільки заданий напружений стан відхиляється від всебічного розтягу (або стиснення), у якого головні напруження рівні середньому алгебраїчному нормальних напружень вихідного напруженого стану.

Аналіз напружень і деформацій при просторово напружено-деформованому стані тіла. Для дослідження напруженого стану в точці потрібно вміти обчислювати напружений стан на будь-якій похилій площині відносно координатних осей. З цією метою виділимо з твердого деформованого тіла елементарний об'єм у вигляді тетраедра нескінченно малих розмірів, для якого три взаємно перпендикулярні грані паралельні координатним площинам, а четверта – довільна площадка (рис.1.7).

Так розподіл напружень, що діють на шести гранях кубічного елемента, можна описати трьома нормальними $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ і трьома дотичними напруженнями $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$. Якщо в деякій точці ці компоненти напружень відомі, то із рівняння статки можна визначити напруження, що діють на будь-якій похилій площадці, що проходить через цю точку. Нехай O - деяка точка напруженого тіла. Припустимо, що нам відомі напруження для координатних площин xy, xz, yz (рис. 1.6). Щоб

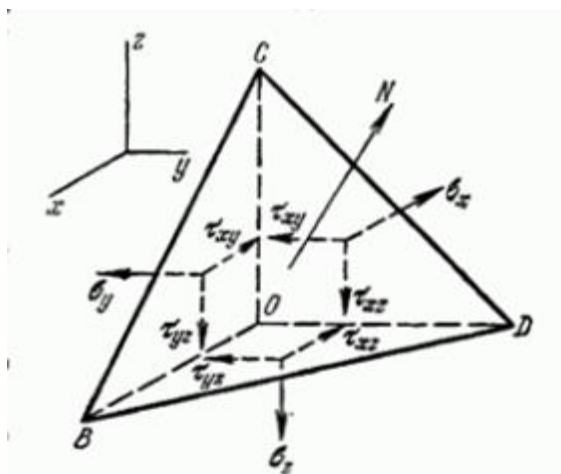


Рис. 1.7. Розподіл напружень в тривимірному просторі

отримати напруження на деякій похилій площадці, що проходить через точку O , розглянемо площину BCD , паралельну цій площадці, що знаходиться на малій відстані від точки O , так що ця площина разом з координатними площинами вирізає з тіла деякий дуже малий тетраедр $BCDO$. Оскільки напруження за обсягом тіла змінюються безперервно, то напруження на площині BCD будуть наближатися до напружень на паралельній площадці, що проходить через точку O , якщо спрямувати до нуля розміри тетраедра.

Якщо позначити через A площу грані BCD тетраедра, то площі трьох інших граней отримують за допомогою проектування A на три координатні площини. Якщо позначити через N нормаль до площадки BCD і, крім того, ввести позначення:

$$\cos(Nx)=l, \cos(Ny)=m, \cos(Nz)=n, \quad (1.6)$$

то площі трьох інших граней тетраедра будуть рівні Al, Am, An .

З умови рівноваги нескінченно малого тетраедра компоненти повного напруження P_N на довільно орієнтованій площадці в проекціях на осі координат x, y, z визначаються як:

$$\begin{aligned} X_N &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ Y_N &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ Z_N &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (1.7)$$

При цьому повне напруження можна знайти за формулою:

$$P_N = \left[X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 \right]^{1/2}. \quad (1.8)$$

У загальному випадку вектор повного P_N не збігається за напрямом з нормаллю площадки. Спроектувавши вектор повного напруження P_N на довільно орієнтовану площадку dA у напрямі нормалі N , дістаємо вираз для нормального напруження σ_n , яке діє на розглядуваній площадці:

$$\sigma_N = Xl + Ym + Zn. \quad (1.9)$$

або, після підстановки значень X_N, Y_N, Z_N з рівнянь (1.7),

$$\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} nl + 2\tau_{xy} lm. \quad (1.10)$$

Дотичні напруження, що діють на довільно орієнтованій площадці dA з нормаллю N , визначаються за формулою:

$$\tau_N = \sqrt{P_N^2 - \sigma_N^2} = \sqrt{X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2}. \quad (1.11)$$

Проте ми завжди можемо знайти такі три перпендикулярні площини, для яких $\tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{xy}$ перетворюються в нуль. Таким чином, результуючі напруження на цих площинах будуть перпендикулярні площадкам, на яких вони діють. Ці напруження мають назву головних напружень, а їх напрямки - *головними напрямками*. Площини на яких діють головні напруження – *головні площини*. При цьому $\tau_N = 0$, а $\sigma_N = P_N$, тобто повне напруження збігається з нормальним за величиною і напрямком головних напружень. Позначивши шукані головні напруження через σ і спроекціювавши їх на координатні вісі, знайдемо:

$$X_N = \sigma l, Y_N = \sigma m, Z_N = \sigma n. \quad (1.12)$$

Враховуючи рівняння (1.7) та умову - $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, дістанемо:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0; \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0; \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Вирішуючи систему рівнянь (1.13) отримуємо кубічне рівняння, яке дає змогу визначити $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

$$\sigma^3 - I_1(T_\sigma)\sigma^2 - I_2(T_\sigma)\sigma - I_3(T_\sigma) = 0, \quad (1.14)$$

де $I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)$ - які називаються лінійним, квадратичним і кубічним інваріантами тензора напружень відповідно.

$$\begin{cases} I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2(T_\sigma) = -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2; \\ I_3(T_\sigma) = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}, \end{cases} \quad (1.15)$$

Контролем правильності рішення кубічного рівняння (1.15) є співвідношення, що впливає з інваріантності коефіцієнтів рівняння:

$$\begin{cases} I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2(T_\sigma) = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1; \\ I_3(T_\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases} \quad (1.16)$$

1.3. Визначення максимального дотичного напруження

Якщо поєднати координатні вісі x, y, z , рис.1.7 з напрямками головних осей, то визначення напружень на будь-якій похилій площадці стає простим. Дотичні напруження $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ в цьому випадку дорівнюють нулю і рівняння (1.7) запишуться у вигляді рівнянь (1.12).

В рівнянні (1.12) $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - головні напруження, а через l, m, n позначені напрямні косинуси деякої заданої площадки. Тоді квадрат повного напруження на цій площадці дорівнює

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2, \quad (1.17)$$

Квадрат нормальної компоненти напруження на тій самій площадці, відповідно до рівняння (1.9), є:

$$\sigma_n^2 = \left(\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 \right)^2. \quad (1.18)$$

Тоді квадрат дотичного напруження на тому ж майданчику повинен бути рівний:

$$\tau^2 = \sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2 - (\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2)^2. \quad (1.19)$$

Тепер виключимо один з направляючих косинусів, скажімо n , з цього рівняння, використовуючи залежність $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Потім визначимо l і m таким чином, щоб зробити напруження τ максимальним. Після підстановки $n^2 = 1 - l^2 - m^2$ у вираз (1.19), та обчислення похідних від цього виразу по l і m і прирівнювання цих похідних до нуля, отримуємо наступне рівняння для визначення напрямних косинусів площадок, для яких τ досягає мінімуму або максимуму:

$$\begin{aligned} l \left[(\sigma_x - \sigma_z) l^2 + (\sigma_y - \sigma_z) m^2 - 1/2 (\sigma_x - \sigma_z) \right] &= 0, \\ m \left[(\sigma_x - \sigma_z) l^2 + (\sigma_y - \sigma_z) m^2 - 1/2 (\sigma_y - \sigma_z) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Одне з рішень цих рівнянь можна отримати, поклавши $l=m=0$. Також можна отримати рішення, які є відмінними від нуля. Приймаючи, наприклад, $l = 0$, знаходимо з другого рівняння, що $m = \pm \sqrt{2}$, а приймаючи $m = 0$, знаходимо з першого рівняння, що $l = \pm \sqrt{2}$. Рішень рівнянь (1.20), в яких l і m відмінні від нуля, взагалі кажучи, не існує, так як в цьому випадку вирази в квадратних дужках не можуть одночасно перетворюватись в нулі.

Значення дотичних напружень на головних площадках будуть мати вигляд:

$$\tau = \pm \frac{1}{2(\sigma_y - \sigma_z)}, \tau = \pm \frac{1}{2(\sigma_x - \sigma_z)}, \tau = \pm \frac{1}{2(\sigma_x - \sigma_y)}. \quad (1.21)$$

З формул (1.21) випливає, що максимальні дотичні напруження діють на площадці, що ділить навпіл кут між максимальним і мінімальним головними напруженнями, і що їх величини рівні половині різниці між цими головними напруженнями.

1.4 Диференціальні рівняння рівноваги

Вважається, що напружений стан в точці заданий, якщо відомо напруження на будь-яких трьох взаємно перпендикулярних площадках, що проходять через дану точку. На рис.1.8 напружений стан в точці є заданим трьома нормальними напруженнями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ і шістьма дотичними

напруженнями $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$. Проте закон парності дотичних напружень зазначає, що на двох взаємно перпендикулярних площадках кубічного елемента (довжини граней якого прямують до точки) наступні дотичні напруження є рівними:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (1.22)$$

Таким чином для опису напруженого стану в точці достатньо шести компонент напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

Поверхневу силу, що діє на паралелепіпед можна розкласти на три складові. Для їх позначення приймемо наступні літерні символи – $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. До поверхневих сил відносяться сили, які розподіляються по поверхні тіла (тиск на поверхню тіла). Крім поверхневих сил на тіло діють об'ємні сили (масові). До об'ємних сил відносяться сили ваги та ін. Компоненти об'ємних сил будемо позначати – X, Y, Z .

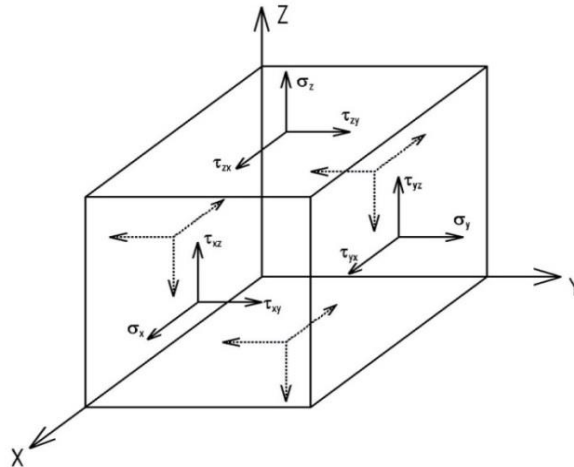


Рис. 1.8. Напруження, які діють на поверхні паралелепіпеда

Складемо диференціальні рівняння рівноваги з розглядуваної рівноваги нескінченно малого паралелепіпеда (рис.1.8). Так як розміри розглядуваного паралелепіпеда є не нескінченно малими, то складові напружень на паралельних гранях паралелепіпеда відрізняються на нескінченно малу величину. Іншими словами, якщо в площині xy , яка знаходиться на відстані dz від координатної площини XOZ паралелепіпеда діє нормальне напруження σ_z , то на паралельній площадці, яка збігається з

координатною площиною діятиме нормальне напруження - $\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$.

Аналогічними є прирости напружень на інших паралельних гранях паралелепіпеда.

Для тіла, яке перебуває у рівновазі, мають задовольнятися шість рівнянь статики: три рівняння проекцій усіх сил на координатні осі і три рівняння моментів усіх сил відносно цих осей.

Якщо всі сили спроекціювати на вісь x , то дістанемо вираз

$$\left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_{xx} dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dzdx + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dxdy - \tau_{xy} dzdx - \tau_{xz} dxdy + X dxdydz = 0. \quad (1.23)$$

Склавши суму проекцій усіх сил на осі x , y і z та звівши подібні члени і поділивши на об'єм $dxdydz$ (рис.1.8) отримаємо три диференціальні рівняння рівноваги, які мають назву рівняння Нав'є:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

З рівняння моментів відносно осей x , y і z отримаємо три рівняння (1.23). Рівняння (1.24) називають статичними рівняннями на поверхні тіла.

Якщо задача полягає у визначенні напруженого стану тіла під дією заданих сил, то необхідно вирішити рівняння (1.19) і рішення повинно бути таким, щоб задовольнялися граничні умови (1.7). Зазначених рівнянь, що містять шість компонент напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{zy}$ недостатньо для визначення цих компонент. Задача є статично невизначеною, і щоб отримати її рішення, ми повинні розглянути пружні деформації тіла.

1.5 Теорія деформованого стану в точці навантаженого тіла

Деформація – зміна розмірів і форми твердого тіла під дією зовнішніх сил або інших впливів (температура, магнітні поля). Можна зазначити, що деформовані тіла (рідини) це ті тіла (рідини), які змінили свої розміри або форму під дією зовнішніх навантажень.

Розглянемо деформацію малого елемента пружного тіла (рис. 1.9,а). Переміщення точки А розкладемо на компоненти u, v, w , які є паралельними координатним осям – x, y та z відповідно. Тоді переміщення точки А по осі x в напрямку точки Б (рис. 1.9, б) можна описати наступним чином:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (1.25)$$

Таким чином у формулі (1.25) відносним подовженням в точці А в напрямку осі x є $\partial u / \partial x$. Таким самим шляхом можна показати, що відносні подовження в напрямку осей y і z є $\frac{\partial v}{\partial y}$ та $\frac{\partial w}{\partial z}$ відповідно. Крім переміщень точок тіла вздовж координатних осей при деформаціях також можуть виникати поперечні переміщення. Такі переміщення можна описати зміною кута грані АБ або АВ, рис. 1.9,б. Переміщення точок Б в напрямку осі y і точки В у напрямку осі x будуть відповідно рівними $v + (\partial v / \partial x) dx$ і $u + (\partial u / \partial y) dy$. З рис. 1.9,б видно, що початковий прямий кут між двома гранями АБ та АВ зменшився на величину $\partial v / \partial x + \partial u / \partial y$. Ця величина описує деформацію здвигу між площинами xz та yz . Таким же самим шляхом можна отримати деформації здвигу між іншими площинами.

Якщо відносне подовження позначити через ε , а відносну деформацію здвигу через γ , то на основі вище сказаного можна записати:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

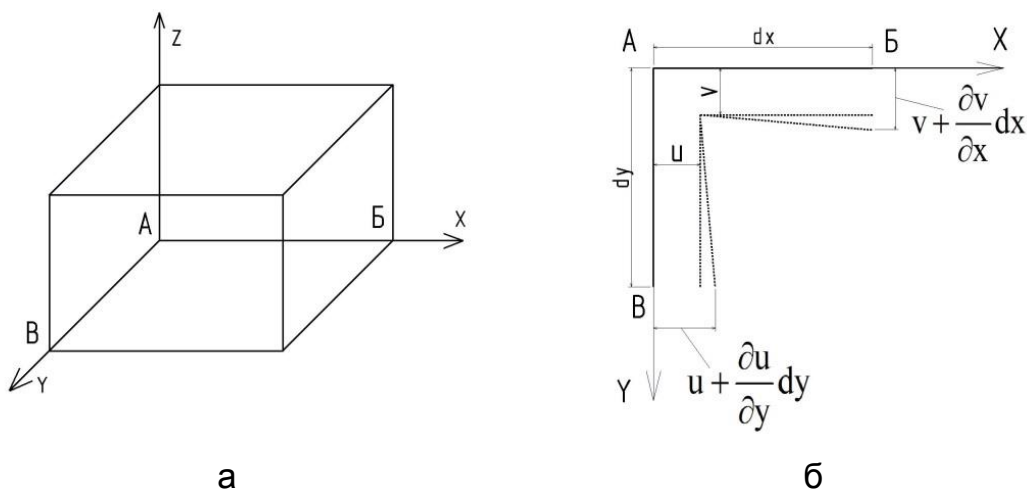


Рис. 1.9. Деформації малого елемента пружного тіла

Шість величин - $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ мають назву компоненти деформації. Індеси при компонентах деформації зображують напрямки деформації. Рівняння (1.26) мають назву рівняння Коші або геометричні рівняння на поверхні тіла.

Отже деформований стан у точці твердого тіла можна охарактеризувати симетричним тензором деформацій:

$$T_E = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}, \quad (1.27)$$

де $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{zx}$ - компоненти тензора деформацій.

Тензор деформації можна подати у вигляді суми:

$$T_\varepsilon = T_{\varepsilon_0} + D_\varepsilon, \quad (1.28)$$

де T_{ε_0} - кульовий тензор деформацій; D_ε - девіатор деформацій.

При цьому

$$T_{\varepsilon_0} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{Bmatrix}; \quad D_\varepsilon = \begin{Bmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_z \end{Bmatrix}, \quad (1.29)$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (1.30)$$

Компоненти девіатора деформацій мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} e_x = \varepsilon_x - \varepsilon_0; & e_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}; \\ e_y = \varepsilon_y - \varepsilon_0; & e_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}; \\ e_z = \varepsilon_z - \varepsilon_0; & e_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{zx}. \end{cases} \quad (1.31)$$

У кожній точці деформованого твердого тіла завжди можна провести три взаємно ортогональні осі, для яких деформації зсуву дорівнюють нулю. Такі осі називаються головними. Лінійні деформації в напрямі цих осей називають головними лінійними деформаціями, які позначають

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Головні лінійні деформації визначаються за характеристичним кубічним рівнянням:

$$\varepsilon^3 - I_1(T_\varepsilon)\varepsilon^2 - I_2(T_\varepsilon)\varepsilon - I_3(T_\varepsilon) = 0. \quad (1.32)$$

де $I_1(T_\varepsilon), I_2(T_\varepsilon), I_3(T_\varepsilon)$ - перший (лінійний), другий (квадратний) і третій (кубічний) інваріанти тензора деформацій відповідно.

Інваріанти тензора деформацій мають вигляд

$$\begin{cases} I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ I_2(T_\varepsilon) = -\varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_x\varepsilon_z + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2); \\ I_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{1}{4}(\varepsilon_x\gamma_{xy}^2 + \varepsilon_y\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_z\gamma_{zx}^2 - \gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}). \end{cases} \quad (1.33)$$

Через головні деформації інваріанти тензора деформацій відповідно записують так:

$$\begin{cases} I_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ I_2(T_\varepsilon) = -\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1\varepsilon_3; \\ I_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{cases} \quad (1.34)$$

Диференціальні залежності (1.26) між компонентами тензора деформацій і вектора переміщень дають змогу за відомими переміщеннями u, v, w , які є функціями координат точок, простим диференціюванням визначити компоненти тензора деформацій. Розв'язування оберненої задачі, знаходження переміщень як функції координат точок за відомими складовими зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь у частинних похідних. Для існування розв'язку цієї системи (1.26), необхідно щоб виконувалась визначена умова між шістьма складовими деформації. Ця умова має назву **умови суцільності деформацій або умови Сен-Венана**. Умови суцільності деформацій дістають з рівняння (1.26), якщо вилучити з них частинні похідні від відповідних переміщень за відповідними координатами. Таким чином можна отримати шість диференціальних рівнянь, пов'язаних між собою компонентами тензора деформацій (1.35).

Диференціальні залежності (1.35) називаються рівняннями Сен-Венана або рівняннями нерозривності матеріалу.

Суть рівнянь (1.35) полягає в наступному. Якщо задатись деформацією тіла, яке розбито на паралелепіпеди кожен з яких має по шість складових деформації і не враховувати ці рівняння, то із окремих таких

паралелепіпедів неможливим буде скласти безперервно деформоване тіло. Іншими словами це можна сказати наступним чином. Задане тіло суцільне і неперервне до деформації, залишається суцільним і неперервним після деформації.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{array} \right. \quad (1.35)$$

1.6 Теорія взаємозв'язку між напруженнями і деформаціями у точці навантаженого пружного тіла.

Лінійні співвідношення між компонентами напружень і компонентами деформацій з курсу опору матеріалів називають законом Гука [1]. За умов, що на протилежні грані елементарного прямокутного паралелепіпеда діють зусилля розтягу (наприклад, паралельно осі x), відносну деформацію можна виразити наступною залежністю:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad (1.36)$$

де E – модуль пружності при розтягу (модуль Юнга). Формула (1.36) має назву закон Гука і виражає лінійне співвідношення між напруженням та деформацією.

Подовження елемента в напрямку осі x супроводжується його звуженням в поперечному напрямку (вісь y та z) і визначається наступними компонентами деформації:

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad (1.37)$$

де ν - коефіцієнт Пуассона.

Якщо розглядуваний вище елемент піддається одночасній дії нормальних напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, які розподілені по його гранях, то компоненти деформацій запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Розглянемо випадок деформації прямокутного паралелепіпеда, коли $\sigma_z = \sigma$, $\sigma_y = -\sigma$, $\sigma_x = 0$. Виріжемо елемент $abcd$ площинами паралельними осі x і нахиленими під кутом 45° до осей y і z , рис. 1.10. З умов рівноваги елемента $0ab$, рис. 1.10 нормальні напруження на всіх гранях елемента $abcd$ будуть рівними нулю, а дотичні напруження:

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma. \quad (1.39)$$

Напружений стан зображений на рис. 1.10 та описаний формулою (1.10) називається чистим здвигом.

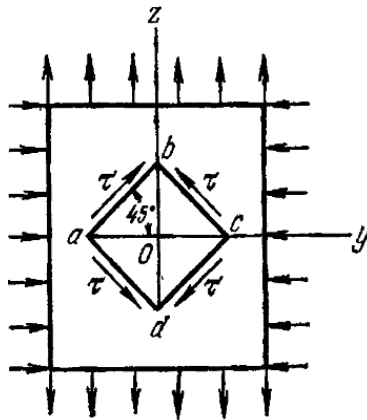


Рис. 1.10. Деформація елемента $abcd$

Кут між гранями ab і bc змінюється і відповідна величина деформації γ здвигу знаходиться з наступної залежності:

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)\tau}{E} \quad (1.40)$$

Таким чином, залежність між деформацією здвигу і дотичними напруженнями визначається константами E і ν . Для опису даної залежності часто використовують формулу:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.41)$$

З рівнянь (1.40) та (1.41) знаходимо, що:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad (1.42)$$

Константа G має назву модуль здвигу. Якщо дотичні напруження діятимуть на всіх гранях елементарного паралелепіпеда отримаємо наступні залежності для визначення деформації здвигу між гранями, що перетинаються:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \quad (1.43)$$

Таким чином формули (1.38) та (1.40) визначають компоненти деформацій елементарного об'єму елемента, як функції напружень, які виникають при дії зовнішніх сил. В такому вигляді закон пружності зазвичай виражається для ізотропного тіла. Вирази (1.9) та (1.43) формулюються наступним чином: компоненти тензора деформацій в даній точці тіла знаходяться в лінійній залежності від компонентів тензора напружень. При $\nu=0$ в рівняннях (1.38) та (1.43) будь-який компонент тензора напружень прямо пропорційний відповідному компоненту тензора деформацій.

Проте іноді виникає зворотна задача, по відомим деформаціям визначити напруження в елементарному об'ємі елемента (паралелепіпеда). В такому випадку потрібно вирішити рівняння (1.38) відносно $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, внаслідок чого отримаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_y, \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_z, \end{aligned} \quad (1.44)$$

де $\theta = 3(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ - об'ємне розширення.

Підставляючи у вираз (1.44) формулу (1.41) та наступний вираз:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (1.45)$$

Константа λ має назву постійна Ляме.

Отримаємо наступні рівняння:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z.\end{aligned}\tag{1.46}$$

Рівняння (1.46) мають назву фізичні рівняння.

Запитання для самоперевірки.

1. Дайте визначення механіка суцільного середовища?
2. Дайте визначення механіка тдеформованого твердого тіла?
3. Що таке пружність?
4. Принцип Сен-Венана?
5. Тензор напружень. Девіатор напружень?
6. Що таке деформація?
7. Тензор деформацій?
8. Запишіть фізичні рівняння?

РОЗДІЛ 2. ДВОВИМІРНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

2.1 Основні рівняння плоскої задачі теорії пружності.

При розв'язуванні плоскої задачі теорії пружності розрізняють два випадки: плоский напружений стан і плоска деформація.

Плоский напружений стан. Рівняння теорії пружності значно спрощуються, якщо всі напруження, що входять в рівняння виявляються паралельними одній площині. Наприклад, якщо тонка пластинка навантажена зусиллями, прикладеними на її границі паралельно площині пластинки і рівномірно розподіленими по товщині (рис. 2.1), то компоненти напружень $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ на обох поверхнях пластинки рівні нулю і можна прийняти, що вони рівні нулю і в середині пластинки. Тоді напружений стан буде визначатись тільки компонентами $\sigma_x, \tau_y, \tau_{xy}$ і називатиметься плоским напруженим станом.

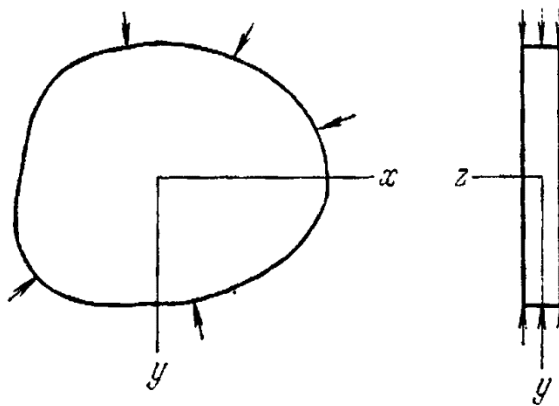


Рис. 2.1. Схема до визначення плоского напруженого стану

Схожі спрощення можливі і у випадку коли розмір тіла в напрямку осі z дуже великий.

Існує багато важливих задач такого роду. Наприклад, для підпірної стінки під дією поперечного тиску, трубопроводу або тунелю, циліндричної труби під дією внутрішнього тиску, циліндричного ролика, який стискається силами в діаметральній площині, як це має місце в роликопідшипнику. В будь-якому випадку, звичайно, навантаження не повинне змінюватися по довжині тіла.

Плоска деформація. Якщо при будь-якому напруженому стані тіла переміщення всіх точок можуть відбуватися лише в двох напрямках, тобто в одній площині, то така деформація називається плоскою. Компоненти переміщень u та v є функціями x і y , проте не залежать від позовжньої координати z , оскільки позовжні переміщення w дорівнюють нулю, з рівняння (1.26) випливає наступне:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.1)$$

Поздовжні нормальні напруження σ_z можливо вивести з рівнянь (1.38) через σ_x і σ_y за допомогою закону Гука. В силу того, що $\varepsilon_z = 0$, отримуємо

$$\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (2.2)$$

Згідно рівнянням (2.1) і (2.2) компоненти напружень τ_{xz} і τ_{yz} будуть дорівнювати нулю, а відповідно до рівняння (2.2) напруження σ_z можна визначити, знаючи σ_x і σ_y . Отже, задача про плоску деформацію, як

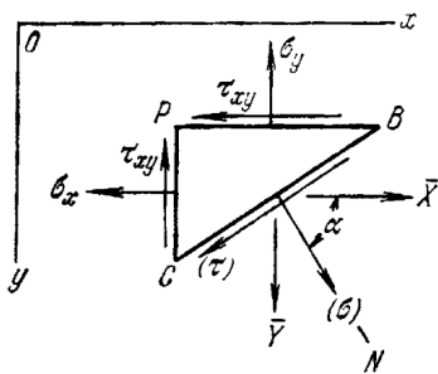


Рис. 2.2. Схема до визначення напружень на похилій площадці по відношенню до осей x та y

і задача про плоский напружений стан зводиться до визначення компонентів напружень σ_x , σ_y і τ_{xy} як функцій x і y .

Напруження в точці.

Знаючи компоненти напружень σ_x , σ_y і τ_{xy} в будь-якій точці пластинки в умовах плоского напруженого стану або плоскої деформації,

можна знайти напруження (з рівнянь статки) на будь-якій похилій відносно до осей x і y площині, що проходить через цю точку перпендикулярно пластині. Позначимо через P деяку точку в напруженій пластині і допустимо, що компоненти напружень σ_x , σ_y і τ_{xy} відомі (рис. 2.2). На малій відстані від P проведемо площину BC , паралельну осі z , так, щоб ця площина разом з координатними площинами вирізала з пластини дуже малу трикутну призму PBC . Оскільки напруження змінюються по об'єму тіла безперервно, то при зменшенні розмірів вирізаного елемента напруження, що діє на площадці BC , буде наближатись до напружень на паралельній площадці, що проходить через точку P .

При розгляді умов рівноваги малої трикутної призми об'ємними силами можна знехтувати як величинами вищого порядку малості. Подібним чином, якщо вирізаний елемент дуже малий, можна знехтувати змінами напружень по гранях і припустити, що напруження розподілені рівномірно. Тоді сили, що діють на трикутну призму, можна визначити шляхом множення компонент напружень на площі граней. Нехай N - напрямком нормалі до площини ВС, а косинуси кутів між нормаллю N і осями x і y позначаються наступним чином:

$$\cos(N, x) = l, \quad \cos(N, y) = m. \quad (2.3)$$

Тоді, якщо через A позначити площу грані ВС елемента, то площі двох інших граней будуть Al і Am .

Якщо позначити через $\bar{X}$ і $\bar{Y}$ компоненти напружень, діючих на межі ВС, то умови рівноваги призматичного елемента приводять до наступних співвідношень:

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \quad \bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy}. \quad (2.4)$$

Таким чином, компоненти напружень на будь-якій площадці, яка визначається напрямними косинусами l і m можна легко знайти із співвідношень (2.4), якщо відомі три компоненти напружень σ_x , σ_y і τ_{xy} в точці Р.

Позначимо через α кут між нормаллю N до площадки ВС і віссю x , так щоб $l = \cos \alpha$ і $m = \sin \alpha$, тоді із співвідношень (2.4) для нормальної і дотичної компонентів напружень на площадці ВС отримаємо формули:

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \\ &\quad + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau_N &= \bar{Y} \cos \alpha - \bar{X} \sin \alpha = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \\ &\quad + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Очевидно, кут α можна вибрати таким чином, щоб дотичне напруження τ на площадці ВС стало рівним нулю.

Для цього випадку отримуємо

$$\tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad (2.6)$$

або

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha. \quad (2.7)$$

З цього рівняння можна знайти два взаємно перпендикулярних напрямки, для яких дотичні напруження на відповідних площадках дорівнюють нулю. Ці напрямки називаються *головними*, а відповідні нормальні напруження – *головними нормальними напруженнями*.

Якщо за головні напрямки прийняти напрямки осей x і y , то компонента τ_{xy} дорівнює нулю і формули (2.5) приймають простіший вид

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha, \quad \tau = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha. \quad (2.8)$$

Зміну компонент напружень σ і τ в залежності від кута α можна легко зобразити графічно у вигляді діаграми в координатах σ і τ . Кожній

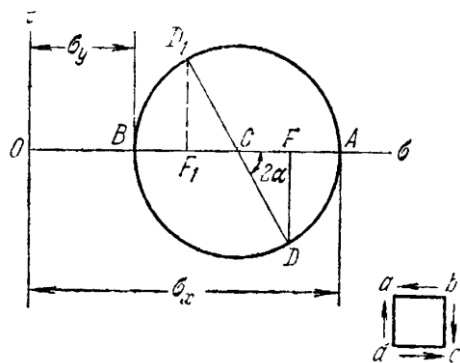


Рис. 2.3. Зміна компонент напружень σ і τ в залежності від кута α

орієнтації площадки відповідає точка на цій діаграмі, координати якої представляють собою значення напружень σ і τ , що діють на цій площадці. Така діаграма представлена на рис. 2.3. Для площадок, перпендикулярних до головних напрямків, ми отримуємо точки А і В з абсцисами σ_x і σ_y відповідно. Компоненти напружень для будь-якої площадки

ВС, яка визначається кутом α (рис. 2.2), будуть представлятися координатами деякої точки на колі, для якої відрізок АВ є діаметром. Щоб знайти цю точку, досить відміряти від точки А в тому ж напрямку, в якому вимірюється кут α на рис. 2.2, дугу, що відповідає куту 2α .

Порівняння напружень з формулами (2.8) показує, що координати точки D дають чисельні значення компонент напружень на площадці ВС, яка визначається кутом α . Щоб привести у відповідність знак дотичної компоненти, приймемо, що позитивні значення τ відкладаються вгору, і будемо вважати дотичні напруження позитивними, коли вони дають момент, діючий за годинниковою стрілкою, як це має місце на гранях bc і ad елемента abcd (рис. 2.3). Дотичні напруження протилежні напрямки, наприклад діючі на гранях ab і dc елемента, вважаються негативними.

Будемо міняти орієнтацію площадки BC, обертаючи її навколо осі, що є перпендикулярною до площини xu (рис. 2.2) у напрямку годинникової стрілки так, щоб кут α змінювався від 0 до $\pi/2$, при цьому точка D на рис. 2.3 буде переміщатися від A до B. Таким чином, нижня половина кола визначає зміну напружень для всіх значень α в цих межах. В свою чергу верхня частина кола дає напруження для інтервалу $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$.

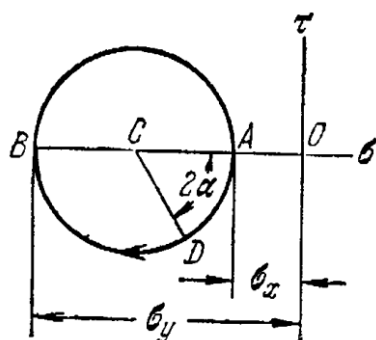


Рис. 2.4. Діаграма до визначення напружень за умови дії стискальних навантажень

Продовжуючи радіус CD до точки D_1 (рис. 2.3), тобто беручи кут рівним $\pi + 2\alpha$, замість 2α , отримуємо напруження на площадці, яка є перпендикулярною площадці BC (рис. 2.2). Звідси видно, що дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках чисельно рівні, як це і було зазначено раніше. Що стосується нормальних напру-

жень, то ми бачимо з рис. 2.3, що $OF_1 + OF = 2OC$, тобто сума нормальних напружень, що діють на двох взаємно перпендикулярних площадках, при зміні кута α залишається постійною.

Максимальна дотичне напруження $\tau_{\max}$ дається на діаграмі (рис. 2.3) максимальною ординатою окружності, тобто дорівнює радіусу кола. Звідси

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}. \quad (2.9)$$

Воно діє на площадці, для якої $\alpha = \pi/4$, тобто на площадці, нормаль до якої ділить навпіл кут між двома головними напрямками.

Відповідна діаграма може бути побудована і для випадку, коли одна або обидва головні напруження негативні, тобто для випадку стиснення. Потрібно тільки величину стискаючих напружень відкладати в сторону негативних абсцис, рис. 2.4.

Деформація в точці. Якщо відомі компоненти деформацій $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ в деякій точці, то можна знайти відносне подовження в будь-якому напрямку, а також зменшення прямого кута (деформацію зсуву) будь-якої орієнтації. Лінійний елемент PQ (рис. 2.5, а), з'єднуючий точки (x, y) і $(x + dx, y + dy)$, після перенесення, подовження (або стискання) і обертання переходить в результаті деформації в лінійний елемент P'Q'.

Компоненти переміщення точки Р є u та v , а компоненти переміщення точки Q мають вигляд

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy; \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \quad (2.10)$$

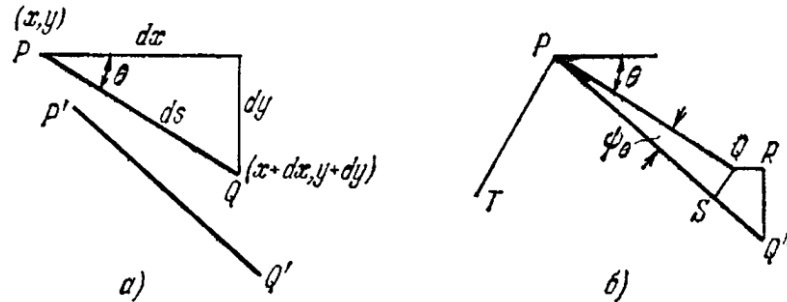


Рис. 2.5. Схема до визначення відносного подовження та деформації зсуву

Відносне подовження відрізка PQ, що позначається через ε_θ , рівне SQ''/PQ .

Тоді отримаємо наступну залежність:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \cos \theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.11)$$

або

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta. \quad (2.12)$$

Деформація зсуву γ_θ для напрямків PQ, PT рівна $\psi_\theta - \psi_{\theta+\pi/2}$.

Тоді

$$\gamma_\theta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) 2 \sin \theta \cos \theta, \quad (2.13)$$

або

$$\frac{1}{2} \gamma_\theta = \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin \theta \cos \theta. \quad (2.14)$$

Детальне доведення залежностей (2.12) та (2.14) дано в джерелі [1].

Порівнюючи формули (2.12) і (2.14) з співвідношеннями (2.5), помічаємо, що ці формули можна отримати з (2.5). Кожному результату, отриманого з співвідношень (2.5) для напружень σ і τ відповідає результат для ε_θ і $\gamma_\theta/2$, який можна отримати виходячи з умов (2.12) і (2.17). В

силу цього існують два значення θ , що відрізняються один від одного на 90° , для яких γ_θ дорівнює нулю. Ці значення θ визначаються з рівняння

$$\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \operatorname{tg} 2\theta \quad (2.15)$$

Відповідні деформації ε_θ називаються *головними деформаціями*. Можна накреслити діаграму у вигляді кіл Мора, аналогічну рис. 2.3, ординатами якої є величини $\gamma_\theta/2$, а абсцисами - величини ε_θ . Найбільше значення $\gamma_\theta/2$ буде визначатися радіусом кола. Таким чином, максимальна деформація зсуву $\gamma_{\theta\max}$ дається формулою $\gamma_{\theta\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$.

Диференційні рівняння рівноваги. Розглянемо рівновагу малого прямокутного паралелепіпеда з розмірами вздовж осей x і y , h , k і товщиною якого рівна одиниці (рис. 2.6). Напруження, які діють на площадках 1, 2, 3, 4 в позитивних напрямках, вказані на рисунку. З урахуванням змін напружень в просторі, значення σ_x , для граней 1 і 3 не в точності рівні один одному. Символи $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, відносяться до точки (x, y) , центру прямокутника на рис. 2.6. Значення напружень посередині меж будуть позначатися через $(\sigma_x)_1, (\sigma_y)_2$ і т. д. Оскільки межі малі, діючі по ним зусилля отримуються шляхом множення напружень на площі меж, на яких вони діють.

Об'ємна сила, якою ми нехтували при розгляді рівноваги трикутної призми на рис. 2.2, як величиною вищого порядку малості, тепер повинна враховуватися, оскільки вона має той же порядок, що і члени, що описують зміни, які досліджуються компонентами напружень. Якщо позначити через X, Y компоненти об'ємної сили, то рівняння рівноваги сил, діючих в напрямку осі x та y , матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Рівняння (2.18) є диференціальним рівнянням рівноваги для двовимірної задачі.

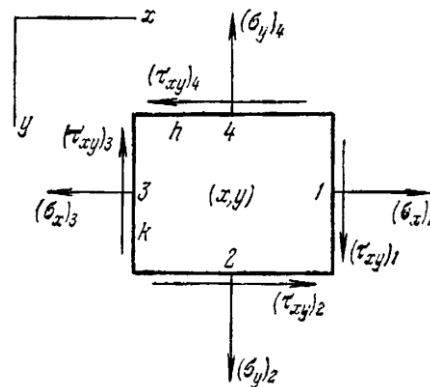


Рис. 2.6. Схема до визначення диференціальних рівнянь рівноваги

Граничні умови. Рівняння (2.18) повинно задовольняти у всіх точках за обсягом тіла. Компоненти напруження змінюються по об'єму розглянутої пластинки. При досягненні її межі вони повинні бути такими, щоб перебувати в рівновазі з зовнішніми силами, прикладеними на границі пластинки. В силу цього зовнішні сили можна розглядати як продовження розподілення внутрішніх напружень. Умови рівноваги на границях можна отримати з рівнянь (2.4). Розглянемо малу трикутну призму PBC (рис. 2.2), таку, що її сторона BC збігається з границею пластинки,

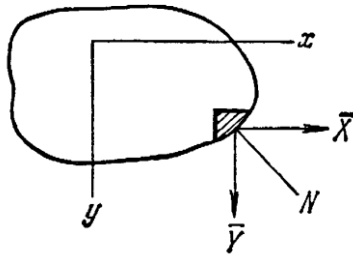


Рис. 2.7. Схема до визначення граничних рівнянь

як показано на рис. 2.7. Позначаючи через $\bar{X}$ і $\bar{Y}$ компоненти поверхневих сил, віднесених до одиниці площі в цій точці границі, отримуємо

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy},$$

$$\bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy}, \quad (2.19)$$

де l і m - направляючі косинуси нормалі N до границі.

