

С.М.Ковальов, С.І.Ботвіновська, К.М.Гермаш,  
А.В.Золотова, Ж.Г.Левіна

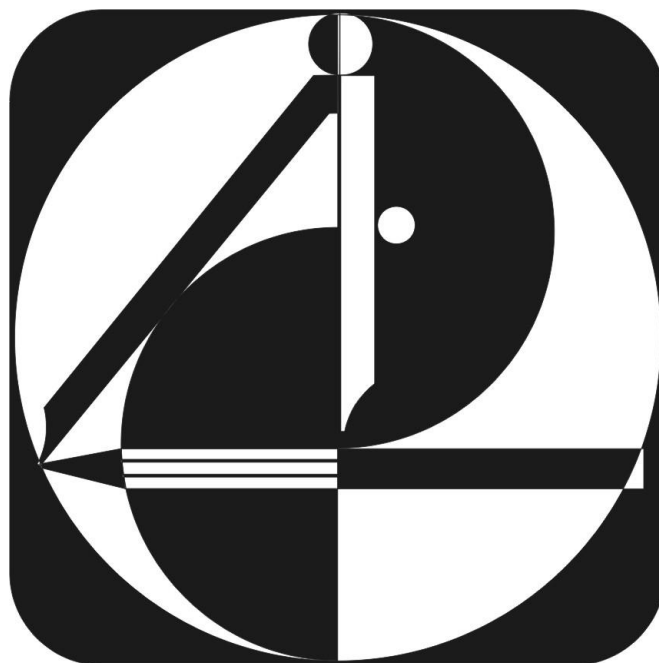
# НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

За редакцією доктора технічних наук,  
професора С.М. Ковальова

Навчальний посібник у двох книгах

Книга І. **Ортогональні проєкції**

для студентів архітектурного факультету  
Київського національного університету будівництва і архітектури



КИЇВ 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
Київський національний університет будівництва і архітектури

С.М.Ковальов, С.І.Ботвіновська, К.М.Гермаш,  
А.В.Золотова, Ж.Г.Левіна

## **НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ**

*Рекомендовано науково методичною радою  
Київського національного університету будівництва і архітектури  
як навчальний посібник для студентів архітектурного факультету*

Київ 2018

УДК 514.18:004(075.8)  
ББК 25.151. 3-я 73  
Н 28

Автори: С.М.Ковальов, д-р техн. наук, професор (передмова, умовні позначення, розділ 1 – 4, 6, 8, підрозділ 7.7 розділу7);  
С.І. Ботвіновська, канд. техн. наук, доцент (підрозділ 5.5 розділу 5);  
К.М.Гермаш, канд. техн. наук, доцент (підрозділи 7.1 – 7.6 розділу 7);  
Ж.Г.Левіна, канд. техн. наук, доцент (розділи 9 – 10);  
А.В.Золотова, канд. техн. наук (підрозділи 8.7, 8.8 розділу 8);  
комп'ютерний набір к.т.н., доценти К.М.Гермаш, А.В.Золотова,  
С.І.Ботвіновська, Ж.Г.Левіна, ст. лаборант Мушкіна А.Б.

Рецензенти:В.В.Ванін; доктор технічних наук, професор,НТУУ КПІ  
ім.І.І. Сікорського,  
І.О. Седак, доктор архітектури, професор, НАОМА,  
В.В.Плоский доктор технічних наук, професор, КНУБА

*Затверджено на засіданні вченої ради Київського національного  
університету будівництва і архітектури, протокол № від  
\_\_\_\_.\_\_\_\_.2018 року.*

**Нарисна геометрія.** навч. посіб. у 2-х книгах. Книга І. Ортогональні проєкції /  
С.М.Ковальов, С.І.Ботвіновська, К.М. Гермаш та ін.  
Н 28 – К.: КНУБА, 2018. – 166 с.: іл..  
ISBN 978-966-627-155-9

Книга І навчального посібника містить теоретичні основи побудови зображень геометричних фігур у системі ортогональних проєкцій (розділи 1-3). В розділах 4 і 5 розглянуто кінематичний спосіб утворення кривих ліній і поверхонь. Наведено можливості їх систематизації за різними ознаками. За основу розв'язання позиційних задач прийняті позиційні властивості геометричних фігур, які дозволяють формально визначити їх взаємне положення (розділ 6). В розділі 7 розглянуто способи розв'язання метричних задач з використанням перетворення зображень. Розділ 8 «Тіні в прямокутних проєкціях» не спирається безпосередньо на розділи 4-7, тому може вивчатись одразу після розділу 3. Це дає можливість корегувати програму з нарисної геометрії відповідно до програм з архітектурного проектування.

Призначено для студентів архітектурного факультету.

УДК 514.18:004(075.8)  
ББК 25.151. 3-я 73  
Н 28

© С.М.Ковальов, С.І.Ботвіновська,  
К.М.Гермаш, та ін., 2018  
© КНУБА, 2018

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ.....	6
ЧАСТИНА ПЕРША. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ.....	7
<b>Розділ 1.</b> Предмет нарисної геометрії.....	7
1.1. Геометричні фігури.....	7
1.2. Метод проєкціювання.....	13
<b>Розділ 2.</b> Система прямокутних проєкцій.....	18
2.1. Проєкції точки.....	19
2.2. Проєкції прямої.....	20
2.3. Проєкції площини.....	22
<b>Розділ 3.</b> Позиційні властивості проєкцій пар геометричних фігур.....	26
3.1. Дві точки.....	26
3.2. Точка і пряма.....	27
3.3. Дві прямі.....	27
3.4. Точка і площина. Пряма і площина.....	28
3.5. Дві площини.....	31
3.6. Побудова дахів.....	32
<b>Розділ 4.</b> Криві лінії.....	36
4.1. Локальні властивості плоских кривих.....	36
4.2. Алгебраїчні плоскі криві.....	39
4.3. Плоскі трансцендентні криві.....	43
4.4. Просторові криві.....	46
4.5. Параметри кривих ліній.....	50
4.6. Інтерполяція точок на площині.....	52
<b>Розділ 5.</b> Криві поверхні.....	56
5.1. Способи утворення кривих поверхонь і їх систематизація.....	57
5.2. Нерозгортні криві поверхні.....	60
5.3. Розгортні криві поверхні.....	64
5.4. Поверхні з кривими лініями каркаса.....	65
5.5. Каркасні поверхні.....	68
5.6. Дотичні площини.....	80
<b>Розділ 6.</b> Позиційні задачі нарисної геометрії.....	85
6.1. Переріз поверхні проєкціювальною площиною.....	85
6.2. Спосіб косокутного допоміжного проєкціювання.....	86
6.3. Спосіб допоміжних перерізів.....	88
6.4. Перетин поверхонь другого порядку з прямою лінією.....	89
6.5. Побудова ліній взаємного перетину двох поверхонь, одна з яких проєкціювальна.....	91
6.6. Побудова ліній взаємного перетину способом допоміжного проєкціювання.....	93
6.7. Спосіб допоміжних перерізів.....	96
6.8. Особливі випадки взаємного перетину поверхонь другого порядку.....	100
<b>Розділ 7.</b> Метричні задачі нарисної геометрії.....	102
7.1. Метричні властивості проєкцій пар геометричних фігур.....	102
7.2. Спосіб прямокутного трикутника.....	102
7.3. Спосіб обертання навколо проєкціювальних осей.....	112
7.4. Спосіб плоско-паралельного переміщення.....	113
7.5. Спосіб заміни площин проєкцій.....	117
7.6. Спосіб обертання навколо лінії рівня.....	122

7.6.1. Обертання площини навколо ліній рівня. Натуральна величина відсіку площини.....	122
7.6.2. Суміщення площини загального положення з площиною проєкцій.....	123
7.6.3. Визначення натуральної величини плоскої фігури.....	124
7.6.4. Побудова у площині геометричної фігури заданої форми .....	126
7.7. Розгортки багатогранних і кривих поверхонь.....	128
7.7.1. Побудова розгортки поверхні багатогранника.....	129
7.7.2. Розгортки циліндричних і конічних поверхонь.....	130
7.7.3. Умовні розгортки нерозгортних поверхонь.....	134
<b>Розділ 8. Тіні у прямокутних проєкціях.....</b>	<b>136</b>
8.1. Загальні положення.....	136
8.1.1. Падаючі тіні від точки і відрізка прямої лінії.....	138
8.2. Падаючі тіні від плоских фігур.....	140
8.3. Власні тіні на поверхнях обертання.....	143
8.4. падаючі тіні на тілах обертання.....	147
8.5. Тіні на поздовжніх формах.....	152
8.6. Тіні в нішах.....	155
8.7. Тіні деяких архітектурних елементів.....	160
8.8. Ізофоти.....	162
Список літератури.....	166

## ВСТУП

Навчальний посібник призначено для студентів архітектурного факультету Київського національного університету будівництва і архітектури і відповідає програмі з нарисної геометрії, яку затверджено радою архітектурного факультету.

Нарисна геометрія, як навчальна дисципліна є частиною більш широкої наукової спеціальності «Прикладна геометрія та інженерна графіка», яка вивчає методи геометричного моделювання об'єктів, процесів та явищ. Нарисна геометрія вивчає теорію методів відображення просторових об'єктів на площині та графічного розв'язання стереометричних задач на кресленнях [1].

Сучасні вимоги до навчального курсу нарисної геометрії відповідають ідеям Г. Монжа, збагаченим сучасним станом розвитку комп'ютерних технологій [3],[5],[7],[9].

Особливо важливими для архітекторів є розділи, що пов'язані з побудовою тіней та перспективи, оскільки останні широко застосовуються в архітектурному проектуванні. Незважаючи на існування достатнього числа комп'ютерних пакетів для автоматизованого проектування архітектурних об'єктів, для того щоб користуватись цими пакетами необхідно знати теоретичні основи відповідних побудов [10].

У навчальному посібнику витримано класичну послідовність викладення матеріалу, але для більш гнучкого узгодження програм нарисної геометрії і архітектурного проектування, розділи, які пов'язані з побудовою тіней і перспективи викладено таким чином, щоб їх можна було вивчати безпосередньо після розділу 3 з відтермінуванням розділів 4-7 на більш віддалений час.

Автори навчального посібника виносять подяку рецензентам за зауваження та поради для покращення змісту посібника.

## УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Для того, щоб на зображеннях геометричних фігур розрізняти їх елементи, в нарисній геометрії використовується система позначень за допомогою літер і цифр.

Точки позначаються великими літерами латинської абетки або цифрами:  $A, B, C, D, \dots, 1, 2, 3, 4, \dots$

Прямі та криві лінії позначаються рядковими літерами латинської абетки:  $a, b, c, d, e, \dots$

Поверхні і площини позначаються великими літерами грецької абетки, написання яких відрізняється від латинських літер:  $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda, \Sigma, \Phi, \Psi, \Omega$ .

Площини проєкцій: горизонтальна –  $\Pi_1$ , фронтальна –  $\Pi_2$ , профільна –  $\Pi_3$ , аксонометрична –  $\Pi'$ .

Позначення різних зображень однієї фігури відрізняються за допомогою відповідних індексів, наприклад, горизонтальна проєкція точки  $A$  –  $A_1$ , фронтальна проєкція –  $A_2$ , профільна проєкція –  $A_3$ , аксонометрична проєкція –  $A'$ .

Осі проєкцій –  $x_{12}, y_{13}, z_{23}$ , де індекси вказують, лінією перетину яких площин проєкцій є зазначена вісь.

Знаки відношень геометричних фігур:

$A \in m$  – точка  $A$  належить лінії  $m$ ;

$A \equiv B$  – точки  $A$  і  $B$  збігаються;

$\Gamma \cap \Delta$  – фігури  $\Gamma$  і  $\Delta$  перетинаються;

$\parallel$  – паралельно;

$\sphericalangle$  – кут, двогранний кут;

$\perp$  – перпендикулярно.

# ЧАСТИНА ПЕРША. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ

## РОЗДІЛ 1. ПРЕДМЕТ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Нарисна геометрія – розділ геометрії в якому вивчаються способи побудови зображень геометричних фігур на площині рисунка, а також графічні способи розв’язання на площині просторових геометричних задач.

Предметом нарисної геометрії є множина геометричних фігур та відношення між ними у тривимірному точковому просторі.

### 1.1. Геометричні фігури

Основним елементом простору вважається точка, яка не має вимірів. Кажуть, що точка є нульвимірною фігурою. Всі інші фігури можна розглядати як множини точок.

Якщо взяти пряму лінію (рис. 1.1), задати на ній фіксовану точку  $O$  і призначити напрям, то для визначення положення довільної точки  $A$  на прямій необхідно задати одну величину ( $x_A$ ) додатну або від’ємну. Ця величина називається *параметром* [9], [11]. Якщо параметр  $x_A$  зробити змінним, пряма лінія заповниться нескінченною множиною точок. Кажуть, що пряма містить однопараметричну множину точок і є одновимірною фігурою, або моделює одновимірний точковий простір. Якщо пряму лінію зігнути, то зрозуміло, що будь-яка крива лінія також є одновимірною фігурою.

Відрізок прямої лінії, наприклад  $OA$ , так само як і дуга  $OA$  (рис. 1.1, б) кривої лінії також є одновимірною фігурою, яка обмежена двома нульвимірними фігурами (точками  $O$  і  $A$ ).

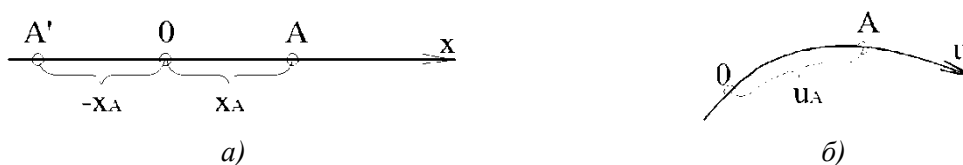


Рис. 1.1

Єдина точка на площині визначається двома величинами (рис. 1.2), які можуть бути декартовими координатами ( $x_B$ ,  $y_B$ ) або будь-якими іншими координатами. Незалежно від вигляду координатної системи точка на площині завжди визначається двома параметрами (величинами).

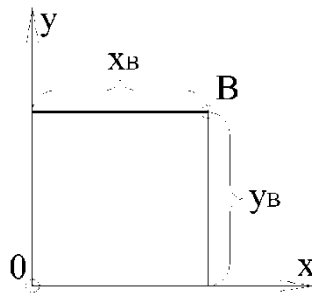


Рис. 1.2

При звільненні параметрів ( $x_B$  і  $y_B$ ) площа заповнюється точками, множина яких є двопараметричною. Тому площа є моделлю двовимірною точкового простору. Будь-яка частина площини, що обмежена лініями є двовимірною фігурою. Якщо площину деформувати у криву поверхню, то зрозуміло, що будь-яка поверхня або її частина, яка обмежена лініями, також є двовимірною фігурою. Точка у просторі визначається трьома параметрами (будь-якими координатами), тому такий простір вважається тривимірним. Частина цього простору, що обмежена площинами, або поверхнями є тривимірною фігурою.

Згадаємо деякі визначення з курсу стереометрії, що стосуються найпростіших геометричних фігур.

**Багатокутником** називається замкнена ламана лінія з прямолінійних відрізків або частина площини, що обмежена цією ламаною (рис.1.3(a, б)), тобто багатокутник може бути як одновимірною, так і двовимірною фігурою.

Вершини цієї ламаної ( $A, B, C, \dots$ ) називаються вершинами багатокутника, а ланки – його сторонами. Багатокутник є опуклим, якщо всі його вершини знаходяться з одного боку від кожної сторони (рис.1.3в). Багатокутник називається правильним, якщо він має однакові кути і однакові сторони (рис.1.3г).

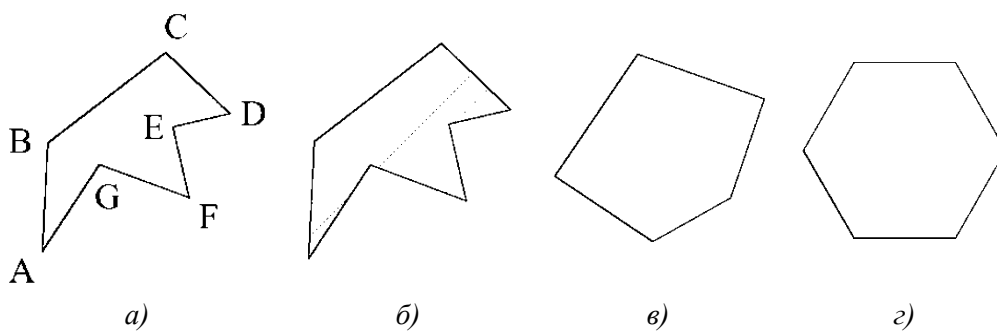


Рис. 1.3

**Коло** (рис. 1.4a) – крива лінія, всі точки якої знаходяться на однакових відстанях від однієї точки, що називається центром кола. Відстань  $r$  від центру  $O$  кола до будь-якої його точки називається радіусом. Відстань  $m = 2r$  між двома протилежними точками кола називається діаметром. Коло як всяка лінія є

одновимірною фігурою. Двовимірна фігура, яка є частиною площини, що обмежена колом, називається *кругом*.

