

УДК 539.3

І.І. Солодей, канд. техн. наук

М.О. Вабіщевич

О.І. Гуляр, д-р техн. наук

ВИКОРИСТАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ТРІЩИНОЮ В ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

На основі нових типів спеціальних скінченних елементів розроблена ефективна методика дослідження перехідних процесів динамічного деформування просторових тіл обертання та призматичних тіл з тріщинами. Вірогідність отриманих результатів і ефективність підходу підтверджені розв'язанням контрольних прикладів.

Вступ.

Прагнення зменшити чисельні витрати та спростити дискретні моделі при розв'язанні задачі механіки руйнування без втрати точності отриманих результатів потребують розробки нових методик з використанням спеціальних скінченних елементів з тріщинами (ССЕТ). Існує декілька важливих аспектів які обумовлюють їх використання.

Густота сітки скінченних елементів (СЕ) у привершинній області – один із основних чинників ефективності моделі. Відомі рішення проблеми використання більш рідких сіток базуються, з однієї сторони, на введенні до функцій форми СЕ очікуваної сингулярної поведінки у вершині тріщини з додаванням спеціальних функцій розщеплення в її середині [14-16], або спеціальних процедурах зміщення вузлів звичайного СЕ [11, 13]. З іншої сторони, пропонується комбінація ССЕТ, як моделі із прямою коррекцією тензора напружень звичайного СЕ, та алгоритма усереднення отриманих розв'язків по ефективній привершинній підобласті [3, 5], що дозволяє зберегти регулярну структуру дискретної моделі і значно зменшити чисельні витрати.

Розв'язання задачі динаміки для тіл з тріщинами потребує введення до рівнянь руху обмежень від взаємного проникнення берегів тріщини, оскільки нестационарні задачі передбачають наявність силових факторів різних знаків. Подібний аспект виникає також і в задачах статки [1], наприклад при розгляді згину пластини із скрізною тріщиною коли її береги прагнуть розкритись на розтягнутій стороні пластини і зімкнутись на стороні стиснення. ССЕТ забезпечує природньо легке вирішення цієї проблеми варіюванням напружень нормальних до поверхні контакту берегів тріщини.

Більш того, використання спеціальних скінченних елементів для моделювання тріщини дає можливість безпосереднього роздільного обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень (KIH), що легко здійснюється при почерговому задоволенні умов рівності нулю відповідних компонент тензора напружень [5].

1. Основні співвідношення нестационарної задачі механіки руйнування в схемі напіваналітичного метода скінченних елементів.

Для прямокутних призматичних тіл та тіл обертання розглядаються поздовжні стаціонарні тріщини, фронт яких збігається за напрямком із твірною тіла (рис. 1).

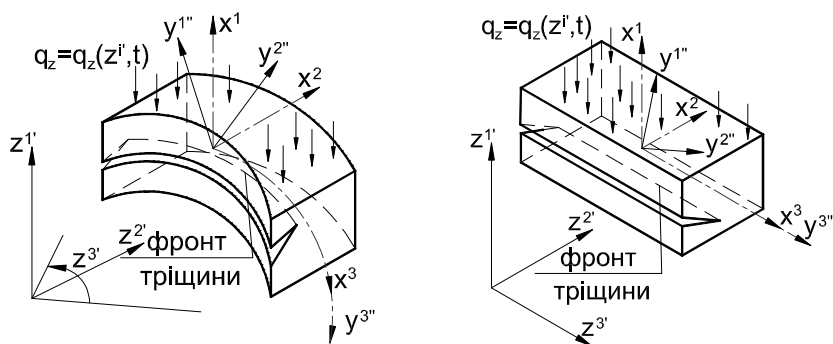


Рис. 1. Просторові призматичні тіла та тіла обертання

Класичне рівняння руху однорідного вздовж направляючої ізотропного тіла для напіваналітичного метода скінченних елементів (НМСЕ) записується у вигляді незалежних амплітудних підсистем виду [9]:

$$\delta K_I + \delta W_I - \delta A_I = 0 \quad (1)$$

де δW_I , δK_I , δA_I амплітудні варіації потенційної, кінетичної енергій та роботи зовнішніх сил, що забезпечується використанням кільцевого та прямокутного призматичного скінченних елементів з апроксимаціями невідомих в напрямку x^3 2π - періодичними функціями тригонометричних рядів Фур'є [9]:

$$(u: \dot{u}: \ddot{u})_{(S_1, S_2)} = \sum_{l=l_0}^L (u: \dot{u}: \ddot{u})_{(S_1, S_2)}^l \psi_l^l, \quad (2)$$