Позитивний знак в формулі (2.19) береться в тому випадку, коли нормаль N спрямована в бік позитивних значень y . Якщо ж нормаль спрямована в протилежний сторону, то береться негативний знак. З формули (2.19) видно, що компоненти напружень на границі рівні компонентам поверхневих зусиль, віднесених до одиниці площі границі.

Рівняння суцільності. Визначення напруженого стану в тілі, що знаходиться під дією заданих зовнішніх сил, є однією з основних задач теорії пружності. У двовимірному випадку необхідно вирішити диференціальне рівняння рівноваги (2.18), і рішення це повинно бути таким, щоб задовольнялися граничні умови (2.19). Ці рівняння, виведені із застосуванням статичних умов рівноваги і містять три компоненти напружень $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, недостатні для визначення зазначених компонент. Задача є статично невизначена: щоб отримати її рішення, слід розглянути пружну деформацію тіла.

Для двовимірних задач ми розглянемо три компоненти деформації, а саме

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.20)$$

Ці три компоненти деформації виражаються через дві функції u і v . Отже, вони не можуть вибиратися довільно і повинні існувати деяке

співвідношення між компонентами деформації; його можна легко отримати з рівняння (2.20). Продиференціювавши перше з рівнянь (2.20) двічі по y , друге двічі по x , а третє - один раз по x і вдруге по y , знаходимо

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.21)$$

Диференціальне рівняння (2.21) має назву *умова суцільності*. Воно повинно задовольнятися при підстановці компонент деформації, щоб забезпечити існування функцій u і v , пов'язаних з компонентами деформації співвідношеннями (2.20). Використовуючи закон Гука (1.38), можна, перетворити умову (2.21) та отримати співвідношення, з яким повинні задовольнятися компоненти напружень.

У випадку плоского напруженого стану вирази (1.38) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), & \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Підставляючи вирази (2.22) в рівняння (2.21) отримаємо

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y}. \quad (2.23)$$

Для окремого випадку, коли єдиною об'ємною силою є вага тіла, продиференціювавши перше рівняння (2.18) по x , а друге по y і склавши їх отримаємо

$$2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}. \quad (2.24)$$

Підставляючи рівняння (2.24) в рівняння (2.23), отримаємо умову суцільності в напруженнях у вигляді

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (2.25)$$

У загальному випадку рівняння (2.25) запишеться наступним чином

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{1}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \quad (2.26)$$

Рівняння рівноваги (2.18) разом з граничними умовами (2.19) і рівнянням суцільності (2.21 або 2.25 або 2.26) дають нам систему рівнянь,

яка зазвичай достатня для повного визначення розподілу напружень в двовимірній задачі. Цікаво відзначити, що в разі постійних об'ємних сил рівняння, що визначають розподіл напружень, не містять пружних констант матеріалу. Отже, розподіл напружень в цьому випадку буде одним і тим же для всіх ізотропних матеріалів, якщо ці рівняння достатні для повного визначення напружень.

Функція напружень. Рішення двовимірних задач зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь рівноваги разом з умовою суцільності і граничними умовами. Почнемо з випадку, коли єдиним видом об'ємних сил є сили тяжіння. Тоді повинні задовольнятися рівняння (2.25) та наступне рівняння:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0, \quad (2.27)$$

До даних рівнянь слід додати граничні умови (2.19). Звичайний метод вирішення цих рівнянь полягає у введенні деякої нової функції, яка має назву функція напружень. Рівняння (2.27) задовольняються, якщо ввести деяку функцію ϕ від x і y , яка пов'язана з компонентами напруження наступними залежностями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \rho g y, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho g y, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (2.28)$$

Таким чином можна отримати безліч рішень рівнянь рівноваги (2.27). Дійсним рішенням задачі буде те з них, яке задовольняє також рівняння сумісності (2.25). Підставляючи вирази (2.28) для компонент напружень в рівняння (2.25) знаходимо, що функція напружень ϕ повинна задовольняти рівняння

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0. \quad (2.29)$$

Таким чином, рішення двовимірної задачі, коли єдиною об'ємною силою є вага тіла, зводиться до знаходження рішення рівняння (2.29), яке задовольняє граничним умовам (2.19). Функція напружень ϕ має назву функція напружень Ері.

Розглянемо тепер більш загальний випадок об'ємних сил, представивши, що ці сили мають потенціал. Тоді компоненти X і Y в рівняннях (2.18) визначатимуться рівнянням

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad (2.30)$$

де V -потенційна функція. Рівняння (2.18) приймає вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (2.31)$$

Ці рівняння мають ту ж форму, що і рівняння (2.27). Вони будуть задовольнятися, якщо покласти

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad (2.32)$$

де ϕ - функція напружень Ері. Підставляючи вирази (2.32) в рівняння сумісності (2.26) для плоского напруженого стану, отримуємо

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = -\frac{1}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right). \quad (2.33)$$

Аналогічне рівняння можна отримати і для випадку плоскої деформації.

Коли об'ємної силою є тільки вага, потенціал V дорівнює - $\rho g y$. В цьому випадку права частина рівняння (2.33) обертається в нуль.

2.2 Двовимірні задачі в декартовій системі координат

Вище було показано, що рішення двовимірних задач теорії пружності, коли об'ємні сили відсутні або постійні, зводиться до інтегрування диференціального рівняння (2.29) при граничних умовах (2.19).

Розглянемо випадок довгої прямокутної пластинки. Рішення рівняння (2.29) можна представити в формі поліномів. Вибираючи поліноми різних ступенів і підбираючи для них відповідні коефіцієнти, можна вирішити багато практично важливих задач.

Почнемо з полінома другого ступеня

$$\phi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2, \quad (2.34)$$

Поліном (2.34) задовольняє рівняння (2.29). З рівнянь (2.28), вважаючи $\rho g = 0$, знаходимо

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = c_2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = a_2, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} = -b_2. \quad (2.35)$$

Всі три компоненти напружень постійні по всьому об'єму тіла; таким чином, функції напруження (2.34) відповідає випадок комбінованого однорідного розтягування або стискання в двох взаємно перпендикулярних напрямках і однорідного зсуву. У випадку прямокутної пластинки зі

сторонами, паралельними координатним осям, ці зусилля показані на рис. 2.8, а.

Розглянемо тепер функцію напружень у вигляді полінома третього ступеня:

$$\phi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{3 \cdot 2} y^3 \quad (2.36)$$

Ця функція також задовольняє рівняння (2.29). Використовуючи вираз (2.28) і вважаючи $\rho g = 0$, знаходимо

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2} = c_3 x + d_3 y, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2} = a_3 x + b_3 y, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial \phi_3}{\partial x \partial y} = -b_3 x - c_3 y. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Для прямокутної пластинки, показаної на рис. 2.8,б, прирівнявши всі коефіцієнти, крім d_3 до нуля, отримуємо напружений стан згину моментами прикладеними по кінцях пластини. Якщо лише один коефіцієнт a_3 відмінний від нуля, отримуємо випадок чистого згину під дією нормальних напружень (вертикальне навантаження розподіляється по трикутнику), прикладених до сторін пластинки $y = \pm c$. Якщо вважати відмінними від нуля коефіцієнти b_3 або c_3 , то знаходимо, що по краях пластинки діють не тільки нормальні, але також і дотичні напруження. На рис. 2.8, в зображено випадок, в якому в функції (2.36) рівні нулю всі коефіцієнти, крім b_3 .

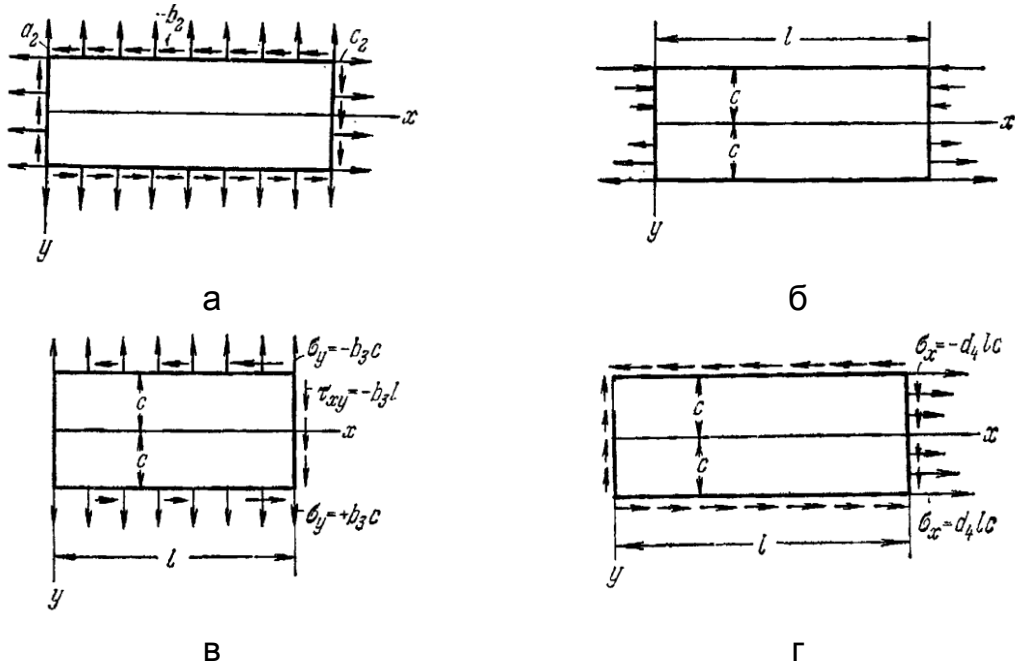


Рис. 2.8. Схеми напруженого стану пластинки при відповідних рішеннях функції напружень

Уздовж країв $y = \pm c$ маємо рівномірно розподілені розтягуючі і стискаючі напруження, а також дотичні напруження, пропорційні координаті x . На краю $x=l$ діє тільки одне постійне дотичне напруження b_3l , а на краю $x = 0$ напруження відсутнє. Аналогічний розподіл напружень виходить в тому випадку, якщо прийняти відмінним від нуля коефіцієнт c_3 . Більш детально описана дія напружень в джерелі [7].

Прийнявши функцію напружень у вигляді поліномів другого або третього ступеня, ми не накладаємо ніяких обмежень на вибір величин коефіцієнтів, оскільки рівняння (2.29) задовольняється при будь-яких їх значеннях. У разі поліномів більш високих ступенів рівняння (2.29) задовольняється лише в тому випадку, якщо між коефіцієнтами виконуються відповідні умови зв'язку. Візьмемо, наприклад, функцію напружень у вигляді полінома четвертого ступеня

$$\phi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{3 \cdot 2} xy^3 + \frac{e_4}{4 \cdot 3} y^4, \quad (2.38)$$

Підставляючи вираз (2.38) в рівняння (2.29), знаходимо, що він задовольняється лише в тому випадку, коли $e_4 = -(2c_4 + a_4)$.

Компоненти напруження в цьому випадку виражаються формулами

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial y^2} = c_4 x^2 + d_4 xy - (2c_4 + a_4) y^2, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x^2} = a_4 x^2 + b_4 xy + c_4 y^2, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x \partial y} = -\frac{b_4}{2} x^2 - 2c_4 xy - \frac{d_4}{2} y^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Коефіцієнти a_4, b_4, c_4, d_4 в цих виразах довільні. Підбираючи їх відповідним чином, можна отримати різні умови навантаження прямокутної пластинки. Наприклад, приймаючи всі коефіцієнти, за винятком d_4 , рівними нулю, знаходимо

$$\sigma_x = d_4 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{d_4}{2} y^2. \quad (2.40)$$

Якщо вважати коефіцієнт d_4 позитивним, то сили, діючі на прямокутну пластинку, які викликають напруження (2.40), мають вигляд, представлений на рис. 2.8, г. На поздовжніх сторонах пластинки $y = \pm c$ діють

рівномірно розподілені дотичні зусилля, по кінцях — дотичні зусилля, розподілені по параболічному закону. Дотичні зусилля, що діють по контуру пластинки, приводяться до пари з моментом

$$M = \frac{d_4 c^2 l}{2} 2c - \frac{1}{3} \frac{d_4 c^2}{2} 2cl = \frac{2}{3} d_4 c^3 l. \quad (2.41)$$

Ця пара врівноважується іншою парою, утвореною нормальними зусиллями, що діють на краю пластинки $x=l$.

Розглянемо функцію напружень у вигляді полінома п'ятого ступеня.

$$\phi_5 = \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{3 \cdot 2} x^2 y^3 + \frac{c_5}{4 \cdot 3} xy^4 + \frac{l_5}{5 \cdot 4} y^5. \quad (2.42)$$

Підстановка виразу (2.42) в рівняння (2.29) показує, що це рівняння задовольняється, якщо $e_5 = -(2c_5 + 3a_5)$, $f_5 = -\frac{1}{3}(b_5 + 2d_5)$.

Відповідні компоненти напружень рівні

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2} = \frac{c_5}{3} x^3 + d_5 x^2 y - (2c_5 + 3a_5) xy^2 - \frac{1}{3} (b_5 + 2d_5) y^3,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2} = a_5 x^3 + b_5 x^2 y + c_5 xy^2 + \frac{d_5}{3} y^3, \quad (2.43)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{3} b_5 x^3 - c_5 x^2 y - d_5 xy^2 + \frac{1}{3} (2c_5 + 3a_5) y^3.$$

Коефіцієнти a_5, b_5, c_5, d_5 знову довільні, і, вибираючи їх, можна отримати рішення для різних умов навантаження пластинки. Беручи, наприклад, всі коефіцієнти, крім d_5 , рівними нулю, знаходимо

$$\sigma_x = d_5 (x^2 y - \frac{2}{3} y^3), \quad \sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3, \quad \tau_{xy} = -d_5 xy^2. \quad (2.44)$$

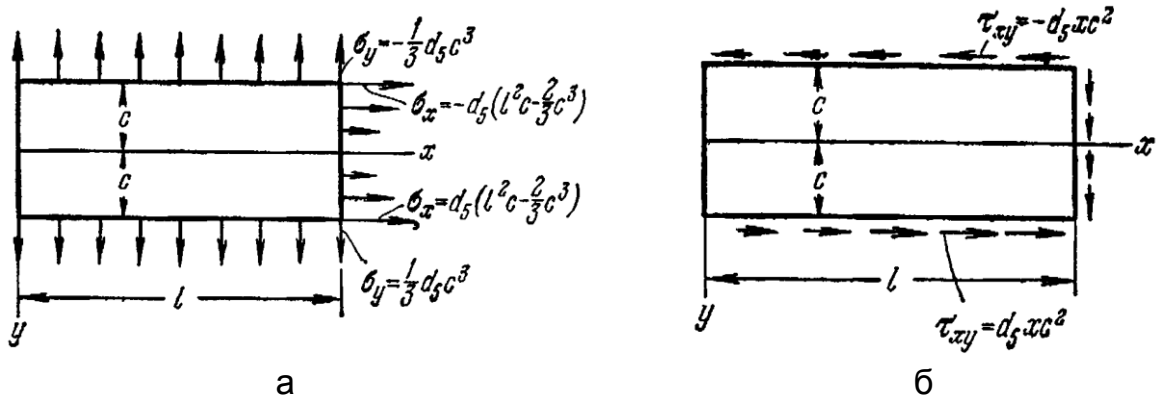


Рис. 2.9. Окремий випадок розподілення напружень по краях пластинки при умові, що функція напружень задана поліномом п'ятого ступеня

При цьому нормальні зусилля рівномірно розподіляються вздовж поздовжнього краю пластинки (рис. 2.9, а). Уздовж краю $x=l$ нормальні зусилля складаються з зусиль, розподілених по лінійному закону, і зусиль, які розподілені за законом кубічної параболи. Дотичні напруження на поздовжніх краях пластинки пропорційні x , а вздовж краю $x=l$ розподілені по параболічному закону. Розподіл цих напружень по контуру пластинки показано на рис. 2.9, б.

Так як рівняння (2.29) являє собою лінійне диференціальне рівняння, то сума декількох рішень цього рівняння також буде його рішенням. В силу цього можна виконувати накладення елементарних рішень, які були розглянуті вище, і знаходити нові рішення.

Згин консолі, яка навантажена на кінці. Розглянемо консоль, що має вузький прямокутний поперечний переріз одиничної товщини. До консолі прикладена згинаюча сила P на її кінці (рис. 2.10). Верхня і нижня межі консолі вільні від навантаження, на торці $x=0$ розподілені дотичні зусилля, результуюча яких рівна P . Цим умовам навантаження можна задовольнити, вибравши належну комбінацію напружень чистого зсуву з напруженнями (2.40), показаними на рис. 2.8, г. Накладаючи стан чистого зсуву $\tau_{xy} = -b_2$ на напружений стан, який визначається формулами (2.40), отримуємо

$$\sigma_x = d_4 xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2, \quad (2.45)$$

Щоб поздовжні краї $y = \pm c$ консолі були вільні від зусиль, необхідно прийняти

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = -b_2 - \frac{d_4}{2} c^2 = 0. \quad (2.46)$$

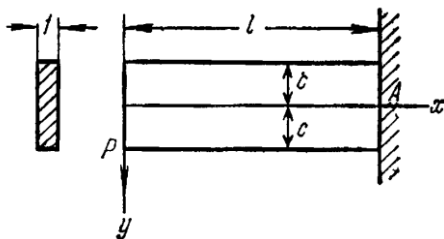


Рис. 2.10. Розрахункова схема до визначення напружень при згині консольної балки

Звідки

$$d_4 = -\frac{2b_2}{c^2}. \quad (2.47)$$

Для виконання умови на навантаженому кінці консолі, сума дотичних зусиль, розподілених по торці, повинна дорівнювати P . Звідси

$$-\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \int_{-c}^c (b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2) dy = P. \quad (2.48)$$

З цієї залежності отримуємо

$$b_2 = \frac{3}{4} \frac{P}{c}. \quad (2.49)$$

Підставляючи знайдені вирази для коефіцієнтів d_4 і b_2 в рівняння (2.45), отримаємо

$$\sigma_x = -\frac{3}{2} \frac{P}{c^3} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{3}{4} \frac{P}{c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right). \quad (2.50)$$

Аналізуючи рівняння (2.50) стає зрозумілим, що $2/3c^3$ - це момент інерції I поперечного перерізу консолі. Тоді отримуємо

$$\sigma_x = -\frac{P}{I} xy, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I} (c^2 - y^2). \quad (2.51)$$

Це рішення повністю збігається з елементарним рішенням, яке дається в курсах опору матеріалів. Слід замітити, що це рішення є точним лише в тому випадку, коли дотичні зусилля на кінці розподіляються за тим же параболічним законом, що і дотичні напруження τ_{xy} і інтенсивність нормальної сили в затисненому кінці пропорційна y . Якщо зусилля на кінці розподіляються іншим чином, розподілення напружень (2.51) не є точним рішенням для області поблизу кінця консолі, проте в силу принципу Сен-Венана воно може вважатися задовільним для поперечних перерізів, досить віддалених від цього кінця.

Розглянемо тепер переміщення, відповідні напруженням (2.51). Застосовуючи закон Гука, знаходимо

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{Pxy}{EI}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{v\sigma_x}{E} = \frac{vP}{EI} xy, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} = -\frac{P}{2IG} (c^2 - y^2). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Процедура визначення компонент переміщення u і v складається в інтегруванні рівнянь (2.52). Інтегруючи перші два рівняння (2.52), знаходимо

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} + f(y), \quad v = \frac{vPxy^2}{2EI} + f_1(x). \quad (2.53)$$

де $f(y)$ і $f_1(x)$ - невідомі функції, з яких одна залежить тільки від y , інша - тільки від x . Підставляючи ці значення u і v в третє рівняння (2.52), отримуємо

$$-\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{vPy^2}{2EI} + \frac{df_1(x)}{dx} = -\frac{P}{2IG} (c^2 - y^2). \quad (2.54)$$

В цьому рівнянні деякі члени є функціями тільки від x , а деякі-тільки від y ; один з членів не залежить ні від x , ні від y . Позначимо ці групи членів відповідно через $F(x)$, $G(y)$, K так що

$$F(x) = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{df_1(x)}{dx}, \quad G(y) = \frac{df(y)}{dy} + \frac{vPy^2}{2EI} - \frac{Py^2}{2IG},$$

$$K = -\frac{Pc^2}{2IG}.$$
(2.55)

Тепер рівняння, яке розглядаємо можна переписати у вигляді

$$F(x) + G(y) = K. \quad (2.56)$$

З цього співвідношення випливає, що функція $F(x)$ тотожно дорівнює деякій постійній d , а функція $G(y)$ – деякій постійній e . В іншому випадку функції $F(x)$ і $G(y)$ вимірювались б в залежності від x і y , і при зміні однієї тільки змінної x або однієї тільки змінної y рівність обов'язково порушувалась. Таким чином,

$$e + d = -\frac{Pc^2}{2IG}. \quad (2.57)$$

та

$$\frac{df_1(x)}{dx} = \frac{Px^3}{2EI} + d, \quad \frac{df(y)}{dy} = -\frac{vPy^2}{2EI} + \frac{Py^2}{2IG} + e. \quad (2.58)$$

Значить, функції $f(y)$ і $f_1(x)$ мають вигляд

$$f(y) = -\frac{vPy^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g, \quad f_1(x) = \frac{Px^3}{6EI} + dx + h. \quad (2.59)$$

Підставляючи їх в вирази для u і v , знаходимо

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{vPy^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + ey + g, \quad v = \frac{vPxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + dx + h. \quad (2.60)$$

Тепер постійні d , e , g , h можна визначити з рівняння (2.57) та із трьох умов закріплення, які необхідні, щоб перешкодити руху балки в площині xy як абсолютно твердого тіла. Припустимо, що точка A , є центром тяжіння скінченного поперечного перерізу, фіксована. Тоді при $x = 1$, $y = 0$ компоненти переміщень u і v рівні нулю і з рівнянь (2.60) слідує, що

$$g = 0, \quad h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dl.$$

Рівняння зігнутої осі консолі отримуємо при підстановці $y = 0$ в друге рівняння (2.60). Звідси

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^3}{6EI} - d(l-x). \quad (2.61)$$

Для визначення постійної d в цьому рівнянні нам потрібно скористатися третьою умовою закріплення, що виключає можливість обертання балки в площині x щодо фіксованої точки А. Цю умову можна реалізувати декількома способами. Розглянемо два випадки.

1) Елемент осі балки на кінці А зафіксовано. Тоді умова закріплення має вигляд

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=l, y=0} = 0. \quad (2.62)$$

2) Вертикальний елемент поперечного перерізу в точці А зафіксований. Тоді умова закріплення набирає вигляду

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=l, y=0} = 0. \quad (2.63)$$

У першому випадку з рівняння (2.61) отримуємо

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI}, \quad (2.64)$$

а з рівняння (2.57) слідує

$$e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}. \quad (2.65)$$

Підставляючи знайдені постійні в рівняння (2.60), знаходимо

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{vPy^3}{6EI} + \frac{Py^2}{6IG} + \left(\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG} \right) y, \quad (2.66)$$

$$v = \frac{vPxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Рівняння зігнутої осі балки має вигляд

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI}. \quad (2.67)$$

Воно дає значення прогину для навантаженого кінця ($x = 0$), яке рівне $Pl^3/(3EI)$. Це значення збігається із значенням, яке зазвичай виходить в елементарних курсах опору матеріалів.

Якщо замість того, щоб фіксувати горизонтальний елемент осі, зафіксувати вертикальний елемент поперечного перерізу в точці А, то з умови (2.63) і першого з рівнянь (2.60) отримуємо

$$e = \frac{Pl^2}{2EI}, \quad (2.68)$$

а з рівняння (2.57) знаходимо

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}. \quad (2.69)$$

Підставляючи вираз (2.69) у друге з рівнянь (2.60), маємо

$$(v)_{y=0} = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pc^2}{2IG}(l-x). \quad (2.70)$$

Згин балки рівномірним навантаженням. Нехай балка вузького прямокутного перерізу одиничної ширини, яка спирається своїми кінцями на опори, згинається рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q , рис. 2.11. Умови на верхній і нижній гранях балки мають вид

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = 0, (\sigma_y)_{y=+c} = 0, (\sigma_y)_{y=-c} = -q. \quad (2.71)$$

Умови на кінцях $x = \pm l$ представляються в формі

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = \mp ql, \quad \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0. \quad (2.72)$$

Останні два рівняння із (2.72) виражають той факт, що на кінцях балки відсутні поздовжні зусилля та згинаючі моменти.

Умови (2.71) та (2.72) можна задовольнити, комбінуючи деякі рішення в формі поліномів, які були отримані раніше. Розглянемо рішення (2.44), яке проілюстровано на рис. 2.9, і яке виведено на основі полінома п'ятого ступеня (2.42).

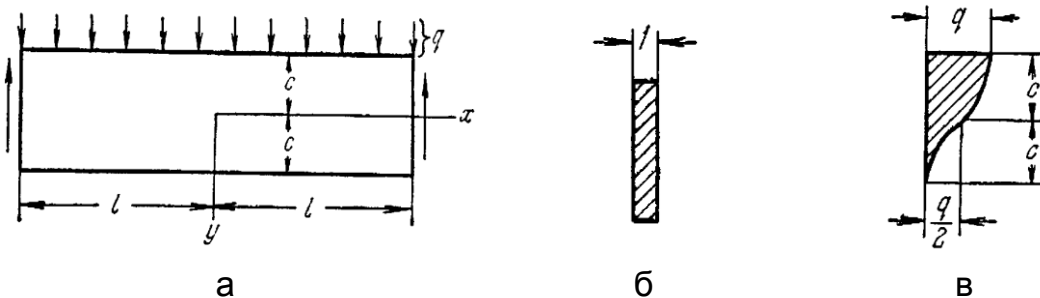


Рис. 2.11. Схеми до визначення напружень та переміщень балки при дії рівномірно розподіленого навантаження

Щоб зняти розтягуючі напруження вздовж краю $y=c$ і дотичне напруження вздовж країв $y = \pm c$, накладемо на тіло просте стиснення $\sigma_y = a_2$ із рішення (2.34) та напруження $\sigma_y = b_3y$ і $\tau_{xy} = -b_3x$, що зображені на рис. 2.8, в. Таким шляхом знаходимо

$$\sigma_x = d_5 \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right), \sigma_y = \frac{1}{3} d_5 y^3 + b_3 y + a_3, \quad (2.73)$$

$$\tau_{xy} = -d_5 x y^2 - b_3 x.$$

Із умови (2.71) отримуємо

$$-d_5 c^2 - b_3 = 0, \quad \frac{1}{3} d_5 c^3 + b_3 c + a_2 = 0, \quad (2.74)$$

$$-\frac{1}{3} d_5 c^3 - b_3 c + a_2 = -q, \quad (2.74)$$

звідки

$$a_2 = -\frac{q}{2}, \quad b_3 = \frac{3}{4} \frac{q}{c}, \quad d_5 = -\frac{3}{4} \frac{q}{c^3}. \quad (2.75)$$

Підставляючи ці значення в рівняння (2.73) і помічаючи, що вираз $2c^3/3$ дорівнює моменту інерції I прямокутника одиничної товщини, знаходимо:

$$\sigma_x = -\frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) = -\frac{q}{2I} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right),$$

$$\sigma_y = -\frac{3q}{4c^3} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) =$$

$$= -\frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right), \quad (2.76)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3q}{4c^3} (c^2 - y^2) x = -\frac{q}{2I} (c^2 - y^2) x.$$

Компоненти напружень (2.76) задовольняють умовам (2.71) на позовжніх краях, а також і двом першим умовам (2.72) на кінцях. Для того, щоб перетворювались в нуль згинаючі моменти на кінцях балки, накладемо на рішення (2.76) стан чистого згину з напруженнями $\sigma_x = d_3 y$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, зображеними на рис. 2.8, б і визначимо постійну d_3 із умови, що при $x = \pm l$.

$$\int_{-c}^c \sigma_x y dy = \int_{-c}^c \left[-\frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left(l^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y \right] y dy = 0. \quad (2.77)$$

Звідси

$$d_3 = \frac{3}{4} \frac{q}{c} \left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right). \quad (2.78)$$

В кінці отримуємо

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + \frac{3}{4} \frac{q}{c} \left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right) y = \\ &= \frac{q}{2I} \left(l^2 - x^2 \right) y + \frac{q}{2I} \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right)\end{aligned}\quad (2.79)$$

Перший член в цьому виразі представляє напруження, які аналогічні напруженням в елементарній теорії згину, а другий член – необхідна поправка. Поправочний член не залежить від x і малий в порівнянні з максимальним напруженням згину, якщо проліт балки великий в порівнянні з її висотою. Для таких балок елементарна теорія згину дає достатньо точні значення напружень σ_x . Вираз (2.79) є точним тільки в тому випадку, якщо нормальні умови на кінцях балки $x = \pm l$ розподілені по закону

$$\bar{X} = \pm \frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right), \quad (2.81)$$

тобто, якщо нормальні зусилля на кінцях балки дорівнюють напруженням σ_x при $x = \pm l$, отриманими за формулою (2.79). Головний момент і головний вектор цих зусиль дорівнюють нулю. Тоді, виходячи із принципів Сен-Венана, вплив цих зусиль на напруження на значному віддаленні від кінців балки (наприклад більше висоти балки) є незначним і їм можна знехтувати. Таким чином рішення (2.79) в цих віддалених від кінців точок є достатньо точним, якщо не прикладені зусилля $\bar{X}$.

Відмінність між точним рішенням (2.79) та наближеним рішенням, яке представлено першим членом рівняння (2.79) впливає із того, що при виведенні наближеного рішення передбачалось, що поздовжні волокна балки знаходяться в умовах чистого розтягу. Між тим з рішення (2.76) можна бачити, що між цими волокнами діють стискальні напруження σ_y . Ці напруження і дають поправку, яка представлена другим членом рівняння (2.79). Розподілення стискальних напружень σ_y по висоті балки представлено на рис. 2.11, в.

Переміщення u та v можна знайти припустивши, що в центрі тяжіння середнього поперечного перерізу ($x=0, y=0$) горизонтальне переміщення дорівнює нулю, а вертикальне переміщення дорівнює прогину δ . Тоді використовуючи рішення (2.76) та (2.79) знаходимо

$$u = \frac{q}{2EI} \left[\left(l^2 x - \frac{x^3}{3} \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + \nu x \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right], \quad (2.82)$$

$$v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y + v \left[(l^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right] \right\} -$$

$$-\frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} v \right) c^2 x^2 \right] + \delta.$$

З виразу (2.82) для v бачимо, що нейтральна вісь балки не проходить по серединній лінії. Завдяки стискаючому напруженню

$$(\sigma_y)_{y=0} = -q/2, \quad (2.83)$$

серединна лінія має деформацію розтягу $\nu q/(2E)$, звідки

$$(u)_{y=0} = \frac{\nu q x}{2E}. \quad (2.84)$$

Із виразу для v знаходимо рівняння кривої прогинів

$$(v)_{y=0} = \delta - \frac{q}{2EI} \left[\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \right]. \quad (2.85)$$

Припускаючи, що на кінцях балки прогин дорівнює нулю, знаходимо

$$\delta = \frac{5}{24} \frac{q l^4}{EI} \left[1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{l^2} \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]. \quad (2.86)$$

Множник перед дужками дорівнює прогину, який отримуємо із елементарної теорії в припущенні, що поперечний переріз балки в процесі деформації залишається плоским. Другий член в квадратних дужках представляє собою поправку, яка пов'язана з впливом поперечного зусилля.

Диференціюючи рівняння (2.85) для кривої прогинів двічі по x , знаходимо наступний вираз для кривизни:

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)_{y=0} = \frac{q}{EI} \left[\frac{l^2 - x^2}{2} + c^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right]. \quad (2.87)$$

Додатковий член в дужках представляє собою необхідну поправку до звичайної елементарної формули.

2.3 Рішення двовимірних задач за допомогою рядів Фур'є

В попередньому розділі було показано, що якщо по довжині балки вузького прямокутного поперечного перерізу діє безперервно розподілене навантаження, то в деяких простих випадках можна використовувати функцію напружень у вигляді поліномів. Набагато більша степінь загальності рішень виходить, якщо взяти цю функцію у вигляді ряду Фур'є (по x). Кожна компонента навантаження на верхній і нижній гранях балки може мати ту степінь, що можлива в цих рядах. Наприклад, компоненти навантаження можуть мати розриви.

Рівняння для функції навантаження (2.29) можна задовольнити, якщо взяти функцію ϕ у вигляді

$$\phi = \sin \frac{m\pi x}{l} f(y), \quad (2.88)$$

де m – будь-яке ціле число, а функція $f(y)$ залежить тільки від y . Підставляючи (2.88) в (2.29) та використовуючи позначення $m\pi/l = \alpha$, отримуємо наступне рівняння для визначення $f(y)$:

$$\alpha^4 f(y) - 2\alpha^2 f''(y) + f^{IV}(y) = 0, \quad (2.89)$$

Загальне рішення цього лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами має вигляд

$$f(y) = C_1 \cdot \operatorname{ch} \cdot \alpha y + C_2 \cdot \operatorname{sh} \cdot \alpha y + C_3 y \cdot \operatorname{ch} \cdot \alpha y + C_4 y \cdot \operatorname{sh} \cdot \alpha y. \quad (2.90)$$

Тоді функція напружень визначається виразом

$$\phi = \sin \cdot \alpha x (C_1 \cdot \operatorname{ch} \cdot \alpha y + C_2 \cdot \operatorname{sh} \cdot \alpha y + C_3 y \cdot \operatorname{ch} \cdot \alpha y + C_4 y \cdot \operatorname{sh} \cdot \alpha y). \quad (2.91)$$

і відповідні компоненти напружень визначаються формулами

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sin \alpha x [C_1 \alpha^2 \cdot \operatorname{ch} \cdot \alpha y + C_2 \alpha^2 \cdot \operatorname{sh} \cdot \alpha y + \\ &+ C_3 \alpha (2 \operatorname{sh} \cdot \alpha y + \alpha y \cdot \operatorname{ch} \cdot \alpha y) + C_4 \alpha (2 \operatorname{ch} \cdot \alpha y + \alpha y \cdot \operatorname{sh} \cdot \alpha y)]; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\alpha^2 \sin \cdot \alpha x (C_1 \cdot \operatorname{ch} \cdot \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \cdot \alpha y + \\ &+ C_3 y \cdot \operatorname{ch} \cdot \alpha y + C_4 y \cdot \operatorname{sh} \cdot \alpha y); \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\alpha \cdot \cos \cdot \alpha x [C_1 \alpha \cdot \operatorname{sh} \cdot \alpha y + C_2 \alpha \cdot \operatorname{ch} \cdot \alpha y + \\ &+ C_3 (\operatorname{ch} \cdot \alpha y + \alpha y \cdot \operatorname{sh} \cdot \alpha y) + C_4 (\operatorname{sh} \cdot \alpha y + \alpha y \cdot \operatorname{ch} \cdot \alpha y)] \end{aligned} \quad (2.92)$$

Розглянемо окремий випадок балки прямокутного перерізу, яка має опори на кінцях. На верхній та нижній гранях балки діють вертикальні безперервні зусилля з інтенсивністю $A \sin \alpha x$ та $B \sin \alpha x$ відповідно. Рисунок 2.12 відповідає випадку, коли $\alpha = 4\pi/l$ і значення A та B позитивні.

Розподілення навантажень для цього випадку можна отримати із формули (2.92).

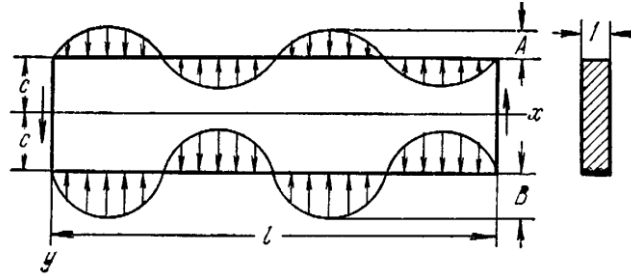


Рис. 2.12. Розрахункова схема до визначення навантажень при дії безперервних зусиль на верхній та нижній гранях балки

Постійні інтегрування $C_1 \dots C_4$ можна визначити з умов на верхній та нижній гранях балки $y = \pm c$. Ці умови мають вид

$$\begin{array}{lll} \text{при } y = +c & \tau_{xy} = 0 & \sigma_y = -B \sin \alpha x \\ \text{при } y = -c & \tau_{xy} = 0 & \sigma_y = -A \sin \alpha x \end{array} \quad (2.93)$$

Підставляючи ці значення в третє з рівнянь (2.92), отримуємо

$$\begin{aligned} & C_{1\alpha} \cdot sh \cdot \alpha c + C_{2\alpha} \cdot ch \cdot \alpha c + C_3(ch \cdot \alpha c + \alpha c \cdot sh \cdot \alpha c) + \\ & + C_4(sh \cdot \alpha c + \alpha c \cdot ch \cdot \alpha c) = 0, \\ & -C_{1\alpha} \cdot sh \cdot \alpha c + C_{2\alpha} \cdot ch \cdot \alpha c + C_3(ch \cdot \alpha c + \alpha c \cdot sh \cdot \alpha c) + \\ & + C_4(sh \cdot \alpha c + \alpha c \cdot ch \cdot \alpha c) = 0, \end{aligned} \quad (2.94)$$

звідки

$$C_3 = -C_2 \frac{\alpha \cdot ch \cdot \alpha c}{ch \cdot \alpha c + \alpha c \cdot sh \cdot \alpha c}, \quad C_4 = -C_1 \frac{\alpha \cdot sh \cdot \alpha c}{sh \cdot \alpha c + \alpha c \cdot ch \cdot \alpha c}. \quad (2.95)$$

Користуючись умовою на гранях $y = \pm c$ та другим рівнянням (2.92), знаходимо

$$\begin{aligned} \alpha^2 (C_1 \cdot ch \cdot \alpha c + C_2 \cdot sh \cdot \alpha c + C_3 c \cdot \cos \cdot \alpha c + C_4 c \cdot sh \cdot \alpha c) &= B, \\ \alpha^2 (C_1 \cdot ch \cdot \alpha c + C_2 \cdot sh \cdot \alpha c + C_3 c \cdot \cos \cdot \alpha c + C_4 c \cdot sh \cdot \alpha c) &= A. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Додаючи та віднімаючи ці рівняння та використовуючи співвідношення (2.95), отримуємо

$$C_1 = \frac{A+B}{\alpha^2} \cdot \frac{sh \cdot \alpha c + \alpha c \cdot ch \cdot \alpha c}{sh \cdot 2\alpha c + 2\alpha c}, \quad C_2 = \frac{A-B}{\alpha^2} \cdot \frac{ch \cdot \alpha c + \alpha c \cdot sh \cdot \alpha c}{sh \cdot 2\alpha c - 2\alpha c}, \quad (2.97)$$

$$C_3 = \frac{A-B}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha \cdot ch \cdot \alpha c}{sh \cdot 2\alpha c - 2\alpha c}, \quad C_4 = \frac{A+B}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha \cdot sh \cdot \alpha c}{sh \cdot 2\alpha c + 2\alpha c}.$$

Підставляючи ці значення у рівняння (2.92) знаходимо наступне рівняння для компонент напруження

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{(A+B)\sin \alpha x (\alpha c \cdot ch \cdot \alpha c - sh \cdot \alpha c) \cdot ch \cdot \alpha y - \alpha y \cdot sh \cdot \alpha y \cdot sh \cdot \alpha c}{sh \cdot 2\alpha c + 2\alpha c} - \\ &- \frac{(A-B)\sin \alpha x (\alpha c \cdot sh \cdot \alpha c - ch \cdot \alpha c) \cdot sh \cdot \alpha y - \alpha y \cdot ch \cdot \alpha y \cdot ch \cdot \alpha c}{sh \cdot 2\alpha c - 2\alpha c}; \\ \sigma_y &= -\frac{(A+B)\sin \alpha x (\alpha c \cdot ch \cdot \alpha c + sh \cdot \alpha c) \cdot ch \cdot \alpha y - \alpha y \cdot sh \cdot \alpha y \cdot sh \cdot \alpha c}{sh \cdot 2\alpha c + 2\alpha c} + \\ &+ \frac{(A-B)\sin \alpha x (\alpha c \cdot sh \cdot \alpha c + ch \cdot \alpha c) \cdot sh \cdot \alpha y - \alpha y \cdot ch \cdot \alpha y \cdot ch \cdot \alpha c}{sh \cdot 2\alpha c - 2\alpha c}; \\ \tau_{xy} &= -(A+B)\cos \alpha x \frac{\alpha c \cdot ch \cdot \alpha c \cdot sh \cdot \alpha y - \alpha y \cdot ch \cdot \alpha y \cdot sh \cdot \alpha c}{sh \cdot 2\alpha c + 2\alpha c} + \\ &+ (A-B)\cos \alpha x \frac{\alpha c \cdot sh \cdot \alpha c \cdot ch \cdot \alpha y - \alpha y \cdot sh \cdot \alpha y \cdot ch \cdot \alpha c}{sh \cdot 2\alpha c - 2\alpha c}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Напруження, які діють вздовж країв $y = \pm c$ задовольняють умовам, що зображені на рис. 2.12. На кінцях балки $x = 0$ і $x = l$ напруження σ_x дорівнюють нулю і є тільки дотичні напруження τ_{xy} . Ці напруження виражаються двома членами рівняння (2.98). Перший член, пропорційний $A+B$, являє напруження, які для верхньої і нижньої половин скінченного поперечного перерізу мають одну і ту ж величину, але протилежні знаки. Результуюча цих напружень по всьому скінченному перерізу дорівнює нулю. Другий член, пропорційний $A-B$, має на кінцях балки результуючу, яка врівноважує навантаження, прикладені до поздовжніх країв балки $y = \pm c$.