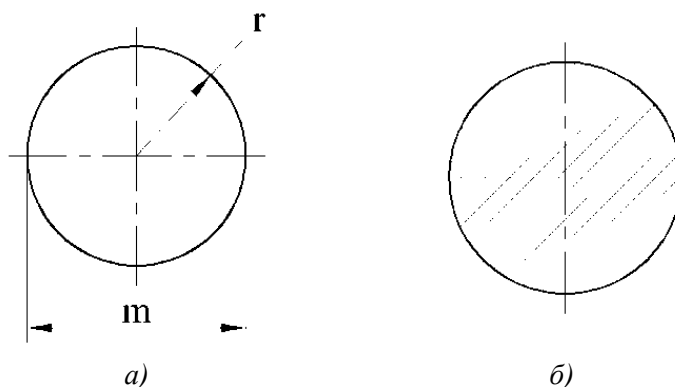


Рис. 1.4

Багатогранником або багатогранною поверхнею називається замкнена двовимірна фігура, яка складається з кінцевого числа двовимірних багатокутників таким чином, що кожна сторона будь-якого багатокутника одночасно є стороною ще одного багатокутника. Ці багатокутники називаються гранями, їх сторони – ребрами, а кінці сторін – вершинами багатогранника. Багатогранником також називають тривимірне тіло, що обмежено багатогранною поверхнею. Багатогранник називається опуклим, якщо він цілком знаходиться з одного боку від площини будь-якої грані.

Опуклий багатогранник називається правильним, якщо всі його грані є однаковими правильними багатокутниками і всі багатогранні кути є правильними і однаковими. Існує п'ять правильних багатогранників, які називають тілами Платона (рис. 1.5).

Між кількістю граней ( $\Gamma$ ), вершин ( $B$ ) та ребер ( $P$ ) будь-якого опуклого багатогранника існує залежність, яка називається теоремою Ейлера:

$$\Gamma + B - P = 2$$

Нижче наведено назви та кількісні характеристики тіл Платона.

Рис. 1.5	Назва	B	P	$\Gamma$
a	Тетраедр	4	6	4
б	Гексаедр (куб)	8	12	6
в	Октаедр	6	12	8
г	Ікосаедр	12	30	20
д	Додекаедр	20	30	12

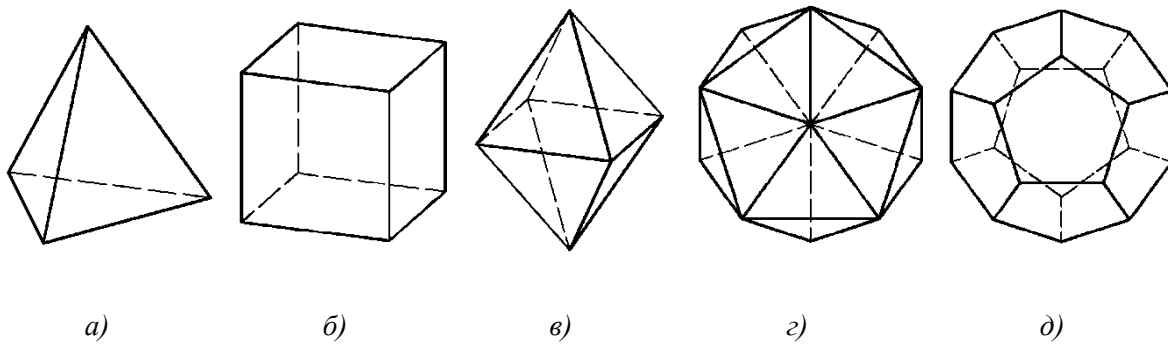


Рис. 1.5

Найпростішими багатогранниками є призми, піраміди і призматоїди.

**Пірамідою** називається багатогранник, одна грань якого (основа) - довільний багатокутник, а інші – трикутники з спільною вершиною  $S$  (рис. 1.6а). Перпендикуляр з вершини  $S$  до основи піраміди називається її висотою.

**Правильною** називається піраміда, основою якої є правильний багатокутник, а висота попадає в центр основи (рис. 1.6б).

Якщо від піраміди площиною відокремити її частку з вершиною, то піраміда називається **зрізаною** (рис. 1.6в).

Безмежна поверхня, що утворена бічними гранями піраміди без основи (основа у нескінченності), називається **пірамідальною поверхнею**, яка є двовимірною фігурою (рис. 1.6г).

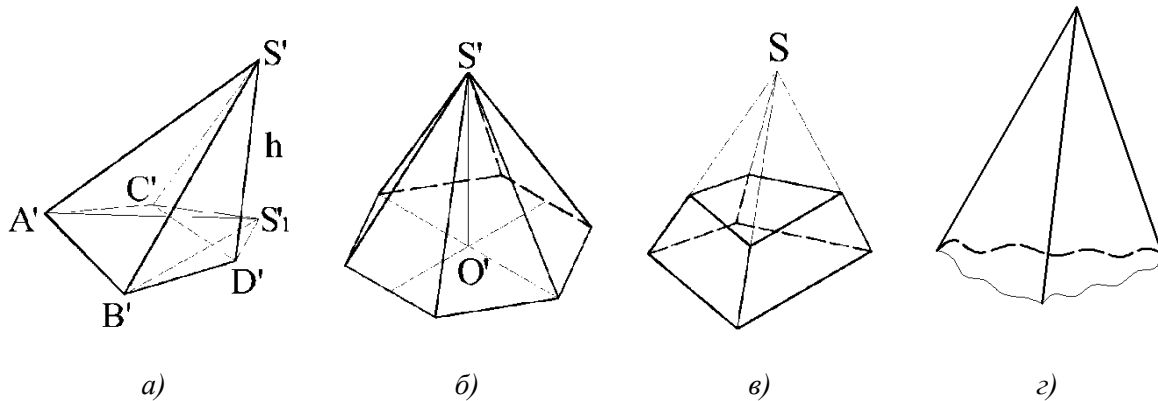


Рис. 1.6

**Призмою** називається багатогранник, двома гранями якого є однакові багатокутники (основи) у паралельних площинах, а бічні грані - паралелограми або прямокутники (рис. 1.7а). Бічні ребра призми паралельні одне до одного. Призма, основи якої не належать паралельним площинам, називається **зрізаною** (рис. 1.7б). Якщо бічні ребра призми перпендикулярні до основи, призма називається **прямою** (рис. 1.7в). Пряма призма, основами якої є правильні багатокутники, називається **правильною** (1.7г). Окремі випадки призми – куб і паралелепіпед.

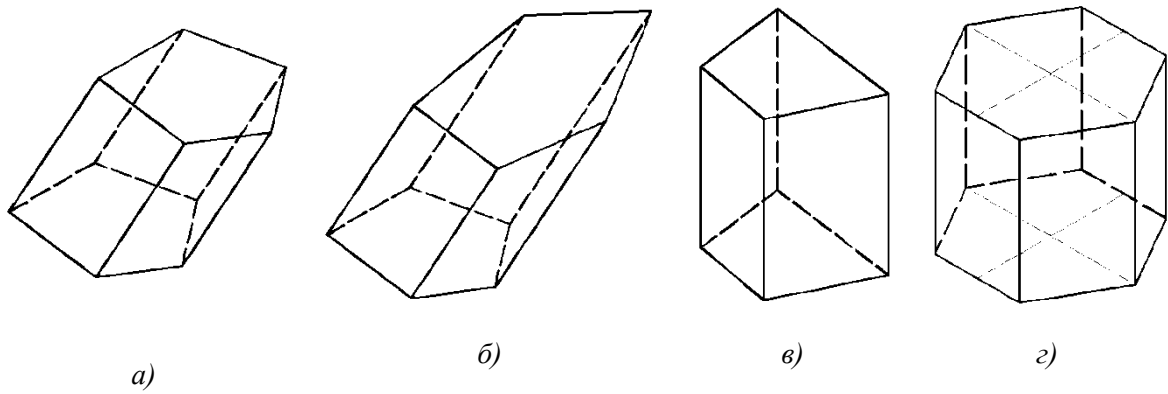


Рис. 1.7

**Призматойдом** називається багатогранник, дві грані якого (основи) належать паралельним площинам, а інші є трикутниками або трапеціями так, що у трикутників одна сторона, а у трапецій обидві основи є сторонами основ призматойда (рис. 1.8).

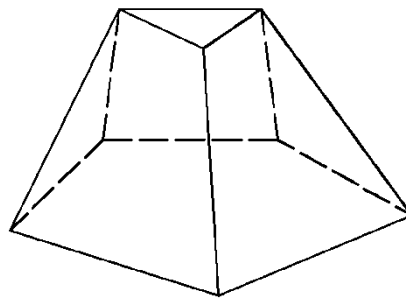


Рис. 1.8

До найпростіших поверхонь відносяться циліндричні і конічні поверхні та сфера.

**Циліндричною** називається поверхня, що утворюється поступальним рухом прямої (твірної) лінії уздовж заданої криволінійної траєкторії (рис. 1.9а).

**Циліндр** – тривимірне тіло, що обмежено циліндричною поверхнею і двома паралельними площинами, які перерізають поверхню (рис. 1.9б). Якщо такі площини не паралельні, циліндр називається зрізаним (рис. 1.9в). Частини площин, які обмежені лініями перерізів, називаються основами циліндра. Циліндр, основами якого є кола, називається круговим (рис. 1.9г). Якщо твірні циліндра перпендикулярні до площин основ, він називається прямим. На рис. 1.9г показано прямий круговий циліндр (циліндр обертання). Нормальним перерізом циліндра обертання є круг.

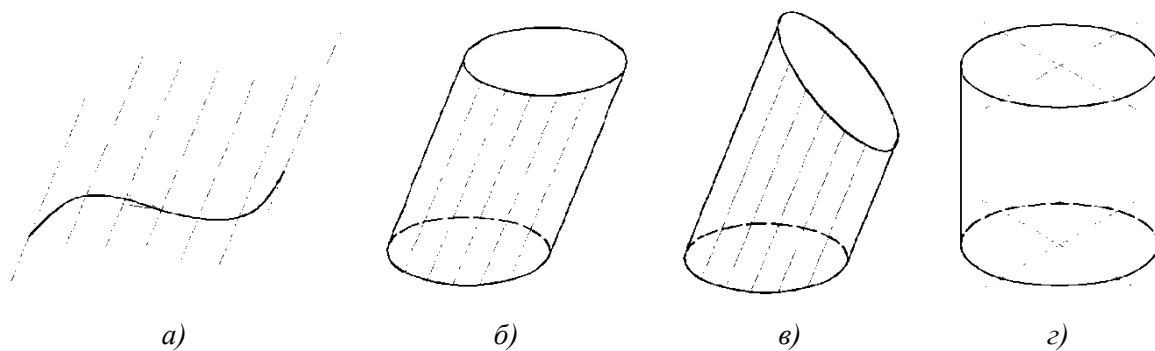


Рис. 1.9

**Конічна поверхня** утворюється, як множина прямих, що проходять через одну точку (вершину) і перетинають задану криву лінію (рис. 1.10а).

**Конус** – тривимірне тіло, що обмежене конічною поверхнею і довільною площиною (рис. 1.10б), яка у перерізі утворює основу конуса.

Якщо основою конуса є круг, а висота  $h$  проходить через його центр, то конус називається **прямим круговим**, або конусом обертання (рис. 1.10в).

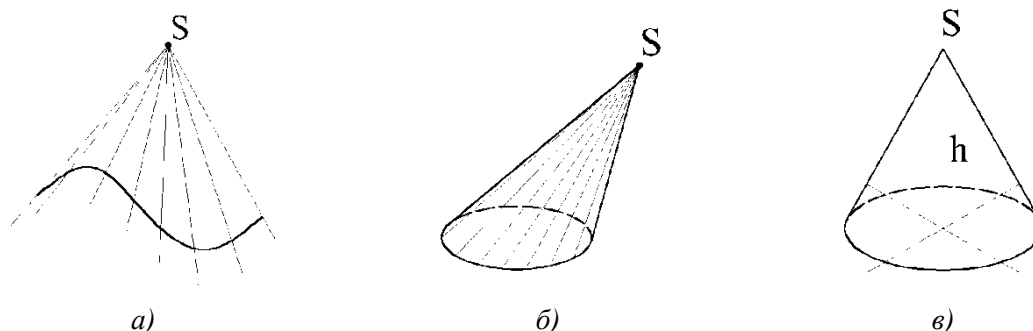


Рис. 1.10

**Сфера** – поверхня, яка утворюється обертанням кола навколо власної осі. Перерізом сфери будь-якою площиною завжди є коло.

**Куля** – тривимірне тіло, що обмежено сферою. Довільний переріз кулі – круг.

Отже, всі фігури у тривимірному просторі поділяються на тривимірні (куля, частина простору, що обмежена багатогранником, тощо), двовимірні (круг, площина, поверхня, багатокутник як частина площини тощо), одновимірні (пряма лінія, крива лінія, багатокутник як ламана лінія тощо), нульвимірні (точка).

Будь-яка геометрична фігура, так само як точка, може розглядатись як елемент простору. Якщо елементом є пряма лінія, то простір називається лінійчатим. Можна розглядати простір кіл, простір сфер тощо. Нарисна геометрія розглядає тільки точковий простір, тому надалі під тривимірним простором будемо розуміти тривимірний точковий простір. Між геометричними фігурами у тривимірному просторі існують позиційні і метричні відносини. Позиційними відносинами між фігурами є перетин, належність, паралельність тощо. метричні відносини – відстані між фігурами, кути тощо.

## 1.2. Метод проєкціювання.

Для того, щоб отримати правильне зображення об'єкта на папері так, як він сприймається людським оком, потрібно зображення будувати на основі фізичного явища, що відбувається в оці.

На рис. 1.11 схематично показано, як світлові промені відбиваються від об'єкту  $AB$ , проходять через кришталик  $S$  ока і попадає на сітківку  $\Pi'$ , де і формується зображення.

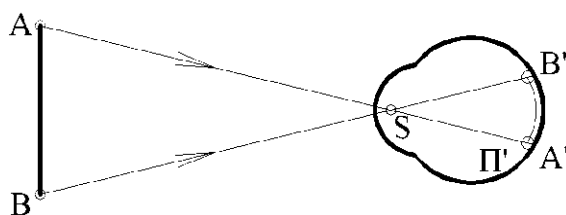


Рис. 1.11

Схожим чином формується зображення при фотографуванні об'єкта, коли світлові промені проходять через об'єктив  $S$  і потрапляють на площину  $\Pi'$ , де формується зображення (рис. 1.12).

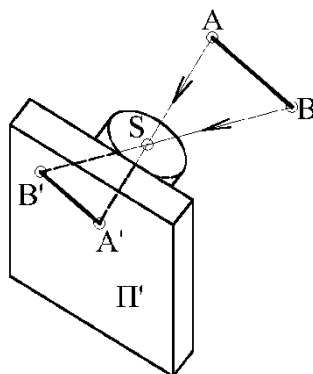


Рис. 1.12

Таке фізичне явище стало основою геометричного апарата для побудови зображень методом проєкціювання.

Апарат проєкціювання (рис. 1.13) складається з площини проєкцій  $\Pi'$ , центра проєкціювання  $S$ , об'єкта проєкціювання (пряма  $m$ ) і проєкціювальних променів ( $SA, SB, \dots$ ), що проходять через центр  $S$  і точки об'єкта. Точка  $A'$  перетину проєкціювального променя  $SA$ , що проходить через точку  $A$ , з площиною проєкцій  $\Pi'$  є зображенням точки  $A$  і називається проєкцією точки  $A$ .

Проєкцією прямої  $m$  на площині  $\Pi'$  є пряма  $m'$ , оскільки множина променів, що проходять через всі точки прямої  $m$  складає площину, яка перетинає площину проєкцій  $\Pi'$  по прямій  $m'$ .