для замкнутого тіла обертання в циліндричній системі координат:

$$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \cos lx^3, \quad \psi_{3'}^l = \sin lx^3, \quad l_0 = 0, \quad 0 \leq x^3 \leq 2\pi,$$

для призматичного прямолінійного тіла в ортогональній системі координат:

$$\psi_{1'}^l = \psi_{2'}^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3, \quad \psi_{3'}^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3, \quad l_0 = 1, \quad 0 \leq x^3 \leq 2$$

Слід зазначити, що компоненти тензорів напружень і деформацій приймають вигляд повних рядів Фур'є, незалежно від наявності площин симетрії:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{l=l_0}^L \bar{\varepsilon}_{ij}^l \psi_{1'}^l + \bar{\varepsilon}_{ij}^l \psi_{3'}^l, \quad \sigma^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \bar{\sigma}_l^{ij} \psi_{1'}^l + \bar{\sigma}_l^{ij} \psi_{3'}^l. \quad (3)$$

Відомо, що розкриття тріщини у твердому тілі може проходити трьома різними шляхами: нормальний відрив (тип I), поперечний (тип II) та повздовжній зсув (тип III). У зв'язку з цим локальні напруження біля вершини тріщини відповідно характеризуються параметрами K_I , K_{II} , K_{III} , що отримали назву коефіцієнтів інтенсивності напружень.

K_I , K_{II} , K_{III} є параметрами силового критерію руйнування – основою для розв'язання задач механіки руйнування прямими методами. У відповідності до (2) і (3) можна записати:

$$K_I = H_I^\sigma \sum_{l=l_0}^L K_{I\sigma}^l, \quad K_{II} = H_{II}^\sigma \sum_{l=l_0}^L K_{II\sigma}^l, \quad K_{III} = H_{III}^\sigma \sum_{l=l_0}^L K_{III\sigma}^l$$

$$K_I = H_I^u \sum_{l=l_0}^L K_{Iu}^l, \quad K_{II} = H_{II}^u \sum_{l=l_0}^L K_{IIu}^l, \quad K_{III} = H_{III}^u \sum_{l=l_0}^L K_{IIIu}^l, \quad (4)$$

де $K_{I\sigma}^l$, $K_{II\sigma}^l$, $K_{III\sigma}^l$, K_{Iu}^l , K_{IIu}^l , K_{IIIu}^l - амплітудні значення коефіцієнтів інтенсивності напружень; H_I^σ , H_{II}^σ , H_{III}^σ , H_I^u , H_{II}^u , H_{III}^u - відомі функції асимптотичних формул компонент тензора напружень і переміщень. Для найчастіше розглядуваного випадку тріщини нормального відриву вони мають вигляд:

$$H_I^\sigma = \sqrt{2\pi r} \left/ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right., \quad (5)$$

$$H_I^u = G \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \left/ \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right. \quad (6)$$

$$K_{I\sigma}^l = \bar{\sigma}_l^{1''} \psi_{1'}^l + \bar{\sigma}_l^{1''} \psi_{3'}^l, \quad (7)$$

$$K_{Iu}^l = u_{1'}^l \psi_{1'}^l. \quad (8)$$

Для вісесиметричної та двовимірних задач теорії пружності коефіцієнт інтенсивності напружень повздовжнього зсуву $K_{III} = 0$, а амплітудні значення тотожно дорівнюють їх координатним аналогам.

Енергетичний підхід передбачає обчислення J -інтеграла, який при динамічному процесі розповсюдження хвиль у тілі зі стаціонарною тріщиною для пружних матеріалів – лінійних або нелінійних представляє собою швидкість вивільнення енергії G [1]. Як показано в роботі [9] у відповідності до метода реакцій:

$$J = \sum_{l=l_0}^L J_l, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} J_l = & \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{2(\Delta x_\alpha)_j} \{u\}_{lj}^T \{R\}_{lj} - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta x_\alpha)_j} \{u\}_{lj}^T \{R\}_{lj} - \\ & - \sum_{j=1}^{N_1} \left(\frac{(R_{lq,k} + R_{lq',k}) (u_{lq,k} - u_{lq',k})}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \sum_{j=1}^{N_2} \left(\frac{(R_{lq,k} + R_{lq',k}) (u_{lq,k} - u_{lq',k})}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_3} \left(\frac{(R_{lq,k} + R_{lq',k}) (u_{lq,k} - u_{lq',k})}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \\ & - \sum_{j=1}^{N_4} \left(\frac{(R_{lq,k} + R_{lq',k}) (u_{lq,k} - u_{lq',k})}{2\Delta x_\alpha} \right)_j. \end{aligned} \quad (8)$$

Всі члени, які входять до (8), визначаються за допомогою амплітудних вузлових реакцій та переміщень сіткової області для моменту часу $\tau = t + \Delta t$ задачі динаміки.