Якщо ці навантаження для обох країв балки однакові, коефіцієнт A рівний коефіцієнту B , і реактивні зусилля на кінцях балки перетворюються в нуль. Розглянемо цей окремий випадок більш докладно, вважаючи, що довжина балки набагато більша в порівнянні з її висотою. Відповідно до другого з рівнянь (2.98) нормальне напруження σ_y на серединній площині балки $y=0$ дорівнює

$$\sigma_y = -2A \frac{\alpha c \cdot ch \cdot \alpha c + sh \cdot \alpha c}{sh \cdot 2\alpha c + 2\alpha c} \cdot \sin \alpha x. \quad (2.99)$$

Для довгих балок величина αc , яка дорівнює $m\pi c/l$, мала, якщо число півхвиль m невелике. В силу цього, підставляючи в (2.99) наступне розкладання в ряди:

$$\begin{aligned} sh \cdot \alpha c &= \alpha c + \frac{(\alpha c)^3}{6} + \frac{(\alpha c)^5}{120} + \dots, \\ ch \cdot \alpha c &= 1 + \frac{(\alpha c)^2}{2} + \frac{(\alpha c)^4}{24} + \dots \end{aligned} \quad (2.100)$$

і нехтуючи членами вищого порядку малості в порівнянні з $(\alpha c)^4$, отримуємо

$$\sigma_y = -A \cdot \sin \cdot \alpha x \left(1 - \frac{(\alpha c)^4}{24} \right). \quad (2.101)$$

Отже, для малих значень αc розподіл напружень по серединній площині практично збігається з їх розподілом на обох горизонтальних гранях балки ($y = \pm c$). Звідси можна зробити висновок, що тиск передається по висоті балки або пластинки без істотних змін, якщо тільки зміни цього тиску уздовж граней не відбуваються занадто швидко.

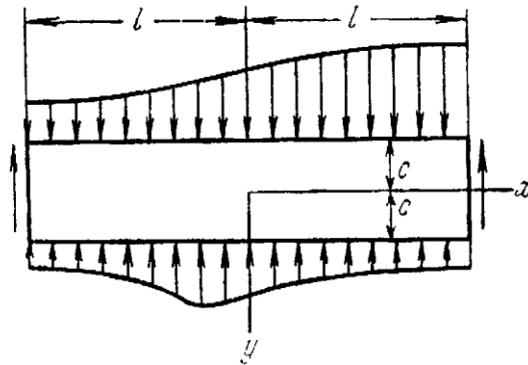


Рис. 2.13. Розподілення вертикального навантаження по верхній і нижній гранях

Дотичні напруження для цього випадку дуже малі. На верхній і нижній половинах поперечного перерізу вони мають результуючі, необхідні для того, щоб врівноважити невелику різницю між тисками на горизонтальних гранях з і на серединній площині $y = 0$.

В самому загальному випадку розподілення вертикального навантаження по верхній і нижній гранях балки (рис.2.13) можна уявити у вигляді наступних рядів

Для верхньої грані

$$q_u = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos \frac{m\pi x}{l}; \quad (2.102)$$

Для нижньої грані

$$q_l = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} B'_m \cos \frac{m\pi x}{l}; \quad (2.103)$$

Постійні члени A_0 та B_0 представляють рівномірне навантаження балки котре роздивлялось раніше. Напруження, викликане членами, що містять $\sin(m\pi x/l)$, отримуються шляхом додавання рішень, які виражаються формулами (2.98). Напруження, викликані членами, що мають $\cos(m\pi x/l)$ легко отримати з (2.98), якщо замінити $\sin \alpha x$ на $\cos \alpha x$ і навпаки з заміною на зворотній знак при τ_{xy} .

2.4 Двовимірні задачі в полярній системі координат

Теорія. При дослідженні напружень в круглих кільцях і дисках, кривоволінійних стержнях вузького прямокутного поперечного перерізу з круговою віссю і т. д. зручно використовувати полярні координати. У цьому випадку положення точки на серединній площині пластинки визначається відстанню від початку координат O (рис. 2.14) і кутом θ між радіусом-вектором r і деякою віссю Ox , фіксованої в розглянутій площині.

Розглянемо рівновагу малого елемента 1234, який вирізаний із пластинки відповідними площинами рис. 2.14. Нормальну компоненту напруження в радіальному напрямку позначимо через σ_r , нормальну компоненту в коловому напрямку – через σ_θ , а дотичну компоненту напруження – через $\tau_{r\theta}$, вважаючи, що кожен символ представляє напруження в точці r, θ , яка знаходиться в центрі елемента точки P . З урахуванням зміни напружень їх значення посередині сторін 1, 2, 3, 4 не будуть з точністю рівними $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$,

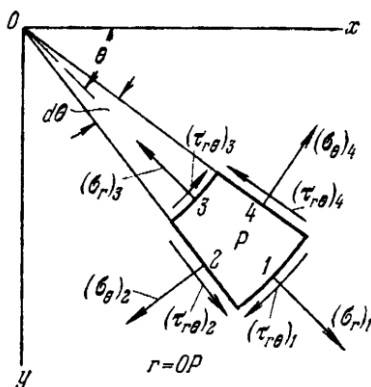


Рис.2.14. Схема до визначення напружень в полярній системі координат

тому позначимо їх через $(\sigma_r)_1$ і т. д., як показано на рис 2.14. Радіуси сторін 3, 1 позначимо через r_3, r_1 . Зусилля, що діє в радіальному напрямку від сторони 1, дорівнює $(\sigma_r r)_1 d\theta$. Зусилля, що діє в радіальному напрямку від сторони 3, запишеться $(\sigma_r r)_3 d\theta$. Компонента нормального зусилля, що діє на стороні 2, дорівнює -

$(\sigma_\theta)_2 dr(d\theta/2)$. Відповідна компонента діючого по стороні 4 зусилля дорівнює $-(\sigma_\theta)_4 dr(d\theta/2)$. Дотичні зусилля на сторонах 2 і 4 створюють внесок $[(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4]dr$. Об'ємна сила має в радіальному напрямку компоненту R.

Тепер проектуючи всі сили на радіальний напрямок, отримуємо рівняння рівноваги

$$(\sigma_r r)_1 d\theta - (\sigma_r r)_3 d\theta - (\sigma_\theta)_2 dr \frac{d\theta}{2} - (\sigma_\theta)_4 dr \frac{d\theta}{2} + [(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4]dr + Rr d\theta dr = 0. \quad (2.104)$$

Після ділення рівняння (2.104) на $dr d\theta$ це рівняння набуває вигляду

$$\frac{(\sigma_r r)_1 - (\sigma_r r)_3}{dr} - \frac{1}{2}[(\sigma_\theta)_2 + (\sigma_\theta)_4] + \frac{(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4}{d\theta} + Rr = 0. \quad (2.105)$$

Проектуючи всі сили на коловий напрямок, отримаємо друге рівняння рівноваги. Остаточно ці два рівняння рівноваги приймають вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S &= 0 \end{aligned} \quad (2.106)$$

де S - компонента об'ємної сили в коловому напрямку (в бік збільшення θ).

При вирішенні двовимірних задач в полярних координатах ці рівняння замінюють рівняння (2.18). Якщо об'ємні сили дорівнюють нулю, то рівняння (2.106) можна задовольнити, вважаючи

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2.107)$$

де φ - функція напружень, що залежить від r і θ . Це можна перевірити за допомогою прямої підстановки. Формули (2.107) можна вивести виходячи з поля напружень в системі координат x, y , визначеного компонентами $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Потім від них можна перейти до компонентів $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ в полярних координатах.

Між декартовими і полярними координатами існують такі залежності

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}, \quad (2.108)$$

На основі рівняння (2.108) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Таким чином для будь-якої функції $f(x,y)$ в полярних координатах $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ отримуємо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (2.110)$$

Вираз для $\partial^2 f / \partial x^2$ після невеликих перетворень матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) - \\ - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.111)$$

Аналогічно знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) + \\ + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) - \\ - \left(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.112)$$

Якщо в якості f взяти функцію напружень $\varphi(x,y)$, яка визначається формулами (2.28) (при $\rho g = 0$), то похідні в лівих частинах рівнянь стануть рівними відповідно σ_x , σ_y , τ_{xy} . Отже, вирази в правих частинах рівнянь (2.111) та (2.112) можна підставити замість компонент напружень в правій частині рівнянь (2.5). Легко перевірити, що результат такої підстановки приводить до формули (2.107).

Диференціальне рівняння (2.29) в полярних координатах запишеться наступним чином

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (2.113)$$

З різних рішень цього диференціального рівняння в часткових похідних ми можемо отримати рішення двовимірних задач в полярних координатах при різних граничних умовах. Враховуючи, що вираз $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ є оператор Лапласа ∇^2 в полярних координатах. Тоді рівняння (2.113) запишеться наступним чином

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.114)$$

Рівняння (2.114) називається **бігармонічним**. Отже розв'язування плоскої задачі теорії пружності в полярних координатах зводиться до інтегрування бігармонічного рівняння (2.114).

Полярно-симетричне розподілення напружень. Якщо функція напружень залежить тільки від r , рівняння спільності (2.113) набуває вигляду

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} = 0, \quad (2.115)$$

Загальне рішення рівняння (2.115) має вигляд

$$\varphi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D. \quad (2.116)$$

На основі цього загального рішення можна отримати рішення ряду задач про полярно - симетричне розподілення напружень без урахування об'ємних сил. Згідно рівняння (2.107) компоненти напружень будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B (1 + 2 \ln r) + 2C, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B (3 + 2 \ln r) + 2C, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Компоненти напружень (2.117) при $r = 0$ стають необмежено великими. Отже, для пластинки без отвору на початку координат і при відсутності об'ємних сил може існувати тільки один полярно - симетричний

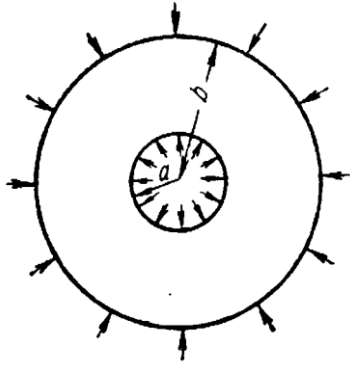


Рис. 2.15. Схема до розрахунку напружень в пустотілому циліндрі

розподіл напружень, при якому $\sigma_r = \sigma_\theta = const$ і при цьому пластинка знаходиться в умовах однорідного стиснення або розтягування у всіх напрямках в своїй площині.

Якщо на початку координат є отвір, то з рівнянь (2.117) можна винести і інші рішення, відмінні від однорідного розтягування або стиснення. Беручи наприклад В

рівним нулю, можна привести рівняння (2.117) до виду

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C. \quad (2.118)$$

Це рішення можна використовувати для опису поля напружень пустотілого циліндра, який знаходиться в стані дії рівномірного тиску на внутрішній і зовнішній поверхнях рис. 2.15

Позначимо через a і b внутрішній і зовнішній радіуси циліндра, а через p_i і p_0 - внутрішній і зовнішній тиск. Тоді граничні умови задачі будуть наступними

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_i \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_0. \quad (2.119)$$

Підставляючи (2.119) в перше з рівнянь (2.118) отримуємо наступні рівняння для визначення A і C

$$\frac{A}{a^2} + 2C = -p_i, \quad \frac{A}{b^2} + 2C = -p_0. \quad (2.120)$$

звідки слідує

$$A = \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2}, \quad 2C = \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2}. \quad (2.121)$$

Підставляючи ці значення в рівняння (2.118) одержуємо наступні вирази для компонент напружень

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2} \quad (2.122)$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2}$$

Компоненти деформацій в полярних координатах. При дослідженні переміщень у полярних координатах позначимо компоненти переміщень в радіальному і коловому напрямках через u і v . Деформація елемента $abcd$, рис.2.16 в радіальному напрямку визначається формулою:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (2.123)$$

Тоді загальна колова деформація визначається формулою

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta}. \quad (2.124)$$

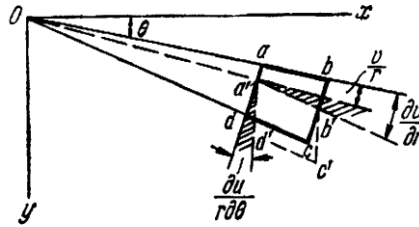


Рис. 2.16. Схема до визначення деформацій в полярних координатах

Загальна зміна кута dab , яка представляє собою деформацію здвигу, визначається залежністю:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (2.125)$$

Підставляючи вирази для компонент деформацій (2.123), (2.124) та (2.125) в рівняння, що виражають закон Гука для плоского напруженого стану:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_{\theta}), \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta} - \nu \sigma_r), \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G} \tau_{r\theta}, \quad (2.126)$$

Можна отримати рівняння, які є достатніми для визначення u та v .

Переміщення при симетричних полях напружень. Підставляючи в перше рівняння (2.126) компоненти напружень із рівняння (2.117) та інтегруючи результат підстановки, знаходимо:

$$u = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br \ln r - \frac{-B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r}{r} \right] + f(\theta), \quad (2.127)$$

де $f(\theta)$ - функція тільки одної змінної θ . Із другого рівняння (2.126), використовуючи (2.124) та інтегруючи результат підстановки та перетворення отримаємо:

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - \int f(\theta)d\theta + f_1(r), \quad (2.128)$$

де $f_1(r)$ - функція одної змінної r . Підставляючи вирази (2.127) та (2.128) в (2.125) знаходимо:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \int f(\theta)d(\theta) - \frac{1}{r} f_1(r) = 0, \quad (2.129)$$

Рівняння (2.129), яке виражає значення величини $\gamma_{r\theta}$ дорівнює нулю, так як $\tau_{r\theta}$ дорівнює нулю.

З рівняння (2.129) знаходимо

$$f_1(r) = Fr, \quad f(\theta) = H \sin \theta + K \cos \theta, \quad (2.130)$$

де F , H і K – постійні, які повинні визначатись із умов закріплення криволінійного стержня або кільця.

Підставляючи вирази (2.130) в (2.127) та (2.128) отримуємо формули для переміщення:

$$u = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)Br \ln r - \frac{-B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r}{r} \right] + H \sin \theta + K \cos \theta, \quad (2.131)$$

$$v = \frac{4Br\theta}{E} + Fr + H \cos \theta - K \sin \theta,$$

де для кожного окремого випадку слід підставляти свої значення постійних A , B і C .

2.4.1. Вплив круглого отвору на розподілення напружень в пластинці

На рис. 2.17 зображена пластинка, яка зазнає однорідного розтягання величиною S в напрямку осі x . Якщо в пластинці зробити малий круглий отвір, то розподіл напружень поблизу цього отвору зміниться. Проте відповідно до принципу Сен-Венана можна зробити висновок, що зміною напружень можна знехтувати на відстанях, достатньо великих порівняно з радіусом отвору a .

Розглянемо частину пластинки всередині концентричного кола радіуса b , рис.2.17. Напруження на колі радіуса b будуть по суті тими ж, що і в пластинці без отвору; отже, вони визначаються формулами:

$$(\sigma_r)_{r=b} = S \cos^2 \theta = \frac{1}{2} S (1 + \cos 2\theta), \quad (\tau_{r\theta})_{r=b} = -\frac{1}{2} S \sin 2\theta. \quad (2.142)$$

Ці зусилля, діючи на зовнішню частину кільця, що має внутрішній радіус $r = a$ і зовнішній радіус $r = b$, визначають розподіл напружень всередині кільця. Це напруження можна розглядати, як те що складається з

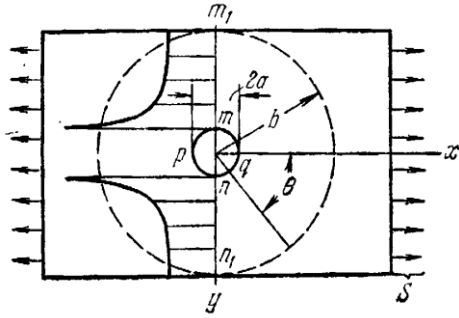


Рис. 2.17. Пластика з отвором

двох частин. Перша частина викликана постійною компонентою $(1/2)S$ нормальних зусиль. Напруження, які вона викликає, можна визначити за допомогою виразів (2.122). Друга частина, викликана нормальними $\frac{1}{2}S \cos 2\theta$

та дотичними $-\frac{1}{2}S \sin 2\theta$ зусил-

лями, створює напруження, які можна отримати з функції напружень виду:

$$\phi = f(r) \cos 2\theta. \quad (2.143)$$

Підставляючи цей вираз в рівняння спільності

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad (2.144)$$

приходимо до наступного звичайного диференціального рівнянь для визначення $f(r)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0. \quad (2.145)$$

Його загальне рішення має вигляд

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D. \quad (2.146)$$

Звідси отримаємо функцію напружень

$$\phi = \left(Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D \right) \cos 2\theta, \quad (2.147)$$

А відповідні компоненти напружень, згідно з рівнянням (2.107), визначаються формулами

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = - \left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta, \quad (2.148)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\theta,$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = \left(2A + 6Br^2 + \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta.$$

Постійні інтегрування потрібно тепер визначити з умов (2.142) для зовнішньої границі і з умови, що край отвору вільний від зовнішніх зусиль. Ці умови дають

$$\begin{aligned} 2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{2D}{b^2} &= -\frac{1}{2}S, & 2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{2D}{a^2} &= 0, \\ 2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} + \frac{2D}{b^2} &= -\frac{1}{2}S, & 2A + 6Ba^2 - \frac{6C}{a^4} + \frac{2D}{a^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Вирішуючи цю систему рівнянь та приймаючи $a/b = 0$, тобто пластинка є необмежено великою, отримуємо

$$A = -\frac{S}{4}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{a^4}{4}S, \quad D = \frac{a^2}{2}S. \quad (2.149)$$

Підставляючи ці значення постійних в рівняння (2.148) і додаючи напруження, що викликаються рівномірним розтягуванням інтенсивності $\frac{1}{2}S$ на зовнішній границі, які визначаються з рівнянь (2.122), знаходимо:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} + \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta} &= \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Переміщення u і v можуть бути отримані з використанням рівнянь (2.123) - (2.126) та (2.150) з точністю до зміщень абсолютно твердого тіла.

Якщо радіус r дуже великий, напруження σ_r і $\tau_{r\theta}$ наближаються до значень, які даються рівняннями (2.142). На краю отвору $r = a$ отримуємо:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta} = S - 2S \cos 2\theta. \quad (2.151)$$

З формули стає зрозумілим, що напруження σ_θ досягає максимального значення, коли $\theta = \pi/2$ або $\theta = 3\pi/2$, тобто на кінцях m і n діаметра, перпендикулярного до напрямку розтягування (рис.2.17). У цих точках $(\sigma_\theta)_{\max} = 3S$.

В точках p і q , де θ дорівнює π і 0 , отримуємо $\sigma_\theta = -S$.

Таким чином, в коловому напрямку в цих точках діють стискаючі напруження.

Для поперечного перерізу пластинки, що проходить через центр отвору і перпендикулярного осі x , кут θ дорівнює $\pi/2$, тому з рівняння (2.150) знаходимо

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right). \quad (2.152)$$

Таким чином із збільшенням r напруження σ_θ наближається до значення S . Розподіл цих напружень показано на рис.2.17 заштрихованою площею.

2.4.2. Зосереджена сила, яка прикладена в деякій точці прямолінійної границі

Розглянемо зосереджену вертикальну силу P , що прикладена до горизонтальної прямолінійної межі AB нескінченно великої пластинки (рис. 2.18, а). Розподіл навантаження по товщині пластинки є однорідним, як показано на рис. 2.18,б. Товщина пластинки приймається рівною одиниці, так що P – навантаження на одиницю товщини пластинки.

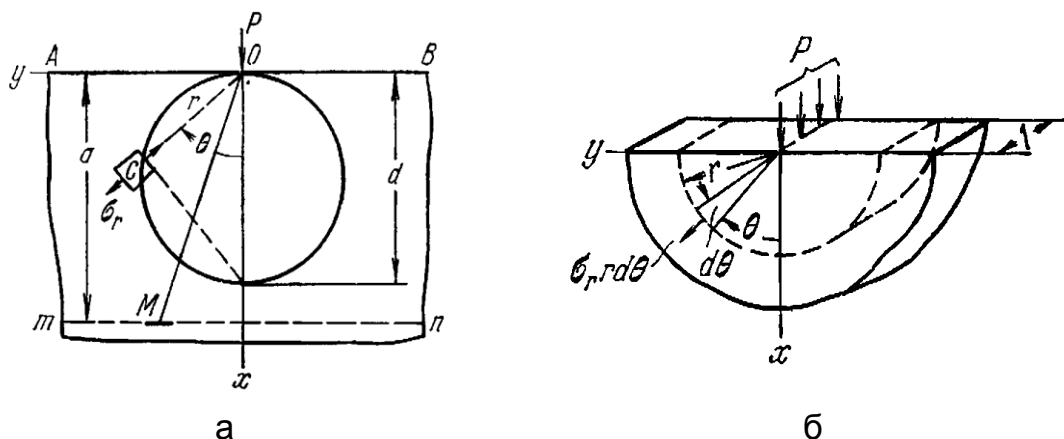


Рис. 2.18. Схема до визначення напружень в нескінченній пластинці одиничної ширини до горизонтальній межі якої прикладена зосереджена вертикальна сила

Розподіл напружень залежить від сил, що діють на всій замкнутій межі, наприклад АВmn, а не тільки від умов на АВ. Це справедливо і тоді, коли межа АВmn прямує до нескінченності.

Існує фундаментальне рішення, що зветься простим радіальним розподілом напружень. Будь-який елемент С, який розташовано на відстані r від точки прикладання сили, піддається простому стиску в радіальному напрямку. Компоненти напружень визначаються при цьому формулами

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0. \quad (2.153)$$

Колові напруження σ_r і дотичні напруження $\tau_{r\theta}$ дорівнюють нулю. Легко бачити, що зазначена система напружень задовольняє рівняння рівноваги (2.106).

Граничні умови на АВ також задовольняються, так як компоненти σ_θ і $\tau_{r\theta}$ дорівнюють нулю уздовж прямолінійного краю пластинки, який вільний від зусиль, за винятком точки прикладання сили ($r = 0$). Результируюча зусиль, що діють на циліндричну поверхню радіуса r (рис. 2.18, б), повинна врівноважувати силу P . Вона отримується шляхом підсумовування вертикальних компонент $\sigma_r r d\theta \cos \theta$, що діють на кожен елемент $r d\theta$ поверхні. Таким шляхом знаходимо

$$2 \int_0^{\pi/2} \sigma_r r \cos \theta d\theta = -\frac{4P}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = -P. \quad (2.154)$$

Для доказу того, що (2.153) є точним рішенням задачі, слід розглянути також умови спільності (2.113). Наведене вище рішення виходить з функції напружень

$$\phi = -\frac{P}{\pi} r \theta \sin \theta. \quad (2.155)$$

Це рішення вимагає певного розподілу зусиль на решті частині межі. Якщо цією іншою частиною є, наприклад, півколо деякого радіуса R , то необхідна сила визначається формулами (2.153) при $r = R$.

Вибираючи окружність довільного діаметру d з центром на осі x і дотичною до осі y в точці O (рис. 2.18, а), для будь-якої точки кола C маємо $d \cos \theta = r$. Звідси, відповідно до рівняння (2.153),

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}, \quad (2.156)$$

тобто напруження у всіх точках кола залишаються однаковими, за винятком точки прикладання навантаження O .

При розгляді горизонтальної площини mn , що знаходиться на відстані a від прямолінійного краю пластинки: нормальні і дотичні компоненти напружень в довільній точці M на цій площині (рис. 2.18, а) визначаються з умови простого стиснення в радіальному напрямку:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos^2 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a} \cos^4 \theta, \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi a} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a} \sin \theta \cos^3 \theta.\end{aligned}\quad (2.157)$$

Аналогічне рішення можна отримати і для горизонтальної сили P , що прикладена до прямолінійної межі напівнескінченної пластинки (рис. 2.19, а). Компоненти напружень для цього випадку задаються тими ж рівняннями (2.153). Проте кут θ в формулах (2.153) потрібно вимірювати від напрямку сили, як показано на рис. 2.19, а. Знаходячи результуючу всіх сил, що діють на циліндричну поверхню, зображену на рис. 2.19, а пунктирною лінією, отримуємо

$$-\frac{2P}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = -P. \quad (2.158)$$

Ця результуюча врівноважує зовнішню силу P , а оскільки компоненти напружень $\tau_{r\theta}$ і σ_θ на прямолінійній межі дорівнюють нулю, то рішення (2.153) задовольняє граничним умовам.



Рис. 2.19. Схема до визначення напружень в напівнескінченній пластинці одиничної ширини до горизонтальної межі, якої прикладена зосереджена горизонтальна сила

Маючи рішення для вертикальної і горизонтальної зосереджених сил, можна за допомогою суперпозиції отримати рішення для похилих сил. Розкладаючи похилу силу P на дві компоненти, вертикальну $P \cos \alpha$ і горизонтальну $P \sin \alpha$ (рис. 2.19, б), з рівнянь (2.153) отримуємо формулу для радіального напруження в будь-якій точці у вигляді:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} \left[P \cos \alpha \cos \theta + P \sin \alpha \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] = -\frac{2P}{\pi r} \cos(\alpha + \theta). \quad (2.159)$$

Таким чином, рівняння (2.153) можна використовувати для будь-якого напрямку сили, якщо в кожному випадку вимірювати кут θ від напрямку дії сили.

Знаючи розподіл напружень, можна звичайним шляхом отримати відповідні переміщення за допомогою рівнянь (2.123) - (2.125). Для вертикальної сили, яка діє на прямолінійній границі (рис. 2.18), маємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} = \nu \frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{du}{d\theta} + \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} = 0. \end{aligned} \quad (2.160)$$

Інтегруючи перше з цих рівнянь, знаходимо

$$u = -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \ln r + f(\theta), \quad (2.161)$$

де $f(\theta)$ - функція однієї тільки змінної θ . Підставляючи (2.161) у друге рівняння (2.160) і інтегруючи, одержуємо

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \ln r \sin \theta - \int f(\theta) d\theta + F(r), \quad (2.162)$$

де функція $F(r)$ залежить тільки від однієї змінної r . Підставляючи (2.161) і (2.162) в третє рівняння (2.160), та після перетворень отримуємо:

$$f(\theta) = -\frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta, \quad F(r) = Cr, \quad (2.163)$$

де A , B і C - постійні інтегрування, які визначаються з умов закріплення. Тоді вирази для переміщень, згідно рівнянь (2.161) і (2.162), мають вигляд:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \ln r - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta, \\ v &= \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \ln r \sin \theta - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \cos \theta + \\ &+ \frac{(1-\nu)}{\pi E} \sin \theta + A \cos \theta - B \sin \theta + Cr. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Припустимо, що умови закріплення напівнескінченної пластинки (рис. 2.18) такі, що точки осі x не мають поперечних переміщень. Тоді $v = 0$ при $\theta = 0$ і, згідно з другою з формул (2.164), одержуємо, що $A = 0$, C

= 0. При цих значеннях постійних інтегрування вертикальні переміщення точок осі x визначаються формулою:

$$(u)_{\theta=0} = -\frac{2P}{\pi E} \ln r + B. \quad (2.165)$$

Щоб визначити постійну B , припустимо, що деяка точка осі x на відстані d від початку координат не має вертикального переміщення. Тоді з рівняння (2.165) знаходимо:

$$B = \frac{2P}{\pi E} \ln d. \quad (2.166)$$

Маючи значення всіх постійних інтегрування, можна по формулах (2.164) визначити переміщення будь-якої точки напівнескінченної пластинки.

2.4.3. Сила, яка діє на вістрі клина

Визначимо напруження в клині під дією зосередженої сили в його вершині. Розглянемо симетричний випадок, показаний на рис. 2.20, а. Товщина клина в напрямку, перпендикулярному площині xu , приймається рівною одиниці. Умови уздовж граней клина (тобто при $\theta = \pm\alpha$) задовольняються, якщо для компонент напруження прийняти значення:

$$\sigma_r = -\frac{kP \cos \theta}{r}, \sigma_\theta = 0, \tau_{r\theta} = 0. \quad (2.167)$$

Постійну k підберемо таким чином, щоб задовольнити умовам рівноваги в точці O . Прирівнюючи результуючу тиску на циліндричній поверхні (вказаній на рис. 2.20, а пунктиром) силі $-P$, отримуємо

$$-2 \int_0^\alpha \frac{kP \cos^2 \theta}{r} r d\theta = -kP(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha) = -P, \quad (2.168)$$

звідки

$$k = \frac{1}{\alpha + 1/2 \sin 2\alpha}. \quad (2.169)$$

Далі, відповідно виразу (2.167) маємо

$$\sigma_r = \frac{P \cos \theta}{r(\alpha + 1/2 \sin 2\alpha)}. \quad (2.170)$$

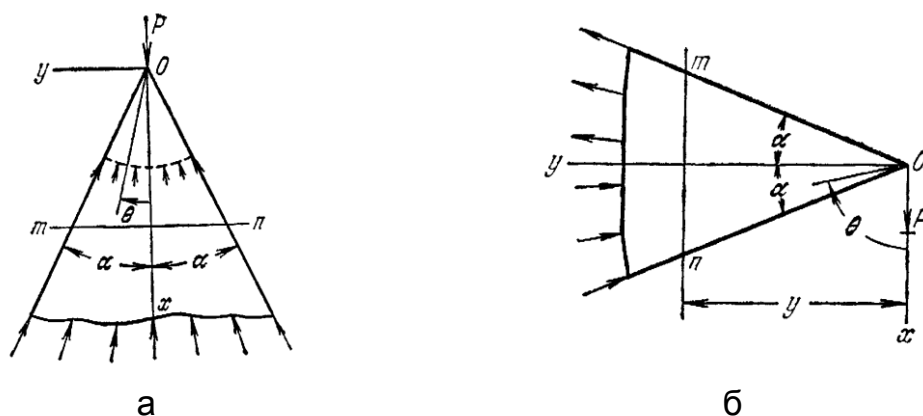


Рис. 2.20. Схеми до визначення напруження в клині під дією зосередженої сили в його вершині: а) зосереджена сила, яка паралельна до осі клина; б) зосереджена сила, яка перпендикулярна до осі клина

Вважаючи $\alpha = \pi/2$, приходимо до раніше розглянутого рішення для напівнескінченої пластини. Можна бачити, що розподілення нормальних напружень по поперечному перерізі mn нерівномірно і що відношення нормальних напружень в точках m або n до максимального напруження в центрі поперечного перерізу рівно $\cos^4 \alpha$. Якщо прикладена сила перпендикулярна до осі клина (рис. 2.20, б), можна використовувати те ж саме рішення, вимірюючи кут θ від напрямку сили. Постійний множник k визначається з рівняння рівноваги:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sigma_r r \cos \theta d\theta = -P, \quad (2.171)$$

Звідки

$$k = -\frac{P \cos \theta}{\alpha - 1/2 \sin 2\alpha}. \quad (2.172)$$

Тоді, радіальні напруження

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r \left(\alpha - \frac{1}{2 \sin 2\alpha} \right)}. \quad (2.173)$$

Нормальні і дотичні напруження в будь-якому поперечному перерізі mn знаходяться із формул:

$$\sigma_y = -\frac{P y x \sin^4 \theta}{y^3 \left(\alpha - \frac{1}{2 \sin 2\alpha} \right)}, \quad \tau_{xy} = -\frac{P x^2 \sin^4 \theta}{y^3 \left(\alpha - \frac{1}{2 \sin 2\alpha} \right)}. \quad (2.174)$$

У випадку малого кута α можна отримати

$$2\alpha - \sin 2\alpha = \frac{(2\alpha)^3}{6}. \quad (2.175)$$

Потім, позначаючи момент інерції поперечного перерізу через I , з формул знаходимо

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\frac{Pyx}{I} \left[\left(\frac{tg\alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta \right] \\ \tau_{xy} &= -\frac{Px^2}{I} \left[\left(\frac{tg\alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta \right] \end{aligned} \quad (2.176)$$

Для малих значень α множник $(tg\alpha/\alpha)^3$ можна вважати приблизно рівним одиниці.

Максимальне дотичне напруження діє в точках m і n .

Рішення для довільного напрямку сили P в площині xy , можна отримати розкладаючи цю силу на дві складові і використовуючи метод суперпозиції. Слід зазначити, що рішення (2.170) та (2.173) являються точними лише в тому випадку, якщо на закріпленому кінці клин утримується радіально спрямованими силами, розподіленими так, як це передбачається рішенням. Якщо це не так, то рішення будуть точними лише для точок, досить віддалених від закріпленого кінця.

Функції напружень

$$\varphi_1 = C_1 \sin 2\theta, \quad (2.177)$$

відповідає система напружень

$$\sigma_r = -4C_1 \frac{1}{r^2} \sin 2\theta, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 2C_1 \frac{1}{r^2} \cos 2\theta, \quad (2.178)$$

а функція напружень

$$\varphi_2 = C_2 \theta, \quad (2.179)$$

призводить до розподілу напружень

$$\sigma_r = 0, \sigma_\theta = 0, \tau_{r\theta} = \frac{C_2}{r^2}, \quad (2.180)$$

Комбінуючи ці два рішення, отримуємо

$$\sigma_r = -4C_1 \frac{1}{r^2} \sin 2\theta, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} (2C_1 \cos 2\theta + C_2), \quad (2.181)$$

Очевидно, межі $\theta = \pm\alpha$ будуть вільні від навантаження, якщо прийняти

$$C_2 = -2C_1 \cos 2\alpha. \quad (2.182)$$

Тоді напруження будуть визначатися формулами

$$\sigma_r = -4C_1 \frac{1}{r^2} \sin 2\theta, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 2C_1 \frac{1}{r^2} (\cos 2\theta - \cos 2\alpha). \quad (2.183)$$

2.4.4. Визначення напружень у круглому диску

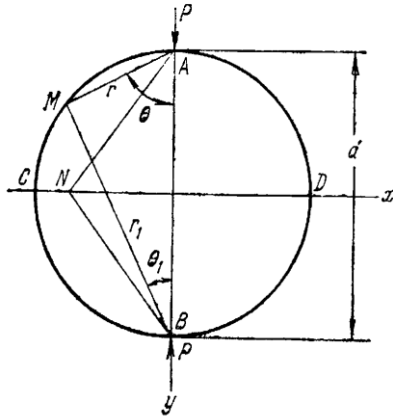


Рис. 2.21. Схема до визначення напружень у круглому диску при дії вдовж діаметра двох сил

Розглянемо декілька випадків. Перший випадок: до диска прикладені дві рівні за величиною і протилежні по знаку сили P , що діють уздовж діаметра AB (рис. 2.21). Припускаючи, що кожна з цих сил викликає простий радіальний розподіл напружень (2.153), ми можемо знайти сили, які слід прикласти на границі диска, щоб створити такий розподіл. У будь-якій точці M окружності диска ми маємо стиснення в напрямках r і r_1 , які дорівнюють відповідно $(2P/\pi) \cos \theta / r$ і $(2P/\pi) \cos \theta_1 / r_1$. Оскільки відрізки r

і r_1 перпендикулярні один до одного і

$$\frac{\cos \theta}{r} = \frac{\cos \theta_1}{r_1} = \frac{1}{d}, \quad (2.184)$$

де d —діаметр диска, ми приходимо до висновку, що два головні напруження в точці M є двома рівними стискаючими напруженнями величини $(2P/\pi d)$. Таким чином, на будь-якій площадці, що проходить через точку M і перпендикулярній площині диска, будуть діяти однакові стискаючі напруження. Таким чином, щоб створити передбачувані два простих радіальних розподіли напружень, потрібно по колу диска прикласти нормальні стискаючі зусилля інтенсивністю $2P/(\pi d)$.

Якщо границя диска вільна від зовнішніх зусиль, напруження в будь-якій точці визначаються шляхом накладення однорідного розтягання в площині диска величиною $2P/(\pi d)$ на два простих радіальних розподіли напружень. Розглянемо напруження в горизонтальному діаметральному перетині диска в точці N . З умови симетрії можна зробити ви-

сненок, що в цій площині не буде дотичних напружень. Нормальне напруження, що викликане двома рівними стискаючими зусиллями, буде рівним

$$-2\left(\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r}\right) \cos^2 \theta, \quad (2.185)$$

де r – відстань AN; θ – кут між AN і вертикальним діаметром. Накладаючи на цей розподіл напружень однорідний розтяг $2P/(\pi d)$, отримуємо повне нормальне напруження на горизонтальній площині в точці N у вигляді:

$$\sigma_y = -\frac{4P}{\pi} \cdot \frac{\cos^3 \theta}{r} + \frac{2P}{\pi d} \quad (2.186)$$

або використовуючи той факт, що

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4x^2}} \quad (2.187)$$

Отримуємо

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi d} \left[1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4x^2)^2} \right] \quad (2.188)$$

Максимальне стискує напруження уздовж діаметра CD діє в центрі диска, де

$$\sigma_y = -\frac{6P}{\pi d}. \quad (2.189)$$

На кінцях діаметра стискує напруження σ_y перетворюється в нуль.

Запитання для самоперевірки.

1. Записати фізичні рівняння для плоского напруженого стану?
2. Записати диференціальні рівняння рівноваги та граничні умови для плоского напруженого стану?
3. Функція напружень?
4. Функція напружень у вигляді ряду Фур'є?
5. Полярна система координат?
6. Фізичні рівняння в полярній системі координат?
7. Як виглядатимуть диференціальні рівняння рівноваги та граничні умови в полярній системі координат?

РОЗДІЛ 3. ПРОСТОРОВІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

3.1. Кручення круглих валів постійного перерізу

Згідно елементарної теорії кручення круглих валів дотичне напруження τ в будь-якій точці поперечного перерізу (рис. 3.1) є перпендикулярним до радіуса r і визначається з наступної залежності:

$$\tau = G\theta r, \quad (3.1)$$

де G – модуль пружності при зсуві; θ - кут закручування на одиницю довжини валу. Розкладаючи це напруження на дві компоненти, паралельні вісям x та y , знаходимо:

$$\tau_{yz} = G\theta x; \quad \tau_{xz} = -G\theta y. \quad (3.2)$$

Елементарна теорія передбачає:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0. \quad (3.3)$$

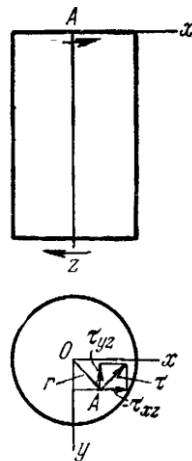


Рис.3.1. Розрахункова схема до визначення напружень при крученні круглих валів постійного перерізу

Можна показати, що при певних умовах це елементарне рішення є точним. Оскільки компоненти напружень є або лінійними функціями координат, або рівні нулю, досить розглянути тільки рівняння рівноваги (1.24) і граничні умови (1.7). Підставляючи виписані вище рівняння для компонент напружень в рівняння (1.24), знаходимо, що ці рівняння задовольняються, якщо відсутні масові сили.

Бічна поверхня валу вільна від зусиль, і граничні умови (1.7), з урахуванням того, що для поверхні циліндра $\cos(Nz) = n = 0$, приводяться до виду:

$$\tau_{xz} \cos(Nx) + \tau_{yz} \cos(Ny) = 0. \quad (3.4)$$

Для випадку круглого циліндра:

$$\cos(Nx) = \frac{x}{r}, \quad \cos(Ny) = \frac{y}{r}. \quad (3.5)$$

Підставляючи ці значення і вирази (3.2) для компонент напружень в рівняння (3.4), легко переконатись, що воно задовольняється. Для поперечного перерізу валу, що відрізняється від кругового рішення - формулу (3.1) використовувати не можна.