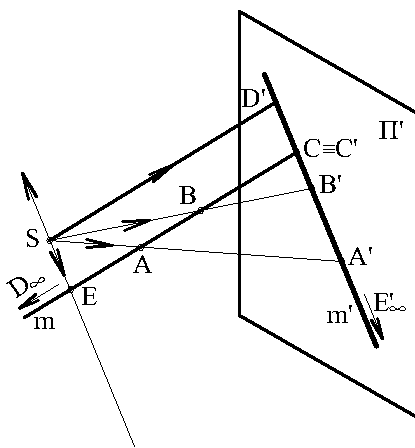


Рис. 1.13

Кожна точка ( $A; B \dots$ ) прямої  $m$  має проєкцію ( $A'; B' \dots$ ) на прямій  $m'$  і навпаки, кожній проєкції ( $A'; B' \dots$ ) відповідає точка ( $A; B \dots$ ) на прямій  $m$ . Винятком є точка  $E$  на прямій  $m$ , яка не має проєкції, якщо промінь  $SE$  паралельний площині проєкцій  $\Pi'$ , і  $D'$  у площині  $\Pi'$ , яка є проєкцією неіснуючої точки  $D$  на прямій  $m$ , якщо промінь  $SD'$  паралельний прямій  $m$ . Такі винятки породжують незручності при доведенні різноманітних властивостей, тверджень, теорем тощо. Тому вважається, що точка  $E$ , як і всі інші, має проєкцію  $E_\infty'$ , яка є нескінченно віддаленою (невласною) точкою прямої  $m'$ , а точка  $D'$  є проєкцією невідомої точки  $D_\infty'$  прямої  $m$ .

Нескінченна пряма завжди має одну невідому точку, до якої можна дістатись, якщо рухатись уздовж прямої в один, чи в інший бік.

Вважається, що дві паралельні прямі (наприклад,  $SD'$  і  $m$ ) перетинаються в одній невідомій точці ( $D_\infty'$ ), яку при центральному проєкціюванні можна побачити на зображенні. Дійсно, розглядаючи фотографію прямої дороги (рис. 1.14) можна на горизонті побачити невідому точку перетину ліній узбіч.



Рис. 1.14

Множина паралельних прямих також має одну спільну невідому точку. Пряма завжди перетинає площину у власній або невідомій точці. Дві площини завжди мають спільну пряму, але вона є невідомою, якщо площини паралельні. Взагалі у

тривимірному просторі існує одна невласна площина, якій належить всі невласні фігури (точки, прямі, плоскі криві).

Центр  $S$  проєкціювання може бути невласною точкою, якщо його віднести у нескінченність (рис. 1.15). Тоді всі проєкціювальні промені, що проходить через невлашний центр  $S_\infty$ , повинні бути паралельними між собою. У цьому разі проєкціювання називається **паралельним** або **косокутним**, а положення невластного центру  $S_\infty$  задається напрямом  $s$  проєкціювання (точка  $S_\infty$  визначається у результаті перетину променя  $s$  з невласною площиною простору).

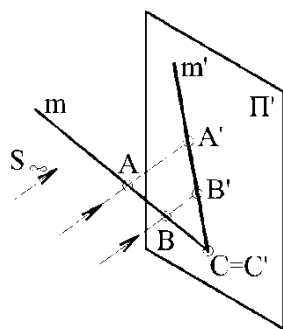


Рис. 1.15

При паралельному проєкціюванні зберігається величина відношення довжин відрізків однієї прямої (або паралельних прямих):  $\left(\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}\right)$ , що випливає з подібності трикутників  $AA'C$  і  $BB'C$ . Оскільки при паралельному проєкціюванні проєкцією невлавної точки завжди є невласна точка площини проєкцій, то проєкції паралельних прямих також паралельні між собою.

При паралельному проєкціюванні у загальному випадку проєкціювальні промені нахилені до площини проєкцій, але в окремому випадку промені можуть бути перпендикулярними до площини проєкцій і тоді проєкціювання називається **прямокутним** або **ортогональним** (рис. 1.16).

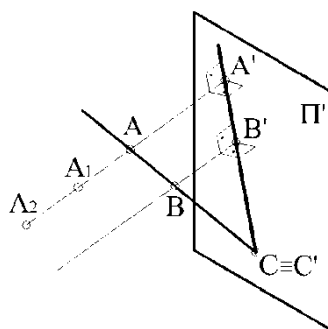


Рис. 1.16

Одне зображення, яке побудовано проєкційним методом, на жаль, не дозволяє за проєкцією відновити форму і положення об'єкта у просторі (рис. 1.16) тому, що одній проєкції точки ( $A'$ ) у просторі відповідає однопараметрична множина точок  $A, A_1, A_2, \dots$ , які належать одному проєкціювальному променю. Зображення

тривимірний об'єкт є двовимірним, і це не дозволяє визначити відстань від будь якої точки об'єкту до площини проєкцій (на зображенні втрачається третій вимір), а це означає, що за одним зображенням споруди її не можливо звести у натурі. Розв'язати цю проблему знову допомагає устрій людського зору. Два ока дають людині два зображення одного об'єкта. Геометричну трактовку явища показано на рис. 1.17. Маємо дві площини проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ , два центри проєкціювання  $S$  і  $T$  і об'єкт проєкціювання  $A$ . Якщо задано апарат проєкціювання, то за проєкціями  $A_1$  і  $A_2$  завжди можна відновити точку  $A$  у просторі, як точку перетину променів  $SA_1$  і  $TA_2$ .

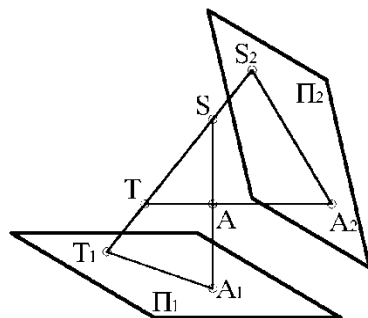
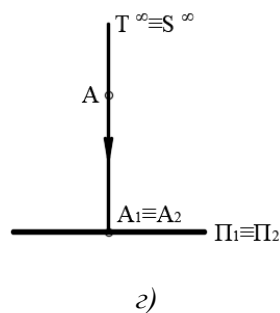
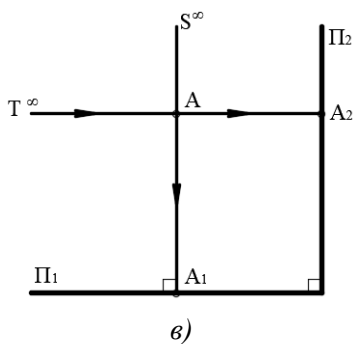
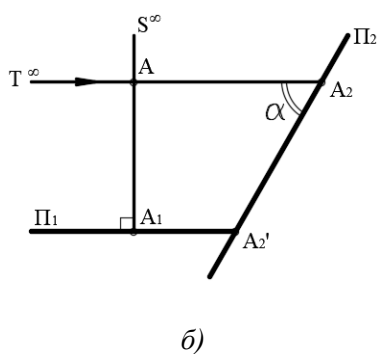
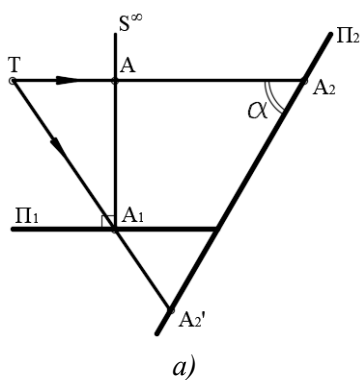


Рис. 1.17

Система двох проєкцій, побудованих з двох центрів  $S$  і  $T$ , називається проєкційно-зображальною системою. В залежності від положення площин проєкцій і центрів проєкціювання існують різні проєкційно-зображальні системи: перспектива (рис. 1.18а), аксонометрія (рис. 1.18б), система прямокутних проєкцій (рис. 1.18в), проєкції з числовими позначками (рис. 1.18г).



**Запитання для самоконтролю**

1. Що таке параметри геометричної фігури?
2. Яку геометричну фігуру називають багатогранником?
3. Що таке проекція?
4. З яких елементів складається апарат проєкціонування?
5. Які існують проєкційно-зображальні системи?

## РОЗДІЛ 2. СИСТЕМА ПРЯМОКУТНИХ ПРОЕКЦІЙ

Система прямокутних проекцій базується на ортогональному проєкціюванні на дві взаємно перпендикулярні площини проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  (рис. 2.1).

Обидва центри проєкціювання є невласними і задаються напрямками  $s$  і  $t$  проєкціювання, перпендикулярними до площин проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  (рис. 2.1а).

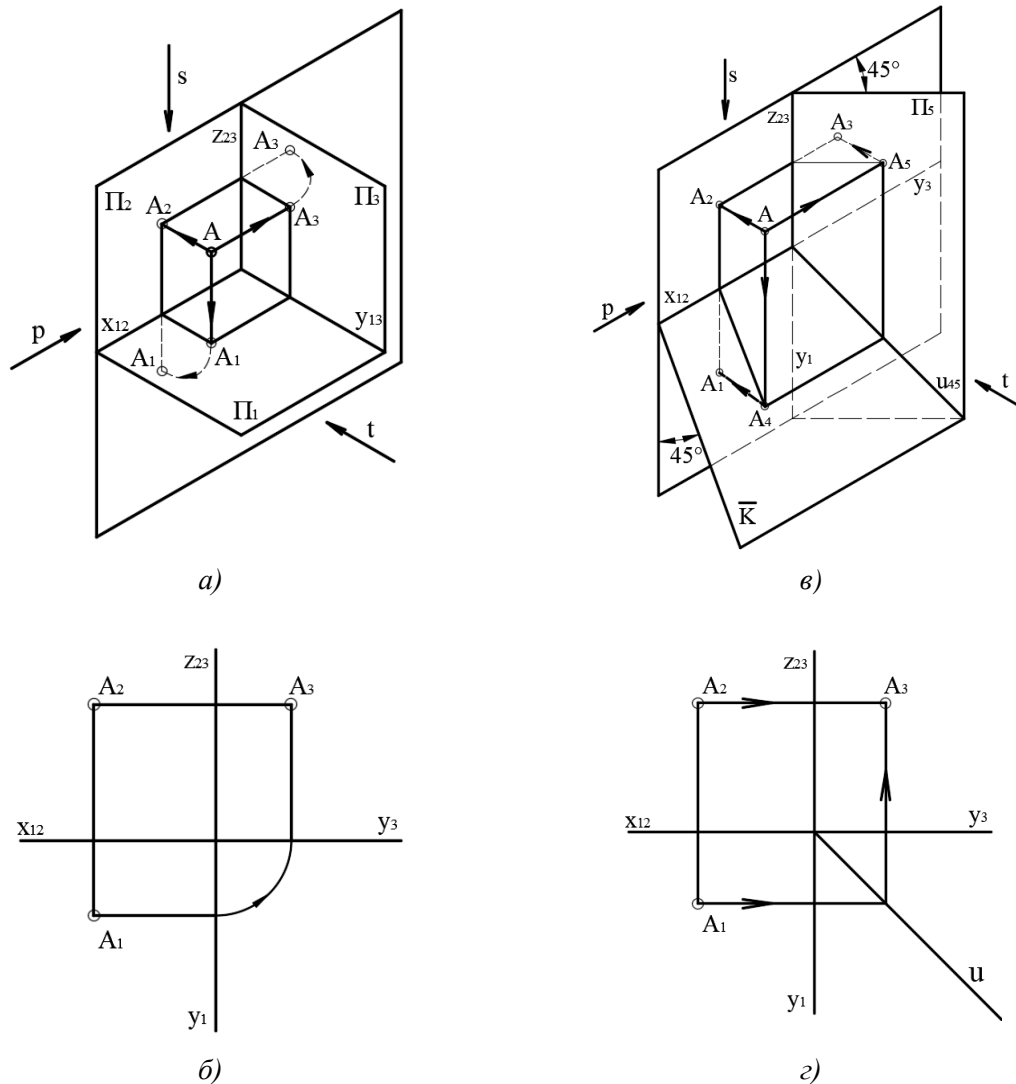


Рис. 2.1

Площина  $\Pi_2$  називається **фронтальною площиною проєкцій**, а  $\Pi_1$  – **горизонтальною**. Відповідно називаються і проєкції об'єкта:  $A_1$  – **горизонтальна проєкція** точки  $A$ , а  $A_2$  – **фронтальна**. Дві проєкції  $A_1$  і  $A_2$  точки  $A$  повністю визначають її положення у просторі, отже, і форму будь-якого об'єкта, що є множиною точок.

Для побудови креслень часто додають ще третю (додаткову) площину проєкцій  $\Pi_3$ , яка перпендикулярна до перших двох. Взаємно перпендикулярні лінії  $x_{12}$ ,  $y_{13}$ ,  $z_{23}$  перетину площин проєкцій називаються **осями проєкцій**. Осі проєкцій

можна ототожнювати з осями прямокутної декартової системи координат при аналітичному описі об'єктів проєкціювання.

Для отримання всіх зображень на одній площині, що відповідає площині креслення, горизонтальну площину  $\Pi_1$  і профільну  $\Pi_3$  разом з побудованими проєкціями повертають відповідно навколо осей  $x_{12}$  і  $z_{23}$  у фронтальне положення до суміщення з площиною  $\Pi_2$  (рис. 2.1а). Отриманий таким чином рисунок (рис. 2.1б) називається **комплексним** або **епюром Монжа**. Проєкції об'єкта можна побудувати одразу у повернутому положенні (рис. 2.1в) за допомогою бісекторних площин  $\Pi_4$  і  $\Pi_5$ , які нахилені до  $\Pi_2$  під кутами  $45^\circ$ . Спочатку об'єкт ( $A$ ) проєкціюється у напрямках  $s$  і  $r$  відповідно на площини  $\bar{K}$  і  $\Pi_5$ , а тоді проєкції  $A_4$  і  $A_5$  перепроєкціюються у напрямі  $t$  на площину рисунка. Слід ще раз підкреслити, що форма і положення об'єкта у просторі повністю визначається двома проєкціями, а третю проєкцію завжди можна побудувати за двома заданими, якщо задано дві проєкції кожної точки об'єкта (рис. 2.1г).

## 2.1. Проєкції точки

В системі прямокутних проєкцій точка задається двома проєкціями. Кожною проєкцією точки є точка. Дві проєкції однієї точки ( $A$ ) завжди належать одній вертикальній прямій  $A_2A_1$ , яка називається **лінією відповідності** або **лінією зв'язку** (рис. 2.1г). Фронтальна і горизонтальна площини проєкцій поділяють простір на 4 чверті або квадранти. Залежно від належності точки тій чи іншій чверті простору проєкції точки на комплексному рисунку по різному розміщуються відносно осі  $x_{12}$ . Наприклад (рис.2.2), якщо точку  $A$  розміщено у I квадранті, то її фронтальна проєкція знаходиться над віссю  $x_{12}$ , а горизонтальна – під віссю.

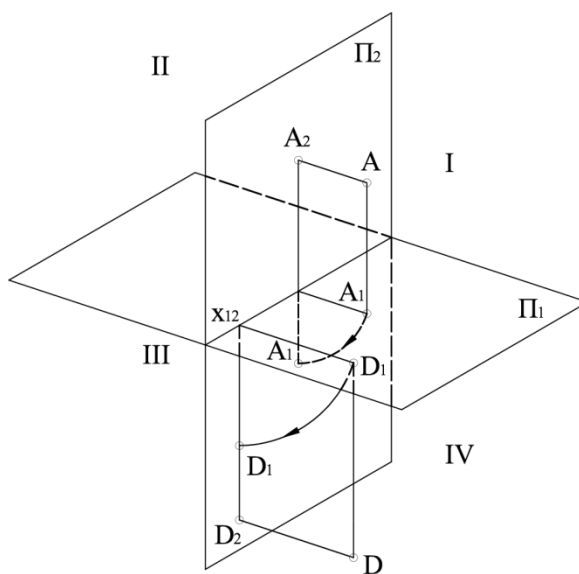


Рис. 2.2

Фронтальна і горизонтальна проекції точки  $D$ , яка знаходиться у IV квадранті, будуть під віссю  $x_{12}$  тощо.

