УДК 539.3

Погорелова О.С., канд. фіз.-мат. наук
Постнікова Т.Г., канд. техн. наук
Гончаренко С.М.

ЧИСЕЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЖИМІВ КОЛИВАНЬ ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ УДАРУ СИЛОЮ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

За допомогою чисельного аналізу встановлено, що введення в рівняння руху віброударної системи сили контактної взаємодії, що змінюється за законом Герца, дозволяє моделювати удар між тілами, що співударяються, як при гармонічному, так і при випадковому зовнішньому навантаженні. Отриманий закон руху тіл віброударної системи на всій часовій осі, включаючи період удару. Приділено увагу питанню ефективності гасіння коливань.

1. Постановка проблеми

Вивченню руху тіл у віброударних системах і сил взаємодії між тілами присвячено ряд статей і монографій, наприклад [1,2]. Для опису і моделювання ударної взаємодії тіл в таких системах існують різні підходи.

При першому - розрахунок систем з ударними взаємодіями мас засновується на припасуванні розв'язків, що описують суміжні інтервали руху, розділені моментами зіткнень. На етапах руху між ударами й у моменти зіткнень застосовуються різні математичні моделі. У проміжках між зіткненнями мас рух системи звичайно описується лінійними диференціальними рівняннями, а моменти зіткнень - кінцевими співвідношеннями стереомеханічної теорії удару. Для побудови періодичних режимів руху спосіб припасування використовується в сполученні з методом граничних умов із використанням коефіцієнту відновлення. При цьому трудомісткість розрахунків швидко зростає зі збільшенням числа степенів вільності системи і кількості зіткнень її елементів за період руху. Крім того цей підхід не дозволяє реалізувати єдину форму запису рівнянь руху на всій часовій осі і отримати результати загального характеру, що описують якісні властивості руху.

На відміну від першого підходу, заснованого на роздільному опису міжударних рухів і процесу удару, другий підхід дозволяє перейти до єдиної форми запису рівнянь руху віброударних систем на всій часовій осі. Це досягається введенням нелінійних залежностей, що відображають процес силової контактної взаємодії тіл, які співударяються. Такий підхід істотно спрощує побудови, пов'язані з дослідженням віброударних режимів коливань пружних систем.

У даній роботі приводяться результати чисельних досліджень віброударних режимів коливань, що виникають в пружній системі під дією зовнішнього навантаження. Для моделювання силових характеристик контактної взаємодії застосовується закон Герца. У літературі цей закон часто використовується для дослідження самого процесу удару, залежності максимального значення контактної сили і тривалості удару від форми контактуючих поверхонь, фізичних характеристик матеріалів, початкової швидкості удару і т.п. Проте авторів цікавила проблема побудови коливального руху віброударних систием на всій часовій осі, як в період удару, так і між ударами.

Мета роботи полягає в тому, щоб отримати єдину форму запису рівнянь руху віброударної системи на всій часовій осі, моделюючи удар тіл, що співударяються, силою контактної взаємодії; виконати аналіз віброударних коливань пружної системи під дією гармонічного і випадкового навантаження; встановити, при яких значеннях параметрів приєднане тіло є ударним гасителем коливань основного і наскільки ефективним є таке гасіння.

2. Закон контактної взаємодії

Перш за все обумовимо ще раз, що за закон, який моделює силу контактної взаємодії між тілами, що співударяються, прийнятий фундаментальний закон Герца, який описує удар між пружними тілами. Цей закон, не дивлячись на те, що він базується на певних ідеальних умовах, широко застосовувався в різних ситуаціях, пов’язаних з ударом. І на сьогодні закон Герца залишається найбільш поширеним принципом, який використовується для моделювання ударної поведінки.

В попередніх роботах [3,4] для моделювання сили контактної взаємодії, автори використовували інші закони зміни сили – експоненціальний та комбінований. Але при цьому виникали проблеми, які було важко розв‘язати. Ці закони не враховували деякі важливі обставини, наприклад залежність моделюючої сили від механічних властивостей матеріалів тіл. Закон Герца вільний від цих недоліків.