Розглянемо граничні умови на кінцях валу. Поверхневі дотичні зусилля на цих поверхнях повинні розподілятися в точності так само, як і напруження τ_{xz} і τ_{yz} в проміжних перерізах валу. Тільки в цьому випадку розподіл напружень, який визначається рівняннями (3.2), є точним рішенням задачі. З принципу Сен-Венана можна зробити висновок, що в довгому закручуваному стрижні на достатній відстані від кінців напруження залежать тільки від величини крутного моменту M_t і практично не залежать від способу, за яким зусилля розподіляється на кінцях стрижня. Переміщення для цього випадку можна знайти із наступних залежностей:

$$u = -\theta yz; \quad v = \theta xz; \quad w = 0. \quad (3.6)$$

3.2. Чистий згин призматичних стержнів

Розглянемо призматичний стержень, що згинається в одній із головних площин двома рівними і протилежними моментами M (рис. 3.2).

Прийнявши початок координат в центрі ваги поперечного перерізу, а площину xz – в головній площині згину, отримуємо наступні значення компонент напружень, які визначаються елементарною теорією:

$$\sigma_z = \frac{Ex}{R}, \quad \sigma_y = \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (3.7)$$

де R – радіус кривизни стержня після згину.

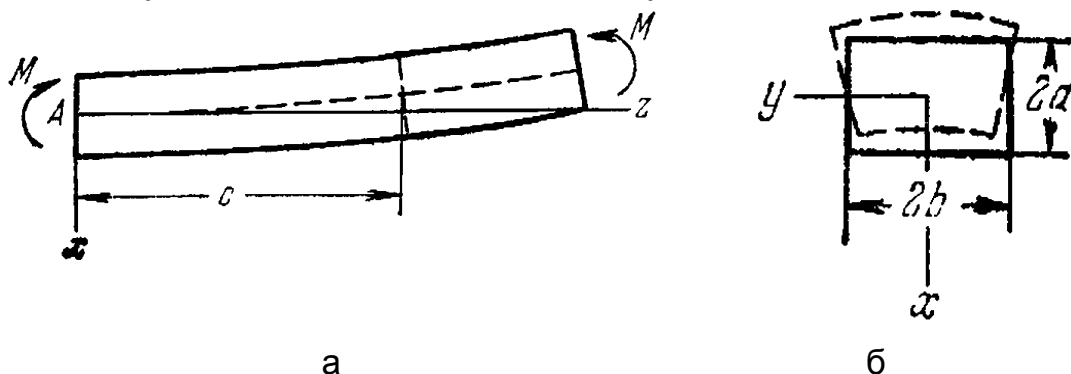


Рис. 3.2. Розрахункова схема для визначення напружень в призматичних стержнях при чистому згині

Вираз (3.7) задовольняє рівняння рівноваги (1.24) за умов відсутності об'ємних сил. Граничні умови (1.7) для бокової поверхні стержня, яка є вільною від зовнішніх зусиль, також задовольняються. Граничні

умови (1.7) на кінцях стержня потребують, щоб поверхневі сили розподілялись по кінцям таким же чином, як і напруження σ_z . Тільки за таких умов напруження (3.7) представляють точне рішення задачі. Згинальний момент M визначається за формулою:

$$M = \int \sigma_z x dA = \int \frac{E x^2 dA}{R} = \frac{EI_y}{R}, \quad (3.8)$$

де I_y – момент інерції поперечного перерізу балки відносно нейтральної вісі, яка паралельна вісі y .

Розглянемо тепер переміщення для випадків чистого згину. Використовуючи закон Гука і рівняння (1.26), із рішення (3.7) знаходимо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x}{R}, \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\nu \frac{x}{R}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{x}{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Використовуючи ці диференціальні рівняння і враховуючи умови закріплення стержня, можна отримати переміщення.

Із рівняння (3.9) для ε_z інтегруючи можна отримати:

$$w = \frac{xz}{R} + w_0, \quad (3.10)$$

де w_0 є функція тільки від x та y . Підставляючи рівняння (3.10) в два останні рівняння із останнього рівняння (3.9) отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{R} - \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad (3.11)$$

звідки

$$u = -\frac{z^2}{2R} - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + u_0, \quad v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_0. \quad (3.12)$$

Тут через u_0 і v_0 позначені невідомі функції від x та y , які будуть визначені далі. Підставляючи вирази (3.12) в друге рівняння (3.9) отримаємо:

$$-z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{\nu x}{R}, \quad -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\nu x}{R}. \quad (3.13)$$

Ці рівняння повинні задовольнятися для будь-яких значень z , тоді:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0. \quad (3.14)$$

після інтегрування

$$u_0 = -\frac{\nu x^2}{2R} + f_1(y), \quad v_0 = -\frac{\nu xy}{R} + f_2(x). \quad (3.15)$$

Підставляючи (3.12) та (3.15) в перше рівняння із останнього в (3.9), знаходимо:

$$2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} + \frac{\nu y}{R} = 0. \quad (3.16)$$

Так як тільки перший член в рівнянні (3.16) залежить від z , приходимо до висновку, що необхідним є виконання наступних умов:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} - \frac{\nu y}{R} = 0. \quad (3.17)$$

Ці рівняння і рівняння (3.16) потребують виконання наступних умов:

$$\begin{aligned} w_0 &= mx + ny + p, \\ f_1(y) &= \frac{\nu y^2}{2R} + \alpha y + \gamma, \quad f_2(x) = -\alpha x + \beta, \end{aligned} \quad (3.18)$$

де $m, n, p, \alpha, \beta, \gamma$ - довільні постійні. Вирази для переміщень тепер приймуть вигляд.

$$\begin{aligned} u &= -\frac{z^2}{2R} - mz - \frac{\nu x^2}{2R} + \frac{\nu y^2}{2R} + \alpha y + \gamma, \\ v &= -nz - \frac{\nu xy}{R} - \alpha x + \beta, \\ w &= \frac{xz}{R} + mx + ny + p. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Довільні постійні визначаються з умов закріплення. Припустимо, що закріпленими є точка А (центр ваги лівого кінця стержня), а також елемент вісі z і елемент площини xz . Тоді при $x=y=z=0$ маємо:

$$u = v = w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3.20)$$

Ці умови задовольняються, якщо прийняти всі похідні постійними і рівними нулю. Тоді:

$$u = -\frac{1}{2R} \left[z^2 + \nu (x^2 - y^2) \right], \quad v = -\frac{\nu xy}{R}, \quad w = \frac{xz}{R}. \quad (3.21)$$

Щоб отримати криву прогинів вісі стержня, підставимо $x=y=0$ в рівняння (3.21). Звідси:

$$u = -\frac{z^2}{2R} = -\frac{Mz^2}{2EI_y}, \quad v = w = 0. \quad (3.22)$$

Рівняння (3.22) відповідає рівнянню елементарної теорії згину.

3.3. Кручення прямолінійних стержнів

Точне рішення задач про кручення круглих валів можна отримати, якщо припустити, що поперечні перерізи стрижня залишаються плоскими і в процесі кручення повертаються без викривлення. Але після проведення простого експерименту зі стержнем прямокутного перерізу вченими було встановлено, що поперечні перерізи стержня при крученні не залишаються плоскими і що викривлення прямокутного елемента на поверхні стержня є найбільшими посередині граней, тобто в точках, які є найбільше наближеними до вісі стержня.

Коректне рішення задачі про кручення стержнів силами, які є прикладеними до його кінців надав Сен-Венан.

Розглянемо однорідний стержень довільного поперечного перерізу, який скручується моментами, що прикладені до його кінців рис.3.3.

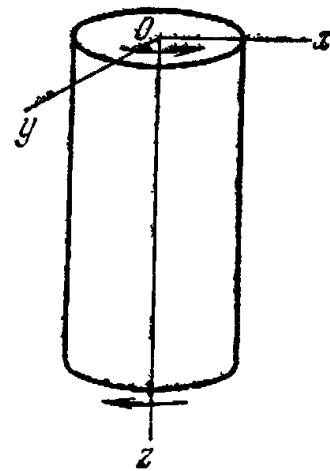


Рис.3.3. Схема до визначення напружень при крученні круглих стержнів

Керуючись рішенням для круглого валу (пункт 3.1.1), Сен-Венан припустив, що деформація скручуваного стержня складається із двох частин: 1) поворотів поперечних перерізів стержня, які будуть такими самими як і для круглого валу; 2) депланації поперечних перерізів, яка для всіх поперечних перерізів буде однаковою. Депланація є явище порушення площинності поперечного перерізу стержня при деформації. Приймаючи початок координат в скінченному поперечному перерізі (рис.3.1), знаходимо, що переміщення, які відповідають повороту поперечних перерізів, будуть:

$$u = -\theta zy, \quad v = \theta zx, \quad (3.23)$$

де θz - кут закручування поперечного перерізу на відстані z від початку координат.

Депланація поперечних перерізів визначається функцією ψ по формулі:

$$w = \theta \psi(x, y). \quad (3.24)$$

При зроблених припущеннях (3.23) і (3.24) відносно переміщень, ми можемо обчислити з рівнянь (1.26) компоненти деформації, які в даному випадку мають вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} &= 0, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Відповідні компоненти напружень, згідно рівнянь (1.38) та (1.43) будуть мати вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0, \\ \tau_{xz} &= G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{yz} &= G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

При припущеннях (3.23) і (3.24) щодо деформацій не виникають нормальні напруження, що діють між поздовжніми волокнами стержня або в напрямку самих волокон. Не виникають і викривлення площин поперечних перетинів, оскільки $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ і γ_{xy} перетворюються в нуль. В кожній точці ми маємо чистий зсув, який визначається компонентами τ_{xz} і τ_{yz} . Функція $\psi(x, y)$, що визначає депланацію поперечного перерізу, повинна бути обрана таким чином, щоб задовольнялись рівняння рівноваги (1.24). Підставляючи вирази (3.26) в ці рівняння і нехтуючи масовими силами, знаходимо, що функція ψ повинна задовольняти рівнянню:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.27)$$

Розглянемо тепер граничні умови (1.7). Для бокової поверхні стержня, яка є вільною від зовнішніх сил і має нормалі, які перпендикулярні до осі z , маємо $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$ і $\cos Nz = n = 0$. Перші два рівняння (1.7) задовольняються тотожно, а третє рівняння перетворюється в наступне:

$$\tau_{xz}l = \tau_{yz}m = 0. \quad (3.28)$$

Це значить що результуюче дотичне напруження на межі направлено вздовж дотичної до межі (рис. 3.8).

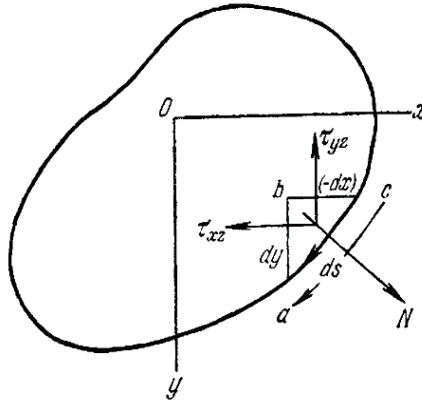


Рис. 3.4. Схема до перевірки граничних умов на межі тіла

Розглядаючи нескінченно малий елемент abc на межі і припускаючи, що s збільшується в напрямку від c до a , маємо:

$$l = \cos Nx = \frac{dy}{ds},$$

$$m = \cos Ny = -\frac{dx}{ds},$$
(3.29)

Тоді рівняння (3.28) прийме вид

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \frac{dx}{ds} = 0.$$
(3.30)

Таким чином будь-яка задача про кручення зводиться до задачі відшукування функції ψ , яка задовольняє рівнянню (3.27) і граничним умовам (3.30).

Інший метод рішення приводить до більш простих граничних умов.

Внаслідок перетворення в нуль величин $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$ (3.25) рівняння рівноваги (1.24) приводяться до наступного виду:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0.$$
(3.31)

Перші два рівняння вже вирішені, так як τ_{xz} і τ_{yz} , які визначаються рівняннями (3.26) не залежать від z . Третє рівняння означає, те що ми можемо виразити τ_{xz} і τ_{yz} у вигляді:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x},$$
(3.32)

де ϕ - функція x та y , яка називається функцією напружень.

Тоді із рівнянь (3.32) та (3.26) маємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \quad (3.33)$$

Виключаємо ψ шляхом нескладних математичних перетворень знаходимо, що функція напружень повинна задовольняти наступному диференціальному рівнянню:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = F, \quad (3.34)$$

де

$$F = -2G\theta. \quad (3.35)$$

За допомогою рівняння (3.32) гранична умова (3.28) приймає вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (3.36)$$

Таким чином функція напружень φ повинна бути постійною вздовж межі поперечного перерізу. Отже визначення розподілення напружень по поперечному перерізу зкручуваного стержня полягає в знаходженні функції φ , яка задовольнятиме рівняння (3.34) і дорівнюватиме нулю на межі.

Розглянемо тепер умови на кінцях зкручуваного стержня. Всі нормалі прикладені до скінченних поперечних перерізів будуть паралельні вісі z . Відповідно, $l = m = 0$, $n = \pm 1$ і умова (1.7) приймає вид:

$$\bar{X} = \pm \tau_{xz}, \quad \bar{Y} = \pm \tau_{yz}, \quad (3.37)$$

де знак $+$ повинен прийматися для того кінця стержня, для якого зовнішня нормаль співпадає з додатнім напрямком осі z . Можна зазначити наступне, на кінцях дотичні зусилля розподіляються таким самим чином, як і дотичні напруження по поперечним перерізам стержня. В свою чергу результуюча зусиль, які розподілені по кінцям стержня, дорівнює нулю і ці сили приводяться до моменту, величина якого рівна:

$$M_t = \iint (\bar{Y}x - \bar{X}y) dx dy = - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} x dx dy - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} y dx dy. \quad (3.38)$$

Інтегруючи цей вираз по частинам і враховуючи, що на межі $\varphi = 0$, отримуємо:

$$M_t = 2 \iint \varphi dx dy. \quad (3.39)$$

Кожен із інтегралів в правій частині рівняння (3.38) дає половину крутного моменту (3.39).

Умову суцільності (1.35) в даному випадку розглядати не потрібно. Напруження були визначені, із рівнянь переміщень (3.23) і (3.24). Отже

питання суцільності потребує лише доведення існування єдиної функції переміщення ψ , яке забезпечується рівнянням (3.34). Таким чином отримане рішення є точним рішенням задачі про кручення.

Умова, що рішення даної задачі потребує розподілу сил на кінцях стержня деяким визначеним чином вирішується на основі принципу Сен-Венана. Із принципу випливає, що на деякій відстані від кінців скручуваного стержня напруження залежать тільки від величини крутного моменту і практично не залежать від способу розподілення напружень на кінцях.

Запитання для самоперевірки

1. Рівняння для визначення дотичного напруження при крученні круглих валів згідно елементарної теорії кручення?
2. Рівняння для кривої прогинів вісі стержня при чистому згині призматичного стержня?
3. Вирази для переміщень при чистому згині призматичного стержня?
4. Компоненти напружень при крученні прямолінійних стержнів?
5. Яким рівнянням повинна задовільняти функція ψ , яка визначає деформацію поперечного перерізу при крученні прямолінійних стержнів?

РОЗДІЛ 4. МЕТОДИ РІШЕННЯ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

4.1 Огляд методів рішення рівнянь теорії пружності

Постановка задачі. Для того щоб розв'язувати будь-які інженерні задачі на міцність, жорсткість та стійкість у межах пружності, потрібно знати поле переміщень, яке характеризується трьома функціями:

$$u = f_1(xyz); v = f_2(xyz); w = f_3(xyz); \quad (4.1)$$

поле деформацій, яке характеризується шістьма функціями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= f_4(xyz); \varepsilon_y = f_5(xyz); \varepsilon_z = f_6(xyz); \\ \gamma_{xy} &= f_7(xyz); \gamma_{yz} = f_8(xyz); \gamma_{zx} = f_9(xyz); \end{aligned} \quad (4.2)$$

поле напружень, яке характеризується шістьма функціями:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= f_{10}(xyz); \sigma_y = f_{11}(xyz); \sigma_z = f_{12}(xyz); \\ \tau_{xy} &= f_{13}(xyz); \tau_{yz} = f_{14}(xyz); \tau_{zx} = f_{15}(xyz); \end{aligned} \quad (4.3)$$

Наведені вище функції переміщень, деформацій і напружень виникають у конструкції під дією заданих об'ємних сил X, Y, Z і поверхневих X_v, Y_v, Z_v сил. Для знаходження зазначених п'ятнадцяти функцій у теорії пружності є п'ятнадцять рівнянь, які були розглянуті нами раніше.

Для зручності нагадаємо ці рівняння:

- три рівняння статички (динаміки) – рівняння Нав'є (3.43);
- шість геометричних рівнянь – рівняння Коші (3.38);
- шість фізичних рівнянь – узагальнений закон Гука:

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x; \\ \sigma_y = \lambda\theta + 2G\varepsilon_y; \\ \sigma_z = \lambda\theta + 2G\varepsilon_z; \end{cases} \begin{cases} \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx}; \end{cases} \quad (4.5)$$

або

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

де $G = \tau/\gamma = E/2(1 + \mu)$ - модуль зсуву; $\lambda = \frac{2\mu G}{1 - 2\mu} = \frac{\mu E}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}$ - стала

Ламе; θ - відносна зміна об'єму; E – модуль пружності.

Отже, що знайти п'ятнадцять функцій $f_i(xyz)$, лінійна теорія пружності має оперувати п'ятнадцятьма рівняннями. Після того, як буде розв'язано п'ятнадцять рівнянь (3.43), (3.38) та (4.5), слід визначити переміщення, деформації та напруження в кожній точці напруженого тіла. При цьому напруження мають задовольняти граничні умови на поверхні (3.44), а деформації - умови нерозривності деформацій (3.45).

Наведені п'ятнадцять рівнянь лінійної теорії пружності розв'язують різними методами залежно від того, які невідомі функції беруть за основні. Тому одну і ту саму задачу лінійної теорії пружності можна розв'язувати в переміщеннях і напруженнях, коли за основні невідомі функції беруть переміщення або напруження. Іноді як основні невідомі функції беруть деякі переміщення, а за деякі невідомі беруть напруження. Перший метод розв'язування задачі називається методом переміщень, другий методом сил, а третій – змішаним методом.

Розв'язування задачі теорії пружності в переміщеннях (рівняння Ламе). Розв'язування системи п'ятнадцяти рівнянь теорії пружності можна звести до трьох рівнянь відносно компонентів переміщень. Якщо брати як основні невідомі три функції переміщень, то розв'язування задачі теорії пружності можна звести до інтегрування системи трьох диференціальних рівнянь рівноваги в переміщеннях:

$$\begin{cases} (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y = 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

де $\nabla^2 u, \nabla^2 v, \nabla^2 w$ - оператори Лапласа другого порядку відповідно над функціями $u(xyz), v(xyz), w(xyz)$, які записуються наступним чином

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \\
\nabla^2 v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}; \\
\nabla^2 w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2};
\end{aligned}
\tag{4.8}$$

другий добуток в першому доданку рівняння (4.7)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z]; \\
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z]; \\
\frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} [\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z];
\end{aligned}
\tag{4.9}$$

Рівняння (4.7) називаються рівняннями Ламе. Вони є синтезом статичного, геометричного і фізичного дослідження задачі. Виведення цих рівнянь наводиться в джерелі [2].

Щоб розв'язати пружну крайову задачу в переміщеннях, потрібно враховувати граничні умови на поверхні (3.44), записані в переміщеннях. Дані умови запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned}
X' &= \lambda \theta l_1 + G \left[\frac{\partial u}{\partial x} l_1 + \frac{\partial u}{\partial y} m_1 + \frac{\partial u}{\partial z} n_1 \right] + \\
&+ G \left[\frac{\partial u}{\partial x} l_1 + \frac{\partial v}{\partial x} m_1 + \frac{\partial w}{\partial x} n_1 \right]; \\
Y' &= \lambda \theta m_1 + G \left[\frac{\partial v}{\partial x} l_1 + \frac{\partial v}{\partial y} m_1 + \frac{\partial v}{\partial z} n_1 \right] + \\
&+ G \left[\frac{\partial u}{\partial y} l_1 + \frac{\partial v}{\partial y} m_1 + \frac{\partial w}{\partial y} n_1 \right]; \\
Z' &= \lambda \theta n_1 + G \left[\frac{\partial w}{\partial x} l_1 + \frac{\partial w}{\partial y} m_1 + \frac{\partial w}{\partial z} n_1 \right] + \\
&+ G \left[\frac{\partial u}{\partial z} l_1 + \frac{\partial v}{\partial z} m_1 + \frac{\partial w}{\partial z} n_1 \right].
\end{aligned}
\tag{4.10}$$

Рівняння (4.7) разом з вимогами на поверхні (4.10) дають змогу розв'язувати крайову задачу теорії пружності в переміщеннях.

Розв'язування задачі теорії пружності в напруженнях (рівняння Бельтрамі-Мітчела). Основну систему з п'ятнадцяти рівнянь лінійної теорії пружності можна звести до шести рівнянь відносно шести невідомих компонентів напружень. З цією метою у рівняннях нерозривності (3.45) замість деформацій підставимо вираз (4.6) і використаємо рівняння статки, після чого здобудемо шість диференціальних рівнянь відносно шести невідомих функцій напружень:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 I_1(T_\sigma)}{\partial x^2} &= -2 \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\
 \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 I_1(T_\sigma)}{\partial y^2} &= -2 \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\
 \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 I_1(T_\sigma)}{\partial z^2} &= -2 \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\
 \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 I_1(T_\sigma)}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right); \\
 \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 I_1(T_\sigma)}{\partial y \partial z} &= - \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right); \\
 \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 I_1(T_\sigma)}{\partial z \partial x} &= - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Рівняння (4.11) називаються рівняннями Бельтрамі – Мітчела. Вони здобуті внаслідок синтезу статичного, геометричного та фізичного розв'язувань задачі. Метод розв'язування задач лінійної теорії пружності за допомогою рівнянь (4.11) називають методом сил. За умови сталості об'ємних сил права частина рівнянь (4.11) перетворюється в 0.

Якщо до цієї системи додати рівняння рівноваги, то дістанемо повну систему рівнянь для розв'язування задач теорії пружності в напруженнях.

4.2. Принцип мінімуму потенціальної енергії

Більшість задач теорії пружності зводяться до інтегрування диференціальних рівнянь із заданими граничними умовами. Важливого значення набули варіаційні методи, які дають змогу отримувати наближені

розв'язки диференціальних рівнянь теорії пружності з точністю, достатньою для інженерної практики. Ці методи ґрунтуються на принципі можливих переміщень, який стверджує: тіло перебуватиме у рівновазі, якщо сума елементарних робіт усіх прикладених до нього сил на всіх можливих переміщеннях дорівнюватиме нулю.

Розглянемо окремо дію зовнішніх та внутрішніх сил. Тоді принцип можливих переміщень запишемо так:

$$\delta A - \delta U = 0, \quad (4.12)$$

де δA - можлива робота зовнішніх сил (об'ємних та поверхневих) на будь-якому можливому переміщенні; δU - можлива робота внутрішніх сил, що являє собою приріст потенціальної енергії на тому самому можливому переміщенні з оберненим знаком.

При цьому можлива робота зовнішніх сил (X, Y, Z – об'ємні, X', Y', Z' - поверхневі сили) на можливих переміщеннях $\delta u, \delta v, \delta w$ обчислюють за формулою:

$$\begin{aligned} \delta A = & \iiint_{(V)} [X\delta u + Y\delta v + Z\delta w]dV + \\ & + \iint_{(F)} [X'\delta u + Y'\delta v + Z'\delta w]dF. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Оскільки варіювались лише переміщення u, v, w , а поверхневі та об'ємні сили залишились сталими, то варіацію δ можна винести з-під знаків інтегралів:

$$\delta A = \delta \left\{ \iiint_{(V)} [Xu + Yv + Zw]dV + \iint_{(F)} [X'u + Y'v + Z'w]dF \right\} dF. \quad (4.14)$$

Приріст потенціальної енергії δU можна знайти за формулою:

$$\delta U = \iiint_{(V)} \delta W dx dy dz = \delta \iiint_{(V)} W dx dy dz, \quad (4.15)$$

де W – питома потенціальна енергія, що визначається як

$$W = \frac{1}{2} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}]. \quad (4.16)$$

Використовуючи вирази (4.14) та (4.15), дістаємо:

$$\delta(A - U) = 0. \quad (4.17)$$

Вираз у дужках – це робота зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до тіла. Ця величина з оберненим знаком є потенціальною енергією системи зовнішніх сил, які діють на пружне тіло:

$$\Pi = U - A. \quad (4.18)$$

Тоді вираз (4.17) матиме вигляд

$$\delta \Pi = 0. \quad (4.19)$$

З виразу (4.19) бачимо, що в пружній системі, яка перебуває під впливом заданих зовнішніх сил при різноманітних комбінаціях переміщень u, v, w , насправді відбуваються такі переміщення, що для будь-якого можливого відхилення від положення рівноваги варіація повної енергії системи дорівнює нулю.

Отже, для стійкої рівноваги при будь-якому можливому переміщенні зміна повної потенціальної енергії системи має бути додатною, а повна потенціальна енергія системи – мінімальною. З усіх можливих переміщень пружного тіла переміщення, що задовольняють умови стійкості рівноваги, надають потенціальній енергії системи мінімального значення:

$$\Pi = U - A = \min. \quad (4.20)$$

Рівняння (4.20) має назву – варіаційне рівняння. Отже, дійсна форма рівноваги тіла відрізняється від усіх можливих форм тіла тим, що для неї повна енергія системи має мінімальне значення. Ці методи називають варіаційними.

4.3. Наближені методи розв'язання рівнянь теорії пружності методом сил та методом переміщень

Як відомо точний розв'язок основних рівнянь лінійної теорії пружності було здобуто для обмеженого класу тіл та навантажень.

Багато задач теорії пружності розв'язують за допомогою наближених методів, одним з яких є варіаційний метод, що застосовуються у формі методу сил, коли за невідомі беруть компоненти тензора напружень, або у формі методу переміщень, коли за невідомі беруть компоненти вектора переміщень.

Нехай на тіло діють об'ємні X, Y, Z та поверхневі X', Y', Z' сили. Тоді компоненти тензора напружень σ_{ij} , що виникають в тілі, мають задовольняти рівняння рівноваги (3.43) та граничні умови на поверхні (3.44).

Нехай розв'язком рівняння (3.43) будуть компоненти тензора напружень $\sigma_{ij}^0(xyz)$. Якщо ці компоненти задовольнятимуть також рівняння нерозривності деформацій, то знайдений частковий розв'язок $\sigma_{ij}^0(xyz)$

рівнянь (3.43) буде точним розв'язком. Якщо компоненти тензора напружень $\sigma_{ij}^0(xyz)$ не задовольнятимуть умови нерозривності деформацій, то для знаходження істинного розв'язку задачі потрібно знайти ряд особливих розв'язків однорідних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (4.21)$$

Ці особливі розв'язки мають задовольняти умови на поверхні тіла за відсутності зовнішніх навантажень, тобто

$$\begin{aligned}\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0, \\ \sigma_y m + \tau_{zy} n + \tau_{xy} l &= 0, \\ \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m &= 0,\end{aligned}\quad (4.22)$$

Нехай такими розв'язками будуть:

$$\sigma_{ij}^{(k)}(xyz); (k = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (4.23)$$

Тоді істинний розв'язок рівнянь теорії пружності можна подати у вигляді суми розв'язків:

$$\sigma_{ij}(xyz) = \sigma_{ij}^{(0)}(xyz) + \sum_{k=1}^n A_k \sigma_{ij}^{(k)}(xyz), \quad (4.24)$$

де A_k - деякі невизначені сталі.

Варіюючи значення величини A_k , дістанемо можливість змінювати напружений стан тіла, не порушуючи умов рівноваги (3.43) та (3.44).

Для визначення сталих A_k підставимо розшукувані розв'язки (4.24) у вираз потенціальної енергії деформації:

$$\Pi = \frac{1}{2E} \iiint_{(V)} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 2(1+\mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] dx dy dz. \quad (4.25)$$

Виходячи з того, що дійсному напруженому стану у пружному тілі відповідає мінімуму потенціальної енергії деформації, шукану комбінацію параметрів A_k , яка задовольняє умову суцільності, можна знайти із системи рівнянь:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_k} = 0; \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (4.26)$$

Рівнянь (4.26) можна дістати стільки, скільки невідомих A_k збережено у розв'язку (4.24). Звичайно обмежуються невеликою кількістю членів ряду у виразі (4.24). Компоненти тензора напружень σ_{ij}^0 називають компонентами основного тензора напружень, а компоненти тензора напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$ - компонентами коригувального тензора напружень. Отже, істинне поле напружень складається із основного та коригувального тензорних полів напружень.

Якщо за невідомі основні функції при розв'язанні рівнянь теорії пружності брати переміщення $u_j(xyz)$, то допоміжними невідомими будуть коефіцієнти при функціях, що варіюються для компонентів переміщень. У цьому разі істинний розв'язок рівнянь теорії пружності потрібно шукати у вигляді:

$$\begin{cases} u(xyz) = u^0(xyz) + \sum_{k=1}^m a_k f_k(xyz); \\ v(xyz) = v^0(xyz) + \sum_{k=1}^m b_k \varphi_k(xyz); \\ w(xyz) = w^0(xyz) + \sum_{k=1}^m c_k \psi_k(xyz); \end{cases} \quad (4.27)$$

де $u^0(xyz)$, $v^0(xyz)$, $w^0(xyz)$ - функції координат, які задовольняють рівняння рівноваги та граничні умови.

Ці компоненти виступають ніби основним полем переміщення. Другі складові у виразі (4.27) визначають коригувальні поля переміщення. При чому a_k, b_k, c_k ($k = 1, 2, \dots, m$) - довільні сталі; f_k, φ_k, ψ_k - функції координат x, y, z , які, очевидно, потрібно вибрати таким чином, щоб відповідно до виразів (4.27) задовольнялись геометричні зв'язки (граничні умови в переміщеннях).

Якщо компоненти переміщень $u^0(xyz)$, $v^0(xyz)$, $w^0(xyz)$ будуть задовольняти всі рівняння теорії пружності та статичні граничні умови, то обраний розв'язок, що виступає основним полем переміщень, буде точним розв'язком. Звичайний вибір такого розв'язку видається мало ймовірним, тому для цього необхідно до основного поля переміщень додати

коригувальне поле переміщень, яке характеризують другі складові в рівняннях (4.27). Щоб знайти параметр a_k, b_k, c_k , слід скористатись принципом мінімуму енергії. Для цього вираз для потенціальної енергії:

$$\Pi = G \iiint_{(V)} \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \theta^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] dx dy dz, \quad (4.28)$$

потрібно записати через переміщення, використовуючи рівняння Коші:

$$\Pi = G \iiint_{(V)} \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{(1-2\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz. \quad (4.29)$$

Потім для визначення a_k, b_k, c_k складаємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_k} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b_k} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_k} = 0; \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (4.30)$$

Такий спосіб наближеного розв'язку рівнянь теорії пружності звичайно називають методом переміщень. Наведені методи (метод сил та метод переміщень) наближеного розв'язку рівнянь теорії пружності вважають варіаційними методами Кастильяно.

Запитання для самоперевірки.

1. Наведіть 15 рівнянь для опису напружено та деформованого стану тіла, які використовують в теорії пружності?
2. Рівняння Ламе?
3. Рівняння Бельтрама-Мітчела?
4. Принцип мінімуму потенціальної енергії?

РОЗДІЛ 5. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ

5.1. Вісесиметричні напруження і деформації в тілах обертання.

Розв'язуючи задачі теорії пружності, а також пластичності та повзучості, крім декартової системи координат використовують також й інші системи координат, а саме: циліндричну і сферичну. При дослідженні напружень та деформацій тіла в двох інших системах координат положення точки визначається такими параметрами: в циліндричній системі координат - r, θ, z ; в сферичній - ρ, θ, φ . В задачах з тілами обертання доцільним є використання циліндричної системи координат. Основними параметрами циліндричної системи координат, які визначають положення точки є: r – радіус-вектор; θ – кут між радіус-вектором і деякою віссю ОХ, z – вісь обертання.

В циліндричних координатах, при розгляді вісесиметричних задач компонента переміщення v перетворюється в нуль, а компоненти переміщення u, w не залежать від θ . Тоді компоненти напруження також не залежать від θ , а дві з них $\tau_{r\theta}$ і $\tau_{\theta z}$ дорівнюють нулю. Це можна побачити з рівнянь, які представляють загальні залежності між деформаціями і переміщеннями в циліндричних координатах:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}; \\ \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Таким чином для задач з тілами обертання рівняння (5.1) перетворюється в:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}.\tag{5.2}$$

Наведемо нижче рівняння рівноваги елемента в циліндричних координатах:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Для вісесиметричних задач рівняння (5.3) приводиться до наступного виду:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \tag{5.4}$$

Для багатьох задач є зручним ввести функцію напружень φ .

За допомогою підстановки можна впевнитись, що рівняння (5.4) задовольняється, якщо прийняти:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right].
\end{aligned} \tag{5.5}$$

При цьому функція напружень φ задовольняє рівняння:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \tag{5.6}$$

Символ ∇^2 означає оператор:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{5.7}$$

що відповідає оператору Лапласа в прямокутних координатах:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{5.8}$$

Функція напружень φ не залежить від θ , в силу чого третій член в (5.7) перетворюється в нуль, якщо оператор ∇^2 застосовується до функції φ .

В деяких випадках корисно виразити рівняння (5.6) не в циліндричних координатах, а в полярних R та ψ . На основі формул перетворення можна записати наступне [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{1}{R \sin \psi} \left(\frac{\partial}{\partial R} \sin \psi + \frac{\cos \psi}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right) = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg} \psi}{R^2} \frac{\partial}{\partial \psi}.\end{aligned}\quad (5.9)$$

Підставляючи (5.14) в (5.6), отримаємо:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \times \\ &\times \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right) = 0.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Розглянемо рішення рівняння (5.10) в поліномах.

Запишемо другий добуток рівняння (5.10):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = 0. \quad (5.11)$$

Рівняння (5.11) є рівнянням Лапласа. Загальний розв'язок рівняння Лапласа запишеться таким чином:

$$\varphi_n = R^n \Psi_n, \quad (5.12)$$

де Ψ_n - функція тільки одної змінної ψ .

Підставляючи (5.12) в рівняння (5.11), отримаємо наступне звичайне диференціальне рівняння для функції Ψ_n :

$$\frac{1}{\sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left(\sin \psi \frac{d\Psi_n}{d\psi} \right) + n(n+1) \Psi_n = 0. \quad (5.13)$$

Якщо позначити $\cos \psi$ через x і прийняти x за нову незалежну змінну, то рівняння (5.13) прийме вигляд:

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Psi_n}{dx^2} - 2x \frac{d\Psi_n}{dx} + n(n+1) \Psi_n = 0. \quad (5.14)$$

Рівняння (5.14) має назву рівняння Лежандра. Два його фундаментальних рішення, для позначення яких використовуються за звичай символи $P_n(x)$ і $Q_n(x)$ є функціями Лежандра першого і другого роду. При $n=1,2,3,\dots,m$, функції $P_n(x)$ представляють собою поліноми Лежандра:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad (5.15) \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).
\end{aligned}$$

Використовуючи ці поліноми замість Ψ_n в формулі (5.12), отримаємо відповідні рішення рівняння (5.11). Кожне із цих рішень можна помножити на довільну постійну A_n . Повернемося до змінних r та z (циліндрична система координат) за формулам:

$$x = \cos \psi, \quad R x = z, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad (5.16)$$

Тоді отримаємо поліноміальні рішення рівняння (5.11) у вигляді:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= A_0, \\
\varphi_1 &= A_1 z, \\
\varphi_2 &= A_2 \left[z^2 - \frac{1}{3}(r^2 + z^2) \right], \\
\varphi_3 &= A_3 \left[z^3 - \frac{3}{5}z(r^2 + z^2) \right], \\
\varphi_4 &= A_4 \left[z^4 - \frac{6}{7}z^2(r^2 + z^2) + \frac{3}{35}(r^2 + z^2)^2 \right], \\
\varphi_5 &= A_5 \left[z^5 - \frac{10}{9}z^3(r^2 + z^2) + \frac{5}{21}z(r^2 + z^2)^2 \right]. \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \quad (5.17)$$

Ці поліноми є також і рішеннями рівняння (5.10). Якщо прийняти замість рівняння (5.12) рівняння вигляду:

$$\varphi_n = R^{n+2} \Psi_n \quad (5.18)$$

Тоді отримаємо наступні нові рішення:

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= B_2(r^2 + z^2), \\
\varphi_3 &= B_3z(r^2 + z^2), \\
\varphi_4 &= B_4(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2), \\
\varphi_5 &= B_5(2z^3 - 3r^2z)(r^2 + z^2).
\end{aligned} \tag{5.19}$$

.....

Задача про згин круглої пластинки. У машинобудуванні застосовують конструктивні елементи у вигляді пластин. Це стінки високих балок, листові конструкції стріл тощо. Приймаючи із (5.17) та (5.19) поліноми третього ступеня можна отримати наступну функцію напружень:

$$\varphi = a_3(2z^3 - 3r^2z) + b_3(r^2z + z^3). \tag{5.20}$$

Підставляючи цей вираз в співвідношення (5.5) знайдемо:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= 6a_3 + (10\nu - 2)b_3, \quad \sigma_\theta = 6a_3 + (10\nu - 2)b_3, \\
\sigma_z &= -12a_3 + (14 - 10\nu)b_3, \quad \tau_{rz} = 0.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

За допомогою підбору постійних a_3 та b_3 ми можемо визначити напруження в пластинці коли на її поверхні задані будь-які постійні значення σ_r та σ_z . Таким чином на основі рішень (5.17) та (5.19) можна описати різні стани згину симетрично навантажених круглих пластинок [1].

5.2 Обертові диски

Обертові диски широко застосовуються у парових та газових турбінах, а також в кутових шліфувальних машинах тощо. Приймаємо, що навантаження і температурне поле симетричні відносно осі диска, внаслідок чого напруження виступають функцією лише радіуса. Розглянемо розв'язок задачі за умови, що диск сталої товщини навантажений силами, паралельними його серединній площині і рівномірно розподіленими за товщиною. При цьому напруження вздовж осі z буде $\sigma_z = 0$ [2].

Розглянемо обертовий диск сталої товщини (рис.5.1, а). Виділимо елемент диска і спроекціюємо всі сили на вісь r (рис.5.1, б).

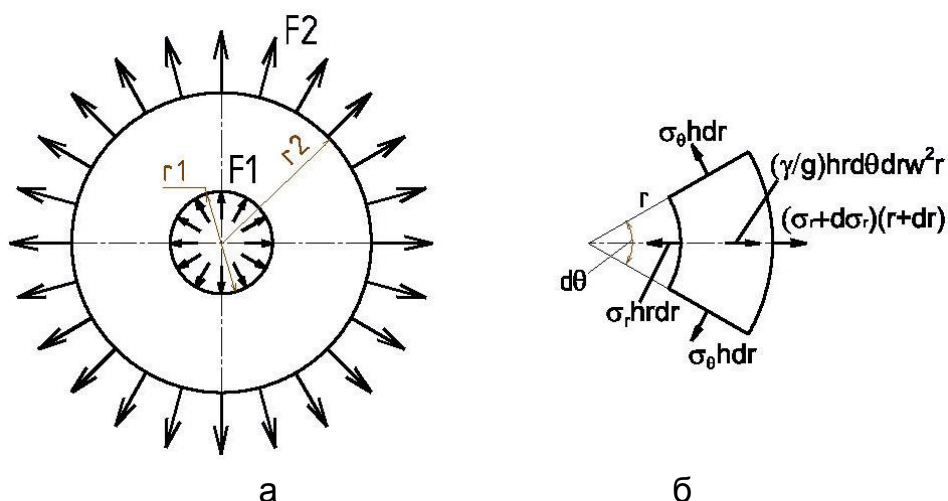


Рис. 5.1. Схема до розрахунку диску:

а – напружений стан диску; б – напружений стан нескінченно малого елемента диску.

Після не складних перетворень отримаємо рівняння рівноваги:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r = 0. \quad (5.22)$$

де $\frac{\gamma}{g} \omega^2 r$ - добуток, який відповідає за дію відцентрових сил; γ - маса одиниці об'єму; ω - кутова швидкість диска.