На рис. 2.3 показано як проекції точок, що знаходяться як у різних квадрантах, так і точок, що належать площинам проекцій:  $A \in I$  кв.;  $B \in II$  кв.;  $C \in III$  кв.;  $D \in IV$  кв.;  $E \in \Pi_2$ ;  $F \in \Pi_2$ ;  $G \in \Pi_1$ ;  $H \in \Pi_1$ ;  $K \in x_{12}$ .

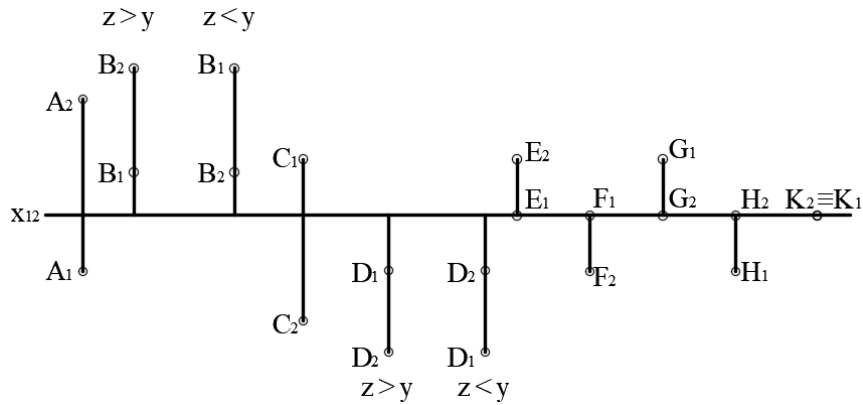


Рис. 2.3

За проекціями точки завжди можна визначити її положення у просторі. Так, наприклад, якщо точка належить фронтальній площині проекцій, то горизонтальна проекція цієї точки належить осі  $x_{12}$ . Якщо фронтальна і горизонтальна проекції точки збігаються, то точка належить бісекторній площині  $\bar{K}$  та інше.

## 2.2. Проекції прямої

Проекціями прямої у загальному випадку є прямі лінії (рис. 2.4).

Точка перетину прямої з площиною проекцій називається *слідом* прямої на цій площині. Оскільки слідом є точка, що належить площині проекцій, то горизонтальна проекція ( $F_1$ ) фронтального сліду  $F$  і фронтальна проекція ( $H_2$ ) горизонтального сліду  $H$  прямої  $m$  визначаються як точки перетину відповідної проекції прямої в вісь  $x_{12}$ . Друга проекція кожного сліду визначається за відповідністю на другій проекції прямої. Точка  $K$  є слідом прямої на бісекторній площині  $\bar{K}$ . Фронтальна і горизонтальна проекції цієї точки збігаються.

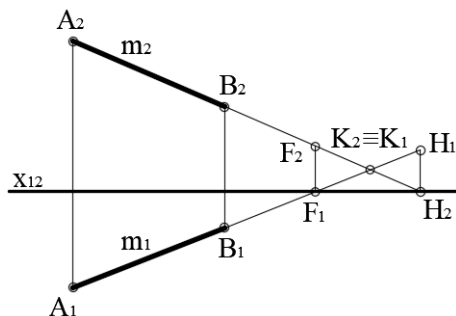


Рис. 2.4

Якщо розглядати систему з трьох площин проєкцій ( $\Pi_1, \Pi_2$  і  $\Pi_3$ ), то в окремих положеннях пряма може бути паралельною кожній з них, або паралельною одразу двом площинам проєкцій. В останньому випадку пряма перпендикулярна до третьої площини проєкцій.

Пряма, яка паралельна до площині проєкцій, називається **прямою рівня** і приймає назву площини, до якої вона паралельна.

Розрізняють три прямі рівня: фронтальна пряма ( $a$ ), яка паралельна площині  $\Pi_2$  (рис. 2.5а), горизонтальна пряма ( $b$ ), яка паралельна горизонтальній площині проєкцій (рис. 2.5б), і профільна ( $c$ ), яка відповідно паралельна  $\Pi_3$  (рис. 2.5в). Якщо пряма паралельна одній площині проєкцій, то кути її нахилу до двох інших площин проєкцій проєкціюються у натуральну величину. Наприклад, (рис. 2.5а), кут  $\alpha$  є кутом нахилу фронтальної прямої  $AB$  до  $\Pi_1$ , а  $\gamma$  - до  $\Pi_3$ .

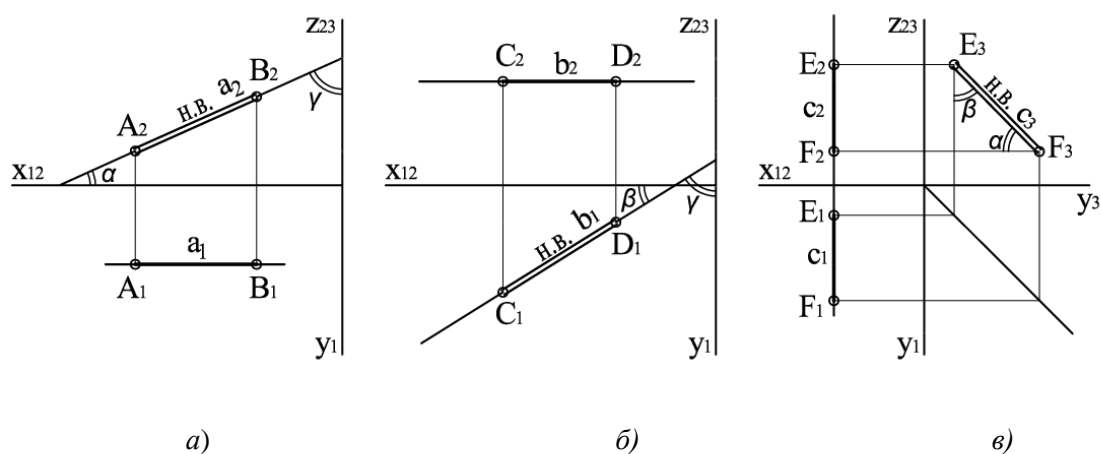


Рис.2.5

Відрізок прямої, що паралельна площині проєкцій, проєкціюється на цю площину проєкцій у натуральну величину, яку умовно показують подвійною лінією. Наприклад, (рис. 2.5б), довжина горизонтальної проєкції  $C_1D_1$  горизонтального відрізка  $CD$  дорівнює довжині самого відрізка. Дві інші проєкції лінії рівня завжди паралельні відповідним осям. Пряма, яка перпендикулярна до площини проєкцій, називається **проєкціувальною**, оскільки за допомогою цієї прямої будують відповідну проєкцію будь-якої точки, що належить проєкціувальній прямій (рис.2.6).

Пряма (або відрізок прямої), що перпендикулярна до площини проєкцій, на цю площину проєкціюється точкою. Наприклад, горизонтальною проєкцією відрізка  $AB$  є точка  $A_1B_1$  (рис. 2.6а). Така проєкція називається **виродженою**. Взагалі, виродженою проєкцією фігури називається проєкція, вимірність якої менше за вимірність самої фігури. У даному випадку пряма є одновимірною фігурою, а її проєкція – нульвимірною. На інші площини проєкцій відрізок проєкціувальної прямої проєкціюється у натуральну величину. Наприклад, (рис. 2.6в) довжина

фронтальної проєкції ( $E_2F_2$ ) і горизонтальної проєкції ( $E_1F_1$ ) профільно-проєкціовальної прямої  $EF$  дорівнює довжині самого відрізка  $EF$ .

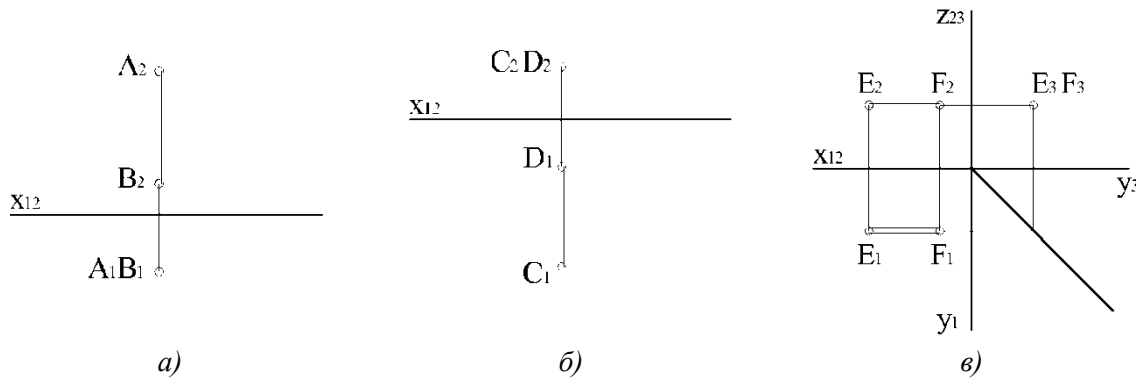
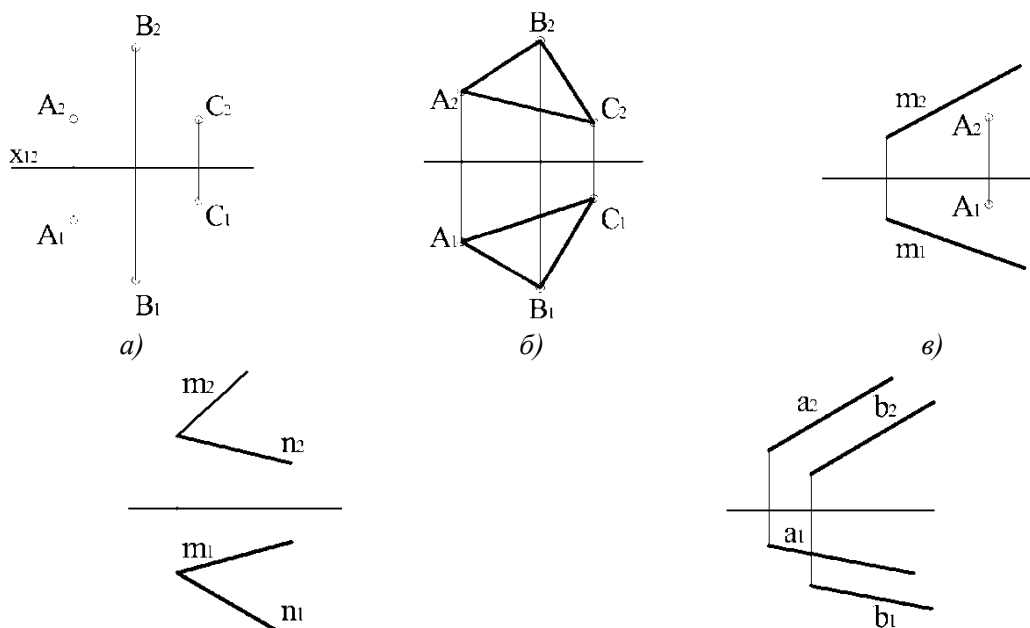


Рис. 2.6

### 2.3. Проекції площини

У загальному випадку проєкціями необмеженої площини є площини проєкцій. Оскільки за такими проєкціями не можна розрізнити між собою різні площини, то площину на комплексному рисунку задають різними сполученнями точок і прямих, що належать цій площині. На рис. 2.7 показано різні способи задання площини загального положення в системі прямокутних проєкцій:

- а) три точки ( $A, B$  і  $C$ ), що не лежать на одній прямій;
- б) трикутник ( $ABC$ );
- в) точка і пряма ( $A$  і  $m$ ), точка не належить цій прямій;
- г) дві перетинні прямі ( $m$  і  $n$ );
- д) дві паралельні прямі ( $a$  і  $b$ ).



з)

д)

Рис. 2.7

Взагалі, площину можна задавати будь-якою фігурою, що належить площині, але якщо різні сукупності точок і прямих, які показано на рис. 2.7, завжди належать одній площині, то чотирикутник, наприклад, може бути як плоским (рис. 2.8а), так і просторовим (рис. 2.8б), і зрозуміло, що в останньому випадку, чотирикутник площину не визначає.

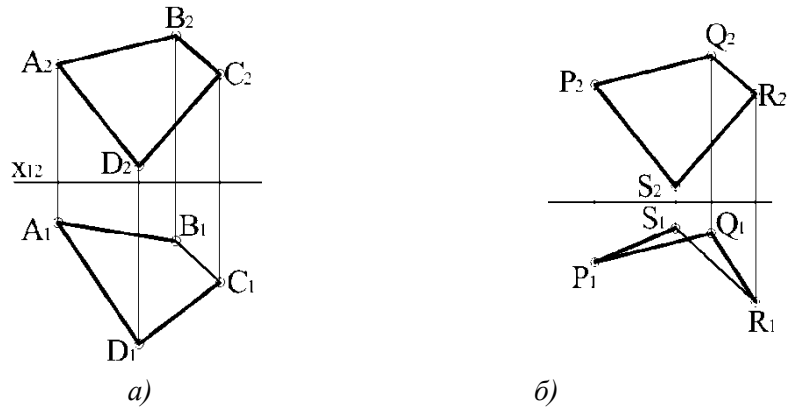


Рис. 2.8

Лінії ( $f$ ,  $h$  і  $p$ ) перетину площини з площинами проєкцій називаються слідами цієї площини на площинах проєкцій. На рис. 2.9а показано, як виглядають сліди площини загального положення у прямокутній ізометрії, а на рис. 2.9б – на комплексному рисунку.

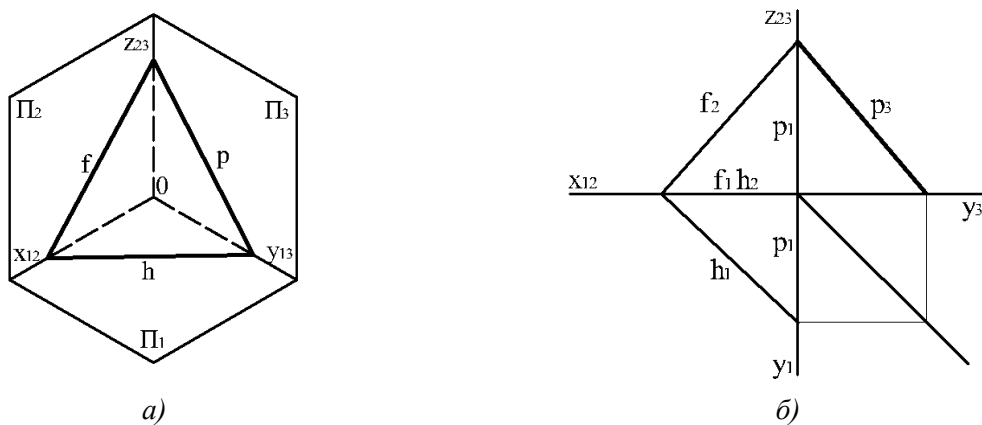


Рис. 2.9

У системі двох ортогональних проєкцій площину можна задати двома слідами  $f$  і  $h$  (рис. 2.10). Такий спосіб задання площини є дуже зручним при розв'язанні різноманітних задач. Для того, щоб визначити сліди площини, яку задано іншим способом, наприклад, двома паралельними прямими (рис. 2.7д), необхідно побудувати відповідні сліди прямих  $a$  і  $b$ , і тоді їх з'єднати (рис. 2.11).

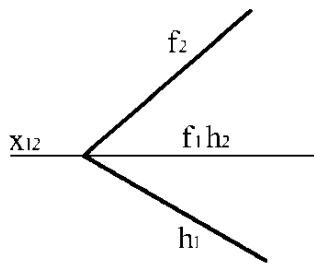


Рис. 2.10

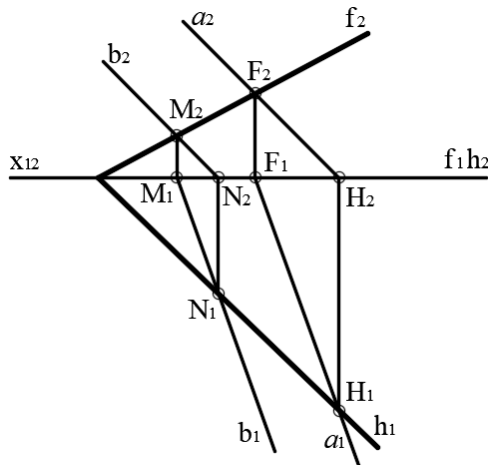


Рис. 2.11

Горизонтальними слідами прямих  $a$  і  $b$  є відповідно точки  $H$  і  $N$ . З'єднуючи їх горизонтальні проєкції  $H_1$  і  $N_1$ , отримаємо горизонтальну проєкцію  $h_1$  горизонтального сліду  $h$  площини. З'єднуючи фронтальні сліди  $F$  і  $M$  прямих  $a$  і  $b$ , отримаємо фронтальну проєкцію  $f_2$  фронтального сліду  $f$  площини.