Закон Герца встановлює, що для пружного удару тіл сила контактної взаємодії $F(t)$ має вигляд [5,6]:

$$F(t) = K\alpha(t)^{3/2}\ , \qquad (1)$$

де $\alpha(t)$ - відносне зближення тіл, K - константа Герца:

$$K = \frac{4}{3}\cdot\frac{q}{(\delta_1+\delta_2)\sqrt{A+B}}\ . \qquad (2)$$

Тут q, A і B – табличні константи, які залежать від місцевої геометрії зони контакту, а

$$\delta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi}, \quad \delta_2 = \frac{1-\mu_2^2}{E_2\pi}, \tag{3}$$

де μ_i і E_i - коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга для обох тіл.

Будемо розв‘язувати поставлені вище задачі на модельних прикладах.

3. Віброударний рух робочих частин робота

У роботі [7] запропонований варіант апроксимації розв'язку рівнянь руху поліномами Тейлора низького порядку. Така апроксимація є можливою завдяки тому, що тривалість удару дуже мала, і в [7] розглядається лише період удару і не розглядається рух ударної системи до і після удару. Основне завдання [7] – визначити контактну ударну силу, яка виникає при співударяннях робочих частин робота. Вже в першому наближенні отримані зручні формули, якими можна скористатися для знаходження контактної сили. На жаль, в базовій формулі в цій статті міститься помилка, а друге наближення взагалі не дає обіцяного результату.

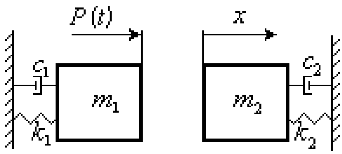

Рис. 1

Спочатку розглянемо модель, запропоновану в [7], з тим, щоб порівняти наш результат з результатом [7]. На рис. 1 схематично зображено модель робочих частин робота.

У [7] модель має параметри, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Параметри моделі робочих частин робота

Назва характеристики	Перше тіло	Друге тіло
Маса m_i, кг	2.0	0.5
Парціальна частота коливань ω_i, рад/с	70.71067812	141.4213562
Коефіцієнт демпфірування ξ_i	0.07071	0.10606

Диференціальні рівняння руху системи мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = P(t) - F(t) \\ &\ddot{x}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = F(t) \end{aligned}, \tag{4}$$

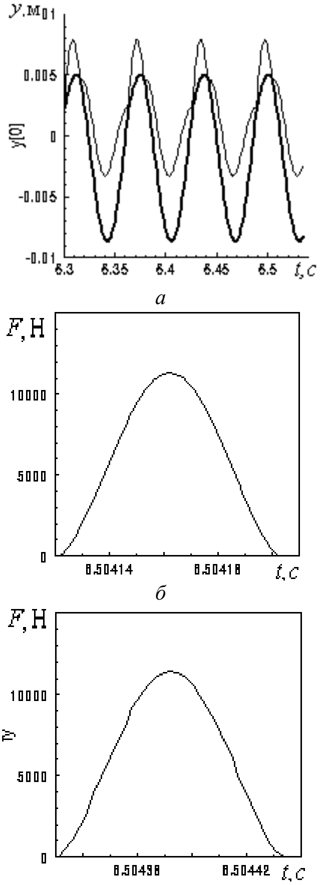

Рис. 2

де $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}}$; $\xi_1 = \dfrac{c_1}{2m_1\omega_1}$, $\xi_2 = \dfrac{c_2}{2m_2\omega_2}$; $F(t)$ - контактна сила, що діє лише в період удару. За зовнішнє навантаження прийняте гармонічне $P(t) = P_1 \cos(\omega t)$, P_1=5,0 Н. Інші дані прийняті такими: частота зовнішнього навантаження ω=100.0 рад/с, модулі Юнга $E_1 = E_2 = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, коефіцієнти Пуассона $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$, константи Герца $A = B$ =0.5м$^{-1}$, $q = 0.318$.