В області лінійної механіки руйнування існує однозначна залежність між величинами коефіцієнтів інтенсивності напружень (4) та J – інтегралом (7) [1].

2. Спеціальні скінченні елементи з тріщиною для задачі динаміки.

Складнощі апроксимації тріщини, що виникають при розв'язанні задач механіки руйнування для об'єктів із складною формою та конфігурацією поперечного перерізу, можуть бути подолані на основі використання спеціальних скінчених елементів, матеріал яких не сприймає дію нормальних та дотичних до траєкторії тріщини напружень.

Розглянемо кільцевий замкнений та призматичний скінченні елементи з поперечним перерізом у вигляді криволінійного чотирикутника довільного обрису, що перетинається тріщиною (рис. 2).

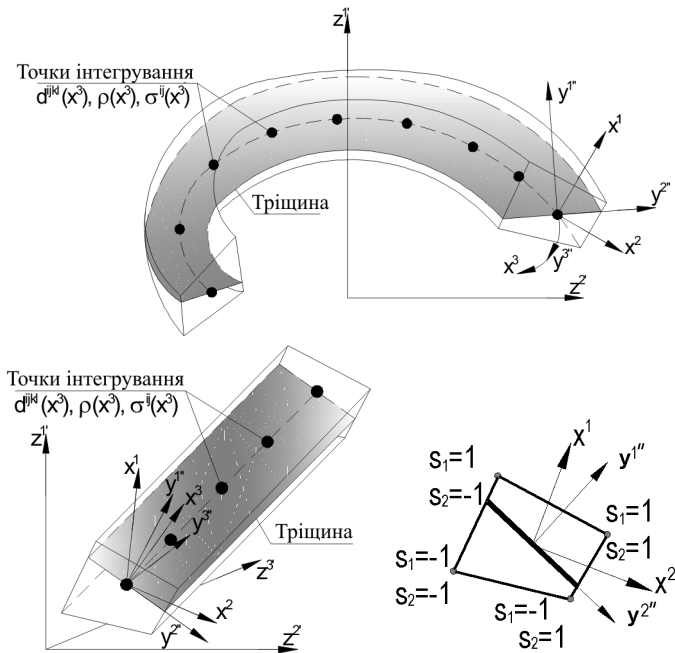


Рис. 2. Спеціальні кільцевий замкнений та призматичний прямолінійний скінченні елементи з тріщиною

Будемо вважати, що область, яку займає елемент, відображається на квадрат з одиничними сторонами, внутрішні властивості якого визначаються механічними і геометричними характеристиками елемента.

Помістимо в центр елемента початок системи координат x^i , направляючи осі вздовж сторін. За невідомі обрані вузлові переміщення, швидкості та прискорення $(u : \dot{u} : \ddot{u})_{i'(s_1 s_2)}$ в базисній системі координат

Z^i , де індекси s_1 та s_2 визначають положення вузла відносно центра елемента і набувають значень ± 1 (рис.2). Позначка “:” відповідає логічному оператору “або”, що означає вибір для розгляду однієї з компонент в круглих дужках.

Припускається, що щільність матеріалу ρ , компоненти тензора пружних постійних d^{ijkl} і визначник метричного тензора g незначно змінюються в області поперечного перерізу елемента і вважаються рівними відповідним значенням в його центрі:

$$\rho = \rho|_{x^\alpha=0}, \quad d^{ijkl} = d^{ijkl}|_{x^\alpha=0}, \quad \sqrt{g} = \sqrt{g}|_{x^\alpha=0}. \quad (9)$$

Напротивагу цьому компоненти метричного тензора, постійні матеріала і напруження довільно змінюються вздовж осі x^3 і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування.