Площина загального положення нахилена до всіх площин проєкцій. В окремому випадку площина може бути перпендикулярною до площини проєкцій і тоді вона називається **проєкціювальною**. Розрізняють **фронтально-проєкціювальну** площину (рис. 2.12а), **горизонтально-проєкціювальну** (рис. 2.12б) і **профільно-проєкціювальну** (рис. 2.12в).

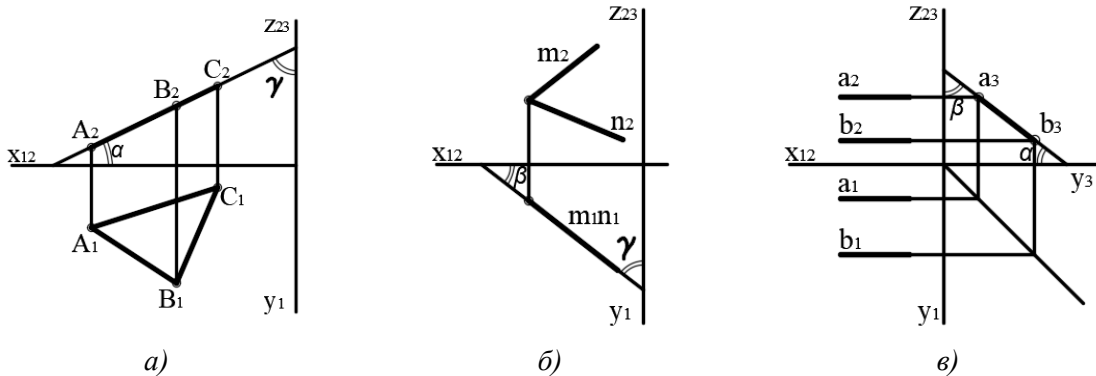


Рис. 2.12

Проекцією проекціовальної площини на площині проєкцій, до якої вона перпендикулярна, є пряма лінія, наприклад  $A_2B_2C_2$  (рис. 2.12а). Така проєкція є **виродженою**. Для задання проекціовальної площини достатньо однієї виродженої проєкції, оскільки вигляд інших проєкцій не визначає положення площини у просторі. Кути нахилу проекціовальної площини до двох інших площин проєкцій вимірюються плоскими кутами ( $\alpha$ ,  $\beta$  або  $\gamma$ ) між виродженою проєкцією площини і відповідними осями проєкцій (рис. 2.12).

Якщо площина перпендикулярна одразу до двох площин проєкцій, то вона паралельна до третьої площини проєкцій. Такі площини називаються площинами **рівня**. Розрізняють **горизонтальну** (рис. 2.13а), **фронтальну** (рис. 2.13б) і **профільну** (рис. 2.13в) **площини рівня**. Відсік площини рівня проєкціюється у натуральну величину на відповідну площину проєкцій, що на рис. 2.13 показано подвійною лінією.

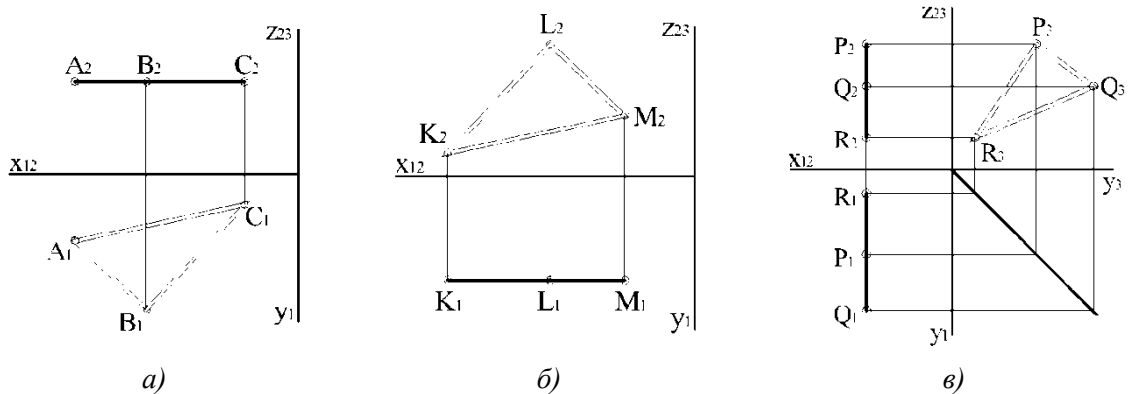


Рис. 2.13

### Запитання для самоконтролю

1. Як називаються площини проєкцій, утворюють епюр Монжа??
2. Як побудувати профільну проєкцію точки за двома відомими проєкціями?
3. Назвіть властивості проєкцій прямих на три взаємно перпендикулярні площини?
4. Що таке сліди площини?
5. Які прямі і площини називають прямими і площинами особливого положення?

## РОЗДІЛ 3. ПОЗИЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРОЕКЦІЙ ПАР ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

Між геометричними фігурами у тривимірному точковому просторі існують позиційні відносини: перетин, належність, паралельність тощо.

З точки зору багатовимірної геометрії позиційні відносини розглядаються як перетин точкових множин. За теоремою Грассмана перетином двох підпросторів, що мають вимірність  $l$  і  $m$ , у просторі вимірності  $n$  у загальному випадку є підпростір, вимірність  $r$  якого визначається за формулою:  $r = l + m - n$ .

Якщо величина  $r$  є від'ємною, то підмножини  $l$  і  $m$  не перетинаються у просторі  $n$ . Наприклад, у тривимірному точковому просторі ( $n = 3$ ) пряма ( $l = 1$ ) і площина ( $m = 2$ ) у загальному випадку перетинаються у власній або невластній точці ( $r = 0$ ). Тоді за теоремою Грассмана  $r = 1 + 2 - 3 = 0$ .

Позиційні властивості проєкцій пар геометричних фігур відповідають на запитання: "Як за проєкціями двох фігур визначити їх взаємне положення у просторі?"

### 3.1. Дві точки

Дві точки у тривимірному просторі можуть збігатись або не збігатись (рис.3.1).

Властивість 3.1. Дві точки у просторі збігаються, якщо збігаються їх однойменні проєкції. За цією властивістю з чотирьох пар точок, що показано на рис. 3.1 збігаються тільки точки  $G$  і  $H$ . Без пояснень зрозуміло, що пари точок  $A$  і  $B$ ,  $C$  і  $D$  не збігаються. Точки  $E$  і  $F$  не збігаються, що стане зрозумілим, якщо їх увявити у просторі, як показано на рис. 3.2. Дві точки ( $C$  і  $D$ ), які належать одній проєкціювальній прямій, називаються *конкуруючими* (рис. 3.1).

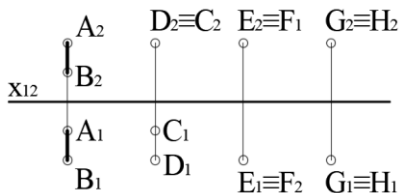


Рис. 3.1

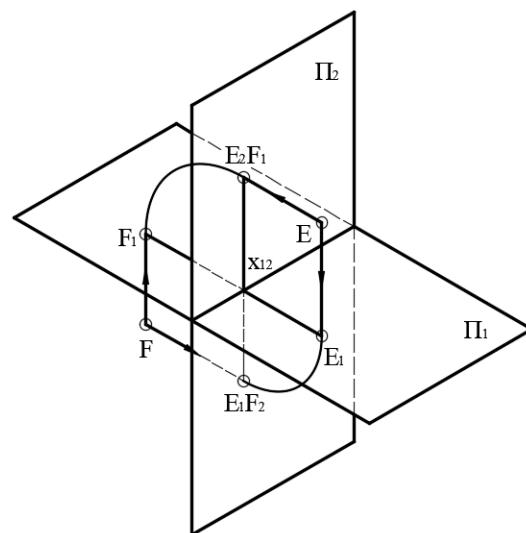


Рис. 3.2

### 3.2. Точка і пряма

Точка може належати прямій або не належати їй.

Властивість 3.2. Точка належить прямій, якщо її проєкції належать однойменним проєкціям прямої. З усіх точок, що показано на рис. 3.3, тільки точка  $A$  належить прямій  $l$ . Точки  $B$  і  $C$  не належать прямій  $l$ , оскільки тільки одна проєкція кожної з цих точок належить однойменній проєкції прямої: точка  $D$  не належить прямій  $l$ , оскільки горизонтальна проєкція точки  $D$  належить не горизонтальній, а фронтальній проєкції прямої  $l$ , а фронтальна проєкція точки  $D$  належить горизонтальній проєкції прямої. Точка  $E$  не належить прямій, оскільки горизонтальна проєкція точки  $E$  не належить горизонтальній проєкції прямої  $l$ .

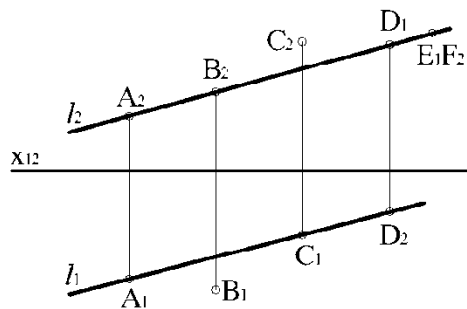


Рис. 3.3

### 3.3. Дві прямі

В загальному випадку, згідно з теоремою Грассмана, дві прямі не мають спільної точки і називаються мимобіжними (рис. 3.4а). В окремих випадках вони можуть перетинатись у власній (рис. 3.4б), або у невласній точці (рис. 3.4в) і збігатись (рис. 3.4г).

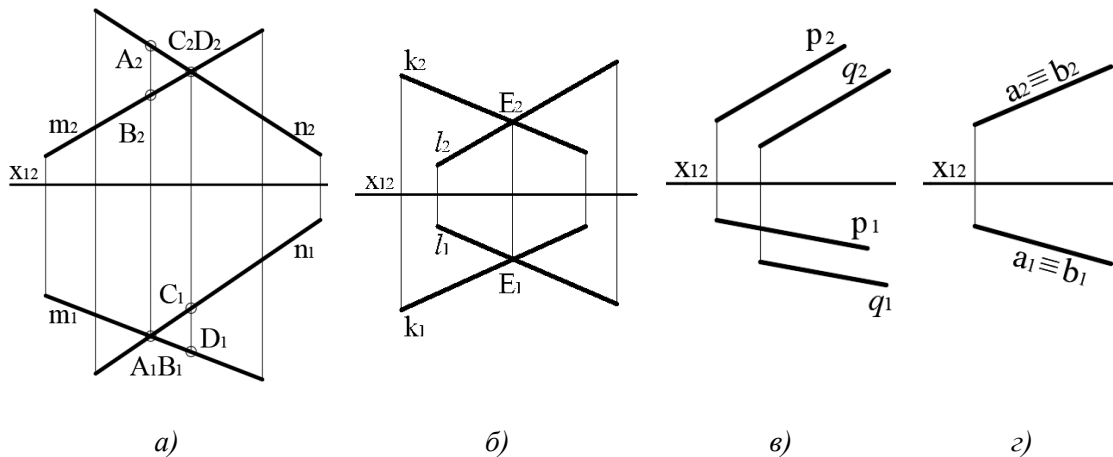


Рис. 3.4

**Властивість 3.3.** Якщо точки перетину однойменних проєкцій прямих належать одній лінії відповідності, то прямі перетинаються (рис. 3.4б); якщо однойменні проєкції прямих паралельні між собою (мають невласні точки перетину), то прямі паралельні (рис. 3.4в); якщо точки перетину однойменних проєкцій прямих не належать одній лінії відповідності, то прямі мимобіжні (рис. 3.4а); якщо однойменні проєкції прямих збігаються, то і самі прямі збігаються (рис. 3.4г).

Більш детально розглянемо випадки, які показано на рис. 3.5.

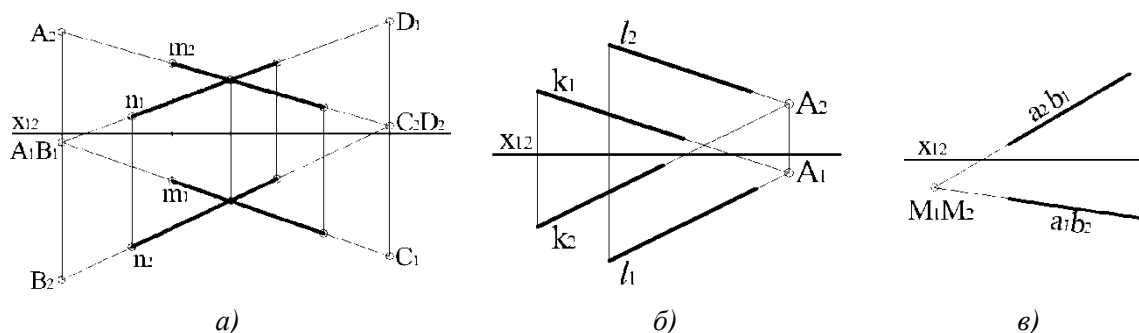


Рис. 3.5

Дві прямі  $m$  і  $n$  на рис. 3.5а не перетинаються, а є мимобіжними, оскільки проєкції точок  $A_1(B_1)$  перетину горизонтальних проєкцій прямих і проєкції точок  $C_2(D_2)$  перетину фронтальних проєкцій прямих не належать одній лінії відповідності. Дві прямі  $l$  і  $k$  на рис. 3.5б не паралельні, а перетинаються, оскільки проєкції точок  $A_1$  і  $A_2$  перетину однойменних проєкцій належать одній лінії зв'язку і є двома проєкціями власної точки  $A$  перетину прямих. Прямі  $a$  і  $b$  (рис. 3.5в) не збігаються, а перетинаються у власній точці  $M$ .

### 3.4. Точка і площина. Пряма і площина

За теоремою Грасмана у загальному випадку точка не належить площині:  $r = l + m - n = 0 + 1 - 3 = -2$ . В окремому випадку точка може належати площині.

**Властивість 3.4.** Точка належить площині, якщо вона належить будь-якій прямій у цій площині.

На рис. 3.6 площину задано трикутним відсіком  $ABC$ . Точка  $E$  належить площині  $ABC$ , оскільки належить прямій  $AB$  у цій площині, а точка  $D$  не належить площині  $ABC$  (див. точку  $D$  на рис. 3.3).

Пряма у загальному випадку за теоремою Грассмана перетинає площину у власній або невласній точці:  $r = l + m - n = 1 + 2 - 3 = 0$ .

Якщо пряма перетинається з площиною у невласній точці, то пряма і площина є паралельними.

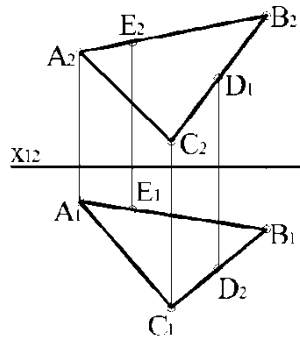


Рис. 3.6

В окремому випадку пряма належить площині (рис. 3.7б).

**Властивість 3.5.** Пряма належить площині якщо вона має хоча б дві спільні точки з площиною. На рис. 3.7а задано фронтальну проекцію прямої  $m$ , що належить площині  $ABC$ .

Потрібно побудувати другу (горизонтальну) проекцію прямої  $m$ . Якщо пряма  $m$  належить площині, то дві її точки  $D$  і  $E$  також належать площині. Тоді точка  $D$  належить стороні  $AB$  трикутника, а точка  $E$  – стороні  $BC$ . За відповідністю потрібно побудувати горизонтальні проекції  $D_1$  і  $E_1$  точок  $D$  і  $E$  відповідно на горизонтальних проекціях прямих  $AB$  і  $BC$ . Точки  $D_1$  і  $E_1$  визначають горизонтальну проекцію  $m_1$  прямої  $m$  (рис. 3.7б).

Пряма  $(CH)$ , що належить площині і паралельна  $\Pi_1$ , називається **горизонталлю**, а пряма  $(AF)$ , що належить площині і паралельна  $\Pi_2$  – **фронталлю** (рис. 3.7в).