Розглянемо геометричні рівняння (рівняння Коші). Деформація елемента abcd внаслідок своєї симетрії спричиняє лише радіальне зміщення (рис. 5.2). Абсолютне радіальне видовження елемента dr буде du , тоді відносне видовження в радіальному і тангенціальному напрямках визначається за формулами:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (5.23)$$

Фізичні рівняння (узагальнений закон Гука). Оскільки елемент abcd перебуває під дією осьових сил в площині диска, то напруження та деформації будуть зв'язані такими залежностями:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_r). \quad (5.24)$$

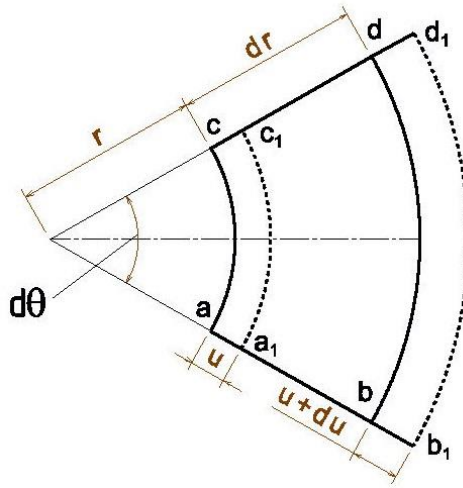


Рис. 5.2. Деформація елемента abdc

Розв'язування цієї задачі зводиться до інтегрування одного рівняння відносно однієї невідомої функції $u(r)$, якщо задачу розв'язувати в переміщеннях. Тобто, якщо рівняння (5.23) підставити в рівняння (5.24), то дістанемо:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right). \end{cases} \quad (5.25)$$

Якщо рівняння (5.25) підставити в рівняння рівноваги (5.22), то після деяких перетворень отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку відносно однієї невідомої:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1-\mu}{E} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r. \quad (5.26)$$

Проінтегрувавши двічі це рівняння, знайдемо:

$$u = A_1 r + \frac{B_1}{r} - \frac{1-\mu^2}{8E} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^3. \quad (5.27)$$

Підставляючи (5.27) в (5.25) отримаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A + \frac{B}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2; \\ \sigma_\theta &= A - \frac{B}{r^2} - \frac{1-3\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2, \end{aligned} \quad (5.28)$$

де $A = \frac{E}{1-\mu} A_1$; $B = \frac{E}{1+\mu} B_1$.

Сталі інтегрування A , B , A_1 , B_1 визначаються із граничних умов: якщо $r=r_1$, то $\sigma_r = -P_1$, а якщо $r=r_2$, то $\sigma_r = P_2$, де P_1 – навантаження валу на диск, що виникає внаслідок посадки диска на вал; P_2 – розподіл зусилля, яке виникає на контурі диска за рахунок відцентрових сил.

Граничні умови дають змогу визначити два рівняння для σ_r відносно невідомих A і B :

$$\begin{cases} -P_1 = A + \frac{B}{r_1^2} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2; \\ P_2 = A + \frac{B}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2. \end{cases} \quad (5.29)$$

Розв'язуючи рівняння відносно (5.29) A та B , знаходимо:

$$\begin{cases} A = \frac{r_2^2 P_2 - r_1^2 P_1}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \\ B = \frac{r_1^2 r_2^2 (P_2 - P_1)}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2 r_2^2. \end{cases} \quad (5.30)$$

Підставивши знайдені значення сталих A і B у вирази (5.28), дістанемо формули для визначення напружень в обертовому диску, що має сталу товщину.

Загальне рішення даної задачі також можна отримати використовуючи поліноми четвертого та п'ятого ступеня із залежностей (5.17) та (5.19).

5.3. Товстостінна сферична оболонка

На практиці в області будівельних машин до сфероподібних тіл відносяться шарові опори, сферичні підшипники тощо. Розглянемо сферу на яку діє внутрішнє та зовнішнє рівномірно розподілене навантаження. Приймемо, що r_1 та r_2 - відповідно внутрішній і зовнішній радіуси сфери (рис. 5.3), а F_1 та F_2 – внутрішнє та зовнішнє навантаження. Оскільки задача полярно-симетрична, то в цьому випадку $\sigma_\theta = \sigma_z$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_z$, а всі інші невідомі σ_r , σ_θ , ε_θ , ε_r , u будуть функціями лише радіуса r . Отже, щоб розв'язати поставлену задачу про напружено-деформований стан товстостінної сферичної оболонки, яка перебуває під дією внутрішніх і зовнішніх зусиль, потрібно визначити п'ять функцій: $\sigma_r(r)$, $\sigma_\theta(r)$, $\varepsilon_\theta(r)$, $\varepsilon_r(r)$, $u(r)$. Для знаходження п'яти зазначених функцій теорія пружності має відповідно п'ять рівнянь.

Статичне дослідження задачі. Для дослідження виріжемо нескінченно малий елемент із сфери, як зображено на рис. 5.4. Дію відкинутих елементів сфери замінимо тангенціальними σ_t , σ_z і радіальними σ_r напруженнями.

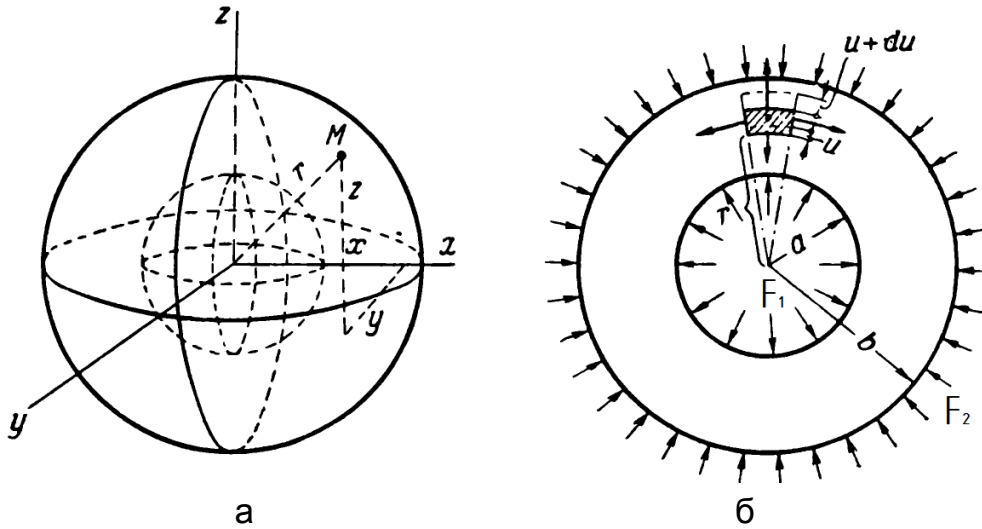


Рис. 5.3. Схема до визначення деформацій товстостінної сферичної оболонки: а – загальна схема сферичної оболонки; б – схема, яка відображає картину деформацій

Так як напруження в розглядуваному випадку залежать від радіуса r , то напруження по двом нескінченно близьким друг від друга концентричним поверхням будуть відрізнятись на величину $\frac{d\sigma_r}{dr} dr = d\sigma_r$ і не залежать від кута θ - параметра, який визначає місцеположення розглядуваного елемента. Проектуючи всі сили на нормаль до елемента, та враховуючи, що $\sigma_\theta = \sigma_z$, отримаємо рівняння рівноваги, яке після скорочень матиме наступний вигляд:

$$2(\sigma_r - \sigma_\theta) + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (5.31)$$

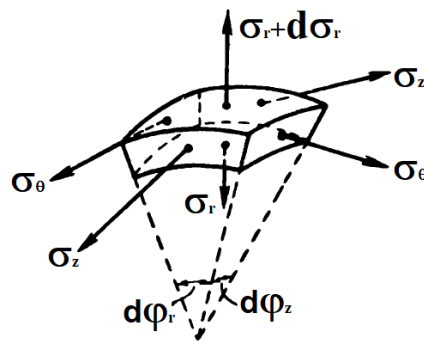


Рис. 5.4. Напружений стан нескінченно малого елемента сфери

Геометричне дослідження задачі. Із розглянутого переміщення та формозміни елементарного елемента (рис. 5.3, б) отримаємо, що відносне тангенціальне подовження виражається наступним чином:

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_z = \frac{(r+u)d\varphi_{\theta} - rd\varphi_{\theta}}{rd\varphi_{\theta}} = \frac{u}{r}, \quad (5.32)$$

а відносне радіальне подовження

$$\varepsilon_r = \frac{(u+du)-u}{dr} = \frac{du}{dr}. \quad (5.33)$$

Фізичне дослідження задачі. Напруження через деформації виражаються наступним чином:

$$\begin{cases} \sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\mu-2\mu^2}(\varepsilon_{\theta} + \mu\varepsilon_r); \\ \sigma_r = \frac{E}{1-\mu-2\mu^2}(2\mu\varepsilon_{\theta} + (1-\mu)\varepsilon_r); \end{cases} \quad (5.34)$$

Таким чином ми маємо 5 рівнянь (5.31 – 5.34) відносно 5 невідомих. Розв'яжемо дану задачу в переміщеннях. Для цього необхідно підставити рівняння (5.32) та (5.33) в (5.34), після чого отриманий результат підставити в рівняння статки (5.31). Слід враховувати, що рівняння (5.31) містить величину $\frac{d\sigma_r}{dr}$, яка визначається диференціюванням компоненти σ_r в рівнянні (5.34).

Отже, після відповідних скорочень отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - 2 \frac{u}{r^2} = 0. \quad (5.35)$$

Вираз (12.05) представляє собою рівняння, що характеризує всі три сторони дослідження (геометричну, фізичну і статичну). Інтегруючи рівняння (5.35) двічі знаходимо:

$$u = \frac{A}{r^2} + Br, \quad (5.36)$$

де A, B – сталі інтегрування.

Підставляючи (5.36) у вираз для напружень (5.34) отримаємо:

$$\begin{cases} \sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\mu-2\mu^2} \left(\frac{A}{r^3} (1-2\mu) + B(1+\mu) \right); \\ \sigma_r = \frac{E}{1-\mu-2\mu^2} \left(-\frac{2A}{r^3} (1-2\mu) + B(1+\mu) \right). \end{cases} \quad (5.37)$$

Постійні інтегрування А і В визначаємо із поверхневих умов, а саме:

$$\begin{aligned} \text{якщо } r=a, \text{ то } \sigma_r &= -F_1; \\ \text{якщо } r=b, \text{ то } \sigma_r &= -F_2; \end{aligned} \quad (5.38)$$

Підставляючи вирази (5.38) в рівняння для компоненти σ_r , системи рівнянь (5.37), отримаємо наступне:

$$\begin{cases} A = \frac{(F_1 - F_2) a^3 b^3 (1 - \mu - 2\mu^2)}{2E(1 - 2\mu)(b^3 - a^3)}; \\ B = \frac{(F_1 a^3 - F_2 b^3)(1 - \mu - 2\mu^2)}{2E(1 - 2\mu)(b^3 - a^3)}. \end{cases} \quad (5.39)$$

Підставляючи значення для постійних інтегрування з рівняння (5.39) в (5.37) остаточно отримаємо:

$$\begin{cases} \sigma_\theta = F_1 \frac{a^3 (2r^3 + b^3)}{2r^3 (b^3 - a^3)} - F_2 \frac{b^3 (2r^3 + b^3)}{2r^3 (b^3 - a^3)}; \\ \sigma_r = F_1 \frac{a^3 (r^3 - b^3)}{r^3 (b^3 - a^3)} + F_2 \frac{b^3 (a^3 - r^3)}{r^3 (b^3 - a^3)}. \end{cases} \quad (5.40)$$

5.4. Зосереджена сила, яка діє на площину, що обмежує напівнескінченне тіло

Рішення даної задачі має широке практичне застосування в галузі будівельних машин при дослідженні взаємодії робочих органів цих машин з робочим середовищем. До таких машин відносяться екскаватори, бульдозери, бурильне обладнання, дробильне обладнання тощо. В пункті 2.4.3 розглядалась плоска задача про розподілення напружень в напівнескінченній пластинці від дії зосередженої сили, яка є аналогічною даній тривимірній задачі.

Нехай площина $z=0$ є гранню напівнескінченного суцільного тіла (тобто тіло є нескінченним в глибину і в ширину). Нехай на цю площину діє зосереджена сила F по осі z (рис.5.5).

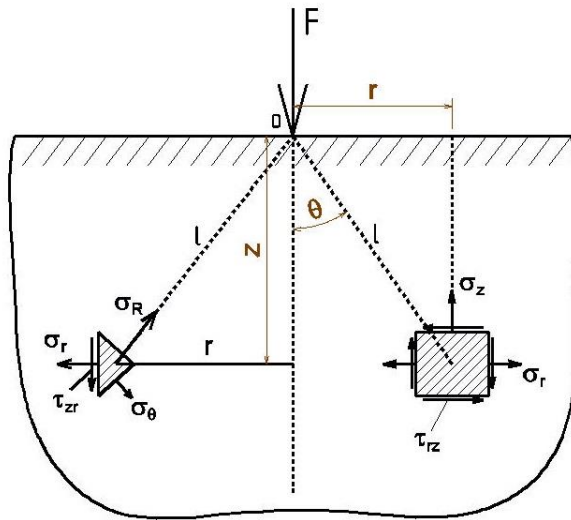


Рис. 5.5. Зосереджена сила, що діє на площину, яка обмежує напівнескінченне тіло

Для визначення радіального напруження при попередніх розрахунках можна скористатись наступною залежністю:

$$\sigma_R = -kF \frac{\cos \theta}{l^2}. \quad (5.41)$$

Для циліндричних координат по формулам переходу отримаємо:

$$\begin{cases} \sigma_z = \sigma_R \cos^2 \theta; \\ \tau_{rz} = \frac{1}{2} \sigma_R \sin 2\theta. \end{cases} \quad (5.42)$$

Тоді підставляючи (5.41) в (5.42) можна записати:

$$\begin{cases} \sigma_z = -kF \frac{z^3}{l^5}; \\ \tau_{rz} = -kF \frac{z^2 r}{l^5}. \end{cases} \quad (5.43)$$

Коефіцієнт k , який входить в залежності (5.43) визначається із рівняння рівноваги по будь-якому горизонтальному перерізу $z=a$.

Таким чином рівняння для визначення коефіцієнта k запишеться як:

$$k = \frac{3}{2\pi}. \quad (5.44)$$

Вирази (5.43) дають точне рішення задачі. В точності рішення задачі можна впевнитись шляхом використання функції напруження. Для цього для функції напружень необхідно прийняти наступний вираз:

$$\varphi = C_1 z \ln r + C_2 \left(r^2 + z^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C_3 z \ln \left(\frac{\sqrt{r^2 + z^2} - z}{\sqrt{r^2 + z^2} + z} \right), \quad (5.45)$$

Вираз (5.45) задовольняє умовам нерозривності та рівноваги. Далі використовуючи залежність (5.5) визначаються невідомі коефіцієнти рівняння (5.45) – C_1 , C_2 , C_3 . Після математичних перетворень та скорочень отримуємо необхідні рівняння:

$$\begin{cases} \sigma_z = -\frac{3}{2} \frac{F}{\pi} \frac{z^3}{l^5}; \\ \sigma_r = -\frac{F}{2\pi} \left[\frac{1-2\mu}{l(l+z)} - \frac{3zr^2}{l^5} \right]; \\ \sigma_\theta = \frac{F}{2\pi} (1-2\mu) \left[\frac{z}{l^3} - \frac{l}{l(l+z)} \right]; \\ \tau_{rz} = -\frac{3F}{2\pi} \frac{z^2 r}{l^5}. \end{cases} \quad (5.46)$$

На початку координат, як і для плоскої задачі, переміщення і напруження стають нескінченно великими, і тому щоб уникнути принципових ускладнень при застосуванні вказаних виразів, необхідно представити, що на початку координат в області пластичних деформацій матеріал вирізаний напівсферичною поверхнею малого радіуса, а зосереджена сила F замінена статичними еквівалентними зусиллями, розподіленими по цій поверхні.

5.5. Товстостінний циліндр під дією внутрішніх та зовнішніх сил

Визначимо напруження і деформації товстостінного довгого циліндра з внутрішнім r_1 і зовнішнім r_2 радіусами, що перебуває під дією внутрішніх F_1 і зовнішніх F_2 сил (рис.5.6). Поставлена задача є вісесиметричною щодо осі z . Внаслідок симетрії у циліндра виникатимуть нормальні напруження σ_r , σ_θ , а також переміщення u вздовж радіуса r і деформації ε_r , ε_θ . Оскільки циліндр великої довжини, то в усіх перерізах напруження і деформації будуть однакові. Тому всі п'ять невідомих не залежать від z . Внаслідок вісесиметрії всі п'ять невідомих є лише функціями від r .

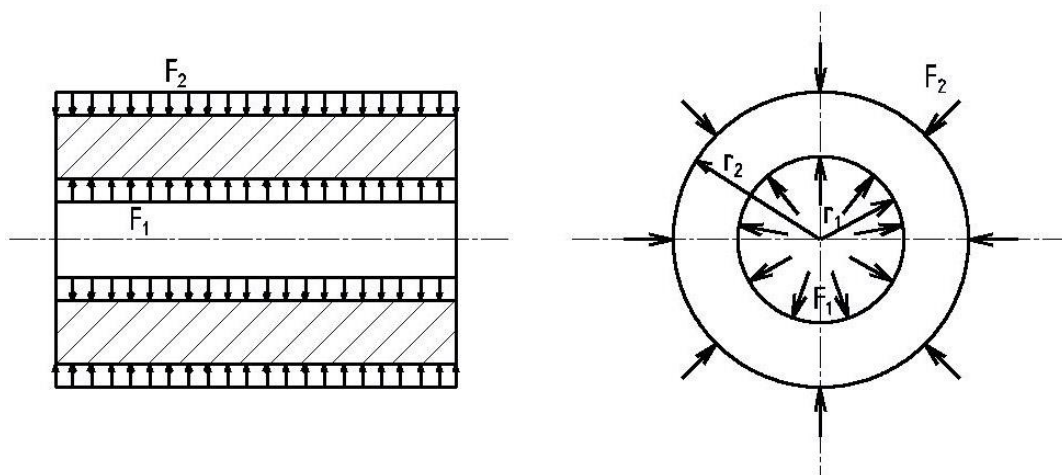


Рис. 5.6. Схема до розрахунку товстостінного циліндра

Статичний аспект задачі. Якщо спроекціювати всі сили, які діють на елемент (рис.5.2) на вісь r , а потім виконати математичні перетворення, то отримаємо наступне рівняння статички:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (5.47)$$

Геометричні рівняння при розв'язуванні даної задачі є аналогічними до рівнянь (5.23).

Фізичний аспект задачі. Так як елемент $abcd$ (рис.5.2) перебуває під дією двостороннього розтягання, то напруження та деформації будуть пов'язані між собою наступними залежностями:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta); \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_{rr}). \end{cases} \quad (5.48)$$

Розв'язання цієї задачі можна звести до інтегрування одного рівняння відносно однієї функції $u(r)$, якщо задачу розв'язувати в переміщеннях. Для цього необхідно рівняння (5.23) підставити у рівняння (5.48), після чого результат підставити в рівняння рівноваги (5.47) і після звичайних математичних перетворень отримаємо диференціальне рівняння другого порядку відносно однієї невідомої функції:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (5.49)$$

Розв'язок рівняння (5.49) має вигляд:

$$u = Ar + \frac{B}{r}, \quad (5.50)$$

де A, B – сталі інтегрування.

Алгоритм розв'язку є аналогічним, як в задачі про сферичну оболонку. Сталі інтегрування визначаються з наступних граничних умов: якщо $r=r_1$, то $\sigma_r = -F_1$, а якщо $r=r_2$, то $\sigma_r = -F_2$. До аналогії із задачею про сферу рівняння відносно сталих А та В матимуть наступний вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1-\mu}{E} \left[\frac{r_1^2 F_1 - r_2^2 F_2}{r_2^2 - r_1^2} \right]; \quad B = \frac{1+\mu}{E} \left[\frac{r_1^2 r_2^2 (F_1 - F_2)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \end{aligned} \right. \quad (5.51)$$

Підставляючи значення сталих (5.51) в (5.48) та (5.50) матимемо наступне:

$$u = \frac{1-\mu}{E} \frac{(r_1^2 F_1 - r_2^2 F_2)}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1+\mu}{E} \frac{r_1^2 r_2^2 (F_1 - F_2)}{r(r_2^2 - r_1^2)}. \quad (5.52)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{r_1^2 F_1 - r_2^2 F_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (F_1 - F_2)}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}; \\ \sigma_\theta &= \frac{r_1^2 F_1 - r_2^2 F_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (F_1 - F_2)}{r^2 (r_2^2 - r_1^2)}. \end{aligned} \right. \quad (5.53)$$

Запитання для самоперевірки.

1. Наведіть рівняння Лапласа та його загальний розв'язок?
2. Циліндрична система координат. Рівняння рівноваги?
3. Сферична система координат. Рівняння рівноваги?
4. Функція Лежандра?
5. Оператор Лапласа в прямокутних координатах?

РОЗДІЛ 6. ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ

6.1 Елементи теорії коливань дискретних систем.

6.1.1 Основні поняття та визначення

Вивчення коливальних процесів має дуже важливе значення для різних розділів механіки, фізики та техніки. Вібрація елементів машин ті будівельних споруд, електромагнітні коливання в радіотехніці й оптиці, звукові та ультразвукові коливання – всі ці не схожі між собою процеси об'єднують методами математичної фізики в одне загальне вчення про коливання.

Далі ми будемо розглядати механічні коливання, розуміння природи яких важливо для розв'язку цілого ряду задач (наприклад визначення міцності конструкцій при змінних напруженнях).

Вібрація - це механічні коливання, період яких значно менше характерного проміжку часу, на якому розглядається рух системи, а розмах значно менший характерного розміру системи. Ті механічні пристрої машини, в яких навмисне збуджена вібрація виконує корисні функції, прийнято називати вібраційними.

Вібраційна система - це сукупність елементів (машина і оброблювальне середовище), що при об'єднанні утворюють складний технічний об'єкт, з різними функціональними призначеннями, підкореними єдиному коливальному руху - вібраційному процесу.

Вібробудник коливань - пристрій, що генерує коливання системи, завдяки наявності неврівноваженої маси - дебаланса на валу, що обертається навколо осі, створюючи таким чином відцентрову силу, яка передається робочому органу (рис.6.1).

Робочий орган - рама, або інша конструкція (наприклад, блок), на яку встановлюється форма із середовищем, що під дією вібрації змінює свій стан (ущільнюється, переміщується, руйнується, рухається і тощо).

Математична модель досліджуваного вібраційного процесу має бути представлена взаємозалежною системою рівнянь, які містять необхідну й достатню кількість параметрів, які визначають реальний процес руху системи.

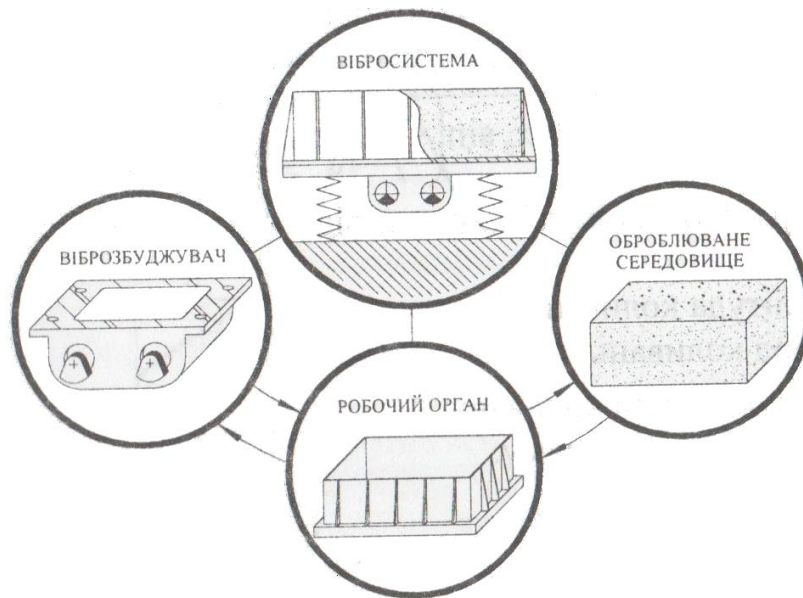


Рис. 6.1 Структурна схема вібросистеми

Типовий підхід до побудови й аналізу моделі містить у собі такі етапи:

- аналіз вібраційного процесу, виявлення фізико-механічних властивостей і створення на цій основі фізичної моделі вібросистеми;
- представлення фізичної моделі у вигляді математичної моделі;
- перетворення математичної моделі до зручного (наприклад, безрозмірного) виду;
- дослідження й аналіз математичної моделі.

6.1.2 Вібраційний рух

Процес коливання будь-якої точки, або вібросистеми, характеризується чередуванням росту й спаду змінної величини. Не коливальний процес такою властивістю не володіє.

Серед вібраційних рухів особливий інтерес представляють періодичні коливання, коли рух повністю повторюється через певні рівні проміжки часу (рис. 6.2). Такий проміжок часу називається періодом коливань. Функція $f(t)$, що представляє математичне вираження будь-якого процесу, називається періодичною, якщо існує постійна величина T , що має назву період, для якої

$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = \dots = f(t+nT), \quad (6.1)$$

де n – будь-яке ціле позитивне число.

Серед безлічі періодичних коливань особливе місце займають синусоїдальні або гармонійні коливання (рис. 6.2, а), що являють собою синусоїдальну функцію часу:

$$x = x_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad (6.2)$$

де x - координата коливної точки, відлічувана від її середнього положення; x_0 – амплітуда коливань; T – період коливань; φ - початкова фаза коливань; t – поточне значення часу.

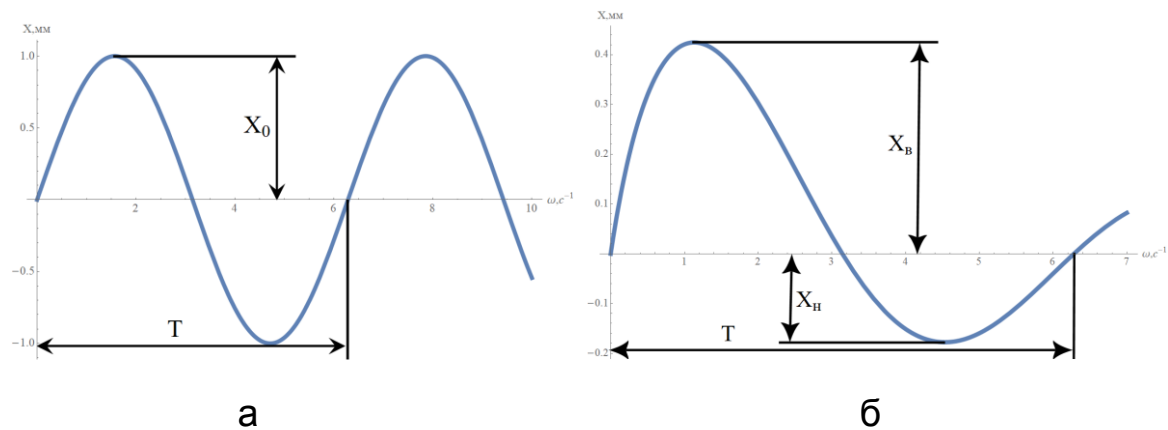


Рис. 6.2. Коливання: а – синусоїдальні; б - несинусоїдальні

Амплітуда коливань - це абсолютна величина найбільшого переміщення від середнього положення при синусоїдальних коливаннях. Розмах коливань дорівнює подвійній амплітуді і являє собою відстань між протилежними крайніми положеннями вібростеми. Стосовно не синусоїдальних коливань термін «амплітуда», суворо кажучи, не є точним. У цих випадках можна говорити про пікове значення переміщення або про напіврозмах коливань X_v і X_n (рис. 6.2, б). Для синусоїдальних коливань слова «амплітуда», «пікове значення» й «напіврозмах» є синонімами.

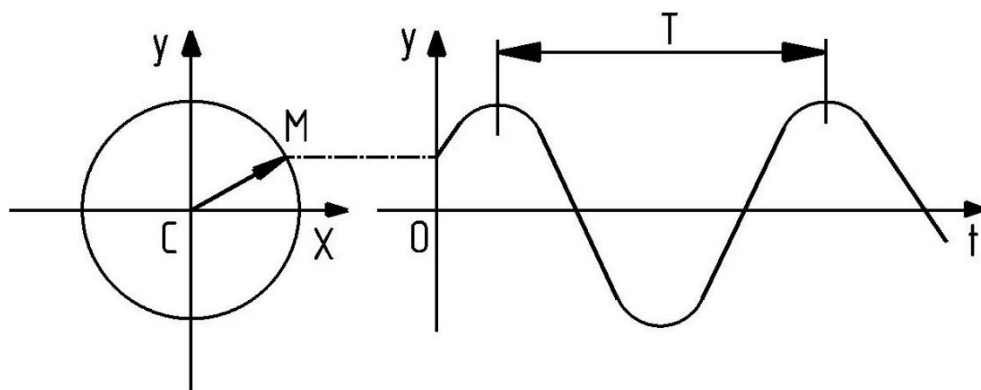


Рис. 6.3. Векторне представлення коливань

Наочним є векторне представлення синусоїдальних коливань. На правій частині (див. рис. 6.3) приведена осцилограма, тобто розгорнення за часом цих коливань. Видно, що коливання проекції радіуса-вектора CM на горизонтальну вісь описуються рівнянням:

$$x = x_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right), \quad (6.3)$$

Фазою коливань називається кут $\frac{2\pi}{T}t + \varphi$, під яким розташований у цей момент часу t радіус радіус-вектор CM . Початкова фаза коливань φ являє собою фазу коливань на початку відліку часу, тобто при $t=0$. При зміні початку відліку часу змінюється початкова фаза, але залишається незмінною фаза $\frac{2\pi}{T}t + \varphi$. Знання фази необхідно при співставленні двох або декількох коливних величин. У цих випадках різниці фаз величин, що зіставляють, можуть мати вирішальне значення. Фаза представляє суттєвий інтерес також при зіставленні коливального процесу з іншими явищами, наприклад, ударом, підключенням до системи додаткових ланок або зв'язків або відключенням їх тощо.

Величина f , зворотна періоду T , називається частотою коливань:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (6.4)$$

Як одиниця виміру частоти коливань f приймається герц, тобто одне коливання в секунду. При дослідженні коливань нерідко зручніше користуватися кутовою частотою:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad (6.5)$$

яка дорівнює кутовій швидкості радіуса-вектора CM (див. рис. 6.3).

Хоча й частота f і кутова частота ω мають розмірність с^{-1} або $1/\text{с}$, у всіх випадках, коли можлива плутанина, краще записувати розмірність частоти f Гц (герц) або кол/с (коливання в секунду), а розмірність кутової частоти в рад/с (радіани в секунду).

Синусоїдальні коливання однакової частоти називаються *синхронними*. Різниця фаз синхронних коливань не залежить від початку відліку часу. Синхронні коливання зі співпадаючими фазами називаються *синфазними* у цьому випадку говорять, що дві або кілька величин коливаються у фазі. Два синхронних коливання з фазами, що розрізняються на π (на 180°), називаються *протифазними* або *антифазними*, у цьому випадку говорять, що дві величини коливаються в протифазі.

6.1.3 Класифікація сил

Сили, що діють зовні на механічну систему, а також внутрішні сили, що розвиваються в її зв'язках, досить різноманітні як по своїй природі, так і по тій ролі, яку вони відіграють у коливальному процесі. Розглянемо основні властивості різних типів і сил, що притаманні системі, яка здійснює коливання.

Такими силами у вібраційній системі є:

- позиційні;
- дисипативні;
- зовнішні змушувальні;
- змішані.

Позиційні сили — це сили, які визначаються відхиленнями системи від положення рівноваги. Якщо напрямок позиційної сили є протилежним до напрямку відхилення, то така сила називається відновлюючою. Можна сказати, що коливання вібраційної системи визначається наявністю саме відновлюючої сили.

Зокрема, відновлюючими силами є сили пружності. У най-простішому випадку, тобто в лінійно деформованій системі, відновлююча сила пружності пропорційна відхиленню системи; при цьому пружні властивості системи характеризуються одним числом - коефіцієнтом пружності c , який являє собою коефіцієнт пропорційності між прикладною силою F , що статично навантажує систему, і виникненою силою переміщення x , тобто $F=cx$. При цьому відновлююча сила протилежна за напрямком до зовнішньої сили F , що відповідає закону Гука. В інших випадках між силою й переміщенням існує нелінійна залежність, і тоді пружні властивості неможливо визначити лінійною залежністю. У цих випадках зазначені властивості визначаються пружною характеристикою, що представляє собою функцію $F=F(x)$, яка будується розрахунковим шляхом або експериментально для реальних умов напруження системи.

Дисипативні сили. При коливаннях вібросистем крім відновлюючих сил, неминуче розвиваються сили тертя. Вони здійснюють незворотню роботу, що приводить до дисипації (розсіювання) механічної енергії. До таких сил належать сили тертя в опорах і з'єднаннях механічної системи, сили опору середовища, що оброблюється і здійснює коливання, сили внутрішнього тертя в матеріалі елементів системи й, нарешті, сили, що виникають при напруженні поглиначів енергії (демпферів та опор).

Якою б не була природа тертя, напрямок дисипативних сил у будь-який момент процесу руху є протилежним до швидкості руху, причому

величина сили, як правило, тим або тим способом пов'язана з величиною швидкості.

Зовнішні змушуючі сили. Як було сказано, характеристики відновлюючих і дисипативних сил визначаються винятково властивостями самої вібраційної системи, а відповідні сили не тільки впливають на рух, але, можна сказати, самі керують цим рухом, оскільки вони залежать від переміщень і швидкостей.

Іншу важливу категорію утворюють зовнішні сили, тобто сили, задані у вигляді явних функцій часу й тому незалежні від руху, але, звичайно, вони активно впливають на нього; іноді такі сили називають *змушуючими*.

Прикладом можуть служити сили (рис. 6.4), що передаються від обертання неврівноваженого вала з дебалансом. Нехай ω - кутова швидкість обертання дебаланса, m_0 - його неврівноважена маса, r_0 - ексцентриситет (відстань від осі обертання дебаланса до його центра неврівноваженої частини). Тоді величина відцентрової сили F_0 постійна і дорівнює $m_0 \omega^2 r_0$, і називається зовнішньою змушуючою силою.

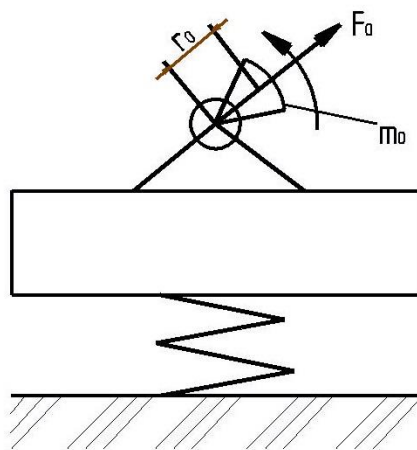


Рис. 6.4. Приклад дії змушувальної сили

Такі сили є причиною виникнення коливань пружної системи, на якій установлена машина. В інших випадках змушуючі сили, можуть розвиватися внаслідок інших обставин, наприклад, періодичних змін тиску в пневмовібраторах, періодичної зміни сил притягання електромагнітів (в електровібромашинах) і ін.

Класифікація вібраційних машини в залежності від закону зміни змушуючих сил у часі є наступною:

- гармонійна - машини з відцентровими збудниками коливань;
- періодична сила - машини з кривошипно-шатунними механізмами;

- періодичні короточасні імпульси - віброударні машини; у деяких випадках тривалість окремих імпульсів настільки мала, що їх можна вважати миттєвими (шок-столи, копрові пристрої тощо);

6.1.4 Число ступенів вільності вібросистеми

Складність теоретичного аналізу коливань значною мірою залежить від числа ступенів вільності розглянутої вібраційної системи. Числом ступенів вільності вібросистеми називається число незалежних координат, які одночасно визначають положення всіх матеріальних точок системи.

У динамічних задачах вібросистеми, положення точок системи змінюються із часом, так що зазначені координати є функціями часу. Основне завдання динамічного дослідження складається в знаходженні цих функцій, тобто у визначенні закону руху системи. Після цього без труднощів можуть бути знайдені деформації, напруження і внутрішні зусилля у зв'язках системи.

Достовірність визначення вказаних параметрів залежить від вибору кількості ступенів вільності, що адекватно відображають реальний процес руху, визначений тою чи тою координатою.

Система з однією ступенню вільності, це система рух якої визначається однією координатою, якою зазвичай моделюються одномасові вібромашини (як правило переміщення робочого органу).

Для систем з двома ступенями вільності необхідно вже мати дві координати, що визначають її рух і т. д. Системи з кінцевим числом ступеней вільності прийнято називати дискретними.

Системи з дискретними параметрами описуються звичайними диференційними рівняннями, в яких змінною, як правило, являється час. Кількість рівнянь устанавлюється числом ступенів вільності, тобто числом незалежних координат, що одночасно визначають положення всіх точок системи.

Якщо положення в процесі руху залежить не тільки від однієї змінної (часу), а від інших координат (наприклад, від просторової координати), тоді звичайні диференційні рівняння невідповідають умовам, задачі і необхідно використовувати інші рівняння (в часткових координатах).

6.1.5 Методи складання рівнянь руху

Складаються рівняння руху вібросистеми на основі методів теоретичної механіки. Застосовуються три основних методи:

- метод рівноваги сил, що заснований на використанні принципу Даламбера, у відповідності з яким поруч з зовнішніми силами враховуються і сили інерції мас або у відповідності з законом Ньютона діючі в системі сили дорівнюють добутку маси на прискорення;

- принцип можливих переміщень, котрий формулюється наступним чином: якщо система, що знаходиться у рівновазі під дією сил, отримує будь-яке можливе переміщення, яке задовольняє граничним умовам, то робота всіх сил за час цього переміщення дорівнює нулю;

- варіаційний принцип Гамільтона, який встановлює варіацію кінетичної і потенціальної енергії плюс варіація роботи не-консервативних сил (системи, в яких енергія не тільки розсіюється, але і поступає зовні) протягом будь-якого інтервалу часу мають бути рівними нулю.

Вибір певного методу складання рівнянь визначається, в основному, типом реальних вібросистем, які вивчаються.

Для систем, що мають кількість ступенів волі $n \leq 2$, найбільш зручним являється метод Даламбера. Метод можливих переміщень є ефективним у випадках, коли сили, що діють на ті чи ті елементи системи, можуть бути представлені переміщеннями цих елементів системи. Виходячи із фундаментальних задач вібросистем, коли в основі кладеться пошук саме переміщень при відомих параметрах та коефіцієнтах тих чи тих сил, цей метод застосовується вкрай рідко.

Для отримання рівнянь руху будь-якої складності вібросистеми зручним являється метод Гамільтона, оскільки його ідея ґрунтується не на визначенні тих чи тих сил з необхідним врахуванням знаків напрямлення цих сил, а складаються вирази для кінетичної, потенціальної енергій системи і віртуальної роботи при дії на систему сил.

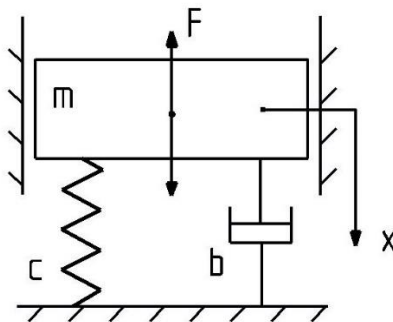


Рис. 6.5. Розрахункова модель вібросистеми із однією ступінню вільності

Розглянемо складання рівнянь застосовуючи метод Даламбера та принцип Гамільтона на прикладі одномасової вібросистеми (рис.6.5).

У ній робочий орган представлений зосередженою абсолютно твердою масою m , що рухається під дією змінної змушуючої сили F в ідеальних (без тертя) напрямних, і отже, у будь-який момент часу її положення може визначатися однією координатою. Всі пружні властивості системи моделюються пружиною з коефіцієнтом пружності c , (Н/м), що являє собою силу в Н, необхідну для деформації пружини на одиницю довжини в м.

Сумарний опір коливанням моделюється демпфером, що відображає в'язкий характер опору з коефіцієнтом b , (Н*с/м). Такий вид опору, як відомо, пропорційний швидкості руху, що дає можливість спростити аналіз його впливу на коливання робочого органу.