Якщо обмежитися білінійним розподілом переміщень, швидкостей і прискорень в площині перерізу елемента:

$$(u : \dot{u} : \ddot{u})_{i'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} P_{(S_1, S_2)} (u : \dot{u} : \ddot{u})_{i'(S_1, S_2)}, \quad P_{(S_1, S_2)} = \prod_{n=1}^2 \left(S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right). \quad (10)$$

Нормовані компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}}. \quad (11)$$

Як показано в роботах [3, 5], застосування моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [8] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі МСЕ:

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} = \frac{1}{g_{(\alpha\alpha)}} \left\{ \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} + \left[\overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} - \overset{\circ}{\epsilon}_{\alpha(\alpha)} h_{(\alpha\alpha), (3-\alpha)} \right] x^{(3-\alpha)} \right\},$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \\
\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{33}}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}}{2} (h_{(\alpha\alpha), (3-\alpha)} + h_{33, (3-\alpha)}) \right] x^{(3-\alpha)} \right\}, \\
\tilde{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \left[\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} h_{33, \alpha} \right] x^{\alpha} \right\}, \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij, \beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}} \Big|_{x^{\alpha}=0}, \quad h_{(ii), \beta} = \frac{g_{(ii), \beta}}{g_{(ii)}}.$$

Формули для обчислення компонент (12) отримані в роботі [4].

Нормовані компоненти тензора напружень визначаються співвідношенням:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}. \tag{13}$$

Зв'язок між компонентами тензора нормованих фізичних напружень та деформацій подається на основі узагальненого закону Гука:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{d}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad \tilde{d}^{ijkl} = d^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}. \tag{14}$$

Аналогічно (12) представимо компоненти тензора напружень відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= g_{(\alpha\alpha)} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}'^{\alpha(\alpha)}_{, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right\}, \\
\tilde{\sigma}^{12} &= \sqrt{g_{11}g_{22}} \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \\
\tilde{\sigma}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}'^{\alpha 3}_{, (3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right\}, \\
\tilde{\sigma}^{33} &= g_{33} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}'^{\alpha 3}_{, \alpha} x^{\alpha} \right\}. \tag{15}
\end{aligned}$$

Компоненти $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{i(i)}(\alpha \neq i)$ відображають напруження згину і їх впливом на точність розв'язання нехтувати не можна, в особливості для оболонок і пластин. Члени ряду типу $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{12}$, $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{3(\alpha)}$ визначають зміну напружень зсуву. Вклад їх в енергію деформації елемента при використанні МССЕ рівний нулю.

Для тонких оболонок з навантаженням, що приведене до серединної поверхні в класичній теорії запроваджуються умови рівності нулю нормальних напружень на площадках, які паралельні площині, що дотична до серединної поверхні. Цій умові відповідає наступна гіпотеза, яка визначає постійність напружень обтягу:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(\alpha)(\alpha)} = 0, \quad (16)$$

З умови (16) отримуємо зв'язок між коефіцієнтами розкладів (12) і (15) в центрі меридіонального перерізу СЕ на основі узагальненого закону Гука:

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = d^{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}_{kl}, \quad (17)$$

а також зв'язок між похідними напружень і деформацій для лінійно-пружного матеріалу, який забезпечує універсальність СЕ, що пропонуються:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} = d_{\alpha}^{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}_{kl,\alpha}, \quad d_{\alpha}^{ijkl} = d^{ijkl} - \frac{d^{ij(\alpha)(\alpha)} d^{(\alpha)(\alpha)kl}}{d^{(\alpha)(\alpha)(\alpha)(\alpha)}}. \quad (18)$$

В силу замкнутості кільцевого СЕ, сталості його геометричних параметрів вздовж окружної координати та для забезпечення виконання граничних умов для шарнірно опертих призматичних тіл розподіл невідомих в напрямку x^3 проводиться 2π - періодичними функціями x^3 і їх вузлові значення представляються відрізками тригонометричних рядів Фур'є:

$$(u; \dot{u}; \ddot{u})_{i'(S_1, S_2)} = \sum_{l=l_0}^L (u; \dot{u}; \ddot{u})_{i'(S_1, S_2)}^l \psi_{i'}^l, \quad (19)$$

де для кільцевого СЕ: $\psi_1^l = \psi_2^l = \cos lx^3$, $\psi_3^l = \sin lx^3$, $l_0 = 0$, $0 \leq x^3 \leq 2\pi$,
 $\vartheta = \begin{cases} 1/2\pi, & \text{якщо } l = 0; \\ 1/\pi, & \text{якщо } l > 0; \end{cases}$, призматичного СЕ: $\psi_1^l = \psi_2^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3$,
 $\psi_3^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3$, $l_0 = 1$, $0 \leq x^3 \leq 2$, $\vartheta = 1$.

У відповідності до розкладу (19), члени ряду Маклорена в (12) можна представити у вигляді рядів:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \psi_1^l + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \psi_3^l, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \psi_1^l + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \psi_3^l, \quad (20)$$

амплітуди для яких отримані в роботі [4].