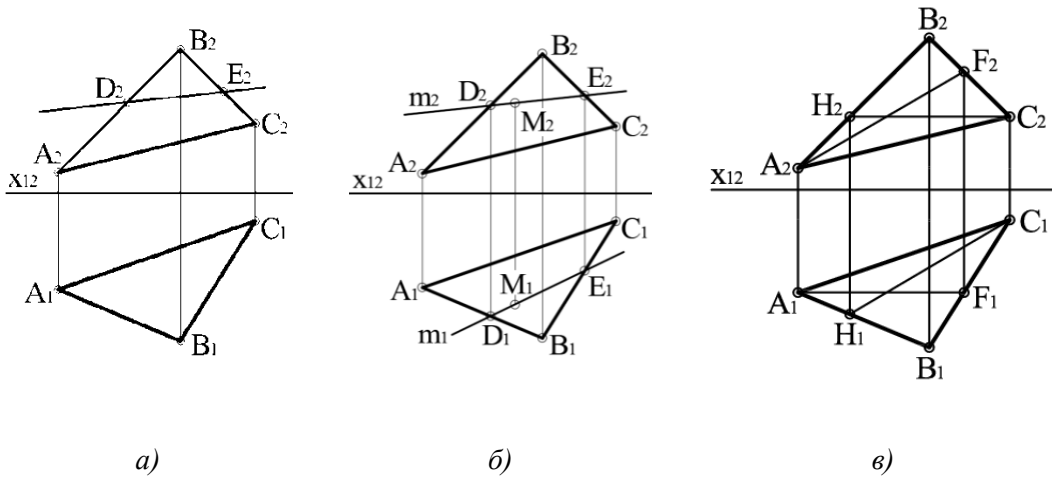


Рис. 3.7

Горизонталь і фронталь ще називають лініями рівня площини. Сліди площини на площинах проекцій також є лініями рівня (рис. 2.10).

Для того, щоб побудувати проекції довільної точки, що належить заданій площині, необхідно спочатку побудувати проекції прямої у площині, а тоді на

прямій будувати проєкції точки. На рис. 3.7б задано фронтальну проєкцію  $M_2$  точки  $M$ , що належить площині  $ABC$ . Для того, щоб побудувати горизонтальну проєкцію  $M_1$  точки  $M$  спочатку через  $M_2$  проведемо у площині  $ABC$  довільну пряму  $DE$ , визначимо горизонтальну проєкцію  $D_1E_1$  прямої  $DE$ , а тоді за відповідністю на  $D_1E_1$  визначимо горизонтальну проєкцію  $M_1$  точки  $M$ , яка належить площині  $ABC$ .

Для того, щоб визначити точку  $K$  перетину прямої  $m$  загального положення з площиною  $ABC$  загального положення (рис. 3.8), через пряму  $m$  необхідно провести проєкціювальну площину, наприклад  $\Sigma$ , яка перетинає площину  $ABC$  по прямої  $DE$  і побудувати горизонтальну проєкцію  $D_1E_1$  цієї прямої. У площині  $\Sigma$  тепер є дві прямі  $m$  і  $DE$ , фронтальні проєкції  $m_2$  і  $D_2E_2$ , яких збігаються, оскільки площина  $\Sigma$  є проєкціювальною, але якщо побудувати горизонтальну проєкцію  $D_1E_1$  прямої  $DE$ , то побачимо, що ці дві прямі перетинаються у точці  $K$ , яка і є точкою перетину прямої  $m$  з площиною  $ABC$ . Друга проєкція точки  $K$  визначається за відповідністю. Для наочності на рисунку показують, де на проєкціях відтин  $ABC$  площини закриває від глядача частину прямої  $m$ .

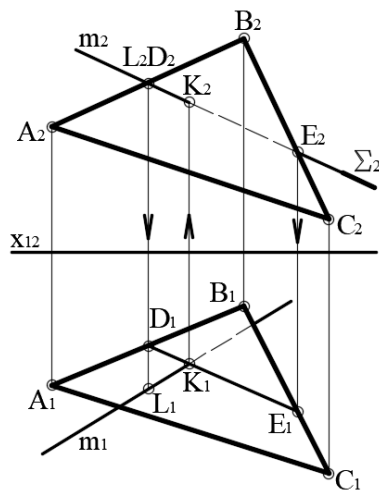


Рис. 3.8

Формально видимість прямої відносно площини можна визначити за допомогою конкуруючих точок (наприклад  $D$  і  $L$ ). Одна з цих точок ( $D$ ) належить площині  $ABC$ , а друга ( $L$ ) – прямої  $m$ . Для того, щоб побачити, яка з точок ( $D$  або  $L$ ) на фронтальній проєкції знаходиться ближче до глядача, потрібно звернутись до горизонтальної проєкції, де видно, що точка  $L$  знаходиться ближче до глядача ніж точка  $D$ . Тому на фронтальній проєкції в околі цих точок пряму  $m$ , а саме, її відрізок  $DK$  буде видно, оскільки його не закриває від глядача площина  $ABC$ . Тоді відрізок  $KE$  прямої  $m$  на фронтальній проєкції не буде видно. Аналогічно визначається видимість прямої на горизонтальній проєкції.

**Властивість 3.6.** Пряма паралельна площині, якщо вона паралельна якійсь прямій у цій площині. На рис. 3.9 задано фронтальну проєкцію  $m_2$  прямої  $m$ , яка проходить через задану точку  $M$  паралельно площині  $ABC$ .

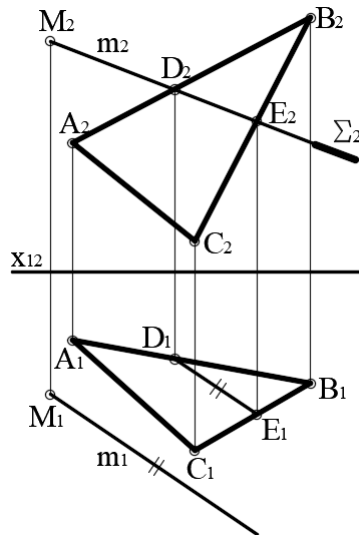


Рис. 3.9

Для побудови горизонтальної проєкції прямої  $m$  переріжемо площину фронтально проєкціювальною площиною  $\Sigma$  по прямій  $DE$ . Площина  $\Sigma$  містить дві прямі  $m$  і  $DE$ . Побудувавши за відповідністю горизонтальну проєкцію  $D_1E_1$  прямої  $DE$ , що належить площині  $ABC$ , через точку  $M$  проведемо другу проєкцію  $m_1$  прямої  $m$  паралельно  $D_1E_1$ .

### 3.5. Дві площини

За теоремою Грассмана у загальному випадку дві площини перетинаються по прямій лінії:  $r = l + m - n = 2 + 2 - 3 = 1$ .

В окремих випадках лінія перетину площин може бути невластною і тоді площини є паралельними одна одній, або дві площини можуть збігатись.

**Властивість 3.7.** Дві площини є паралельними, якщо дві непаралельні між собою прямі однієї площини паралельні двом прямим другої площини. На рис. 3.10 задано слідами  $f$  і  $h$  площину  $\Gamma$  і точку  $M$ , що не належить цій площині. Для того, щоб через точку  $M$  провести площину  $\Delta$ , яка паралельна заданій площині  $\Gamma$ , через цю точку проведемо дві прямі  $k$  і  $l$ , які паралельні відповідно слідам  $f$  і  $h$ .

У загальному випадку відносного розміщення двох площин виникає задача побудови лінії їх взаємного перетину. На рис. 3.11 одну площину ( $\Sigma$ ) задано слідами  $f$  і  $h$ , а другу ( $\Omega$ ) – паралельними прямими  $m$  і  $n$ . Для побудови лінії ( $KL$ ) перетину площин  $\Sigma$  і  $\Omega$  площину  $\Omega$  розглянемо як дві прямі  $m$  і  $n$ , для кожної з яких визначаємо точку перетину з площиною  $\Sigma$  так, як було показано на рис. 3.8.

Наприклад, через пряму  $n$  проведено горизонтально проєкціювальну площину  $\Lambda$ , яка перетинає площину  $\Sigma$  по прямій  $DE$ . Побудувавши фронтальну проєкцію  $D_2E_2$  прямої  $DE$ , визначаємо точку  $K$  перетину прямих  $DE$  і  $n$ . Аналогічно визначається точка  $L$  перетину прямої  $m$  з площиною  $\Sigma$ . Відрізок  $KL$  є лінією перетину площин  $\Sigma$  і

$\Omega$  в межах прямих  $m$  і  $n$ . Видимість прямих  $f$ ,  $h$ ,  $m$  і  $n$  відносно відсіків площин  $\Sigma$  і  $\Omega$  визначається за допомогою конкуруючих точок так, як було показано на рис. 3.8.

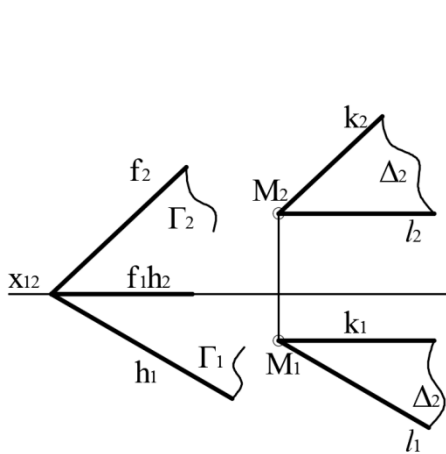


Рис. 3.10

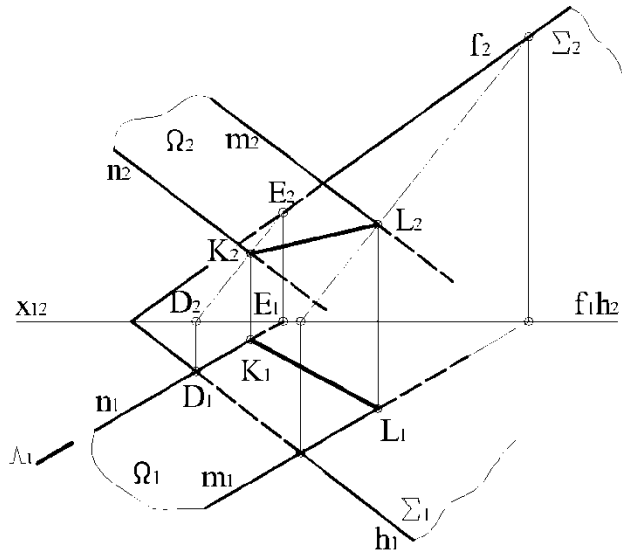


Рис. 3.11

### 3.6. Побудова дахів

Більшість дахів будівель та споруд є гранними поверхнями, що утворюються в результаті перетину схилів. Найчастіше схили дахів мають однакові кути нахилу до горизонтальної площини.

Для побудови проєкцій даху з рівно нахиленими схилами розглянемо наступну властивість.

#### Властивість 3.8.

Горизонтальною проєкцією лінії перетину двох площин, рівно нахилених до горизонтальної площини проєкцій, є бісектриса кута між горизонтальними слідами площин.

Розглянемо чотирикутну піраміду  $SABCD$  (рис. 3.12), у якій ребро  $SA$  є висотою, а в основі піраміди  $AD \perp DC$  і  $AB \perp BC$ . Кути нахилу площин  $SBC$  та  $SCD$  до  $\Pi_l$  вимірюються відповідно плоскими кутами  $SBA$  і  $SDA$ . Площина  $SAC$  є площиною симетрії піраміди, тому  $\angle DCA = \angle BCA$ .

В окремому випадку (рис. 3.13), коли горизонтальні сліди ( $h$  і  $m$ ) рівнонахилених площин паралельні між собою, горизонтальна проєкція  $l_1$  лінії перетину площин проходить посередині між проєкціями  $h_1$  і  $m_1$  – горизонтальних слів  $h$  і  $m$ .

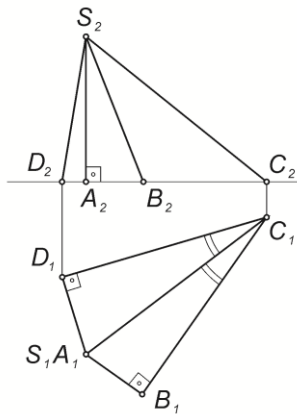


Рис.3.12

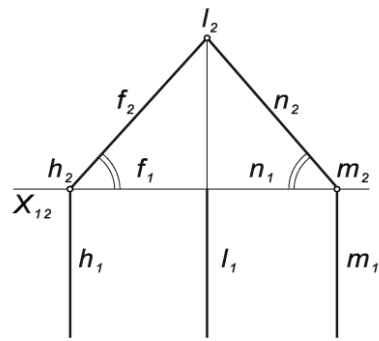


Рис.3.13

Ця властивість використовується для побудови проекції даху на заданому плані.

Для побудови проекції даху на заданому плані спочатку у плані проводять бісектриси всіх кутів плану та фіксують найближчі до контуру точки (1 і 2) перетину пар бісектрис (рис. 3.14а). Далі аналізують лінії перетину яких схилів повинні пройти через побудовані точки, маючи на увазі, що в загальному випадку у кожній точці повинні зійтись три лінії перетину схилів. Так, наприклад, через точку 1 буде проходити лінія 13 перетину схилів  $AB$  і  $CD$ , а через точку 2 – лінія 24 перетину схилів  $DE$  і  $AF$  (рис. 3.14б). Залишилось побудувати лінію перетину схилів  $AF$  і  $CD$ , яка є бісектрисою кута між зрізами  $CD$  і  $AF$  (рис. 3.14в). Фронтальну проекцію даху будують за відповідністю із врахуванням кута  $\alpha$  нахилу схилів.

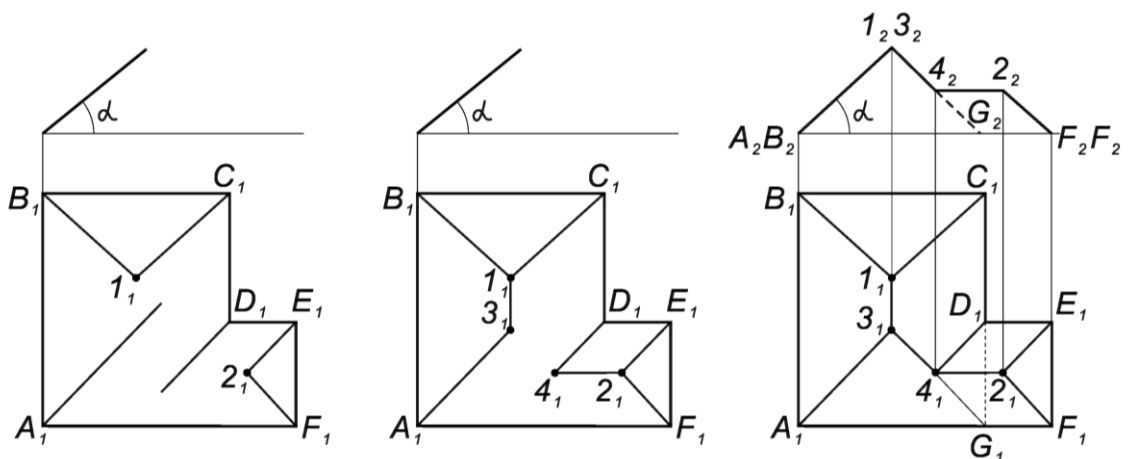


Рис. 3.14

На рис. 3.15. наведено випадок, коли дах перекриває об'єми різної висоти. Побудову такого даху зводять до попереднього випадку, перерізаючи схили

горизонтальною площиною  $\Gamma$ , що проходить через найвищу лінію зрізу. За новим контуром плану в площині  $\Gamma$  будують горизонтальну проекцію даху.

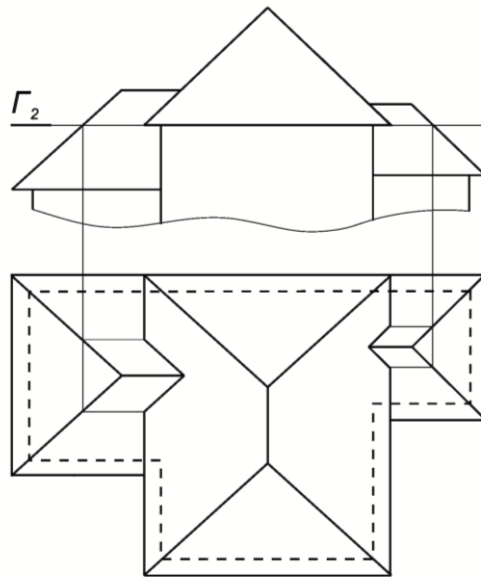


Рис.3.15

В окремих випадках перетин двох схилів даху може утворювати такі місця, де під час дощу не забезпечується швидке відведення води. Наприклад, на рис. 3.16а показано таке місце в околі відрізка  $AB$  і в межах квадрату  $ADBC$ , схили  $ABC$  і  $ABD$  потрібно замінити схилами  $BCD$  і  $ACD$ , які утворюють гребінь даху  $CD$ , як показано на рис. 3.16б.