Метод Даламбера. Будемо вважати, що сила $F(t) = F_0 \sin \omega t$ змушує масу рухатися вниз. Тоді в пружині виникає сила пружності, спрямована проти руху:

$$F_y = -cx. \quad (6.6)$$

Проти руху буде спрямована й пропорційна швидкості сила опору

$$F_c = -b\dot{x}. \quad (6.7)$$

Таким чином, у системі виникає сумарна сила:

$$F = -cx - b\dot{x} + F_0 \sin \omega t. \quad (6.8)$$

Відповідно до другого закону Ньютона, сила дорівнює добутку маси на прискорення:

$$\sum F = m\ddot{x},$$

або

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x} + F_0 \sin \omega t, \quad (6.9)$$

В остаточному вигляді маємо диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0 \sin \omega t, \quad (6.10)$$

що описує рух системи з однією ступінню вільності. Перший член цього рівняння являє собою силу інерції маси, що рухається, а інші - уже відомі сили: опору, пружності і змушуючої.

Принцип Гамільтона. Найбільш часто цей принцип реалізується шляхом використання рівняння Лагранжа II роду, яке має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F(t), \quad (6.11)$$

де T , Π , D - відповідно кінетична, потенціальна і дисипативна (розсіяння) складові енергії системи.

Процедура складання рівнянь полягає у встановленні залежностей для енергій, визначення їх похідних у відповідності до рівняння (6.11) з наступною підстановкою похідних у це рівняння.

Для системи зображеної на рисунку 6.5 складові енергій матимуть наступний вигляд:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}; \quad \Pi = \frac{cx^2}{2}; \quad D = \frac{b\dot{x}^2}{2}. \quad (6.12)$$

Визначаємо похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = cx; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = b\dot{x}. \quad (6.13)$$

Тоді після підстановки (1.12) в (1.13) отримаємо рівняння руху системи, яке аналогічне рівнянню (6.10).

Рівняння (6.10), як це впливає із складових діючих сил, може відображати такі можливі варіанти коливання системи:

- 1) вільні незгасаючі ($F = 0$; $b = 0$);
- 2) вільні згасаючі ($F = 0$);
- 3) вимушені (при $c=0$; $b=0$);
- 4) вимушені (при наявності всіх сил системи).

6.1.6 Вимушені коливання системи при наявності сил опору

Розглянемо випадок №4. Інші варіанти коливань системи можна знайти в джерелі [12].

Тут розглядається рівняння в його повному виді, що описує рух моделі реальних вібр машин:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0 \sin \omega t. \quad (6.14)$$

Подальші міркування будуть стосуватися тільки часткового рішення наведеного рівняння, яке відображає сталі вимушені коливання.

Змушуюча сила $F(t)$ змінюється за гармонійним законом з амплітудою F_0 і частотою ω . Можна передбачити, що шукана функція переміщення виражається рівнянням:

$$x = x_0 \sin(\omega t - \varphi), \quad (6.15)$$

де амплітуда x_0 і кут зсуву фаз між переміщенням і змушуючою силою φ , нам поки невідомі постійні величини. Тоді й інші сили в рівнянні повинні

також змінюватися за законом синуса з тією ж частотою. Для знаходження x_0 й φ використаємо метод векторних діаграм. Він полягає в тому, що на площині діаграми відкладаються амплітудні значення радіусів-векторів сил, що діють у системі. Така інтерпретація повністю відображає зміст диференціального рівняння.

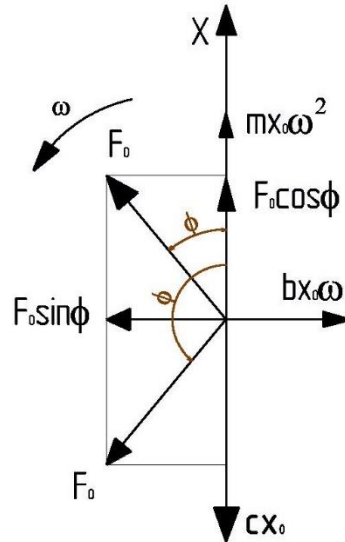


Рис. 6.7. Векторна діаграма сил, що діють у системі

Відкладемо амплітуду переміщення у вигляді вектора, спрямованого вгору (рис. 6.7). Тоді вектор амплітуди сили пружності cx_0 буде спрямований вниз. Сила опору $b\dot{x} = bx_0\omega \cos(\omega t - \varphi)$ має амплітуду $bx_0\omega$, і її вектор буде повернутий на 90° убік обертання векторів. Сила інерції $m\ddot{x} = mx_0\omega^2 \sin(\omega t - \varphi)$ має амплітуду $mx_0\omega^2$, і її вектор на 90° випереджає сили опору, тобто перебуває в протифазі із силою пружності. Амплітуда змушуючої сили F_0 випереджає переміщення на кут φ .

Для визначення амплітуди переміщення й кута зсуву фаз розглянемо умови рівноваги проекцій сил на вертикальну й горизонтальну осі:

$$\begin{aligned}\sum y &= cx_0 - mx_0\omega^2 - F_0 \cos \varphi = 0; \\ \sum x &= bx_0\omega - F_0 \sin \varphi = 0.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Запишемо ці рівняння в такому вигляді:

$$cx_0 - mx_0\omega^2 = F_0 \cos \varphi; \quad bx_0\omega = F_0 \sin \varphi.\tag{6.17}$$

Зведемо кожне рівняння у квадрат і складемо їх. Після нескладних перетворень знайдемо амплітуду переміщення:

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}.\tag{6.18}$$

Якщо розділити друге рівняння сил на перше, то отримаємо вираз для визначення кута зсуву фаз:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b\omega}{c - m\omega^2}. \quad (6.19)$$

Як впливає з векторної діаграми, кут зсуву фаз φ оцінює опір системи. При цьому змушуюча сила для дотримання системи в рівновазі повинна мати складову $F_0 \sin \varphi = b x_0 \omega$. Кут зсуву фаз може бути досить легко визначений вимірювальним пристроєм, який фіксує в часі максимальне відхилення робочого органу машини від положення дебалансів. Тому для визначення амплітуди коливань опір іноді виражається не коефіцієнтом опору, а кутом зсуву фаз.

Для отримання такого виду формули амплітуди підставимо у вираз (6.18) замість $b\omega$ його значення з виразу (6.19): $b\omega = \operatorname{tg} \varphi (c - m\omega^2)$.

Тоді:

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + (c - m\omega^2)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{F_0}{(c - m\omega^2) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}. \quad (6.20)$$

Оскільки з відомих формул тригонометрії $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}$, то з урахуванням цієї залежності отримаємо наступну формулу для амплітуди коливань:

$$x_0 = \frac{F_0}{c - m\omega^2} \cos \varphi. \quad (6.21)$$

Формулу (6.21) можна представити в безрозмірному вигляді. Для цього чисельник і знаменник ділимо на c . Тоді:

$$x_0 = - \frac{F_0 \cos \varphi}{c \left(1 - \frac{m\omega^2}{c} \right)}. \quad (6.22)$$

Тут $F_0 / c = x_{cm}$ - статичне осідання пружини під дією незалежної від частоти діючої сили. Така умова характерна, наприклад, для кривошипно-шатунних віброзбуджувачів, у яких сила на шатуні буде деформувати пружини при будь-яких малих обертах. Відношення $m/c = 1/\omega^2$.

Безрозмірне вираження амплітуди переміщення набуває вигляд:

$$\frac{x_0}{x_{cm}} = \frac{\cos \varphi}{1 - (\omega/\omega_0)^2}, \quad (6.23)$$

де $\frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} = \lambda_1$ - називається коефіцієнтом динамічності, що оцінює

зміну амплітуди при зміні співвідношення частот змушуючих і власних коливань, для системи в якій змушуюча сила не є функцією частоти. Якщо розглядати вібромашини з відцентровими віброзбуджувачами, то в них сила: $F_0 = m_0 r_0 \omega^2$ і є функцією квадрата частоти; при $\omega \rightarrow 0$ в системі коливання відсутні. Вираз амплітуди для цього випадку:

$$x_0 = \frac{m_0 r_0 \omega^2 \cos \varphi}{c - m \omega^2} = \frac{m_0 r_0 \omega^2 \cos \varphi}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (6.24)$$

враховуючи, що $c = m \omega_0^2$. Вираз $\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2} = \lambda_2$ - коефіцієнт динамічності для системи, в котрій сила є функцією частоти, тобто $F = f(\omega^2)$; $x_0 = \frac{m_0 r_0}{m}$ — амплітуда переміщення без врахування сил пружності і опору. В результаті формула для амплітуди коливань системи з відцентровим віброзбуджувачем:

$$x_0 = \frac{m_0 r_0}{m} \lambda_2 \cos \varphi. \quad (6.25)$$

Висновок. Врахування всіх сил опору в отриманих формулах для визначення амплітуди коливань засвідчує цікаву деталь: пружно-інерційні властивості завжди розташовані на одній лінії діючих сил, але з різними знаками, а дисипативний опір завжди має напрямок на 90° повернутий по відношенню до пружно-інерційних. Друга особливість отриманих результатів полягає у можливості вираження сил опору за допомогою фазового кута.

6.1.7 Аналіз руху вібромашини

Важливим параметром вібромашин поруч з амплітудою коливань є **частота коливань робочих органів**. Вона зазвичай призначається з технологічних міркувань, але від її істотно залежить взаємодія сил системи й, отже, амплітуда переміщення.

Знову повернемося до розгляду векторної діаграми (див. рис. 6.7) і простежимо взаємодію сил при різних співвідношеннях частот вимушених і власних коливань системи. Можна відмітити такі характерні режими:

1. Пуск вібромашини: $\omega \rightarrow 0$. Для коливань, коли електродвигун тільки включений, характерна дуже низька частота, тоді силою опору і силою інерції можна знехтувати, тому що ω є складовою цих сил. Тоді

$F_0 = cx_0$ й $\varphi = 0$. Змушуюча сила врівноважує тільки силу пружності, яка залежить від частоти: $x_0 = F_0/c = x_{cm}$. Для відцентрових віброзбудувачів рух тільки починається.

2. Дорезонансний режим: $\omega_0 > \omega > 0$. Зі зростанням частоти з'являється сила опору й інерції. Кут зсуву фаз визначається опором і для забезпечення рівності $F_0 \sin \varphi = bx_0 \omega$. Його значення $\pi/2 > \varphi > 0$. Сила пружності врівноважується силою інерції й проекцією змушуючої на вертикальну вісь, тобто задовольняється рівність: $cx_0 = mx_0 \omega^2 + F_0 \cos \varphi$. Оскільки $c - m\omega^2 > 0$, амплітуда $x_0 = F_0 \cos \varphi / (c - m\omega^2)$ має позитивне значення, тобто маса рухається в одному напрямку зі змушуючою силою, але зі зрушенням фаз.

3. Резонанс: $\omega \rightarrow \omega_0$. Наступає рівність сили інерції й сили пружності: $mx_0 \omega^2 = cx_0 = m\omega_0^2 x_0$ і $\omega = \omega_0$. При цьому змушуюча сила врівноважує силу опору $F_0 = bx_0 \omega$ й кут зсуву фаз $\varphi = \pi/2$. Такий режим руху називається резонансом. Він настає при рівності частот вимушених і власних коливань, що приводить до зрівноважування інерційних і пружних сил системи. Амплітуда переміщення в такій ситуації різко зростає, тому що її значення $x_0 = F_0/b\omega$ обмежується тільки опором. При відсутності опору вона збільшується нескінченно. Отже, щоб досягти якоїсь заданої амплітуди в резонансному режимі, має бути малою змушуюча сила, яка необхідна тільки для компенсації порівняно невеликих опорів системи.

4. Зарезонансний режим: $\omega > \omega_0$. При подальшому зростанні частоти сила інерції збільшується і тоді $mx_0 \omega^2 > cx_0$, тобто сила пружності вже не може врівноважити зростаючу силу інерції. Рівновага настає при умові, коли $\varphi > \pi/2$, і змушуюча сила стає в протифазі із силою інерції і напрямком переміщення маси. На рис. 6.7 таке положення змушуючої сили показано тонкою лінією. Рівновага сил визначається залежністю: $F_0 \cos(\pi - \varphi) + mx_0 \omega^2 = cx_0$, або $cx_0 = -F_0 \cos \varphi + mx_0 \omega^2$. Звідки

$$x_0 = -\frac{F}{c - m\omega^2} \cos \varphi.$$
 Знак «-» показує, що амплітуда перебуває в протифазі зі змушувальною силою. Якщо опір відсутній то кут зсуву фаз буде рівний π . При подальшому збільшенні ω можуть виникнути дві ситуації: амплітуда прагне до нуля; друга - амплітуда приймає сталі значення. Падіння амплітуди до нуля відповідає закону зміни змушуючої сили, що не залежить від частоти, в той час як інерційна сила суттєво зростає.

Стабілізація відповідає одночасному росту змушуючої сили і сили інерції при збільшенні ω , що характерно для відцентрових збудників коливань.

Все сказане вище може бути проілюстровано за допомогою амплітудно-частотних характеристик, які показують зміну амплітуди коливань в залежності від зміни частоти [12].

6.2 Елементи теорії коливань континуальних систем

6.2.1 Основні поняття та визначення

Континуальними називаються системи, в яких параметри, що притаманні дискретним (маса, пружність, опір), розподілені по всьому об'єму і тому їх іще називають системами з розподіленими параметрами. До системи з розподіленими параметрами належать палі, стержні, пластини, оболонки, різні суміші і середовища, які перебувають під дією вібрації. Головна особливість систем з розподіленими параметрами полягає в наявності нескінченної кількості власних частот і форм коливань.

Процес розповсюдження коливань у подібних системах називається **хвилею** або **хвильовим процесом**. При цьому частини середовища здійснюють коливання не всі одночасно, а із запізненням, що обумовлюється інертністю одної частини відносно іншої у напрямку вібрації. Здійснюють ці коливання частинки з різними фазами, утворюючи таким чином хвилю. З вершинами і впадинами і не переміщуються з розповсюдженням хвильового процесу, а коливаються біля свого положення рівноваги з деяким періодом. Якщо взаємозв'язок між частинками середовища здійснюється силами пружності, що виникають у наслідок деформації середовища при передачі коливань від одних частинок до інших, то **хвилі називаються пружними**. В середовищах, схильних до поглинання енергії під час коливань частинок середовища, розповсюджуються **пластичні хвилі**. Якщо частинки середовища в хвилі здійснюють коливання до напрямку направлення розповсюдження хвилі, то такі **хвилі називають поперечними**. Хвилі при яких коливання частинок середовища здійснюється у тому ж напрямку, що і рух **хвилі, називають поздовжніми**.

В поперечних хвилях відбувається зсув шарів середовища відносно другого, тобто вони по суті є хвилями деформації зсуву. Пружні сили, що протидіють відносному переміщенню шарів, виникають тільки в тілах, що намагаються зберегти свою форму, тобто в твердих тілах. У газах і

рідинах такі сили не виникають (модуль зсуву дорівнює нулю), тому в них поперечні хвилі не розповсюджуються.

При розповсюдженні хвиль напружено-деформований стан шарів середовища характеризується чередуванням процесу стискування і розтягу, змінюючи таким чином їх об'єм, тобто поперечні хвилі є хвилями об'ємної деформації. Пружні сили, що протидіють зміні об'єму, виникають як у твердих тілах, так і в рідинах та газах. Тому поперечні хвилі розповсюджуються в твердих тілах, рідинах і газах. Чередування деформації стискування і розтягу супроводжується відповідними змінами тиску у порівнянні з його середнім значенням у деформованому середовищі.

Швидкість передачі коливального руху від частинки до частинки, обумовлює швидкість розповсюдження хвиль і називається фазовою швидкістю. Зазвичай під швидкістю хвилі і розуміють фазову швидкість. Залежність фазової швидкості від частоти коливань називається дисперсією.

Відстань між двома найближчими частинками, що коливаються в фазах, які відрізняються на 2π , тобто ті, що перебувають в однаковому стані (стиску або розтягу), називають *довжиною хвилі* λ (рис.6.8).

Цей параметр для коливань у просторі має такий же сенс, що і період T для коливань у часі. Довжина хвилі дорівнює відстані, на яку вона розповсюджується за час, що рівний одному періоду змущуючої вібрації. Таким чином, хвиля володіє суворою періодичністю в просторі і часі і її швидкість:

$$c = \lambda / T \text{ або } c = \lambda f, \quad (6.26)$$

де $T = 1/f$; f - частота хвилі, яка дорівнює частоті коливань частинок середовища.

У поперечній хвилі на близькій відстані вузлів, де швидкість частинок, що коливаються, дорівнює нулю, відбувається різка зміна щільності середовища. Це пояснюється тим, що частинки середовища наближаються з двох сторін до вузла, а потім від нього віддаляються.

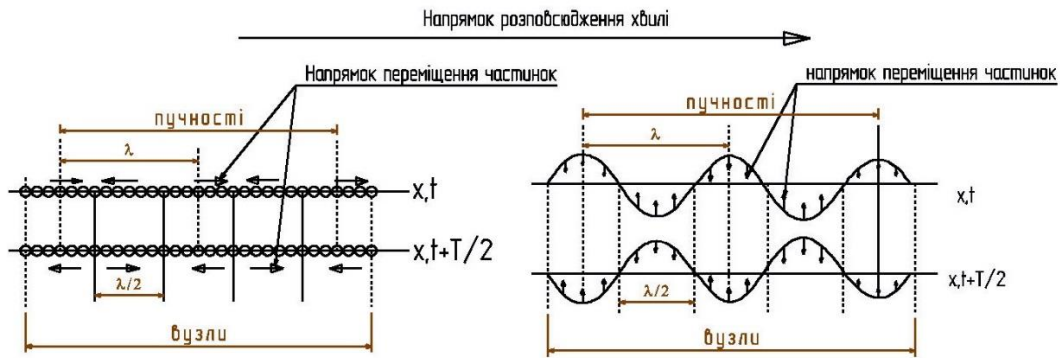


Рис. 6.8. Розповсюдження коливань у шарах середовища для двох моментів (зсув на пів періоду): а – поздовжні; б – поперечні хвилі.

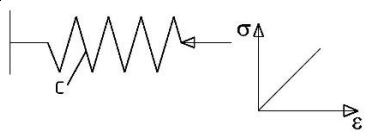
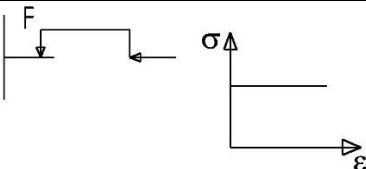
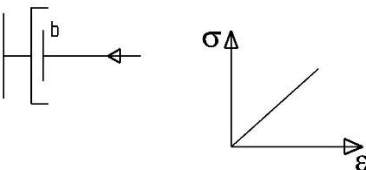
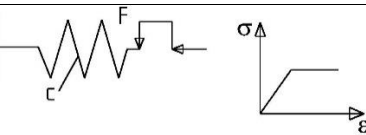
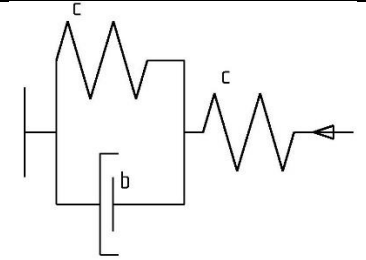
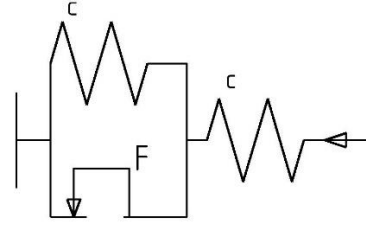
Область простору, в якій при розповсюдженні хвиль частинки середовища здійснюють коливання, називають **хвильовим полем**. Множина точок середовища, що мають однакову фазу в даний момент часу, називають **хвильовою поверхнею**. Площину, що є дотичною до хвильової поверхні в даній точці, називають **фронтом хвилі**. У хвильовому полі можна виділити множини хвильових поверхонь, що проходять через положення рівноваги частинок, що коливаються в однакових фазах.

Хвилі, в яких хвильові поверхні мають форму площини, називають **площинними**, а якщо хвильові поверхні представляють системи конкретних сфер, центри котрих розташовані в одній точці – фокусі хвилі, називають **сферичними хвилями**.

6.2.2 Моделі для визначення напружено-деформованого стану матеріалів

Поведінка континуальних матеріалів під дією на них вібраційного навантаження в тій чи тій мірі відрізняється від відомого закону Гука. Невиконання передумов закону Гука приведе до різних форм проявлення непружності матеріалу. Існує безліч моделей, що якісно розрізняються між собою за певними фізико-механічними властивостями (табл. 6.1).

Таблиця 6.1. Основні види реологічних моделей

Но- мер мо- делі	Фізичні властиво- сті	Розрахункова схема	Математичні залежності	Назва моделі
1.	Пружність		$\sigma = \varepsilon E$	Гука
2.	Пластич- ність		$\tau = \tau_{nl}; \tau = \gamma G$	Сен- Венана
3.	В'язкість		$\tau = \eta \frac{dv}{dz}$	Нью- тона
4.	Пружно- пластичні		$\sigma = \varepsilon E;$ $\tau = \tau_{nl}$	Пранд- тля
5.	Пружно- в'язкі з явищем повзучо- сті		$\tau = \gamma G;$ $\tau = \gamma_1 G_1 + \eta \frac{dv}{dz}$	Кель- віна
6.	Пружно- в'язко- пластичні		$\tau = \gamma G;$ $\tau = \gamma_1 G_1 + \tau_{nl}$	Бінгама

У зв'язку з тим, що поруч з пружною деформацією (відгуком на навантаження) майже всім матеріалам притаманна пружна деформація, тому поведінку подібних матеріалів можна назвати неідеально пружною або пружною. Якщо матеріал під дією вібронавантажень проявляє властивості в малих межах, які не перевищують деякого характерного напруження (наприклад, межі текучості і швидкості деформування не малі), то можливим є застосування закону Гука.

Неоднозначність залежності «напруження-деформація» при циклічних навантаженнях у координатах $\sigma=f(\varepsilon)$ або $F=f(x)$ (F - сила, x -

переміщення) представляються двома кривими, що є різними при навантаженні і при знятті навантажень утворюють так звану петлю гістерезиса, площа якої визначає дисипацію, або розсіювання механічної енергії за цикл (рис. 6.9); (гістерезис - у перекладі з грецької - відставання післядії від приведеної його причини; довготривала післядія існуючих попередніх умов).

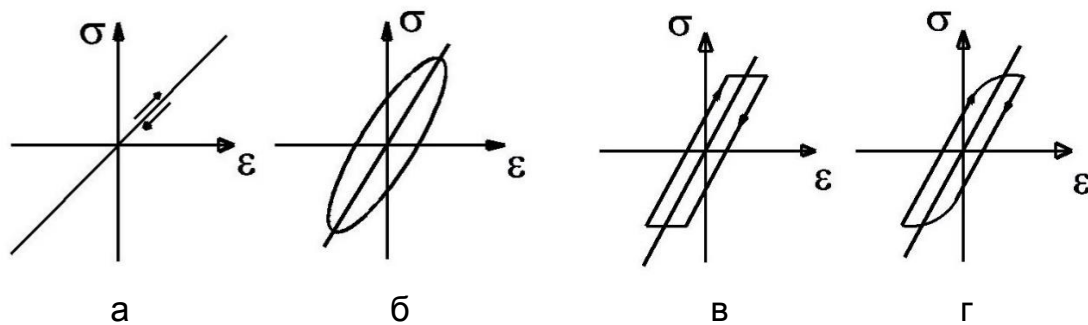


Рис. 6.9. Залежність «напруження-деформація» при деформуванні матеріалів: а – пружного; б – в'язкопружного; в – пружнопластичного; г – гістерезисного.

6.2.3 Рівняння руху та визначення основних параметрів пружного середовища

Щоб визначити рівняння руху системи з розподіленими параметрами, розглянемо стержень (рис. 6.10, а), до якого з лівого боку в торець прикладена раптово сила F . При цьому вважатимемо, що в площині перерізу стержня частинки не переміщуються, не порушується суцільність шару і при визначенні залежностей між діючими силами спрацьовують закони Ньютона, а деформації і напруження відповідають закону Гука.

Розглянемо шар розміром dz і позначимо переміщення границь шару відповідно x_1 та x_2 (рис. 6.10, б). Визначимо деформацію шару. Якщо ліва границя шару отримає переміщення $x_1 = x(z)$, то права - $x_2 = x(z + dz)$. Тоді зміна товщини шару визначатиметься різницею переміщень $\Delta x = x_2 - x_1$, тобто $\Delta x = x(z + dz) - x(z)$. Якщо цю різницю поділити на товщину шару dz за умови, що $dz \rightarrow 0$, матимемо класичне визначення часткової похідної:

$$\frac{dx}{dz} = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{x(z + dz) - x(z)}{dz}. \quad (6.27)$$

Отже, зміна товщини шару дорівнюватиме виразу $\frac{dx}{dz} dz$, що помножений на dz , оскільки для отримання зазначеної похідної необхідно було

поділити різницю $x(z+dz)-x(z)$ на dz . Імовірно, що відносна зміна товщини (відносна деформація) і є вираз (6.27), тобто $\varepsilon = \frac{dx}{dz}$.

Для умов навантаження $\varepsilon > 0$ маємо деформацію розтягу, при $\varepsilon < 0$ - деформацію стиску, а при $\varepsilon = 0$ елементарний шар не деформуватиметься.

Тепер розглянемо сили, які діють на виділений шар для загального випадку, тобто $\varepsilon \neq 0$. При достатньо малих деформаціях сили визначаються за законом Гука як добуток напруження σ на площу перерізу S . До лівої грані (рис. 6.10, в) прикладена сила:

$$F_z = -\sigma S = -E\varepsilon S = -ES \left(\frac{dx}{dz} \right)_z, \quad (6.28)$$

де E - модуль пружності елементарного шару. Знак «-» вказує на напрям сили, прикладеної до лівої грані елементарного шару. До правої грані прикладена сила:

$$F_{z+dz} = ES \left(\frac{dx}{dz} \right)_{z+dz}, \quad (6.29)$$

Тоді результуюча сила:

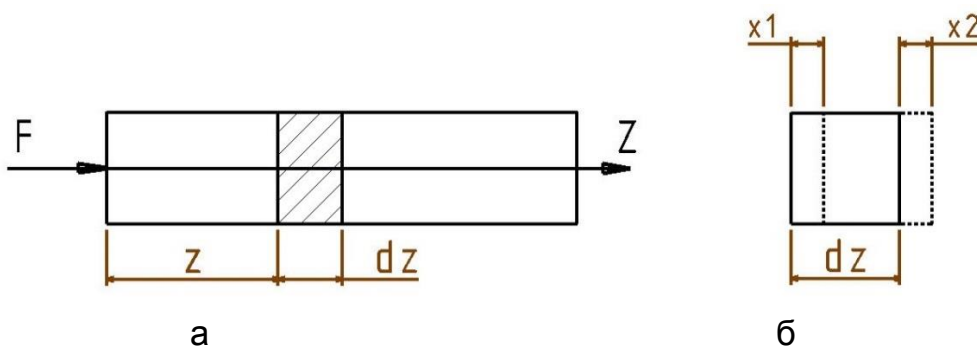
$$F = ES \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)_{z+dz} - \left(\frac{dx}{dz} \right)_z \right]. \quad (6.30)$$

Якщо порівняти вираз у квадратних дужках залежності (6.30) з правою частиною виразу (6.27), то неважко помітити, що згадана складова виразу (6.30) являє собою добуток похідної функції $\frac{dx}{dz}$ на dz тобто

$$\left[\left(\frac{dx}{dz} \right)_{z+dz} - \left(\frac{dx}{dz} \right)_z \right] = \frac{d^2x}{dz^2} dz. \quad (6.31)$$

Отже, сила, що діє на елемент шару,

$$F = ES \cdot \frac{d^2x}{dz^2} dz. \quad (6.32)$$



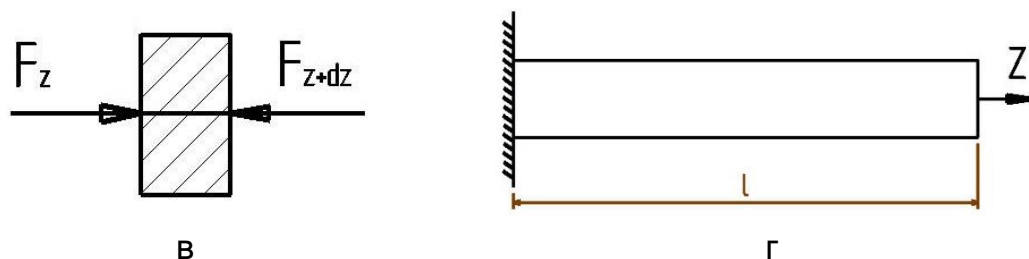


Рис. 6.10. Розрахункова схема системи з розподіленими параметрами: а – загальна схема; б – деформація шару; в – сили, що діють на шар; г – схема для визначення власної частоти

Застосування класичного визначення часткової похідної пояснює фізичну суть другої похідної $\frac{d^2x}{dz^2}$ як складової сили, що діє на елементарний шар.

Ця сила згідно із законом Ньютона дорівнює сумі елементарного шару dm помноженої на відповідне прискорення $\frac{d^2x}{dt^2}$. Якщо взяти щільність шару як ρ , то для елементарної маси матимемо вираз $dm = \rho S dz$. Тоді умова рівноваги шару під дією сил буде рівнянням руху цього шару:

$$ES \frac{d^2x}{dz^2} dz = \frac{d^2x}{dt^2} \rho S dz, \quad (6.33)$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{E}{\rho} \frac{d^2x}{dz^2}, \quad (6.34)$$

Рівняння (6.34) називається **рівнянням руху системи, з розподіленими параметрами**. Його ще називають хвильовим рівнянням.

Щоб з'ясувати фізичну сутність співвідношення $\frac{E}{\rho}$, що входить у рівняння (6.35), розглянемо процес поведінки елементарного шару під дією прикладених сил (рис. 6.10, в). Цілком імовірно, що під дією сил за час dt пройде визначена деформація ε шару dz . Тоді відношення $\frac{dz}{dt}$ є швидкістю поширення хвиль, яку позначимо через $c = \frac{dz}{dt}$. При цьому ми переконались, що зміна товщини шару дорівнює εdz . За визначений проміжок часу dt швидкість руху частинок (розрізу) у товщині шару:

$$v = \varepsilon \frac{dz}{dt} = \varepsilon c. \quad (6.35)$$

Використовуючи закон Гука $\sigma = E\varepsilon$ і зробивши підстановку $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, швидкість:

$$v = \frac{\sigma c}{E}. \quad (6.36)$$

Швидкість v можна також знайти, використовуючи теорему про зміну кількості руху елементарного шару dm :

$$v dm = v \rho S dz = F dt, \quad (6.37)$$

де $v = \frac{F}{\rho S c}$ або з урахуванням, що $\sigma = \frac{F}{S}$:

$$v = \frac{\sigma}{\rho c}. \quad (6.38)$$

Порівнюючи вираз (6.36) та (6.38), отримуємо, що співвідношення $\frac{E}{\rho}$ дорівнює квадрату швидкості поширення хвиль, тобто:

$$c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (6.39)$$

або

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (6.40)$$

Таким чином, з'ясовано, що співвідношення $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ встановлює швидкість поширення збудження у шарі (швидкість хвиль). Величина цієї швидкості залежить від пружних сил E та інерційних ρ властивостей матеріалу. Наприклад, для бетонної суміші $E \approx 60 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$, $\rho = 2400 \text{ кг/м}^3$. Тоді можна визначити, що $c \approx 50 \text{ м/с}$.

В остаточному вигляді (6.34) записується так:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (6.41)$$

Хвильове рівняння (6.41) з'єднує прискорення елементарного шару в середовищі з другою похідною його переміщення за координатою z , що визначає положення цього шару в загальному середовищі.

Вираз (6.38) дає можливість знайти напруження у стержні при відомій швидкості V у момент удару. Можлива й інша постановка задачі - визначення швидкості удару, за якої досягається необхідне напруження (наприклад, границя пружності). Так само можна оцінити швидкості, за яких руйнується матеріал при дробленні в дробарці.

Рівняння (6.41), на відміну від (6.10), записане у частинних похідних, а переміщення x залежить не тільки від часу t , а й від координати z . Тому розв'язати рівняння (6.41) можна з урахуванням такої залежності параметрів:

$$x = Z(x)T(t). \quad (6.42)$$

Тобто вважається, що переміщення x визначається добутком двох функцій, одна з яких залежить тільки від аргументу Z , а друга тільки від аргументу T . Тоді замість визначення функції двох змінних $x(z, t)$ необхідно знайти дві функції, $Z(z)$ і $T(t)$, які мають залежність тільки від однієї змінної. Такий підхід до розв'язання рівняння (6.41) має назву методу Фур'є. Сутність використання методу Фур'є для визначення x полягає у наступному. Спочатку підставляють рівняння (6.42) у рівняння (6.41): $c^2 z'' T = z \ddot{T}$, де штрихами позначена операція диференціювання за x . Потім переписують одержане рівняння у вигляді:

$$\frac{c^2 z''}{z} = \frac{\ddot{T}}{T}. \quad (6.43)$$

З цього рівняння випливає, що ліва частина залежить тільки від Z , а права - тільки від t ; для виконання цієї рівності (за будь-яких x і t) необхідно, щоб кожна із частин дорівнювала якійсь сталій величині. Позначимо сталу величину через ρ^2 і отримаємо два незалежних рівняння:

$$\frac{c^2 z''}{z} = -\rho^2; \quad \frac{\ddot{T}}{T} = -\rho^2. \quad (6.44)$$

або

$$\ddot{T} + \rho^2 T = 0; \quad z'' + \left(\frac{\rho}{c}\right)^2 z = 0. \quad (6.45)$$

Перше рівняння відображає процес коливання системи і має розв'язок:

$$T = A \cos \rho t, \quad (6.46)$$

Із (6.46) випливає, що невідома величина ρ є частота вільних коливань системи з розподіленими параметрами на відміну від $\omega_0 = \sqrt{c/m}$, яка є частотою вільних коливань дискретної системи [12].

Друге рівняння (6.45) має розв'язок:

$$z = C \cos \frac{\rho}{c} z + D \sin \frac{\rho}{c} z, \quad (6.47)$$

Частотне рівняння для визначення величини ρ складається шляхом використання граничних умов; це рівняння завжди трансцендентне і на відміну від дискретних систем має нескінченне число коренів, тобто

нескінченне число власних частот.

Розглянемо граничні умови для типової схеми (рис. 6.10, г) і визначимо для цієї схеми власну частоту. Так, у кінцевому перерізі $z=0$ переміщення повинно дорівнювати нулю. Тоді $x=0$. На вільному кінці $z=l$ по вздовжня сила $F_1 = 0$, що можливо за умови $\dot{x} = 0$. Тобто матимемо:

$$x(0)_{z=0} = 0; \left(\frac{dx}{dz} \right)_{z=l} = 0. \quad (6.48)$$

Підставимо ці граничні умови у рівняння (6.47):

$$c = 0; D \frac{\rho}{c} \cos \rho \frac{l}{c} = 0. \quad (6.49)$$

Параметр D може мати будь-яке значення за виключенням нуля, тоді частота ρ може бути найдена з умови, що

$$\cos \rho \frac{l}{c} = 0. \quad (6.50)$$

Це трансцендентне рівняння має нескінченну множину розв'язків:

$$\rho = \frac{\pi c}{2l} (2n-1), \quad (6.51)$$

де $n=1,2,\dots,n$.

Наприклад, для першої частоти при $n=1$:

$$\rho_1 = \frac{\pi c}{2l} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.52)$$

У разі необхідності можна визначити параметри, за яких настає резонанс системи. Наприклад, для $\rho_{\text{рез}} = 314 \text{ c}^{-1}$ матимемо, що $l_{\text{рез}} = 0,25 \text{ м}$, тобто при вимушеній частоті ω , яка дорівнює власній $\omega = \rho$, резонанс у системі, яка відповідає схемі (рис. 6.10, г), настає при довжині $l = 0,25 \text{ м}$.

Розглянутий підхід до визначення параметрів для схеми (рис. 6.10) з успіхом може бути використаний і для інших граничних умов, що відрізняються від (6.51).

6.2.4 Фізичні аспекти розсіяння енергії в матеріалах

Здвиг по фазі між напруженням і деформацією в дисипативному середовищі і, як наслідок, поглинання вібраційної енергії можуть бути обумовлені різними фізичними явищами. Основні з них: в'язке тертя, механічний гістерезис, пластична текучість матеріалу, релаксація матеріалу.

В'язке або рідинне тертя, обумовлене тертям частинок речовини між собою. Чим більша відносна швидкість руху частинок, тим воно більше[12].

Механічний гістерезис іноді називають тертям твердого тіла [12] або внутрішніми втратами. При дії сили на пружне середовище в останньому відбуваються незворотні мікрозміни структури (поворот і руйнування кристалів у металах, руйнування молекулярних ланцюгів у пластмасах тощо). В результаті цього при знятті навантажень у середовищі утворюється залишкова деформація, яка при періодичному процесі призводить до відставання по фазі деформації від відповідного напруження. Залежність між ними набуває гістерезисного характеру і визначається постійною гістерезису - відношенням залишкової деформації до максимальної. При малих деформаціях постійна гістерезису рівна коефіцієнту втрат, тобто куту між векторами напруження і деформації.

При ідеальному гістерезисі його постійна не залежить від часу дії напруження і відповідний коефіцієнт втрат не залежить від частоти. Опір тертя зворотно-пропорційний частоті.

Пластичне тертя матеріалу характерне тим, що залишкова деформація пропорційна часу дії зусилля. Час дії періодичного зусилля пропорційний періоду, через це залишкова деформація зростає зі зменшенням частоти. Відповідний коефіцієнт втрат, рівний відношенню залишкової деформації до максимальної, буде при цьому зворотно-пропорційний частоті.

Релаксацію матеріалу викликають зміни молекулярної структури, вирівнюванням температур між проміжками шарів з протилежними знаками деформації і т. д. В релаксуючому середовищі при постійній деформації викликане її напруження поступово спадає. В результаті виникне зсув по фазі між напруженням і деформацією і, як наслідок цього, поглинання вібраційної енергії.

Час, необхідний для встановлення напруження в релаксуючому середовищі, називають часом релаксації. Найбільшого значення релаксація і відповідний коефіцієнт втрат досягають при частоті, коли період коливань зрівнюється з часом релаксації. В деформованому середовищі при релаксації матеріалу модуль його пружної константи залежить від частоти. Ця залежність при збільшенні частоти характерна переходом до більш високих значень модуля пружної константи в межах частоти релаксації. Деякі матеріали, наприклад, гумоподібні, можуть мати спектр частот релаксації.

В джерелі [12] представлені графіки залежності коефіцієнтів втрат від частоти. Значення коефіцієнтів втрат металів складають приблизно $10^{-4} \dots 10^{-3}$. По вигляду відповідних кривих можна зробити висновок, що при дуже низьких частотах втрати обумовлені пластичністю матеріалу і релаксаційним явищем. На високих частотах втрати в розглядуваних металах мають гістерезисне походження. Втрати в склопластику також обумовлені гістерезисом, вони на порядок більше втрат у металах.

Гуми та пластмаси мають коефіцієнт втрат близько 0,1..1. Характер походження цих втрат релаксаційний, причому в даних матеріалах є цілий спектр частот релаксації.

Маючи загальне уявлення про фізичну природу пружних і дисипативних властивостей, розглянемо реологічну модель матеріалу, чуттєвого до швидкості й шляху майбутнього навантаження, як комбінацію пружних, в'язких і пластичних елементів, аналогічні моделям для в'язко-пружних і в'язко-пружно-пластичних тіл.

Деформація під навантаженням є сумою миттєво-пружних, не миттєво-пружних і пластичної (незворотної) складових, що дозволяє представити модель матеріалу послідовним з'єднанням трьох ланок - пружної, в'язкопружної і в'язко-пластичної (рис. 6.11, а, відповідно I, II, III).