Напруження і їх похідні незалежно подаються відрізками ряду Фур'є вздовж x^3 :

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} \psi_1^l + \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} \psi_3^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} \psi_1^l + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} \psi_3^l. \quad (21)$$

Для однорідних вздовж x^3 тіл амплітудні значення напружень та їх похідних в центрі поперечних перерізів СЕ можуть бути отримані безпосередньо через амплітудні значення деформацій і їх похідних:

$$\overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} = d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = d_{\alpha}^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km,\alpha}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} = d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = d_{\alpha}^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km,\alpha}^l. \quad (22)$$

В загальному випадку, компоненти тензора пружних постійних залежать від координати x^3 і значення напружень неможливо отримати через амплітудні значення деформацій. Тому, амплітудні значення напружень визначаються співвідношеннями гармонійного аналізу чисельним інтегруванням [10]:

$$\overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} = \frac{1}{\theta N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij} \phi_1^l(n), \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = \frac{1}{\theta N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij} \phi_1^l(n),$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij} \phi_2^l(n), \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij} \phi_2^l(n), \quad (23)$$

де $\overset{\circ}{\sigma}_{\alpha n}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij}$ - координатні значення напружень і їх похідні в центрі поперечних перерізів, що відповідають точкам інтегрування n , $2N$ - загальне число точок інтегрування вздовж координати x^3 , необхідне для обчислення амплітудних значень аж до $l = L$ включно. Для кільцевого

$$\text{СЕ: } \phi_1^l(n) = \cos l \frac{\pi n}{N}, \quad \phi_2^l(n) = \sin l \frac{\pi n}{N}, \quad \theta = \begin{cases} 2, & \text{якщо } l = 0; \\ 1, & \text{якщо } l > 0; \end{cases} \quad \text{для}$$

$$\text{призматичного: } \phi_1^l(n) = \sin l \frac{\pi n}{2N}, \quad \phi_2^l(n) = \cos l \frac{\pi n}{2N}, \quad \theta = 1.$$

Для спеціальних скінчених елементів з тріщиною введемо ортогональну систему координат $y^{i''}$ (рис.2) таким чином, щоб $y^{2''}$ проходила по дотичній до траєкторії тріщини, а $y^{1''}$ - по нормалі і утворювала з додатнім напрямком осі $Z^{1'}$ кут φ . Вважається, що на берегах тріщини нормальні та дотичні напруження повинні дорівнювати нулю:

$$\sigma^{1''1''} = 0, \quad \sigma^{1''2''} = 0, \quad \sigma^{1''3''} = 0. \quad (24)$$

Використаємо подання тензора пружних сталей через коефіцієнти Ляме і компоненти метричного тензора для анізотропного матеріалу:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}). \quad (25)$$

Оскільки для ортогональної системи координат $y^{i''}$:

$$g^{i''j''} = 0 \text{ при } i'' \neq j'', \quad g^{i''i''} = 1, \quad (26)$$

на основі закону Гука представимо напруження через деформації:

$$\begin{aligned} \sigma^{1''1''} &= d^{1''1''1''1''} \varepsilon_{1''1''} + d^{1''1''2''2''} \varepsilon_{2''2''} + d^{1''1''3''3''} \varepsilon_{3''3''} = 0; \\ \sigma^{1''2''} &= 2d^{1''2''1''2''} \varepsilon_{1''2''} = 0; \\ \sigma^{1''3''} &= 2d^{1''3''1''3''} \varepsilon_{1''3''} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

З урахуванням (27) зв'язок між напруженнями та деформаціями в системі координат $y^{i''}$ представимо наступним чином:

$$\sigma^{i''j''} = d^{i''j''k''l''} \varepsilon_{k''l''}, \quad (28)$$

де

$$d_*^{i''j''k''l''} = d^{i''j''k''l''} - d_p^{i''j''k''l''} - d_c^{i''j''k''l''} - d_q^{i''j''k''l''}, \quad (29)$$

$$d_p^{i''j''k''l''} = d^{i''j''1''1''} d^{1''1''k''l''} / d^{1''1''1''1''}, \quad (30)$$

$$d_c^{i''j''k''l''} = 2d^{i''j''1''2''}, \quad (31)$$

$$d_q^{i''j''k''l''} = 2d^{i''j''1''3''}. \quad (32)$$

Тут $d_p^{i''j''k''l''}$ - доданок, обумовлений відсутністю напружень $\sigma^{1''1''}$, $d_c^{i''j''k''l''}$ - напружень $\sigma^{1''2''}$, $d_q^{i''j''k''l''}$ - напружень $\sigma^{1''3''}$.