Схожі випадки зустрічаються, коли прибудова примикає до стіни вищої споруди (рис. 3.17). У такому разі, в місці примикання дах не повинен мати схилу у бік стіни.

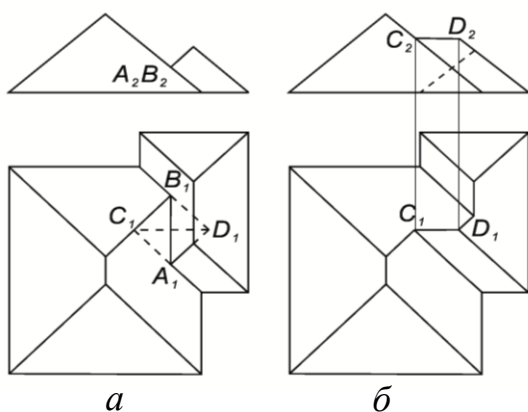


Рис. 3.16

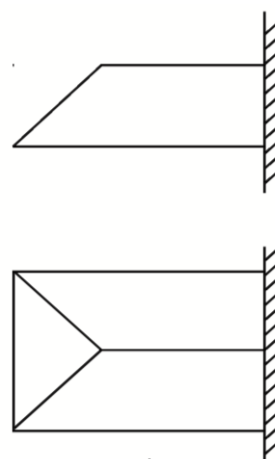


Рис. 3.17

За такими самими правилами будують дахи на плані у вигляді довільного багатокутника (рис. 3.18). У таблиці 3.1 показано, бісектрисами яких кутів є горизонтальні проекції ліній перетину схилів даху.

Таблиця 3.1

№ п/п	Лінія перетину схилів	Лінія зрізу схилів
1	$AG$	$AF$ і $AB$
2	$FG$	$AF$ і $FE$
3	$BH$	$AB$ і $BC$
4	$EK$	$FE$ і $ED$
5	$DL$	$ED$ і $DC$
6	$LC$	$DC$ і $BC$
7	$GH$	$AB$ і $FE$
8	$KL$	$ED$ і $BC$
9	$HK$	$FE$ і $BC$

Для побудови фронтальної проекції даху потрібно задати перевищення будь якої вершини над горизонтальною площиною зрізу даху (наприклад, вершина 9). Фронтальна проекція першого гребня (наприклад,  $gH$ ) будується за двома точками, перша з яких є відома вершина ( $g$ ) даху, а друга ( $M$ ) – точка перетину зрізів ( $FE$  і  $AB$ ). Побудована точка  $H_2$  разом з точкою  $N_2$  визначає наступний гребінь  $HK$  і т. д

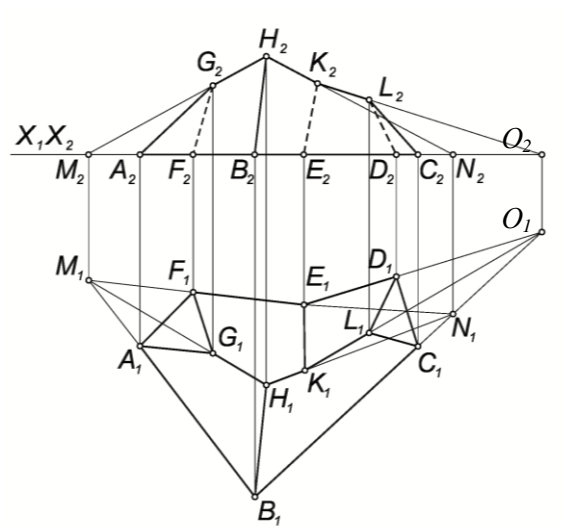


Рис. 3.18

### Запитання для самоконтролю

1. Як розв'язати задачу на перетин прямої і площини?
2. Яка умова належності точки і площини?
3. Що таке конкуруючі точки?
4. Як визначити видимість на кресленні?
5. По якій прямій перетинаються рівнонахилені площини?

## РОЗДІЛ 4. КРИВІ ЛІНІЇ

Незважаючи на те, що на перший погляд поняття лінії здається дуже простим, насправді до сьогодні не існує його єдиного визначення. У різних галузях геометрії існують різні визначення ліній, які відповідають способам їх утворення. Наприклад, у теорії множин лінія розглядається як однопараметрична множина точок, в аналітичній геометрії – як графік певної функції.

В нарисній геометрії лінія розглядається як траєкторія руху точки за певним законом, або як результат перетину двох поверхонь.

Для спрощення аналізу властивостей кривих ліній їх систематизують за різними ознаками.

Розрізняють *плоскі* та *просторові* криві лінії. *Плоскою* називають криву, усі точки якої належать одній площині. Точки *просторової* кривої не належать одній площині.

Залежно від вигляду аналітичного рівняння в декартових координатах лінії поділяють на *алгебраїчні* та *трансцендентні*. *Алгебраїчні* криві описуються алгебраїчними рівняннями, де кожен член рівняння є алгебраїчною функцією від аргументу. Наприклад, загальне рівняння плоскої алгебраїчної кривої має вигляд:

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \dots + a_n(x) = 0, \quad (4.1)$$

де  $a_0(x)$ , ...,  $a_n(x)$  – багаточлени від  $x$ .

Основною ознакою алгебраїчної кривої є її порядок, який дорівнює степеню рівняння кривої. Наочно порядок плоскої алгебраїчної кривої можна визначити, як максимальне число точок її перетину з довільною прямою. Порядок просторової кривої визначається як максимальне число точок її перетину з довільною площиною.

*Трансцендентні* криві аналітично описуються неалгебраїчними рівняннями. Прикладом плоскої трансцендентної кривої може бути синусоїда.

### 4.1. Локальні властивості плоских кривих

Довільна пряма  $t$  (рис. 4.1), що перетинає плоску криву  $k$ , називається *січною*.

Якщо точку  $B$  наближати до точки  $A$ , січна  $t$  буде обертатись навколо точки  $A$ , і довжина дуги  $AB$  буде зменшуватись. У граничному положенні точки  $A$  і  $B$  будуть збігатися, а січна  $t$  займе положення  $t$  і буде називатися *дотичною* до кривої  $k$  у точці  $A$ . Вважають, що дотичною до кривої є січна, яка проходить через дві нескінченно близькі точки кривої.

Перпендикуляр  $n$  до дотичної  $t$  у точці дотику  $A$  називається *нормаллю* кривої  $k$  у точці  $A$ .

Кожна крива (крім кола) у різних точках має більшу або меншу міру викривлення, а коло в усіх точках викривлено однаково. Величина, обернена до радіуса кола, називається його **кривиною**. Кривину кривої вимірюють за допомогою кола, яке щільно прилягає до кривої в заданій точці і називається **стичним колом**. Кажуть, що стичне коло проходить через три нескінченно близькі точки  $A$ ,  $B$  і  $M$  кривої (рис. 4.2). Центр  $O$  стичного кола називається центром кривини кривої  $k$  у точці  $M$  і належить нормалі  $n$  до кривої  $k$ . Радіус  $OM$  стичного кола називається **радіусом кривини** кривої  $k$  у точці  $M$ .

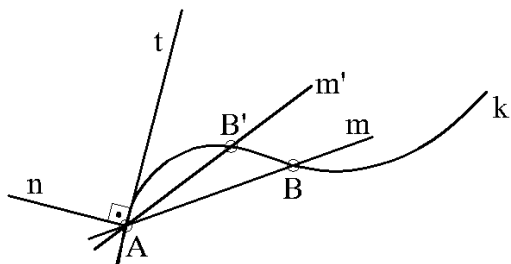


Рис. 4.1

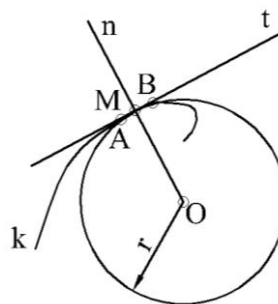


Рис. 4.2

Точка кривої лінії, яка за своїми властивостями не відрізняється від більшості інших точок кривої, називається звичайною.

Звичайна точка має такі властивості:

- окіл звичайної точки є єдиною неперервною лінією;
- у звичайній точці крива має тільки одну дотичну;
- точка  $M$ , що рухається у певному напрямі вздовж кривої, до і після звичайної точки не змінює напрям руху, а дотична у точці  $M$  не змінює напрям обертання.

Проте на кривій бувають такі точки, в яких порушуються сформульовані властивості. Такі точки називаються **особливими**. Деякі приклади особливих точок показано на рис. 4.3:

$A$  – точка перегину, в якій дотична  $t$  змінює напрям обертання при незмінному русі точки дотику вздовж кривої  $k$  (рис. 4.3а);

$B$  – точка звороту першого роду (вістря), в якій при незмінному напрямі обертання дотичної точка дотику змінює напрям руху на протилежний (рис. 4.3б);

$C$  – точка звороту другого роду (дзьоб), в якій як обертання дотичної, так і рух точки дотику змінюється на протилежні (рис. 4.3в);

$D$  – точка повторення, в якій дотична  $t$  два чи більше разів дотикається до кривої (рис. 4.3г);

$E$  – вузлова точка, в яких крива має дві або більше дотичних (рис. 4.3д) тощо.

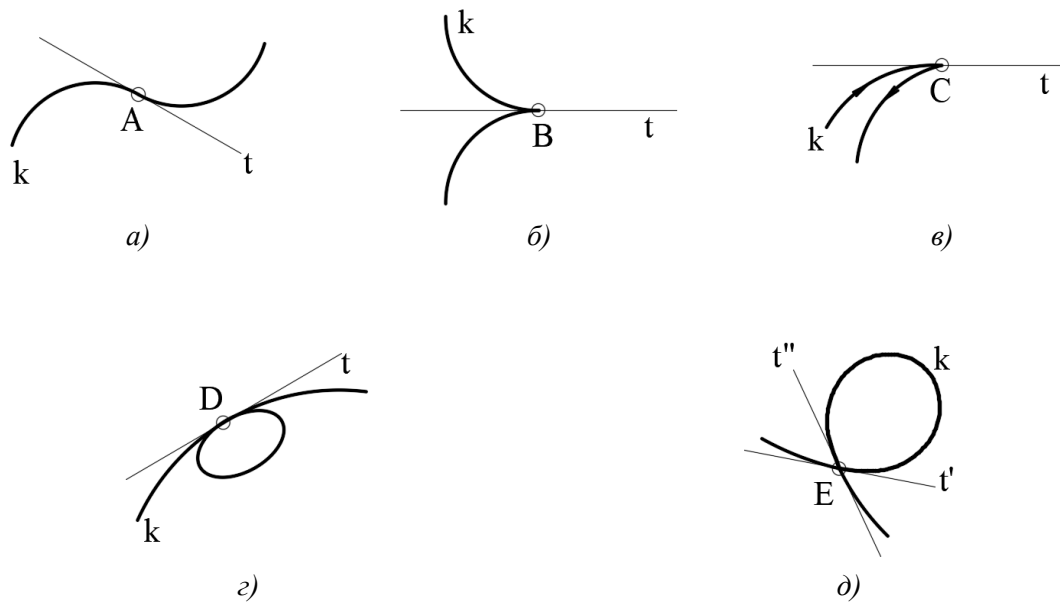


Рис. 4.3

Множина нормалей до плоскої кривої  $k$  (рис. 4.4) огинає іншу криву  $e$ , яка називається **еволютою** кривої  $k$ .

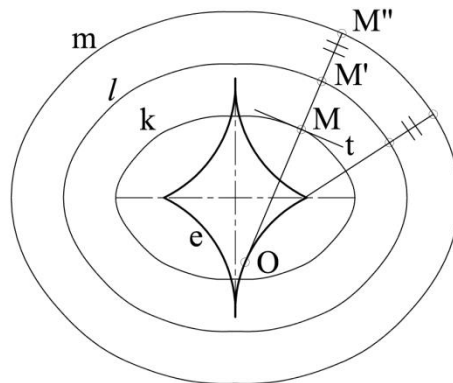


Рис. 4.4

Еволюта кривої  $k$  є геометричним місцем центрів  $O$  кривини кривої. Сама крива  $k$  відносно своєї еволюти називається **евольвентою**. Кожна крива має тільки одну еволюту і однопараметричну множину евольвент  $k, l, m \dots$

Відстані ( $M'M''$ ) між точками двох евольвент ( $l$  і  $m$ ) у напрямках спільних нормалей однакові.

Евольвенти  $k, l, m$  однієї кривої  $e$  одна відносно одної називаються **еквідистантами**. Еквідистанти кривої лінії є узагальненням для кривих поняття паралельності прямих ліній. Еволютою кола є його центр.

## 4.2. Алгебраїчні плоскі криві

Найпростішими та досконало вивченими алгебраїчними кривими є криві другого порядку. Їх аналітичне рівняння в декартових координатах має другу степінь:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + I = 0, \quad (4.2)$$

де  $A, B, C, D, E$  – коефіцієнти.

Рівняння (4.2) описує будь-яку криву другого порядку, довільно розміщену відносно прямокутної декартової системи координат (рис. 4.5).

Залежно від співвідношення коефіцієнтів у рівнянні (4.2) маємо окремі види кривих другого порядку: еліпс ( $AC - B^2 > 0$ ), гіпербола ( $AC - B^2 < 0$ ), парабола ( $AC = B^2$ ) і коло ( $A = C, B = 0, D = E$ ).

Якщо осі еліпса або гіперболи збігаються з осями координатної системи (рис. 4.6 – 4.7), аналітичні рівняння значно спрощуються і називаються **канонічними** або **стандартними**:

- еліпс (рис. 4.6)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.3)$$

- гіпербола (рис. 4.7)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4.4)$$

де  $a$  і  $b$  – довжини півосей кривої.

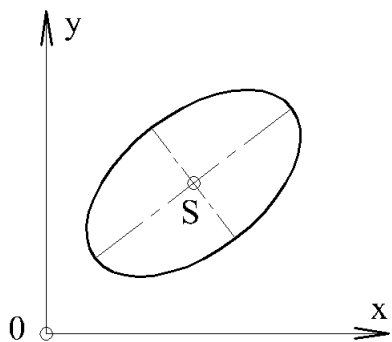


Рис. 4.5

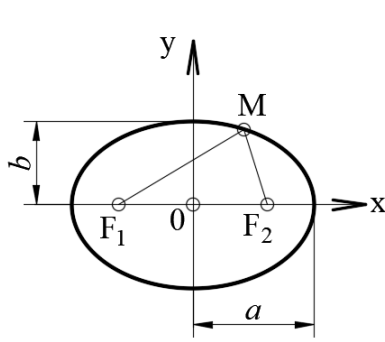


Рис. 4.6

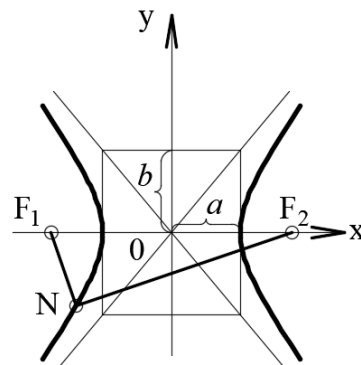


Рис. 4.7

Дві точки  $F_1$  і  $F_2$  на площині, сума відстаней від яких до будь-якої точки еліпса є сталою величиною, називаються фокусами (рис.4.6):  $F_1M + F_2M = 2a$ .

Для гіперболи сталою величиною є різниця відстаней від фокусів до будь-якої точки гіперболи:  $F_2N - F_1N = 2a$ .

Канонічне рівняння параболи маємо, якщо вісь параболи збігається з віссю  $Ox$  прямокутної декартової системи координат, а вершина параболи збігається з початком координат 0 (рис. 4.8).

$$y^2 = 2px, \quad (4.5)$$

де  $p/2 = OF$ .

Парабола є геометричним місцем точок ( $M$ ), рівновіддалених від фокуса ( $F$ ) і директриси ( $d$ ).