Чисельно інтегруємо рівняння (4), використовуючи для сили $F(t)$ закон Герца (1).

Графіки переміщень обох тіл, фазові траєкторії і графіки контактної сили в залежності від часу ідентичні з графіками, отриманими при використанні формули першого наближення, наведеної в [7]. На рис. 2,а наведено графік переміщень обох тіл в залежності від часу, товстою лінією – графік руху першого тіла, тонкою – другого. На графіку добре видно удар і зміну руху другого тіла після удару. На рис. 2,б наведено графік контактної сили *F(t)* саме в період удару, отриманий при чисельному інтегруванні рівнянь (4), а на рис. 2,в – за допомогою формули першого наближення з [7]. Слід відзначити, що їх ідентичність говорить скоріше про гарну якість результату, отриманого в [7], оскільки там дається наближений розв’язок, і ми використовуємо їх перше наближення.

4. Дослідження віброударних режимів коливань двомасової системи

Тепер розглянемо двомасову віброударну систему, схематично зображену на рис. 3. Основне тіло – це лінійний осцилятор маси m_1, що характеризується жорсткістю k_1 і коефіцієнтом демпфірування c_1. Приєднане тіло маси m_2, яке може служити гасителем коливань основного, пов‘язане з ним пружиною жорсткості k_2 з коефіцієнтом демпфірування c_2. За початок відліку прийняте положення, при якому відстань між тілами дорівнює D і обидві пружини є недеформованими. Переміщення першого тіла визначається координатою $x_1(t)$, другого – $x_2(t)$. Основне тіло знаходиться під дією зовнішнього навантаження $P(t)$. Припускається, що під час руху структура системи може змінюватися. Це відбувається внаслідок еволюції динамічних станів вібросистеми і виникнення між її елементами ударних контактів.

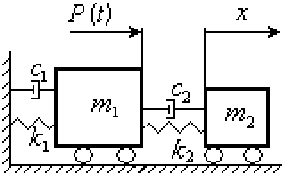

Рис. 3

Рівняння руху системи мають наступний вигляд:

$$\begin{array}{l} \ddot{x}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + 2\xi_2\omega_2\mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_2^2\chi(x_1 - x_2 + D) = P(t) - F(t) \\ \ddot{x}_2 + 2\xi_2\omega_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_2^2(x_2 - x_1 - D) = F(t) \end{array}, \quad (5)$$

де $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$; $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$, $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$; $\chi = \frac{m_2}{m_1}$, $F(t)$ – моделююча сила контактної взаємодії, яка описується законом (1) і діє лише під час удару. У зв'язку з цим при чисельному інтегруванні рівнянь руху (5) необхідно проводити уточнення початкових умов удару: моменту початку удару, його тривалості, відносної швидкості зближення тіл $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$. Параметри вібросистеми наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Параметри двомасової віброударної системи

Назва характеристики	Основне тіло	Приєднане тіло
Маса m_i, кг	1000.0	100.0
Парціальна частота коливань ω_i, рад/с	6.283185	5.646
Коефіцієнт демпфірування ξ_i	0.03629	0.2
Константи Герца, які залежать від геометрії контактуючих поверхонь *A*, *B*, 1/м	*A*=1.0, *B*=1.0	
q (A/B)	0.3180	
Коефіцієнт Пуассона μ_i	0.3	0.3
Модуль Юнга E_i, Н/м^2	$2.09934\cdot10^{11}$	$2.09934\cdot10^{11}$
Початкова відстань між тілами *D*, м	0.05	

У статті наведені результати чисельних досліджень коливань пружної віброударної системи (5) при різних реалізаціях процесу навантаження - періодичній і випадковій.