Виконавши відповідні перетворення, формулу (28) можна подати в місцевій криволінійній системі координат x^i :

$$\sigma^{mn} = d_*^{mnst} \varepsilon_{st}. \quad (33)$$

Коррекція тензора пружних констант матеріалу d^{mnst} в зоні тріщини проводиться згідно формули:

$$d_*^{mnst} = d^{mnst} - d_p^{mnst} - d_c^{mnst} - d_q^{mnst}. \quad (34)$$

Вирази для їх обчислення, у відповідності до відомих формул тензорного аналізу [6], мають вигляд:

$$d_p^{mnst} = C_{i''}^m C_{j''}^n C_{k''}^s C_{l''}^t d^{i''j''1''1''} d^{1''1''k''l''} / d^{1''1''1''1''}, \quad (35)$$

$$d_c^{mnst} = 2C_{i''}^m C_{j''}^n C_{1''}^s C_{2''}^t d^{i''j''1''2''}, \quad (36)$$

$$d_q^{mnst} = 2C_{i''}^m C_{j''}^n C_{1''}^s C_{3''}^t d^{i''j''1''3''}. \quad (37)$$

де $C_{i''}^m$ - коефіцієнти перетворення, що визначають зв'язок між системою координат x^i та системою координат $y^{\alpha''}$:

$$C_{i''}^m = C_{k'}^m C_{i''}^{k'}, \quad C_{i''}^{k'} = \cos(Z^{k'} \wedge y^{i''}). \quad (38)$$

Проведемо перетворення величин, що входять до (35) - (37) у відповідності до (25) та (26):

$$d_p^{mnst} = \frac{2\mu}{1 + \frac{\lambda}{2\mu}} S^{mn} S^{st}, \quad S^{mn} = \frac{\lambda}{2\mu} g^{mn} + C_1^m C_1^n, \quad (39)$$

$$d_c^{mnst} = 2\mu(C_2^m C_1^n C_1^s C_2^t + C_1^m C_2^n C_1^s C_2^t), \quad (40)$$

$$d_q^{mnst} = 2\mu(C_3^m C_1^n C_1^s C_3^t + C_1^m C_3^n C_1^s C_3^t). \quad (41)$$

Якщо симетризувати вирази (40) та (41) і ввести позначення $r_{i''}^{ms} = C_{(i'')}^m C_{(i'')}^s$, можемо записати:

$$d_c^{mnst} = \mu(r_1^{ns} r_2^{mt} + r_1^{ms} r_2^{nt} + r_1^{nt} r_2^{ms} + r_1^{mt} r_2^{ns}), \quad (42)$$

$$d_q^{mnst} = \mu(r_1^{ns} r_3^{mt} + r_1^{ms} r_3^{nt} + r_1^{nt} r_3^{ms} + r_1^{mt} r_3^{ns}). \quad (43)$$

Важливою перевагою запропонованого підходу, заснованого на зміні відповідним способом механічних характеристик матеріалу, є те, що деформоване тіло з тріщиною апроксимується за допомогою повністю сумісних типів скінченних елементів. При цьому, обчислення коефіцієнтів ефективної матриці жорсткості спеціального скінченного елемента виконуються по тим самим формулам, що і для звичайних СЕ, обмежуючись корекцією елементів матриць пружних сталей. Більш того, виникає можливість збереження регулярної структури скінченних елементів, оскільки тріщина може проходити незалежно від топології сіткової області (рис.4).

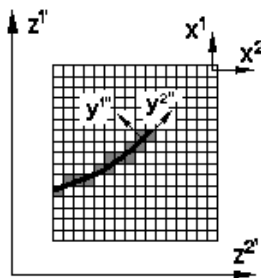


Рис. 4

3. Вірогідність та ефективність використання спеціального скінченного елемента з тріщиною в задачах динаміки.

До переліку факторів, що впливають на процес збіжності та вірогідності отриманих рішень при розв'язанні задач механіки руйнування

методом скінченних елементів (МСЕ), відносять вибір схеми МСЕ, метода визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень, способу апроксимації тріщини. Основним параметром, що свідчить про ефективність будь-якого сіткового методу, є густота сітки скінченних елементів, яка необхідна для отримання достатньо точних результатів. У проведених дослідженнях приділено увагу вивченню швидкості збіжності наближених розв'язків при послідовному стисненні апроксимуючої сітки та порівнянню цієї характеристики для різних способів апроксимації тріщини і методів визначення динамічного КІН.