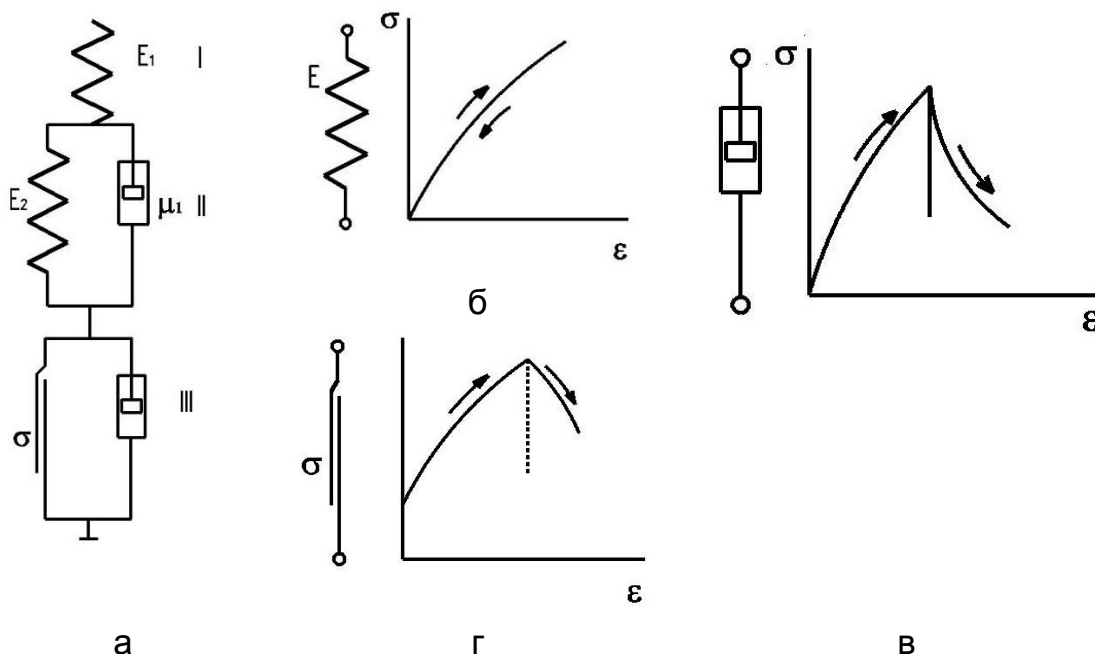


Рис. 6.11. Загальна реологічна модель матеріалу зі змінними параметрами (а) і залежність «навантаження-деформація» при навантаженні і розвантаженні пружного (б), в'язкого (в) і пластичного (г) її елементів.

Кожний з п'яти параметрів такої моделі може залежати від історії попереднього навантаження, однак з фізичних міркувань для деяких елементів ця залежність може бути обмежена.

Розглянемо зв'язок процесів навантаження і деформації з врахуванням впливу історії навантаження для кожного елемента реологічної моделі.

Пружна деформація визначається одним елементом E_1 (рис. 6.11, а). Незалежно від історії попереднього навантаження як при розвантаженні, так і при навантаженні напруження і деформації зв'язані однією кривою (рис. 6.11, б):

$$\sigma = \int_0^{\varepsilon} E(\varepsilon) d\varepsilon = \bar{E}\varepsilon; \quad E(\varepsilon) = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}, \quad (6.53)$$

якщо для матеріалу модуль пружності не змінюється при деформуванні (закон Гука).

В'язкий елемент (рис. 6.11, в) чинить опір деформації, що визначається її швидкістю. Якщо коефіцієнт в'язкості μ_σ залежить від деформації та її швидкості, то опір (крапка означає усереднену величину):

$$\sigma = \int_0^{\varepsilon_{cp}} \mu_\sigma d\varepsilon_{cp} = \mu_\sigma(\varepsilon, \varepsilon_{cp}) \varepsilon_{cp}; \quad \mu_{cp}(\varepsilon, \varepsilon_{cp}) = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_{cp}}, \quad (6.54)$$

Опір елемента тертя (рис. 6.11, г) визначається величиною пластичної деформації. Через взаємодію процесів зміцнення та знеміцнення опір тертя змінюється у часі, внаслідок чого деформування може продовжуватися і при зниженні навантаження, аналогічно тому, як це відбувається при деформації в'язкого елемента. Характерною особливістю елемента тертя є наявність певного рівня напружень, при яких починається деформування. Зміна опору залежить від шляху попереднього навантаження, і в деяких випадках залежності модуля зміцнення тільки від величини деформації та її швидкості зміни опору має вигляд:

$$\Delta \sigma = \sigma - \sigma_0 = \int_0^{\varepsilon} M(\varepsilon, \varepsilon_{cp}) d\varepsilon = \bar{M}\varepsilon; \quad M = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}. \quad (6.55)$$

В'язко-пружна комірка II (рис. 6.11) характеризується не миттєво-пружною деформацією і чутливістю до історії попереднього навантаження, визначаючого миттєві значення параметрів комірки E_2 та μ_σ .

При відсутності необоротних змін мікроструктури матеріалу в процесі навантаження $\varepsilon = Af(t)$ і пружний модуль E_2 є функцією тільки від деформації комірки, а коефіцієнт в'язкості μ_σ - функцією від миттєвих значень деформації та її швидкості, так що опір комірки:

$$\sigma = \bar{E}_2(\varepsilon_2) \varepsilon_2 + \mu_\sigma(\varepsilon_2, \varepsilon_{cp2}) \varepsilon_{cp2}. \quad (6.56)$$

В'язо-пластична комірка III (рис. 6.11, а) характеризується необоротним процесом деформування зі зміною структури матеріалу в залежності від історії навантаження, що впливає, так як і з розподіленням деформації по окремих мікро-об'єктах матеріалу, на опір. Обидва параметри комірки залежать від структури матеріалу, що визначається історією навантаження, і миттєвих умов навантаження:

$$\sigma = \sigma_s [\varepsilon_3(t), \varepsilon_3] + \bar{\mu}_\sigma [\varepsilon_3(t), \varepsilon_3] \varepsilon_{cp3}. \quad (6.57)$$

Будь-яка інша комбінація елементів з постійними чи змінними параметрами може бути приведена до комбінації з п'яти елементів зі змінними параметрами, що показана на рис. 6.11, а, оскільки деформацію можна розділити на миттєву-пружну, немиттєвопружну і незворотню.

Різні використовувані моделі матеріалу є окремими випадками представленої моделі. Так, пружна комірка використовується для опису деформації кристалічних матеріалів при напруженнях, що не перевищують межу текучості.

Комбінації пружних та в'язких елементів дозволяють задовільно описувати процес деформації в'язко-пружних матеріалів (полімери, бетони тощо).

6.3 Енергія континуальних вібросистем

6.3.1 Загальні підходи до визначення енергії на деформування матеріалу

Одним з методів визначення енергії W розгляд тиску робочого органу на матеріал у контактній зоні:

$$W = \int p dx, \quad (6.58)$$

де p - тиск у контактній зоні, Н/м²; $x=x(t)$ - закон деформації матеріалу в зоні контакту.

Визначення тиску в теоретичному плані є незначною проблемою. Проблема полягає у виборі моделі, що адекватно відповідає реальному процесу. Розглянемо методику визначення W за (6.58) для моделі пружного тіла, що деформується під дією зовнішньої сили за законом Гука.

Хід деформації тіла при зростанні напруження можна прослідкувати за допомогою діаграми деформації (рис. 6.12, а).

Точка А на діаграмі відповідає деформації ε тіла, що деформувалося під дією напруження σ . При наступному невеликому прирості напруження $d\sigma$ виникає нова невелика відносна деформація $d\varepsilon$ з перехо-

дом тіла в стан, якому на діаграмі деформацій відповідає точка В. Перехід тіла зі стану А в близький для нього новий стан В потребує витрати елементарної кількості енергії dW , що дорівнює (відносно до одиниці об'єму тіла) добутку діючого в цей момент напруження $\sigma + d\sigma$ на переміщення його точки прикладення $d\varepsilon$:

$$dW = (\sigma + d\sigma)d\varepsilon = \sigma d\varepsilon + d\sigma d\varepsilon. \quad (6.59)$$

Якщо відкинути член $d\sigma d\varepsilon$ як нескінченно малу величину другого порядку, то елементарна робота:

$$dW = \sigma d\varepsilon. \quad (6.60)$$

Ця елементарна робота геометрично визначається (див. рис. 6.12, а) площею елементарного прямокутника з висотою σ і основою $d\varepsilon$.

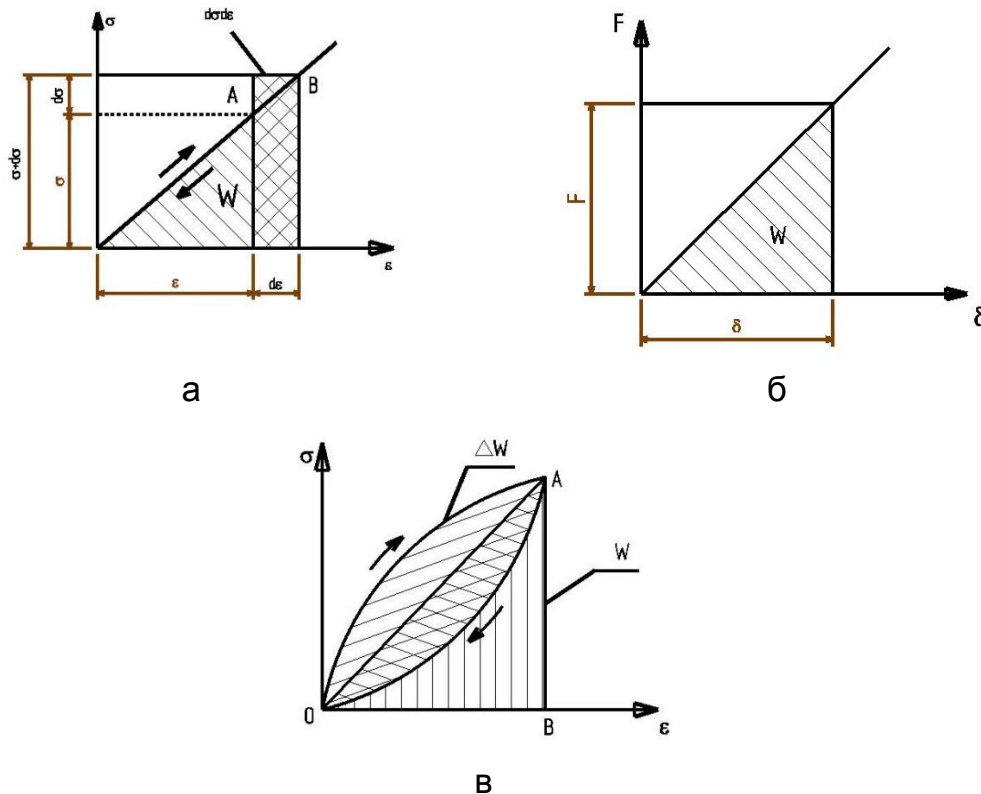


Рис. 6.12. Визначення енергії, що витрачається на деформування матеріалу: а,б – пружне тіло; в – непружне тіло.

Застосовуючи такий підхід до всіх елементарних приростів напруження від початку деформацій, можна переконатися, що послідовний ряд елементарних прямокутників поступово перекриває всю площу діаграми і вся енергія деформації, що витрачена на одиницю об'єму тіла, чисельно дорівнює площі діаграми, обмеженої лініями ординат (напруження) і абсцис (деформацій). Отже витрата енергії на деформацію одиниці об'єму тіла може бути знайдена, як інтеграл елементарних енергетичних витрат:

$$W = \int dW = \int \sigma d\varepsilon. \quad (6.61)$$

Повна витрата енергії на деформацію одиниці об'єму тіла є питомою енергією деформації. Згідно із законом Гука ($\sigma = E\varepsilon$), знайдемо кінцевий вираз для енергії, враховуючи, що $d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E}$:

$$W = \frac{1}{E} \int \sigma d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (6.62)$$

Такий самий результат можна дістати при визначенні площі трикутника на діаграмі деформацій (рис. 6.12, а):

$$W = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}, \text{ Н/м}^2. \quad (6.63)$$

Для визначення питомої енергії на деформацію одиниці маси розглянемо діаграму в координатах $F = f(\delta)$ (рис. 6.12, б). У кінцевому вигляді матимемо вираз для питомої енергії, Дж/кг:

$$W_m = \frac{\sigma^2}{2E\rho}, \quad (6.64)$$

де ρ - щільність матеріалу, кг/м³.

У наведених рівняннях (6.58-6.62) напруження і деформація записані у загальному вигляді, не вказується закон зміни цих параметрів від характеристик процесу. Проте важливо у загальному контексті визначити й ту частку енергії, що втрачається, тобто перетворюється на теплоту при деформуванні матеріалу.

Дійсно, як це вже зазначалося, частина енергії у процесі деформування матеріалу безповоротно втрачається. На діаграмі (рис. 6.12, в) це явище відображається відхиленням прямої зміни напруження від деформації, як при навантаженні, так і при зворотному процесі зняття тиску. У діаграмі трикутник OAB виражає енергію, необхідну для виконання технологічного процесу деформації тіла, а площа, обмежена дугами OA і A0, і є та енергія ΔW , що розсіюється всередині тіла. Співвідношення цих енергій $\frac{\Delta W}{W}$ визначається коефіцієнтом поглинання енергії $\psi = \frac{\Delta W}{W}$.

6.3.2 Енергія хвильового руху пружного середовища

При виникненні хвиль у середовищі взаємозалежні частинки її послідовно передають енергію один одному в напрямку поширення хвилі.

Передача енергії хвилею обумовлена, по-перше, тим, що при проходженні хвилі окремі ділянки середовища зазнають деформацію й, отже, діють один на одного з певною силою і, по-друге, тим, що відбувається переміщення частинок середовища, при якій діюча сила здійснює роботу.

Нехай у пружному середовищі поширюються плоскі синусоїдальні поперечні хвилі. Виділимо умовно у хвильовому полі настільки малий об'єм dV , що деформацію в кожній частині цього об'єму, а також швидкості частинок у ньому можна приблизно вважати однаковими. При проходженні хвилі цей об'єм середовища одержує кінетичну й потенціальну енергії. Якщо ρ щільність середовища, а $v = dx/dt$ – швидкість переміщення її частинок, та кінетична енергія в об'ємі dV , енергія дорівнює:

$$dE_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho dV \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (6.65)$$

Швидкість переміщення частинки в момент t можна визначити на основі рівняння [12]:

$$x = x_0 \sin \omega(t - z/c). \quad (6.66)$$

Це співвідношення зазвичай й називають **рівнянням плоскої хвилі**. Тому що для плоских хвиль будь-яка площина, перпендикулярна напрямку осі абсцис, являє собою поверхню однакових фаз, тобто хвильову поверхню, де всі її точки мають у той самий момент t однакові переміщення z .

З рівняння (6.66) випливає, що точка, що знаходиться на відстані z , відстає по фазі від початкової точки O на величину $\frac{\omega z}{c}$.

Оскільки швидкість поширення хвиль в однорідному середовищі постійна, це відставання по фазі пропорційно відстані z . Замінюючи в рівнянні (6.66) частоту ω періодом $T = 2\pi/\omega$ і з огляду на те, що $c = \lambda/T$, одержимо

$$x = x_0 \sin 2\pi(t/T - z/\lambda), \quad (6.67)$$

Вхідну в це рівняння величину $2\pi/\lambda$ позначають через k і називають **хвильовим числом**. Воно показує, скільки довжин хвиль укладається на відрізку довжини 2π . Вводячи хвильове число k до (6.67) і частоту ω , рівнянню хвиль можна додати симетричний відносно t й z вигляд:

$$x = x_0 \sin(\omega t - kz) \text{ або } x = x_0 \sin(\omega t + kz). \quad (6.68)$$

Друге рівняння відповідає випадку, коли хвиля поширюється в протилежному напрямку, тобто в бік убавання z . Аргумент синуса $\omega t - kz$ називають **фазою хвилі**.

Для даного моменту t рівняння хвилі дає розподіл переміщення z частинок як функцію їхніх координат. Інакше кажучи, ми одержуємо немовби миттєвий знімок із хвилі, що показує положення всіх точок хвилі в цей момент.

Розглянемо, як розподіляються у хвилі швидкості й деформації, якщо переміщення частинок у хвилі визначаються рівнянням (6.67).

Швидкість, з якої зміщується у хвилі дана частинка середовища, можна знайти, взявши частинну похідну за часом від (6.67):

$$v = \partial x / \partial t = \omega x_0 \cos(\omega t - kz). \quad (6.69)$$

Тобто швидкість у хвилі змінюється за тим же законом, що й переміщення, але вона зсунута за фазою щодо переміщення на $\pi/2$. Коли швидкість частинки досягає максимального значення, її переміщення звертається в нуль. Інакше кажучи, хвиля швидкостей зсунута щодо хвилі переміщень за часом на $T/4$ й у просторі - на $\lambda/4$.

Миттєве розподілення відносної деформації в хвилі можна знайти, взявши часткову похідну за координатою z від (6.68):

$$\varepsilon = \frac{\partial x}{\partial z} = -kx_0 \cos(\omega t - kz), \quad (6.70)$$

тобто відносна деформація в хвилі змінюється по тому ж закону, що і переміщення, але зміщена за фазою відносно переміщення на $\pi/2$ в протилежну до хвилі швидкостей сторону. Відповідно, хвиля деформацій протилежна по фазі хвилі швидкостей. Там, де переміщення частинок від положення рівноваги досягає максимального або мінімального значення, відносна деформація і швидкість рівні нулю. Коли частинки проходять через частини рівноваги, відносна деформація і швидкість досягають максимальних значень. При зміні знаку швидкості змінюється і знак відносної деформації так, що додатні і від'ємні деформації чередуються один з одним, тобто проходять чергування стиснення і розтягнення, характерні для повздовжньої хвилі.

Вираз для визначення потенціальної і кінетичної енергії буде мати наступний вигляд:

$$dE_k = d\Pi = 1/2 \rho dV x_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kz). \quad (6.71)$$

Тобто в розглянутому об'ємі середовища кінетична і потенціальна енергії рівні між собою, а зміна їх значень проходить в одній фазі. Цим

хвильовий рух відрізняється від коливального руху, в якого зміна кінетичної і потенціальної енергії проходять у протифазі.

При виникненні хвилі в пружному середовищі розходиться хвиля відносно деформації, здійснюючи перенесення потенціальної енергії, і хвиля швидкостей, з якою зв'язане переміщення кінетичної енергії.

Повна енергія буде рівною:

$$dE = dE_k + d\Pi = \rho dV x_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kz). \quad (6.72)$$

Тобто елемент об'єму пружного середовища, в якому розповсюджуються хвилі, має механічну енергію, пропорційну щільності середовища, квадрату амплітуди коливальних частинок середовища і квадрату частоти їх коливань.

Об'ємна щільність (або просто щільність) енергії в пружному середовищі:

$$w = dE/dV = \rho x_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kz). \quad (6.73)$$

Щільність енергії, як і енергія, - величина змінна, і в кожний момент у різних точках, де зміщення частинок максимально, так як у них і швидкість, і відносна деформація дорівнюють нулю.

Середня в часі щільність енергії в кожній точці хвилі:

$$|w| = \frac{1}{2} \rho x_0^2 \omega^2. \quad (6.74)$$

Цей вираз отримано за умовою розповсюдження в середовищі синусоїдальних повздовжніх хвиль. Доведення того, що вираз (6.74) справедливий для всіх інших видів хвиль наведено в джерелі [12].

6.3.3 Енергія хвильового руху дисипативного середовища

Розгляд континуального дисипативного середовища полягає у введенні в рівняння руху параметра, що враховує енергію не тільки на утворення хвилі, а і на її згасання.

Виходячи із загального підходу послідовність визначення енергії складається наступним чином: переміщення $\rightarrow$ енергії $\rightarrow$ потужності.

Сила є зовнішньою і задається у відповідності до постановки задачі.

Переміщення визначаються підстановкою рішення в хвильове рівняння і знаходження цього переміщення в залежності від граничних умов, що мають місце в конкретному випадку дії вібрації на відповідне середовище.

Тоді енергія (наприклад, у контактній зоні, машина-середовище). для одного періоду коливань $T = 2\pi/\omega$:

$$E_k = \int R \dot{x} \sin \alpha \cos \omega t dt, \quad (6.75)$$

де $R \sin \alpha$ - складова загальної сили $R(t)$, що здійснює роботу; α - кут зсуву цієї сили відносно переміщення z ; $\dot{x}$ - швидкість коливань основи.

Активна складова сили $R \sin \alpha$ може бути знайдена рішенням рівняння при умові, що сила діє безпосередньо на середовище, тоді при $m_{po} = 0$, отримаємо:

$$x_0 = \frac{F_0}{m_c \omega^2} \cdot \frac{1}{(a + d)}, \quad (6.76)$$

де a, d - хвильові коефіцієнти, що враховують пружньо-інерційні (реактивні) сили опору (a) та дисипативні сили опору (d).

Виходячи із формули (6.76), залежності (6.75), і результатів розгляду сил взаємодії, а також деяких розрахунків, отримаємо:

$$E_k = \pi m_c x_0^2 \omega^2 d, \quad (6.77)$$

де m_c - маса середовища.

Або приведений вираз енергії (6.77) відносно маси:

$$\bar{E}_k = \pi x_0^2 \omega^2 d. \quad (6.78)$$

Цей вираз відрізняється від отриманого для пружнього середовища (див. 6.74) коефіцієнтом d :

$$d = \frac{\alpha \sin 2\beta h - \beta \sin 2\alpha h}{h(\alpha^2 + \beta^2)[ch 2\alpha h + \cos 2\beta h]}, \quad (6.79)$$

де h - висота (або довжина), в напрямку якої розповсюджується хвиля. Для значення $d=1$ формула (6.79) збігається з формулою енергії для пружнього тіла (6.74).

Запитання для самоперевірки.

1. Дайте визначення, що таке вібраційна система?
2. Наведіть класифікацію сил?
3. Принцип Гамільтона.
4. Дайте визначення континуальної системи?
5. Наведіть основні види реологічних моделей.
6. Загальні підходи до визначення енергії на деформування матеріалу.

РОЗДІЛ 7. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ МЕТАЛЕВИХ КОНСТРУКЦІЙ

7.1 Методи розрахунків на міцність та стійкість

Існують два методи розрахунку на міцність: за допустимими напруженнями та за граничним станом.

У методі розрахунку за допустимими напруженнями небезпечним станом конструкції вважають такий, коли напруження в найбільш напруженій точці досягає границі текучості. Тоді коефіцієнт запасу міцності визначають за формулою:

$$k = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}}. \quad (7.1)$$

Умова міцності матиме такий вигляд:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (7.2)$$

При неоднорідному напруженому стані виникнення пластичних деформацій в одній точці не призведе до втрати несучої здатності, тобто деталь буде працювати доти доки зона текучості не охопить весь переріз.

Метод розрахунку за граничним станом використовують при проектуванні економічних конструкцій. Граничний стан визначають за значеннями переміщень, при яких порушується умова нормальної експлуатації, або навантаженнями при яких конструкція нездатна витримувати діючі навантаження і руйнується. Граничний стан настає тоді, коли пластична зона охоплює весь переріз і в цьому місці виникає пластичний шарнір. Навантаження, які приводять конструкцію до граничного стану, називають граничними. Коефіцієнт запасу міцності визначають відношенням граничного навантаження до діючого:

$$k = \frac{F_{\text{гр}}}{F}; \quad k = \frac{M_{\text{гр}}}{M}, \quad (7.3)$$

де $F_{гр}$ – граничне навантаження при розтяганні та стисканні; $M_{гр}$ – граничний згинальний момент при згинанні або граничний крутний момент при крученні.

В машинобудуванні частіше застосовують методи розрахунку за допустимим напруженням. Елементи металевих конструкцій будівельних машин зазнають дії розтягання та стискання, кручення та згинання в одній та двох площинах.

7.2 Центральний розтяг та стиск

Центральний розтяг та стиск виникають тоді, коли навантаження діють уздовж осі стрижня (рис. 7.1, а) Умова міцності має наступний вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{S} \leq [\sigma], \quad (7.4)$$

де $N_{\max}$ – максимальне значення поздовжньої сили; S – площа поперечного перерізу стрижня.

За допомогою умови міцності (7.4) розв'язують три типи задач:

1. Перевірка міцності деталі;
2. Підбір поперечного перерізу стрижня – визначення площі поперечного перерізу. За розрахунковою площею визначають розміри поперечного перерізу стрижня. Так для круглого стрижня:

$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}, \quad (7.5)$$

3. Визначення допустимого навантаження.

Деформацію стрижня визначають за законом Гука наступним чином:

$$\Delta l = \frac{Nl}{ES}. \quad (7.6)$$

Величина EA має назву жорсткість при розтяганні. Цей закон діє, якщо напруження перевищують границю пропорційності.

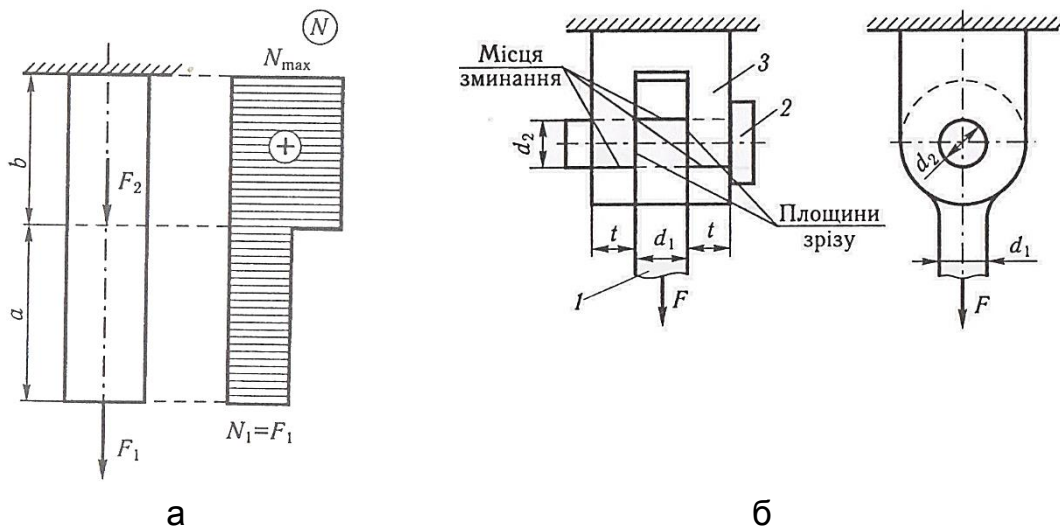


Рис. 7.1. Схеми до розрахунків на міцність
а – розтяг та стиск; б) зріз та зминання.

7.3 Розрахунки на зріз та зминання

Ці види деформацій поширені у вузлах машин. На рис. 7.1, б зображено шарнірне з'єднання, де тяга 1 з'єднана з вушком 3 за допомогою пальця 2. Палець 2 зрізатиметься в двох місцях. З умови міцності на зріз розраховуємо максимальне дотичне напруження:

$$\tau_{\max} = \frac{F}{S_{\text{зр}}} \leq [\tau], \quad (7.7)$$

де $A_{\text{зр}} = 2 \frac{\pi d_2^2}{4}$ - площа зрізу; $[\tau]$ - допустиме напруження на зріз.

Крім зрізу деталі піддаються зминанню. З умови міцності на зминання визначаємо максимальне напруження:

$$\sigma_{\text{зм}} = \frac{F}{S_{\text{зм}}} \leq [\sigma]_{\text{зм}}, \quad (7.8)$$

де $A_{\text{зм}}$ – площа зминання. Для з'єднання рис. 7.1, б площа зминання $A_{\text{зм}} = 2d_2t$, або $A_{\text{зм}} = d_1d_2$ (у розрахунках потрібно брати менше з цих значень); $[\sigma]_{\text{зм}}$.

7.4 Заклепочні та болтові з'єднання

Широко використовуються при виготовленні металевих конструкцій машин. Заклепки. (рис. 7.2) піддаються зрізу і зминанню. Умова міцності заклепок на зріз має такий вигляд:

$$\tau = \frac{F}{n_{\text{зр}} m \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau], \quad (7.9)$$

де $n_{\text{зр}}$ – кількість заклепок, що піддаються зрізу; m – кількість площин зрізу однієї заклепки; d – діаметр заклепки.

Потрібну кількість заклепок визначають за формулою:

$$n_{\text{зр}} \geq \frac{F}{m \frac{\pi d^2}{4}}. \quad (7.10)$$

Умова міцності заклепок на зминання:

$$\sigma_{\text{зМ}} = \frac{F}{n_{\text{зМ}} d \times t} \leq [\sigma]_{\text{зМ}}, \quad (7.11)$$

$n_{\text{зМ}}$ – кількість заклепок, що зазнають зминання; t – менше значення товщини з'єднання листів (якщо $t_1 < 2t_2$, $t=t_1$); $[\sigma]_{\text{зМ}}$ – допустиме напруження на зминання.

Потрібну кількість заклепок із умови міцності на зминання визначають за формулою:

$$n_{\text{зМ}} \geq \frac{F}{d \times t [\sigma]_{\text{зМ}}}. \quad (7.12)$$

Розрахункову кількість заклепок треба округлити до цілого числа, а з двох розрахунків (7.10) та (7.12) слід взяти більше число.

Болтові з'єднання розраховують так, як і заклепочні. Якщо за допомогою заклепок прикріплюють кутники, то діаметр заклепки і лінія розміщення залежить від розміру полиць кутника.

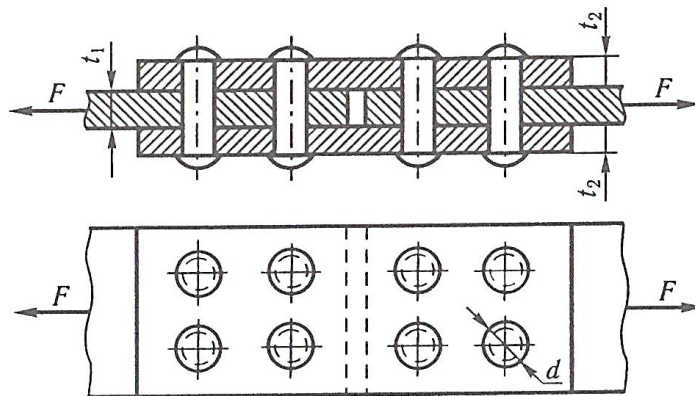


Рис. 7.2. Схема до розрахунку заклепочного з'єднання

7.5 Зварні з'єднання

Зварні з'єднання застосовують частіше від заклепочних при виготовленні металевих конструкцій дорожніх машин.

Для з'єднання листів застосовують стикові (рис. 7.3, а) та внапустові шви (рис. 7.4, б) Стикові шви розраховують на розрив за формулою:

$$\sigma_p = \frac{F}{l_{\text{ш}} t_{\text{ш}}} \leq [\sigma]_{\text{ш}}, \quad (7.13)$$

де $l_{\text{ш}}$ – довжина шва, що дорівнює ширині листа; $t_{\text{ш}}$ – товщина шва, що дорівнює товщині листів; $[\sigma]_{\text{ш}}$ – допустиме напруження на розтяг для матеріалу шва.

Внапустові шви розраховують на зріз за формулою:

$$\tau = \frac{F}{0.7 \times t \times l_{\text{ш}}} \leq [\tau]_{\text{ш}}, \quad (7.14)$$

де t – висота катета шва, що дорівнює товщині листа; $l_{\text{ш}}$ – довжина шва; $[\tau]_{\text{ш}}$ – допустиме напруження на зріз для матеріалу шва.

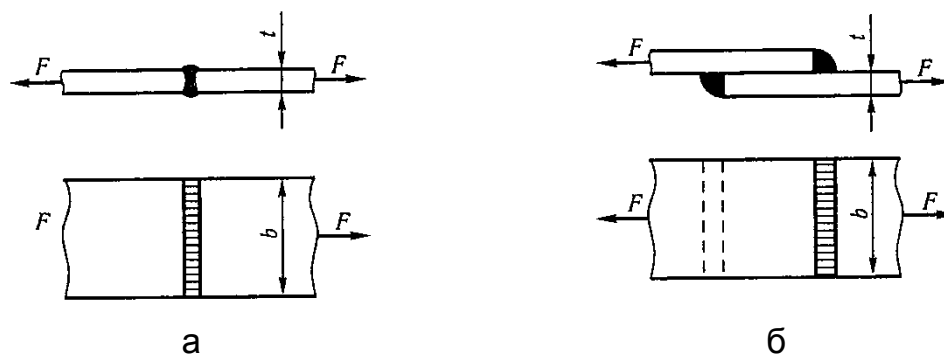


Рис. 7.3. Схема до розрахунку зварного з'єднання:
а – стикове; б – внапусток.

Із умови міцності (7.14) можна визначити потрібну довжину шва за формулою:

$$l_{\text{ш}} \geq \frac{F}{0.7t[\tau]_{\text{ш}}}. \quad (7.15)$$

Розрахункову довжину шва треба збільшити на 10 мм у зв'язку з тим, що на початку і в кінці шов може бути не якісним.

Кутники до пластини приварюють так, щоб довжина швів була обернено пропорційні відстаням до центру ваги (рис. 7.4).

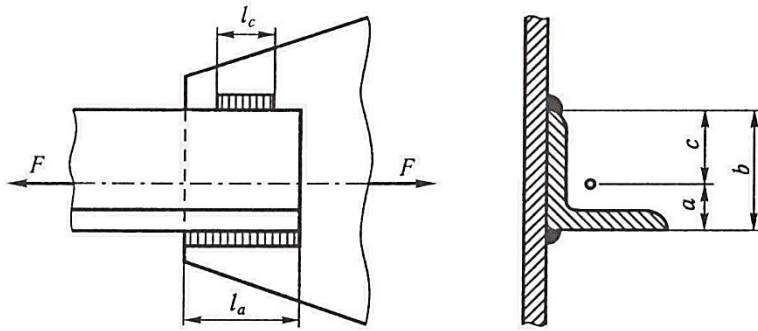


Рис. 7.4. Схема до розрахунку зварювального шва кутника

Довжина швів визначається за формулою:

$$l_a = \frac{c}{b} l_{\text{ш}}, l_c = \frac{a}{b} l_{\text{ш}}, \quad (7.16)$$

де $l_{\text{ш}} = l_a + l_c$ – повна довжина шва, яку визначають за формулою (7.15).

Зварні шви можуть піддаватись деформації зсуву (рис. 7.5) та сумісній дії розтягання та згинання (рис. 7.6). При згинанні руйнування зварних швів відбувається по косій площині внаслідок дії дотичних напружень. У разі приварювання пластини (рис. 7.5, а) дотичні напруження визначаються за формулою:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M}{W_{\text{ш}}} \leq [\tau]_{\text{ш}}, \quad (7.17)$$

де $W_{\text{ш}} = 2 \frac{0.7 \times t \times h^2}{6}$ – момент опору зварного шва по косому перерізу.

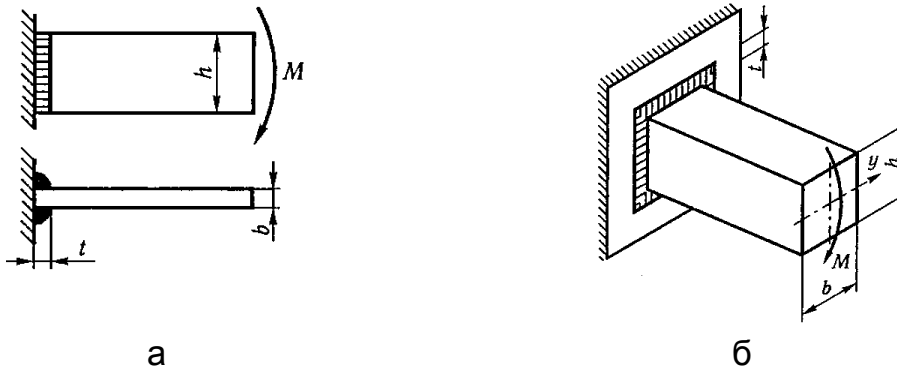


Рис. 7.5. Схема до розрахунку зварного шва при дії деформації зсуву:

а – пластина; б – балка

При обварюванні балки по периметру (рис. 7.5, б) момент опору визначають за формулою:

$$W_{ш} = \frac{I_{ш}}{z_{\max}}, \quad (7.18)$$

$$\text{де } I_{ш} = 2 \frac{0.7 \times t \times (h + 2 \times t)^3}{12} + 2 \times \left[\frac{b \times (0.7 \times t)^3}{12} + \left(\frac{h + t}{2} \right)^2 \times 0.7 \times b \times t \right] - \text{мо-}$$

мент інерції зварного шва відносно центральної осі інерції; $z_{\max} = (h/2) + t$ – найбільша відстань шва від нейтральної осі.

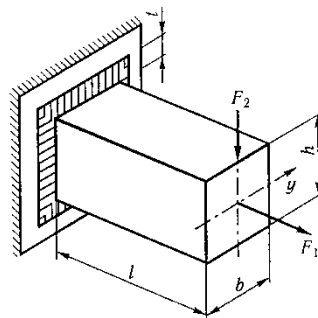


Рис. 7.6. Схема до розрахунку зварного шва балки при дії розтягання та згинання

При сумісній дії розтягання та згинання (рис. 7.6) умова міцності матисе такий вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{F_1}{A_{\text{зп}}} + \frac{M}{W_{ш}} \leq [\tau], \quad (7.19)$$

де $A_{\text{зп}} = 2 \times (b + h) \times 0.7 \times t$ - площа зрізу зварного шва; $M = F_2 l$ – згинального моменту.

7.6 Циліндричні пружини

Застосовують для зменшення динамічних навантажень.

Дотичні напруження в пружині (рис. 7.7, а) визначають за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \left(1 + \frac{r}{2R} \right) \leq [\tau], \quad (7.20)$$

де $M_k = FR$ - крутний момент; $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ - полярний момент опору поперечного перерізу витка пружини; $r = d / 2$ - радіус поперечного перерізу витка пружини; R – середній радіус пружини.

Деформація пружини прямо пропорційна навантаженню, якщо напруження не перевищує границі пропорційності:

$$\lambda = \frac{64FR^3n}{Gd^4}, \quad \text{або} \quad \lambda = \frac{64FR^3n}{Gd\left(1 + \frac{r}{2R}\right)}, \quad (7.21)$$

де n – кількість витків пружини.

Характеристиками пружини є жорсткість C та піддатливість Δ . Жорсткістю називають силу, що розтягує пружину на одиницю довжини:

$$C = \frac{Gd^4}{64R^3n}. \quad (7.22)$$

Піддатливістю називають деформацію пружини від одиничної сили:

$$\Delta = \frac{64R^3n}{Gd^4}. \quad (7.23)$$

Деформацію пружини за цими самими характеристиками визначають за формулами:

$$\lambda = \frac{F}{C}, \quad \text{або} \quad \lambda = \Delta F. \quad (7.24)$$

Циліндричні пружини відповідної конструкції можуть працювати і на стиск.

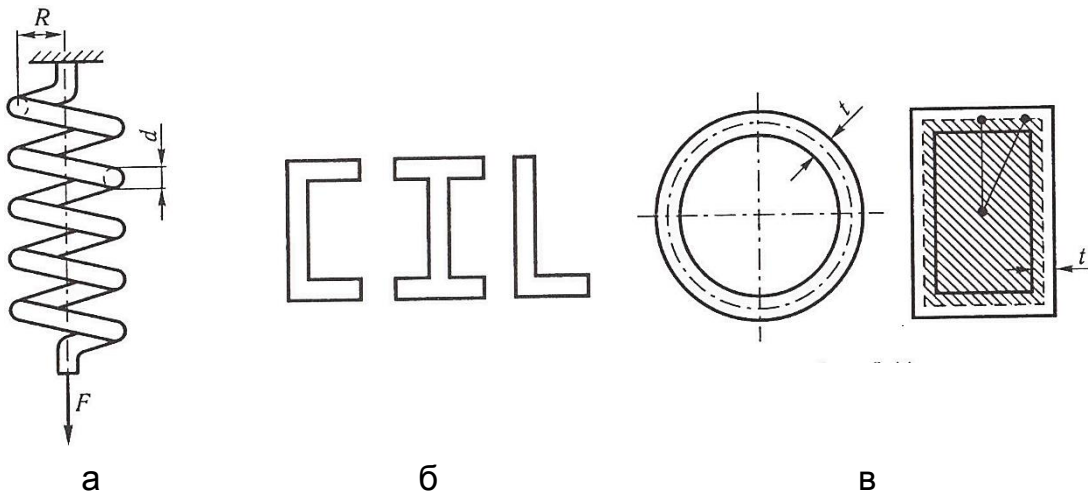


Рис. 7.7. Розрахункові схеми:

а – циліндричні пружини; б – кручення відкритих тонкостінних профілів;
 б – кручення закритих тонкостінних профілів

7.7 Вільне кручення стрижнів тонкостінних профілів

Відкриті профілі. Вільним називається кручення, коли ніщо не заважає деформаціям поперечних перерізів.

При вільному крученні стрижнів відкритих профілів (рис. 7.7, б) найбільші дотичні напруження виникають у найдовшому прямокутнику. Їх визначають за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k b_{\max}}{I_k}, \quad (7.25)$$

де $b_{\max}$ – найбільша товщина одного із прямокутників.

Момент інерції:

$$I_k = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i^3 h_i, \quad (7.26)$$

де b_i та h_i – менша та більша сторони прямокутників, з яких складається поперечний переріз.