4.1. Гармонічне навантаження

На рис. 4 показані основні характеристики усталених вимушених коливань системи (5) при гармонічному навантаженні $P(t) = P_г \cos(\omega t)$. Частота зовнішнього навантаження ω=9,22566 рад/с, інтенсивність $P_г$=14142,14 Н. Характеристики руху основного тіла зображені товстою лінією, а приєднаного – тонкою. На графіку залежності переміщень тіл ударної системи від часу (рис.4, а) добре видно удар і видно, як після удару приєднане тіло відскакує від основного. На фазовій траєкторії (рис. 4, б) видно, як в момент удару швидкості тіл системи стрибком змінюють своє значення, а для приєднаного тіла і напрямок. При цьому відносна швидкість тіл залишається тією же самою за величиною, але змінює свій знак: до удару - $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 5.4 м/с^2$, після удару - $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = -5.4 м/с^2$, як і має бути при пружному ударі.

Графік залежності від часу відштовхуючої контактної сили, що виникає в моменти ударів при коливаннях вібросистеми, наведений на рис.4, в. У зв'язку з тим, що тривалість удару мала, графік зміни сили контактної взаємодії саме за час удару в більшому масштабі за часом наведений на рис.4, г.

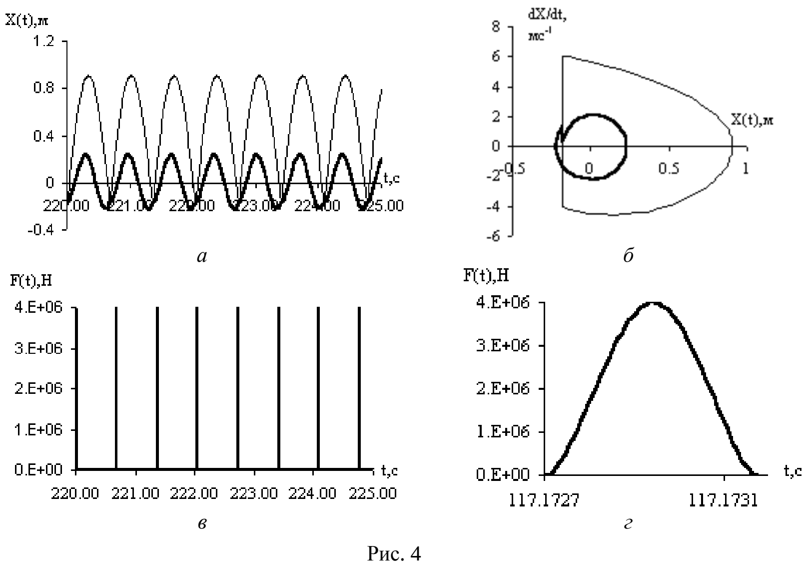

Рис. 4

Отримані результати доводять, що введення в рівняння руху віброударної системи сили контактної взаємодії, що змінюється за законом Герца, добре моделює удар і дозволяє отримати закон руху віброударної системи на всій часовій осі, включаючи період удару.

4.2. Випадкове навантаження

При чисельних дослідженнях випадкових коливань пружної віброударної системи (5) навантаження моделювалося стаціонарним випадковим процесом з прихованою періодичністю. Однобічна спектральна щільність такого процесу може бути представлена формулою [8, 9]:

$$S(\omega)=\frac{2\sigma_{вип}^2}{\pi}\frac{\alpha\theta^2}{(\omega^2-\theta^2)^2+4\alpha^2\omega^2}, \tag{6}$$

де: $\sigma_{вип}^2$ - дисперсія процесу, θ - характерна частота процесу, α - параметр кореляції.

З теорії випадкових процесів відомо [10], що реалізація стаціонарного випадкового процесу може бути обчислена за допомогою його спектральної щільності за формулою:

$$P(t)=\sum_{i=1}^{N}\cos(\omega_i t+\delta_i)\sqrt{2S(\omega_i)\Delta\omega_i}, \tag{7}$$