Аналіз впливу апроксимації тріщини спеціальними скінченними елементами на точність обчислення параметрів механіки руйнування проведено на прикладі розтягу квадратної пластини розміром $2b \times 2L = 0.2 \times 0.2 \text{ м}$ з центральною тріщиною довжиною $2l = b$ (рис. 5).

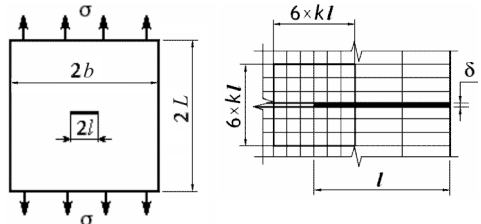


Рис. 5

Коефіцієнт Пуасона

$\nu = 0.35$, модуль пружності $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}$, щільність матеріала $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$. На рис. 6 приведені графіки збіжності результатів розрахунку динамічного коефіцієнта інтенсивності напружень K_{dI} при апроксимації тріщини спеціальними скінченими елементами (ССЕТ) та скінченими елементами нульової жорсткості, запропонованими в роботах [7, 12] (Виріз) по відношенню до схеми із введенням тріщини в розрахункову схему (модель із закріпленням частини бокової поверхні пластини).

Кольором відмічені спеціальні скінченні елементи з тріщиною. Граничні умови відображають наявність двох вісей симетрії по Z^1 та Z^2 . При обчисленні значень ДКІН використовували методики описані в роботах [2, 9].

Похибка визначення K_{dI} обчислювалась у відповідності до формули:

$$\psi = \frac{K_{dI}^{\tau} - K_{dI}^{z\tau}}{K_{dI}^{z\tau}} \cdot 100\%,$$

де $K_{dI}^{z\tau}$ - динамічний КІН еталонної моделі, обчислений для моменту часу τ ; K_{dI}^{τ} - ДКІН розрахункових моделей для того ж моменту часу.

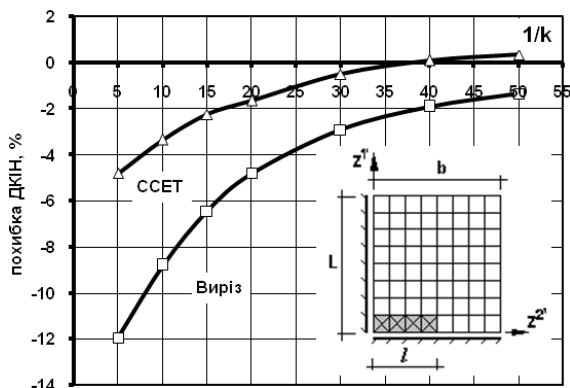


Рис. 6

Дослідження показали, що точність обчислення K_{dl} із застосуванням спеціальних скінчених елементів з тріщиною приблизно в два с половиною рази вища, ніж при використанні скінчених елементів жорсткості яких дорівнює нулю, на всьому діапазоні зміни розмірів сіткової області. При цьому, можна відмітити, що вже при сітці з показником $1/k = 10$, похибка K_{dl} , отримана по запропонованій методиці, лише на 3.3% більша, ніж при введенні тріщини в розрахункову схему. В той же час, скінчені елементи нульової жорсткості при такій самій сітковій області дають похибку 8.8%.

Можна припустити, що зменшення товщини шару скінчених елементів δ , що апроксимує тріщину, повинно сприяти підвищенню точності визначення параметрів руйнування. Дослідження були проведені на попередньому тестовому прикладі. Для того, щоб виключити вплив густини сітки скінчених елементів на похибку обчислення динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень, була зафіксована сітка скінчених елементів із показником $1/k = 20$. Зміні підлягала тільки товщина ССЕ або вирізу відповідної моделі. Графіки залежності похибки ДКІН від товщини шару скінчених елементів з тріщиною (ССЕТ) і нульовою жорсткістю (Виріз) приведені на рис. 7.

Як видно з одержаних результатів, при використанні ССЕТ значення K_{dl} практично не змінюються при зменшенні товщини шару скінчених елементів на протилежному моделі з вирізом, для якої результати уточнюються в межах 2%.