Замкнені профілі. При вільному крученні замкнених профілів (рис. 7.7, в) дотичні напруження визначаються за формулою:

$$\tau = \frac{M_k}{2\Omega t}, \quad (7.27)$$

де Ω – площа, обмежена середньою лінією профілю (на рис. 7.7, в ця площа заштрихована).

7.7 Кручення стрижнів прямокутного перерізу

У прямокутному перерізі найбільші дотичні напруження виникають посередині довгої сторони, а в кутових точках напруження дорівнюють нулю. Розподіл дотичних напружень зображено на рис. 7.8.

Найбільші напруження визначаються за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}, \quad (2.36)$$

де $W_k = \beta b^3$ – момент опору прямокутника при крученні; β – коефіцієнт, який залежить від співвідношення сторін прямокутника (табл. 7.1). Посередині короткої сторони напруження:

$$\tau = \gamma \tau_{\max}, \quad (2.37)$$

де γ – коефіцієнт, який залежить від співвідношення сторін прямокутника (табл. 7.1).

Кут закручування прямокутного стрижня визначають за формулою:

$$\varphi = \frac{M_k l}{GI_k}, \quad (2.38)$$

де $I_K = \alpha b^4$ - момент інерції прямокутника при крученні; α – коефіцієнт, який залежить від співвідношення сторін прямокутника (табл. 7.1).

Таблиця. 7.1 – Значення розрахункових коефіцієнтів

Коефі- цієнти	Співвідношення сторін h/b									
	1	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0
α	0.14	0.294	0.375	0.457	0.622	0.79	1.123	1.789	2.456	3.123
β	0.208	0.346	0.418	0.493	0.645	0.801	1.128	1.789	2.456	3.123
γ	1	0.859	0.82	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742

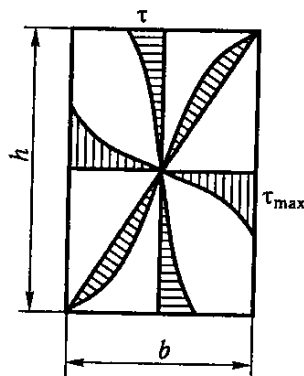


Рис. 7.8. Схема до розрахунку на кручення стрижнів прямокутного перерізу

Запитання для самоперевірки.

1. Перерахуйте основні методи розрахунку на міцність та стійкість.
2. Дайте визначення жорсткості конструкції?
3. Наведіть залежність для визначення деформації стрижня при розрахунку на розтяг.
4. Наведіть умову міцності заклепок при розрахунку на зріз.
5. Наведіть залежність для визначення стикового зварного шва.
6. Які три типи задач розв'язують на основі умови жорсткості валів.

РОЗДІЛ 8. ОСНОВИ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.

8.1 Основні поняття

Багато задач прикладної теорії пружності приводять до необхідності розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних. Як правило точного розв'язку таких задач не існує і можна говорити тільки про той чи інший варіант пошуку наближеного розв'язку. Зазвичай розв'язок шукають у деякому заданому вигляді (деякій функції), що визначає вид відповіді з точністю до порівняння невеликого числа параметрів. Проте угадування форми невідомої нам функції є дуже важкою задачею, особливо, якщо така функція повинна бути придатною для всіх точок області досліджуваного елемента конструкції. Слід також враховувати, що додатково функція повинна задовольняти граничні умови (наприклад, приймати нульові значення на поверхні конструкції). Набагато легше угадати вид такої функції для малої частини області, тобто досліджувану конструкцію умовно розбити на визначену кількість областей. Але виконання таких розрахунків вручну є складною задачею. Поява електронних обчислювальних машин докорінно змінила ситуацію в області рішення диференціальних рівнянь в часткових похідних. Більшості інженерам стало доступним чисельне дослідження поставлених перед ними задач.

Таким чином на основі вищесказаного можна записати основну ідею методу скінченних елементів, яка полягає в тому, що конструкцію розбивають на множину елементів простої геометричної форми (відрізки ліній, трикутники, чотирикутники, тетраєдри і т.д.) та з'єднують їх між собою у вузлових точках. Кожний елемент описується за допомогою окремого набору вибраних функцій, які представляють напруження і перемі-

щення в зазначеній області. Для цих елементів, які отримали назву скінченні елементи, аналітичними методами отримують точні або наближені рішення зазначених функцій.

Для спрощення розрахунків та візуалізації результатів існує ряд спеціалізованих програм та програмних комплексів, таких як: ANSYS, NASTRAN, ABAQUS, SALOME, APM WinMachine, Femap OpenFoam, T-Flex, Ліра та інші. Також більшість сучасних систем автоматизованого проектування містять в собі модуль для попереднього розрахунку методом скінченних елементів. До таких САПР відносяться: SolidWorks, NX Siemens, Catia, PTC Creo, FreeCad, КОМПАС-3D.

Для наглядного розуміння методу скінченних елементів припустимо, що деяке досліджуване тіло займає область А (рис. 8.1). Невідома величина, яка нас цікавить (наприклад, переміщення точок тіла, чи напруження) змінюється неперервно по всьому тілу. При розв'язанні задач методом скінченних елементів ця величина приблизно представляється своїм значенням в скінченному числі обраних нами точок тіла (вузла). Саме ці невідомі нам величини і підлягають визначенню. Далі, область А поділяється на скінчене число частин так, щоб границі скінченних елементів проходили через вузли і вся область була покрита скінченними елементами. Таким чином, неперервне тіло представляється у виді сукупності скінченних елементів, властивості кожного з яких розглядаються згодом незалежно від інших. На границях між скінченними елементами вибираються деякі точки (вузли); переміщення яких приймаються в якості основних невідомих.

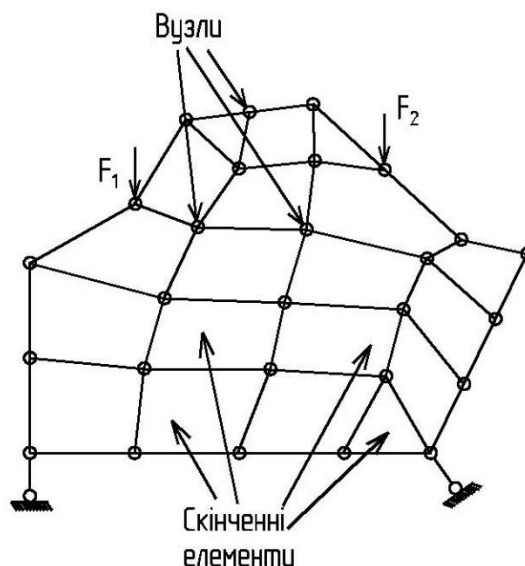


Рис. 8.1. Спрощена схема поділу тіла на скінченні елементи

В залежності від того, які невідомі є основними, МСЕ (метод скінченних елементів) реалізується у формі методу переміщень, методу сил або змішаного методу. Найбільш розповсюдженим серед розробників програм МСЕ є метод переміщень, який дозволяє отримати більш прості і універсальні алгоритми. В якості основних невідомих в методі переміщень розглядають переміщення вузлових точок розрахункової схеми. Всі інші характеристики напружено-деформованого стану конструкції (переміщення внутрішніх точок скінченних елементів, деформації та напруження) знаходяться в залежності від вузлових переміщень. Основними етапами розрахунку будь-якої конструкції методом переміщень є:

1. Ідеалізація конструкції або вибір розрахункової схеми.
2. Розрахунок матриць жорсткості (МЖ) окремих елементів.
3. Перетворення матриці жорсткості елементів в загальну для всієї конструкції систему координат.
4. Формування з використанням матриці жорсткості елементів системи рівнянь руху або рівноваги конструкції.
5. Рішення системи рівнянь (8.1) відносно вузлових точок переміщень
6. Обчислення деформацій елементів по відомим вузловим переміщенням і обчислення напружень в елементах по відомим деформаціям.

За способом виконання і формулювання основних рівнянь МСЕ (метод скінченних елементів) розрізняють чотири основних види МСЕ: прямий, варіаційний, резидуума і енергетичного балансу.

Прямий метод аналогічний методу деформації в розрахунку лінійних опор. Його використовують при вирішенні простих проблем, він зручний чітким геометрично-механічним значенням окремих кроків апроксимації.

Варіаційний метод заснований на принципі стаціонарності функціоналу. У проблематиці механіки твердого тіла функціонал зазвичай є потенціальною, відповідно, комментарною енергією системи або формулюється на базі цих двох енергій (Хеллінгера-Рейонер, Ху-Вашізі). На відміну від прямого методу, який можна застосувати тільки до елементів зовсім простого виду, варіаційний метод однаково успішно застосовується як до елементів простого, так і складного видів.

Метод резидуума (метод вагового резидуума) являє собою загальний вид апроксимації по МСЕ, який базується на диференціальних рівняннях даної задачі. Цей метод застосовують при вирішенні таких завдань, у яких важко сформулювати функціонал або він взагалі відсутній.

Метод енергетичного балансу заснований на балансі різних видів енергії, його застосовують в термостатичному і термодинамічному аналізах суцільного середовища.

У механіці твердих деформованих тіл з наведених видів МСЕ особливе місце належить наступним методам: варіаційному і резидуума. Дані методи в застосовуваній області представляють два комплементарних методи однакової точності. Варіаційний метод знаходить широке застосування, так як вирази в функціоналі зазвичай мають нижчий ряд похідної в порівнянні з похідною у відповідному дифференціальному рівнянні задачі, який дозволяє вибирати інтерполяційні функції з широкого сімейства простих функцій. Варіаційний вид МСЕ виведений з класичного методу Рітца, а метод резидуума з класичного методу Бубнова-Гальоркіна. В принципі, з інших варіаційних методів, як і з методу резидуума, також можна вивести відповідні види МСЕ. Однак їх застосовують значно рідше.

На відміну від класичних варіаційних методів, в яких вибір інтерполяційних функцій залежить від конфігурації даної задачі, в МСЕ цього не відбувається, так як інтерполяційні функції визначаються виключно в рамках окремих скінченних елементів. **Інтерполяційні функції** - сімейство незалежних між собою функцій, які приймаються за елемент, так що їх значення разом з усіма іншими елементами, крім елементів, до яких вони відносяться, однаково рівні нулю. В цьому полягає основна відмінність між МСЕ і класичними методами Рейлі-Рітца і Бубнова-Гальоркіна, в яких інтерполяційні функції приймаються для всього домену.

У розрахунку інженерних конструкцій по МСЕ аналогічно з розрахунком методами статички конструкцій за основні невідомі приймають: кінематичні величини (переміщення, похідні переміщень, компоненти деформацій та ін.), статичні величини (внутрішні сили, компоненти напружень та ін.) або змішані кінетичні і статичні величини. Залежно від способу вибору основних невідомих в вузлах розрізняють три основних види МСЕ: метод деформацій, метод сил і змішаний або гібридний метод.

Аналіз і вирішення проблеми механіки суцільного середовища по МСЕ завжди зводяться до так називаємого процесу "крок за кроком" (Step by step process), який має величезне практичне значення для виконання ЕОМ з метою ефективного розрахунку. У цьому процесі, який можна представити як простий алгоритм, виділяють наступні шість найважливіших кроків: дискретизацію суцільного середовища; вибір інтерполяційних функцій; обчислення характеристик елементів; формування

рівнянь для сітки скінченних елементів; рішення системи рівнянь; розрахунок потрібних впливів.

Особливо важливі перші три з шести кроків. Спосіб дискретизації, вибір виду елементів і загального числа елементів залежить як від природи вирішуваної проблеми, так і від необхідної точності необхідного рішення. Поряд з числом і видом елементів важливий і вибір вузлів, основних невідомих в них і інтерполяційних функцій. За допомогою останніх визначають поле змінних кожного елемента. Від їх вибору безпосередньо залежить і континуїтет, на границях між окремими елементами, а тим самим - точність апроксимації. Змінні в елементі можуть бути скалярною, векторною або тензорною величинами.

Характеристики окремих елементів визначаються незалежно від сітки елементів, як єдиного цілого. Так, наприклад, в напружено-деформаційному аналізі конструкцій основні залежності між статичними і деформованими величинами встановлюються для кожного елемента, матриця жорсткості формується автономно для окремих елементів, а потім на їх базі - матриця для всієї системи в цілому. Оскільки геометрія елементів досить проста, то практично це означає, що комплексна проблема розбивається на кілька простих. Характеристики елементів, матриці жорсткості, вектори навантаження і інше обчислюють найчастіше за допомогою варіаційних принципів на основі прийнятої геометрії елементів і відповідних інтерполяційних функцій. Ці розрахунки в основному провадяться із застосуванням способу чисельної інтеграції.

8.2 Матричне формулювання основних рівнянь теорії пружності

Для розуміння того яким чином виконуються розрахунки з використанням МСЕ необхідно розглянути матричне предствлення основних залежностей курсу теорія пружності. Це пов'язано з тим, що при використанні методу скінченних елементів для розрахунку різних конструкцій необхідно оперувати значною кількістю рівнянь, а тому набагато простішим є використання матриць. З іншого боку з кожним разом перед інженерами постають дедалі складніші задачі внаслідок чого були створені спеціалізовані комп'ютерні програми для таких розрахунків. А як відомо комп'ютер представляє світ у вигляді 0 та 1 і це є ще одною причиною популярності розрахунків з використанням матриць.

Складові переміщення u , v , w в будь-якій точці тіла (рис.1.8) в напрямку осей x , y , z представляють собою вектор:

$$\vec{u} = [u \ v \ w] \quad (8.1)$$

Залежності (4.6) можуть бути представлені в матричній формі:

$$\vec{\varepsilon} = L\vec{u}, \quad (8.2)$$

де L – матриця-оператор.

$$L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

Додатково до тензорів напружень та деформацій (1.2) та (1.27) вводиться тензор ротації ω_{ij} :

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.4)$$

Складові тензора ротації визначаються через переміщення:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} - u_{ji}). \quad (8.5)$$

Рівняння нерозривності деформацій (1.35) в матричній формі можна записати наступним чином:

$$L_1 \vec{\varepsilon} = 0, \quad (8.6)$$

де L_1 – матриця-оператор.

$$L_1 = \begin{bmatrix} \partial^2/\partial y^2 & \partial^2/\partial x^2 & 0 & -2\partial^2/\partial x\partial y & 0 & 0 \\ 0 & \partial^2/\partial z^2 & \partial^2/\partial y^2 & 0 & -2\partial^2/\partial y\partial z & 0 \\ \partial^2/\partial z^2 & 0 & \partial^2/\partial x^2 & 0 & 0 & -2\partial^2/\partial x\partial z \\ \partial^2/\partial y\partial z & 0 & 0 & -\partial^2/\partial x\partial y & \partial^2/\partial x^2 & -\partial^2/\partial x\partial y \\ 0 & \partial^2/\partial x\partial z & 0 & -\partial^2/\partial z\partial y & -\partial^2/\partial x\partial y & \partial^2/\partial y^2 \\ 0 & 0 & \partial^2/\partial x\partial y & \partial^2/\partial z^2 & -\partial^2/\partial x\partial y & -\partial^2/\partial y\partial z \end{bmatrix}.$$

Рівняння рівноваги (1.24) мають наступний вигляд:

$$L_2 \vec{\sigma} + \vec{F}, \quad (8.7)$$

де $\vec{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz}]$ - вектор складових напружень;

$\vec{F} = [F_x \ F_y \ F_z]$ - вектор складових об'ємних сил; L_2 – матриця-оператор

$$L_2 = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}. \quad (8.8)$$

Умови на контурі (1.7) вражаються як:

$$G\vec{\sigma} - \vec{p} = 0. \quad (8.9)$$

де $\vec{p} = [p_x \ p_y \ p_z]$ - вектор складових поверхневих сил; G – матриця-оператор, її елементами є косинуси кутів.

$$G = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix}. \quad (8.10)$$

Зв'язок між напруженнями та деформаціями (узагальнений закон Гука):

$$\vec{\sigma} = A\vec{\varepsilon}, \quad (8.11)$$

де A – **матриця жорсткості матеріалу**; a_{ij} – коефіцієнти.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}. \quad (8.12)$$

Враховуючи симетрію матриці A із 36 її коефіцієнтів тільки 21 є не рівним між собою.

Залежність (8.11) можна представити в зворотному вигляді:

$$\vec{\varepsilon} = A^{-1}\vec{\sigma} = C\vec{\sigma}, \quad (8.13)$$

де C – матриця флексабільності (гнучкості) матеріалу.

У випадку однорідних ізотропних тіл елементи матриці A і C можуть бути представлені за допомогою коефіцієнтів Ламе λ і μ .

$$A = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

Або відповідно коефіцієнтів Юнга – E та Пуассона – ν :

$$A = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2\nu}{1-2\nu} & \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.15)$$

$$C = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (8.16)$$

Якщо умова рівноваги (8.7) і умова на контурі (8.9) за допомогою рівнянь (8.2) та (8.11) будуть представлені через переміщення, то отримаємо вид рівнянь Ламе в матричній формі:

$$\delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} L e + \frac{1}{\mu} \vec{F} = 0, \quad (8.17)$$

$$\text{де } \delta = \Delta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \end{bmatrix}; e = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz};$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Вираз (6.17) є аналогічним виразу (4.7) і разом з граничними умовами на поверхні (4.10) дають змогу описати стан напружень та деформацій тіла. Аналогічно в матричному вигляді можна подати рівняння Бальтрамі-Мітчела (4.11) [2].

8.3. Розуміння варіаційного підходу до рішення задач теорії пружності

В багатьох задачах механіки, фізики, геометрії та інших важливу роль відіграють змінні величини, які називаються функціоналами. Кажуть, що задано функціонал, якщо кожній функції (або кривій) з деякого класу поставлено у відповідність певне число. Тобто можна сказати, що

функціонали – це функції у яких за незалежну змінну приймаються функції. Для задач, пов'язаних з поняттям функціонала, найбільш розвиненими є методи знаходження найбільшого і найменшого значення функціонала. Такі задачі називаються задачами варіаційного числення.

Варіаційна постановка проблем теорії пружності часто має перевагу перед формулюванням в формі диференціальних рівнянь. На основі енергетичного підходу і варіаційних принципів з'явилися методи і прийоми для отримання приблизних рішень.

До основних енергетичних методів рішення задач теорії пружності, які побудовані на варіаційних принципах відносяться: **1) Принцип віртуальної роботи; 2) Принцип мінімуму потенціальної енергії. Функціонал Лагранжа.**

Принцип віртуальної роботи складається із двох повністю еквівалентних принципів: принципа можливих переміщень і принципа можливих сил. Перший принцип іноді називають принципом віртуальної роботи, другий – принципом віртуальної додаткової роботи або також принципом Кастільяно. Принцип віртуальної роботи детально розглянутий в розділі 4.3.

На основі принципів віртуальної роботи і додаткової віртуальної роботи формуються екстремальні принципи про потенціальну енергію і додаткову енергію тіла.

Принцип мінімуму потенціальної енергії. Функціонал Лагранжа.

На основі закону про збереження енергії дії зовнішніх сил відповідає зміна потенціальної, кінетичної і теплової енергії тіла. Якщо в процесі деформації припустити, що кількість теплової і кінетичної енергії не змінюється, то дія зовнішніх сил дорівнює зміні потенціальної енергії тіла. Ця зміна енергії називається потенціальною енергією деформації або деформаційною дією. Принцип мінімуму потенціальної енергії був розглянутий в розділі 4.2.

Функціонал Лагранжа представляє собою суму потенціальної енергії деформації і потенціалу сил:

$$C = \int_V \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}^T A \vec{\varepsilon} dv - \int_V \vec{F} \vec{u} dv - \int_S \vec{p} \vec{u} ds \quad (8.18)$$

де $\int_V \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}^T A \vec{\varepsilon} dv$ - потенціальна енергія деформації; $\int_V \vec{F} \vec{u} dv$ - потенціал об'ємних сил; $\int_S \vec{p} \vec{u} ds$ - потенціал поверхневих сил; A – матриця жорсткості матеріалу; $\vec{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, 2\gamma_{xy}, 2\gamma_{yz}, 2\gamma_{xz}]$ - транспозиція вектора деформацій; $\vec{\varepsilon} = L \vec{u}$; $\vec{u} = [u, v, w]$ - вектор; L – матриця-оператор (формула (7.3)).

8.4. Варіаційний метод в МСЕ

Варіаційне формулювання МСЕ ґрунтується на варіаційних принципах механіки суцільного середовища. В механіці твердого деформованого тіла основними варіаційними принципами є: принцип мінімуму потенціальної енергії, принцип мінімуму комплементарної енергії, варіаційний принцип Рейснера.

На основі кожного із цих принципів можна сформулювати відповідний вид МСЕ. Якщо прийняти принцип мінімуму потенціальної енергії, то в якості основних невідомих беруться кінематичні (деформаційні) величини. Якщо виходити із принципу мінімуму комплементарної енергії, то основні невідомі – статичні величини, а у варіаційному принципі Рейснера – частково статичні або кінематичні невідомі.

Таким чином отримують три основні види варіаційного формулювання МСЕ: 1) метод деформацій; 2) метод сил; 3) змішаний метод.

Метод деформацій. На рис. 8.2,а показаний домен A (частина простору) суцільного середовища, який обмежений контуром S так, що на одній частині контуру S_σ задані контурні умови по силам, а в іншій S_u по переміщенням. В області A діють об'ємні сили $F(F_x, F_y, F_z)$, а на контурі S_σ - поверхневі сили $p(p_x, p_y, p_z)$.

Рішення задачі теорії пружності через функції переміщень зводиться до рішення рівняння (4.7). В такому випадку точне рішення граничної задачі є складним, так як містить велику кількість невідомих змінних. Таку задачу простіше вирішити за допомогою відповідної дискретної системи із скінченним числом змінних або інакше кажучи вирішити задачу з відповідною системою алгебраїчних рівнянь.

Розглядуваний домен (рис. 8.2, б) ділиться на скінченне число малих частин – скінченних елементів, пов'язаних між собою визначеним числом точок – вузлів.

Якщо прийняти, що переміщення в будь-якій із точок скінченного елемента залежать від переміщень у вузлах, то задача визначення поля переміщення в області A зводиться до розрахунку переміщень у вузлах.

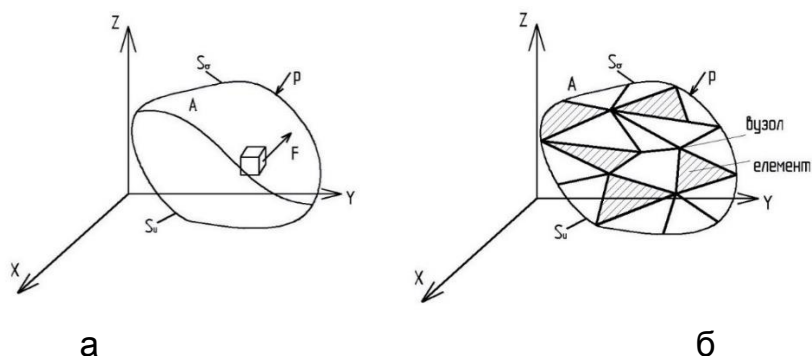


Рис. 8.2 Спрощена розрахункова схема МСЕ:

а – виділена частина простору на яку діють зовнішні зусилля;
б – сітка скінченних елементів

Переміщення вузлів в області A і на контурі S визначається системою рівнянь, які описують умови рівноваги вузлів та умови на контурі S (умови нерозривності). Ці рівняння можуть формуватися на основі принципу віртуальних переміщень або на основі варіаційного принципу мінімуму потенціальної енергії. По відомим переміщенням не важко визначити деформації та напруження.

Отже основний підхід до рішення граничних задач теорії пружності методом деформації з використанням МСЕ, не відрізняється від розрахунку лінійних систем методом переміщень. Якість і точність апроксимації по МСЕ в основному залежить від якості апроксимації переміщень в скінченних елементах, а також в залежності від переміщення у вузлах.

Метод сил. Більшість загальних програм розрахунку конструкції методом скінченних елементів ґрунтуються на методі деформацій. Проте деякі задачі вигідно вирішувати застосовуючи метод сил (пластини, оболонки і т.д.). Формулювання методу сил аналогічно формулюванню метода деформацій.

В якості основних невідомих в методі сили використовують статичні сили або напруження. Поле сил (напружень) апроксимується за допомогою інтерполяційних функцій. Передбачається, що умови рівноваги в елементах і вузлах, а також на границі між елементами виконуються.

Умова безперервності напружень на границях між окремими елементами забезпечується за допомогою мультиплікатора Лагранжа. В залежності від способу виконання цієї умови розрізняють дві основні моделі рівноваги, відомі як метод сил і гібридна модель МСЕ.

Варіаційні принципи механіки суцільного середовища представляють собою широку вихідну базу для розвитку математичного формулювання і інтерпретації рішень по МСЕ.

8.5. Точність і конвергенція по МСЕ

Загальні положення. Рішення, які отримуються по МСЕ в загальному виді є наближеними або апроксимаційними. При розгляді наближених рішень одразу постає питання відносно їх точності, стійкості та конвергенції.

Під поняттям точність тут розуміється близькість наближеного рішення до точного або відхилення наближеного рішення від точного, в той час як під стійкістю мається на увазі стійкість в числовому і розрахунковому процесі при визначенні рішення.

Висновок про конвергенцію (сходимість рішення) МСЕ виконується на основі аналізу результатів в залежності від зміни таких визначених параметрів, як величина і число скінченних елементів або інтерполяційних функцій в наближеному рішенні.

Помилки в МСЕ можуть бути наступними: помилки дискретизації, які представляють різницю між реальною геометрією тіла і його апроксимацією системою скінчених елементів; помилки інтерполяційних функцій, що представляють різницю між дійсним полем невідомих функцій та їх апроксимацією за допомогою полінома. Помилки дискретизації зменшуються із збільшенням числа скінченних елементів і відповідно із зменшенням розміру елемента вони прямують до нуля. Також помилки дискретизації зменшуються із застосуванням криволінійних елементів, за допомогою яких краще апроксимується геометрія тіла, що обмежена неправильними контурами.

Для інтерполяційних функцій зазвичай приймаються поліноми. Ряд в формі полінома, що залежить від одного або багатьох аргументів з нескінченною множиною членів завжди є комплекним або повним. Оскільки в конкретних рішеннях завжди беруться поліноми з скінченим числом членів, представлення поля змінних в елементі скінченних розмірів з допомогою полінома може бути тільки апроксимативним, це означає, що з'являється помилка інтерполяційної функції. Умови для заздалегідь вибраного числа членів ряду, коли ця помилка прямує до нуля, можуть бути забезпечені тільки за допомогою зменшення розмірів скінченного елемента.

Критерій повноти або комплектності зазначає наступне: для конвергенції необхідно щоб змінна і всі її похідні, які з'являються у функціоналі, для кожного скінченного елемента прямували до точних значень, коли елемент стає нескінченно малим. На основі цього принципу слідує, що для апроксимації функції необхідно приймати поліном, ряд якого як мінімум рівний ряду найвищої похідної в функціоналі проблеми. Звісно, якщо приймати повний поліном найвищого ряду із ряду, який мінімально необхідний, то слід чекати на кращу апроксимацію і відповідно на меншу похибку.

Критерій комплектності є суттєвим для точності апроксимації полів функцій в окремих скінченних елементах. Проте він не включає умови на границі між елементами, які є суттєвими для якості загальної апроксимації в розглядуваній області. По цій причині поруч з критерієм комплектності формується критерій компатибельності або комформності, який зазначає: для конвергенції рішення по МСЕ. Необхідно, щоб елементи були комформними, а це значить, що змінні і їх похідні до ряду $m-1$ (включно і $m-1$), де m – ряд найвищої похідної у функціоналі, повинні бути неперервними на всіх границях між елементами.

Відповідь на питання з якою точністю по МСЕ вирішена будь-яка практична задача надати складно. Тим не менш уявлення про точність отриманого рішення, а також про ступінь відхилення по відношенню до точного рішення можна отримати одним із наступних способів:

- 1) якщо системою скінченних елементів, з якою вирішується реальна задача також вирішується схожа паралельна задача, що має і аналітичне рішення. З точністю з якою отримано рішення паралельної задачі, можна вважати, що вирішена і реальна задача;
- 2) для проблем про які відомо, що в формулюванні МСЕ монотонно конвергенті, можна знайти багатократні рішення з різною щільністю сітки скінченних елементів. На основі екстраполяції цих рішень можна визначити точність рішення, а також відхилення від точних рішень.

На практиці в основному використовують другий спосіб, оскільки для багатьох реальних проблем, які вирішуються, важко знайти відповідну паралельну задачу, що має аналітичне рішення.

8.6. Види скінченних елементів та інтерполяційні функції

Один із важливих моментів застосування МСЕ є вибір елементів і інтерполяційних функцій за допомогою яких апроксимується поле переміщень в елементах. Кожний скінченний елемент характеризується його формою, числом і видом вузлів, числом і видом невідомих у визначених вузлах, а також видом інтерполяційних функцій. З урахуванням їх форми елементи можуть бути з прямолінійними або плоскими, криволінійними або кривими контурами. Прямолінійні і криволінійні елементи бувають одновимірні або лінійні, двовимірні або плоскі, тривимірні або просторові.

Одновимірний скінченний елемент – частина прямої або кривої лінії (рис.8.3). Число вузлів на елементі змінне, що обов'язково і для всіх інших скінченних елементів.

В рішенні одновимірних задач механіки суцільного середовища МСЕ не знаходить великого застосування, тому що існують інші аналітичні і чисельні методи рішення звичайних диференціальних рівнянь, за допомогою яких вирішуються такі проблеми. Проте одновимірні скінченні елементи широко застосовуються в розрахунках таких плоских і просторових конструкцій, як пластини і оболонки, де з'являються лінійні опори в якості прогинів, ребер і балок.

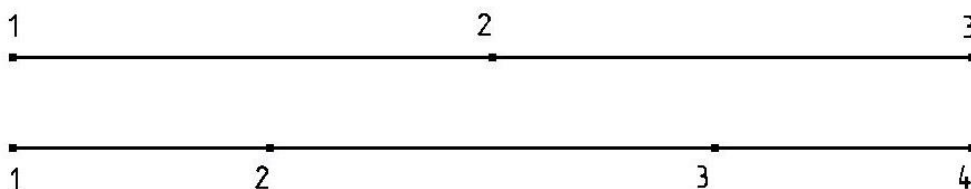


Рис. 8.3. Лінійні скінчені елементи

Двовимірні скінченні елементи найчастіше за все бувають трикутної і чотирикутної форми (рис.8.4). Прямокутний елемент, сторони якого паралельні осям універсальної системи координат, є самим простим для застосування, але не придатним для апроксимації областей, що обмежені криволінійними контурами. З трикутними елементами можлива гарна апроксимація геометрії області з кривими контурами. Чотирикутний елемент може бути сформульований безпосередньо або як комбінація двох-чотирьох трикутників.

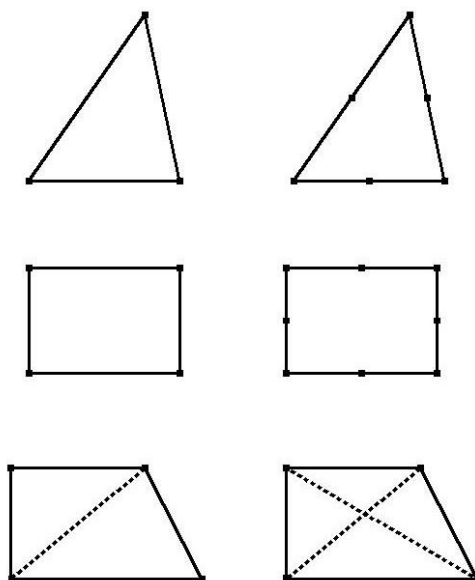


Рис.8.4. Плоскі скінченні елементи

Для тривимірного аналізу і розрахунку застосовуються елементи форми тетраедра і призми (рис.8.5). Для хорошої апроксимації геометрії тіла з кривими контурами часто буває необхідно прийняти сітку з великим числом скінченних елементів з плоскими сторонами. Це призводить до значних затрат часу, особливо при вирішенні просторових проблем. Для того щоб уникнути цього, застосовуються криволінійні скінченні елементи.

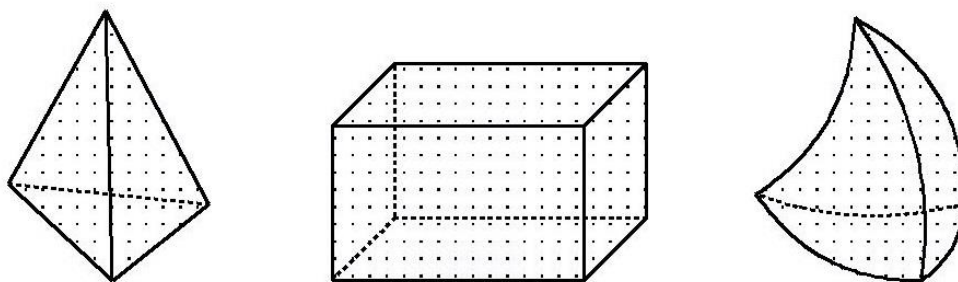


Рис. 8.5. Просторові скінченні елементи

Поруч із формою кожен скінченний елемент характеризується числом і позицією вузлів. Останні зазвичай розміщують в таких характерних точках елемента, як краї лінійних елементів, вершини трикутників або чотирикутників для трикутного або чотирикутного елемента і т.д. Для двох елементів однієї форми число вузлів і їх позиції одна відносно іншої можуть бути різні. Вузли можуть бути зовнішніми і внутрішніми.

У всіх вузлах елемент пов'язаний із сусідніми, в той час як внутрішні вузли належать тільки одному елементу і не має зв'язку із іншими

елементами. Так, наприклад, у лінійного елемента крайні вузли як правило зовнішні, а вузли, що знаходяться між крайніми є внутрішніми вузлами. Проте, якщо подібний лінійний елемент утворює двовимірний елемент, то тоді всі вузли, які лежать на лінії є зовнішніми.

За основні невідомі у вузлах приймають параметри, що за звичай приймають значення функції або її похідні у вузлах, які разом із інтерполяційними функціями роблять можливим описати стан в елементі (наприклад поле переміщень, напружень, розповсюдження температури і т.д.). Ці параметри, що представляють основні невідомі в МСЕ, часто називають степенями вільності по аналогії із відповідним поняттям в теорії конструкцій, коли за параметри приймаються переміщення або їх похідні у вузлах.

Степені вільності можуть бути зовнішніми або внутрішніми в залежності від виду вузла, якому вони належать. Число зовнішніх степенів вільності одного скінченного елемента дорівнює сумі чисел степенів вільності в зовнішніх вузлах. Аналогічно цьому число внутрішніх степенів вільності дорівнює сумі степенів вільності у внутрішніх вузлах. Останні вводяться для покращення якості апроксимації поля змінних в елементі.

Загальні поняття про інтерполяційні функції. Функції за допомогою яких визначається поле змінних в елементі, називаються інтерполяційними функціями (функціями форми або апроксимативними функціями). За допомогою інтерполяційних функцій встановлюється безпосередній зв'язок між значеннями функції в будь-якій точці елемента і основних невідомих параметрів у вузлах. Значення функції в довільній точці інтерполюється між її значенням у вузлах, а звідти і походить назва інтерполяційна функція.

Від вибору інтерполяційної функції залежить виконання умови нерозривності між окремими елементами та умови подібності. Існують різні степені нерозривності: нерозривність функції, нерозривність функції та перших похідних функції, нерозривність функції і похідної до m -ряду. В МСЕ для різних задач необхідна різна степені нерозривності. Наприклад для плоскої задачі теорії пружності достатньо нерозривності функції, в той час як для вивчення згину пластини необхідна нерозривність функції та перших похідних. Елементи із вищим ступенем нерозривності дають більш точні рішення, ніж ті що мають нижчу степені нерозривності, але і визначити їх більш складніше.

В дійсності інтерполяційні функції це функції незалежних аргументів і координат вузлів. Для їх визначення існує два шляхи: за допомогою універсальних координат і безпосереднім вибором.

Інтерполяційні функції повинні забезпечити гарну апроксимацію в елементі і нерозривність між ними. Цими властивостями володіють поліноми, які використовуються в основному як інтерполяційні функції. Існують три основні сімейства функцій в формі полінома, які застосовуються в МСЕ. Це поліноми Лагранжа, функції Серендіпності та поліноми Герміте.

Запитання для самоперевірки.

1. Перерахуйте програмне забезпечення в якому можна виконувати розрахунки методом скінченних елементів?
2. Наведіть та дайте визначення чотирьом основним видам МСЕ.
3. Основні енергетичні методи рішення задач теорії пружності, які побудовані на варіаційних принципах. Охарактеризувати ці методи.
4. Критерій повноти або комплектності.
5. Наведіть види скінченних елементів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Nazarenko, I., Dedov, O., Bernyk, I., Bondarenko, A., Zapryvoda, A., Nazarenko, M., Mishchuk, Y. et. al.; Nazarenko, I. (Ed.) (2021). Dynamic processes in technological technical systems. Kharkiv: PC TECHNOLOGY CENTER, 196.
2. Martin H.Sadd (2009) Elasticity. Theory, Applications and Numerics. Academic Press, Elsevier Inc., p. 536.
3. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: підручник / М.С. Можаровский – К.: Вища шк., 2002. – 308 с.: іл.
4. Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Third Edition. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2004. – 602 p.
5. Баженов В.А. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання: Підручник / В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, О.В. Шишов/ За заг. ред. В.А.Баженова. -К.: ПАТ «ВІПОЛ», 2013. -896 с.: ил.
6. Тарасевич Ю.Я. Теорія пружності: конспект лекцій. Частина 1. Напружено-деформований стан у точці тіла. Плоска задача теорії

- пружності в декартових координатах /Укладач Ю.Я. Тарасевич. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 116 с.
7. Назаренко І.І. Прикладні задачі теорії вібраційних систем. Навчальний посібник (2-е видання). – К.: Видавничий Дім «Слово», 2010. – 440 с.
 8. Григор'єва Л.О. Опір матеріалів з основами теорії пружності: курс лекцій / Л.О. Григор'єва, Д.В. Левківський, О.П. Кошевий. Київ: Видавництво Ліра – К, 2021. – 270 с.
 9. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. / За ред. В.Г. Піскунова. – К. Вища шк., 1994 -1995. – Кн. 1-5.
 10. Автомобільні двигуни/ І.І. Тімченко, Ю.Ф. Гутаревич, К.Є. Долганов та ін. – Х.: Основа, 1995. - 460 с.
 11. Теорія пружності: конспект лекцій. Частина 1. Напружено-деформований стан у точці тіла. Плоска задача теорії пружності в декартових координатах/ Укладач Ю.Я. Тарасевич. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 116 с.
 12. Романюк О.Д., Теліпко Л.П., Ракша С.В. Теоретична та прикладна механіка. Короткий курс. Кам'янське. ДДТУ, 2021. 282 с.
 13. Корнілов Г.Л. Теорія пружності в прикладах та задачах. – «ХАІ», 1994 р., 196 с.
 14. Е.Д. Чихладзе, М.А. Веревічева, Є.І. Галагуря, М.О. Ковальов, Л.Б. Кравців, О.В. Опанасенко, А.М. Петров Основи лінійної теорії пружності, пластичності та повзучості. Навчальний посібник. – Харків: УкрДАЗТ, 2010. – 149 с.
 15. Peter Kohnke (1999) Ansys Theory Reference Release 5.6. 001242. Eleventh Edition. SAS IP, Inc., p. 1286.
 16. Huei-Huang Lee (2022) Finite Element Simulations with Ansys Workbench 2022. Theory, Applications, Case Studies. SDC Publications, p. 55.
 17. Писаренко Г.С. Опір матеріалів: Підручник / Г.С.Писаренко, О.Л.Квітка, Е.С.Уманський. - 2-ге вид., допов. і перероб. – К.:Вища шк., 2004. – 655 с.

Навчальне видання

НАЗАРЕНКО Іван Іванович
РУЧИНСЬКИЙ Микола Миколайович
МІЩУК Євген Олександрович

ТЕОРІЯ ПРУЖНОСТІ В ПРИКЛАДНІЙ МЕХАНІЦІ

Навчальний посібник

Видавець ФОП Ямчинський О.В.
03150, Київ, вул. Предславинська, 28
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
Суб'єкта видавничої справи ДК №6554 від 26.12.2018 р.

Формат 60x84/16. Наклад 100 пр. Ум. др. арк.12. Зам. №26.

Виготовлювач ТОВ «ЦП «КОМПРИНТ»
03150, Київ, вул. Предславинська, 28
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 4131 від 04.08.2011 р.