де N - кількість гармонічних складових; δ_i - вихідні фази, що є випадковими числами, рівномірно розподіленими на відрізку від *0* до 2π. Графік випадкового навантаження $P(t)$ при *N=100*, θ=6 рад/с і $\alpha=5$ рад/с наведено на рис. 5,а. Випадковий процес навантаження був вибраний таким, щоб дисперсії гармонічного і випадкового навантажень співпадали $\sigma_{вип}^2=\sigma_г^2=P_г^2/2$. Шляхом чисельного інтегрування рівнянь (5) при даному випадковому навантаженні були визначені основні характеристики вимушених коливань обох тіл пружної віброударної системи. На рис. 5,б чорним кольором зображено графік переміщень основного тіла, а сірим - приєднаного. На рис. 5, в,г представлені переміщення елементів системи і значення контактної сили на невеликому інтервалі часу. Як і при гармонічному навантаженні, на графіку переміщень рис.5,в добре видно, як в результаті удару приєднане тіло відскакує від основного. На рис. 5,д наведені накладені один на одний графіки залежності контактної сили від часу лише за період удару (за 3 останні удари з рис. 5,г) у збільшеному масштабі за часом, звідки видно, що тривалість удару є тим меншою, чим більшим є значення контактної сили, що діє між тілами. Таким чином, з цих графіків виходить, що при випадковому навантаженні сила, описана законом Герца, також достатньо точно моделює пружний удар, що дозволяє отримати рівняння руху віброударної системи і їх розв’язки на всій часовій осі, включаючи період удару.

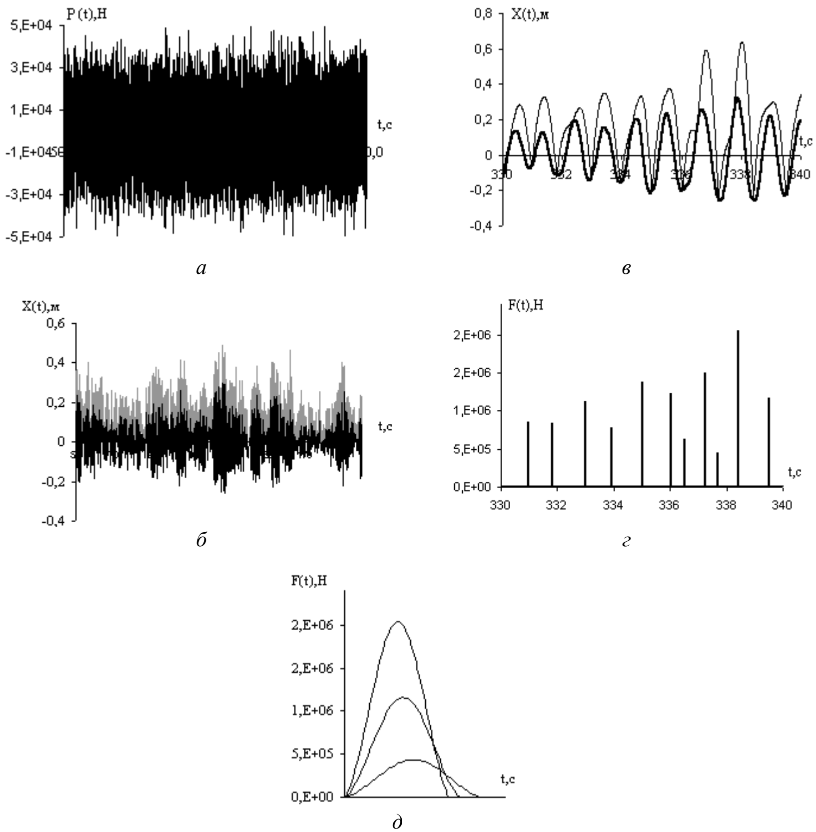

Рис. 5

5. Приєднане тіло як гаситель коливань основного

В ході досліджень розглядалося питання про ефективність використання приєднаного тіла як гасителя коливань основного. Було проведене порівняння значень середньоквадратичного відхилення переміщень основного тіла в трьох різних варіантах: коли приєднане тіло відсутнє; коли приєднане тіло коливається без обмежень, тобто може служити динамічним гасителем; коли приєднане тіло в процесі коливань співударяється з основним тілом, тобто може грати роль ударного гасителя. Вважаючи випадковий процес переміщень стаціонарним і ергодичним, знаходимо середньоквадратичне відхилення по його достатньо довгій часовій реалізації.