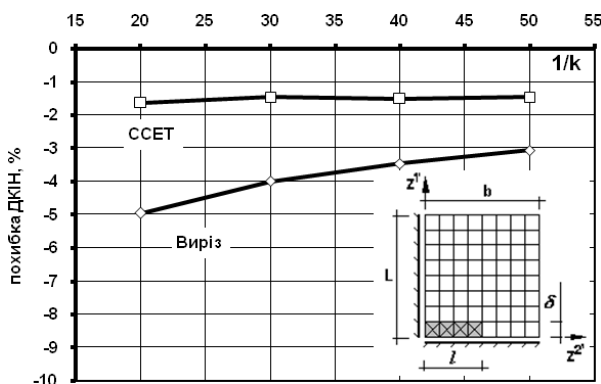


Рис. 7

Такий ефект можна пояснити відсутністю напружень вздовж довжини тріщини, при використанні елементів з нульовою жорсткістю, у порівнянні із спеціальними скінченними елементами, які корегують тільки відповідні компоненти тензора напружень: нормальні та дотичні до берегів тріщини. Крім того, при побудові матриці мас у випадку моделі з вирізом втрачається деяка маса, пов'язана із елементами нульової жорсткості та щільності.

Висновки.

Таким чином, на основі напіваналітичного метода скінченних елементів розроблена ефективна методика дослідження перехідних процесів динамічного деформування просторових тіл обертання та призматичних тіл з тріщинами. В процесі роботи створені нові типи спеціальних скінченних елементів, побудовані їх розрахункові співвідношення. Вірогідність отриманих результатів і ефективність підходу підтверджені розв'язанням контрольних прикладів. Крім того, проведені дослідження дозволяють зробити висновок, що використання спеціальних скінчених елементів з тріщиною є високоефективним засобом розв'язання задач механіки руйнування при динамічному навантаженні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Атлури С.* Вычислительные методы в механике разрушения // М: Мир, 1990, 392с.
2. *Баженов В.А., Вабіщевіч М.О., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Особливості обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень при динамічному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. - К.:КНУБА, Вип.82, 2008.-с.39-47.

3. *Баженов В.А., Гулярь О.И., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування простових тіл // КНУБА, 2005, 298с.
4. *Баженов В.А., Гулярь О.И., Пискунов С.О., Солодей І.І., Шевченко Ю.В.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі динаміки для неоднорідних тіл обертання з довільними граничними умовами // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, Вип.77, 2005.-с.3-29.
5. *Баженов В.А., Гулярь А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376с.
6. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. –483с.
7. *Карзов Г.П., Кархин В.А., Леонов В.П., Маргалин Б.З.* Расчетное определение траектории трещины и интенсивности высвобождения упругой энергии при циклическом нагружении с учетом сварочных напряжений // Проблемы прочности, 1983, N9, с.104-109.
8. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений // Соппротивление материалов и теория сооружений, 1974, N24, с.147-156.
9. *Солодей І.І., Вабищевич М.О., Гулярь О.И., Сахаров О.С.* Обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень в нестационарних задачах динаміки просторових тіл на основі енергетичного підходу // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, Вип.83, 2009.-с.93-109.
10. *Хэмминг Р.В.* Численные методы. –М.: Наука, 1972. –407с.
11. *Barsoum R.S.* - Int. J. Fracture, 1974, 10, p.603-605.
12. *Bazant Z.P., Cedolin L.* Blunt crack band propagation in finite element analysis // J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1979, 105, N2, p.297-315.
13. *Henshell R.D., Shaw K.G.* Int. J. Numer. Meth. In Engng., 1975, 9, p.495-507.
14. *Swedlow J.L.* Int. J. Numer. Meth. In Engng., 1978, 12, p.1779-1798.
15. *Dolbow J., Moes N., Belytschko T.* Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method // Finite Elements in Analysis and Design, 2000, N36, p.235-260
16. *Moes N., Gravouil A., Belytschko T.* Non-planar 3D crack growth by the extended 5nite element and level sets—Part I: Mechanical model // Int. J. Numer. Meth. Engng, 2002; 53:2549–2568 (DOI: 10.1002/nme.429).

Отримано 27.07.09

И.И. Солодей, М.А. Вабищевич, А.И. Гулярь

Использование специальных конечных элементов с трещиной в задачах механики разрушения при нестационарных динамических нагружениях

На основе новых типов специальных конечных элементов разработана эффективная методика исследования переходных процессов динамического деформирования пространственных тел вращения и призматических тел с трещинами. Достоверность получаемых результатов и эффективность подхода подтверждены решением контрольных примеров.

I.I. Solodei, M.O. Vabischevich, A.I. Gulyar

Application of special finite element with crack in fracture mechanics problem in case of non-stationary dynamic loadings

Effective methodology of transient process of dynamic deformation research based on the new kind of special finite elements to model 3D solids of revolution and simply supported prismatic solids with cracks is developed. Reliability of computational intelligence and efficiency of mentioned approach are corroborated with the help of test solutions.