Результати досліджень наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Середньоквадратичне відхилення переміщень основного тіла (м^2)

Вид навантаження	Приєднане тіло відсутнє	Режим динамічного гасителя	Режим ударного гасителя
Випадкова $\sigma_{вип=}$10000 Н	0,00905	0,00322	0,00697
Гармонічна ω=7,23 рад/с $P_г$ =14142,14 Н	0.57824	0.51755	0.27173
Гармонічна ω=9,23 рад/с $P_г$ =14142,14 Н	0.04786	0.05344	0.02215

З таблиці видно, що при дії на віброударну механічну систему з зазначеними параметрами випадкового навантаження приєднане тіло є достатньо ефективним гасителем коливань основного. При цьому динамічний гаситель ефективніший, ніж ударний. Навпаки, при дії на систему гармонічного навантаження при частоті ω=7,23 рад/с, ударний гаситель ефективніший за динамічний, а при частоті зовнішнього навантаження ω=9,23 рад/с динамічний гаситель зовсім не гасить коливання основного. У таблиці 3 наведені результати досліджень періодичних коливань вібросистеми при різних значеннях частоти зовнішнього гармонічного навантаження. Результати показують, як зростають розмахи коливань основного тіла, коли частота зовнішнього навантаження наближується до парціальної частоти основного тіла, тобто в області, близької до резонансу.

Виконані дослідження показують, наскільки сильно коливання основного тіла залежать як від параметрів механічної системи, так і від параметрів навантаження. Особливо важливим стає підбір оптимальних параметрів гасителя при різних видах навантаження. Автори статті мають деякий досвід розв‘язку задач оптимізації [11] і сподіваються надалі розглянути це питання детальніше.

6. Висновки

Отже, результати досліджень доводять, що введення в рівняння руху віброударної пружної системи сили контактної взаємодії, що змінюється за законом Герца, дозволяє моделювати удар між тілами, що співударяються, як при гармонічному, так і при випадковому зовнішньому навантаженні і отримати закон руху тіл віброударної системи на всій часовій осі, включаючи період удару. Це, у свою чергу, дає можливість надалі застосувати метод продовження рішення за параметром і побудувати криву навантаження і амплітудно-частотну характеристику віброударної системи [12].

Слід зазначити також важливість дослідження можливості використання приєднаного тіла як гасителя коливань основного. Для того, щоб приєднане тіло служило хорошим гасителем, параметри віброударної системи повинні бути підібрані певним чином. Питання оптимального підбору параметрів гасителя вимагає подальшого дослідження.

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем: Приближенные методы. – М.:Наука, 1978. – 352 с.

2. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Международная программа образования, 1997 – 336 с.

3. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при моделюванні удару із застосуванням нелінійних силових характеристик контактної взаємодії// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2004.-Вип.74.- С.14-23.

4. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Дослідження віброударних усталених коливань висотної споруди з маятниковим гасителем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2005.-Вип.76.- сс.35-64.

5. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.: Стролйиздат, 1965. –448 с.

6. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.

7. *Q.F. Wei , W.P. Dayawansa, and P.S. Krishnaprasad* Approximation of dynamical effects due to impact on flexible bodies. – Proceeding of the American Control Conference Baltimore, Maryland, June 1994, pp. 1841-1845.

8. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.

9. *Баженов В.А., Ворона Ю.В., Скибіцка О.С.* Стаціонарні коливання фундаментів при періодичному імпульсному навантаженні// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2002.-Вип.70.- сс.89-95.

10. *Диментерг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 368 с.

11. *Лук'янченко О.О., Постнікова Т.Г.* Оптимізація параметрів ударного гасителя коливань// Збірник наукових праць Міністерства Надзвичайних ситуацій, 2003 р. – сс. 23-28.

12. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- сс.31-44.

13. *Постнікова Т.Г.* Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2005 р. Вип. 76.– с.35-64

Надійшло до редакції 05.12.2006 р.