Коло описується канонічним рівнянням, якщо центр кола збігається з початком координат (рис. 4.9):

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (4.6)$$

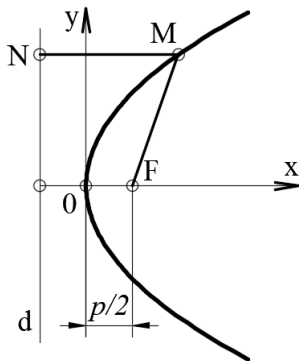


Рис. 4.8

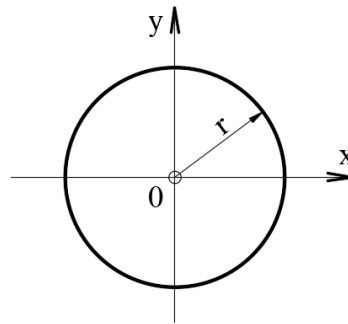


Рис. 4.9

Всі властивості кривих другого порядку досконало вивчені і наводяться у будь-якому довіднику з математики. Ці криві не мають особливих точок і тому широко застосовуються для конструювання як технічних, так і архітектурних форм. Наприклад, параболічні арки можна спостерігати у численних пам'ятниках архітектури.

Криві другого порядку ще називають конічними перерізами, оскільки, залежно від положення січної площини, перерізом конічної поверхні оберտання може бути будь-яка крива другого порядку (рис. 4.10, 4.11):

- горизонтальна січна площина  $\Gamma$  перерізає конічну поверхню оберտання по колу  $a$  (рис. 4.10);

- фронтально-проекціювальна площина  $\Delta$ , кут нахилу якої до  $\Pi_1$  менше кута нахилу твірних конуса, перетинає конус по еліпсу  $b$  (рис. 4.10) ;

- площина  $\Sigma$ , яка паралельна до однієї з твірних конуса, перерізає його по параболі  $c$  (рис. 4.10) ;

- у площині  $\Omega$ , яка паралельна двом твірним конуса, перерізом є гіпербола  $d$  (рис. 4.11).

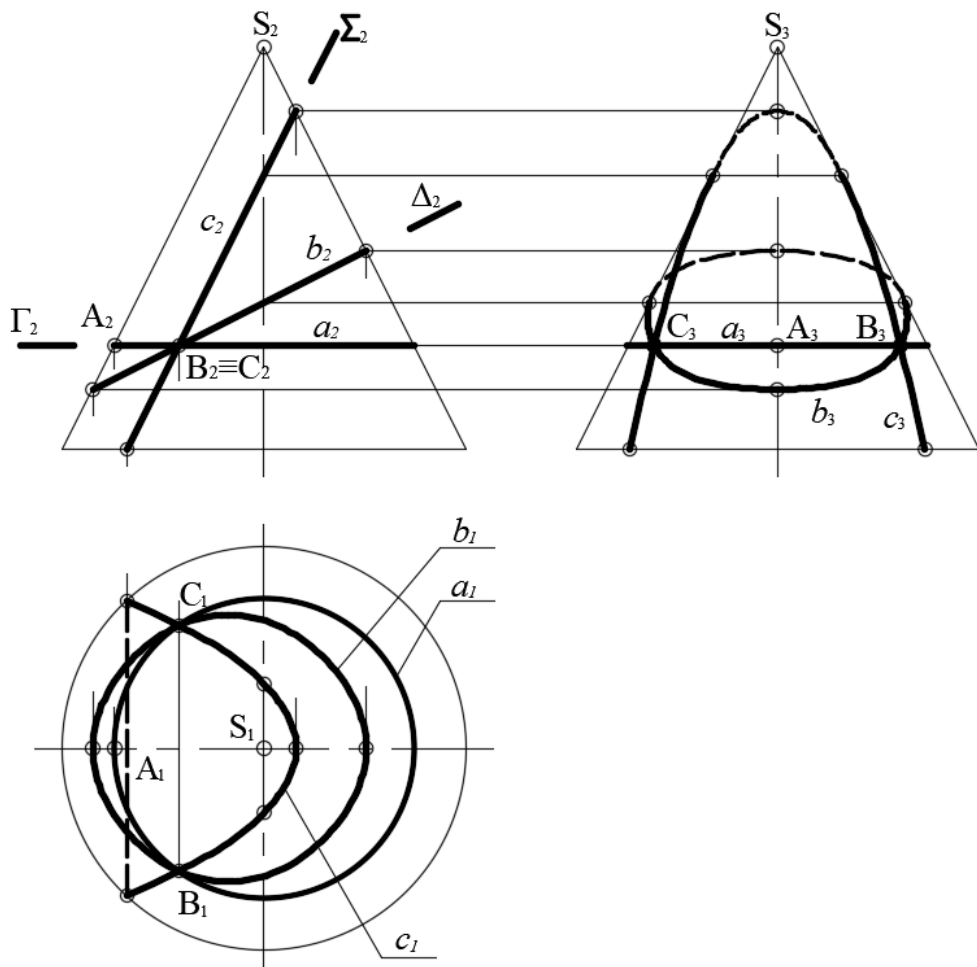


Рис. 4.10

Всі криві другого порядку також можна розглядати як центральні проекції однієї з кривих на різні площини. Так, наприклад, коло  $a$  з центру  $S$  на площину  $\Delta$  проєкціюється еліпсом (рис.4.10), на площину  $\Sigma$  – параболою, на площину  $\Omega$  – гіперболою (рис.4.11).

Якщо проєкціювальний промінь  $SA$  провести паралельно площині  $\Sigma$ , то центральною проєкцією точки  $A$  кола  $a$  на площині  $\Sigma$  є невласна (нескінченно віддалена) точка параболі  $c$ . Проекціями точок  $B$  і  $C$  кола  $a$  на площину  $\Omega$  є дві невласні точки гіперболи, якщо твірні  $SB$  і  $SC$  паралельні площині  $\Omega$ .

Існує багато різноманітних способів побудови точок кривих другого порядку, серед яких найбільш поширеним в інженерних задачах є так званий інженерний спосіб. Він дозволяє будувати криві другого порядку за трьома заданими точками  $A$ ,  $B$  і  $C$  і двома дотичними  $a$  і  $b$ , що проходять відповідно через точки  $A$  і  $B$  (рис.4.12,а).

Для побудови довільної точки  $M$  кривої 2-го порядку (рис. 4.12, б) довільно проводять промінь  $TG$ , на якому визначають точки  $K$  і  $N$  перетину прямої  $TG$  відповідно з прямими  $AC$  і  $BC$ . Прямі  $AN$  і  $BK$  перетинаються у точці  $M$  кривої другого порядку.

Якщо точку  $C$  обрати на медіані трикутника  $ABT$ , то її положення визначає тип кривої другого порядку. При  $TC > CD$  точка  $M$  належить еліпсу, при  $TC < CD$  – гіперболі, а при  $TC = CD$  – параболі.

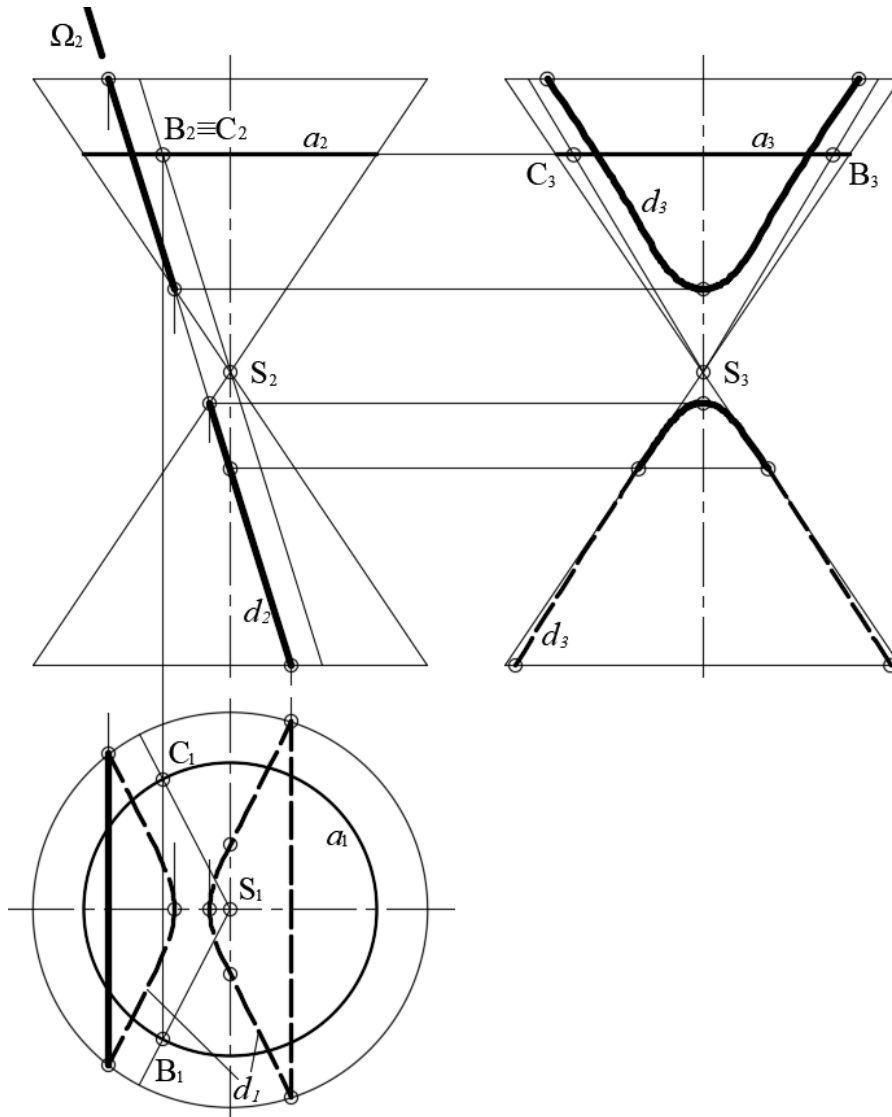


Рис. 4.11

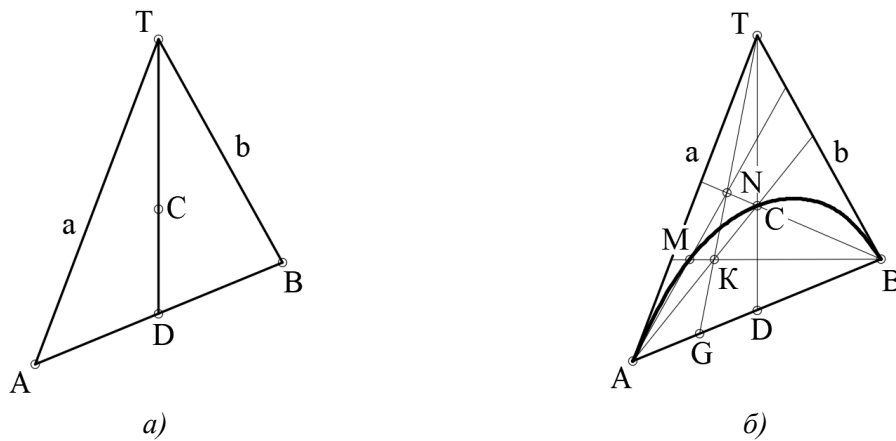


Рис. 4.12

В геометричному моделюванні широко використовуються алгебраїчні криві, які описуються алгебраїчним поліномом:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \quad (4.7)$$

де  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – коефіцієнти.

Такі криві можуть мати степінь від 1 до  $n$ , залежно від кількості членів з правого боку рівняння, і кожна з них має тільки одну власну точку перетину з вертикальною прямою  $x = c$ . Їх ще називають параболою  $n$ -го порядку.

На рис. 4.13. показано декілька таких ліній:

$y=0$  – пряма, що збігається з віссю  $Ox$ ;

$y=a_0$  – горизонтальна пряма;

$y=a_0+a_1x$  – похила пряма;

$y=a_0+a_1x+a_2x^2$  – парабола 2-го порядку;

$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$  – кубічна парабола тощо.

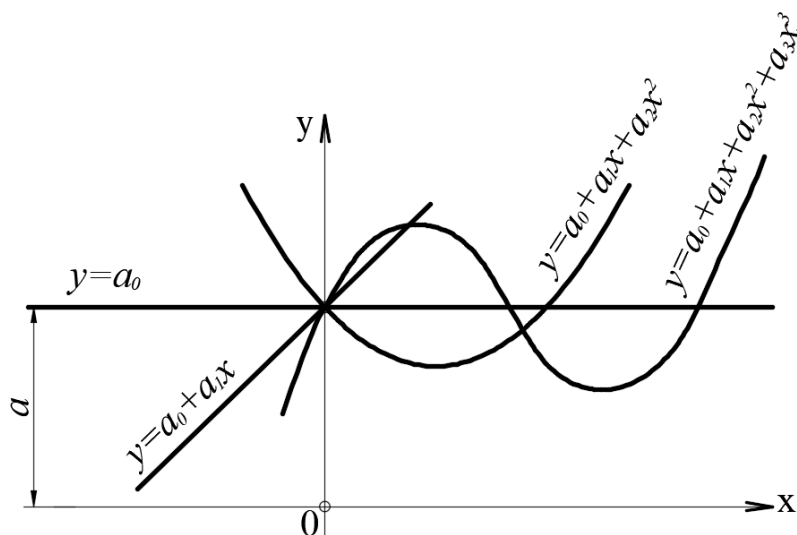


Рис. 4.13

Якщо криві другого порядку мають лише п'ять типів і досконало вивчені, то кількість типів кривих вищих порядків неймовірно зростає і досконало вивченими є лише окремі так звані «визначні криві вищих порядків», які мають цікаві властивості і пов'язані з розв'язанням різних класичних геометричних задач [12].

### 4.3. Плоскі трансцендентні криві

Трансцендентними є криві, рівняння яких у прямокутній декартовій системі координат не є алгебраїчними. Їх можна розглядати як алгебраїчні криві нескінченно високого порядку [12].

Прикладами трансцендентних кривих є різноманітні спіралі (спіраль Архімеда, логарифмічна спіраль, евольвента кола, графіки тригонометричних функцій тощо).

Розглянемо деякі приклади побудови трансцендентних кривих.

Спіраль Архімеда (рис. 4.14) утворюється рівномірним центробіжним рухом точки ( $M$ ) з одночасним обертанням навколо центру  $O$ .

Для побудови точок спіралі Архімеда з центром  $O$ , яка проходить через задану точку  $M$ , потрібно центральний кут  $AOM$  та відрізок  $OM$  поділити на однакове число рівних частин. Через точки поділу радіуса провести концентричні кола з центром  $O$ . При цьому утворюється в'язка прямих і в'язка кіл з центром  $O$ . Відповідні лінії цих в'язок перетинаються у точках спіралі Архімеда.

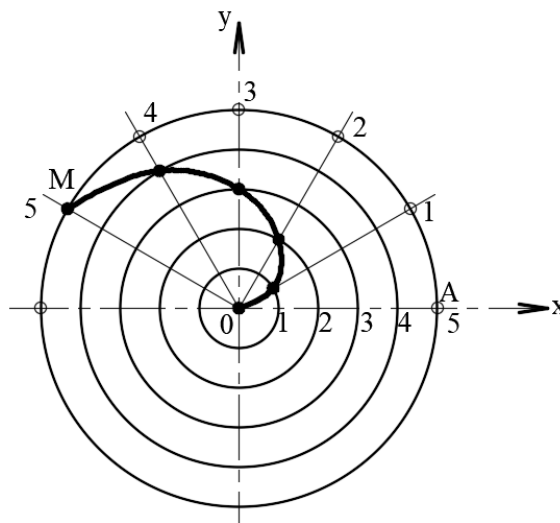


Рис. 4.14

Полярне рівняння спіралі Архімеда має вигляд:

$$\rho = k\varphi, \quad (4.8)$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності;

$\rho$  – відстань від центру  $O$  до точки спіралі;

$\varphi$  – полярний кут.

Рівняння у декартовій системі координат:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k \cdot \arctg \frac{y}{x}, \quad (4.9)$$

В техніці широко використовується трансцендентна крива, яка називається евольвента кола (рис. 4.15). Для побудови точок евольвенти необхідно поділити коло на певне число  $n$  рівних частин, у точках поділу провести дотичні і на кожній з них

від точки дотику ( $A$ ) відкласти довжину дуги ( $\widetilde{SA}$ ) від початкової точки  $S$  до точки дотику ( $A$ ):

$$AB = \widetilde{SA} = \frac{2\pi r \cdot i}{n}, \quad (4.10)$$

де  $r$  – радіус кола;  
 $i$  – номер точки на колі;  
 $n$  – число дуг поділу кола.

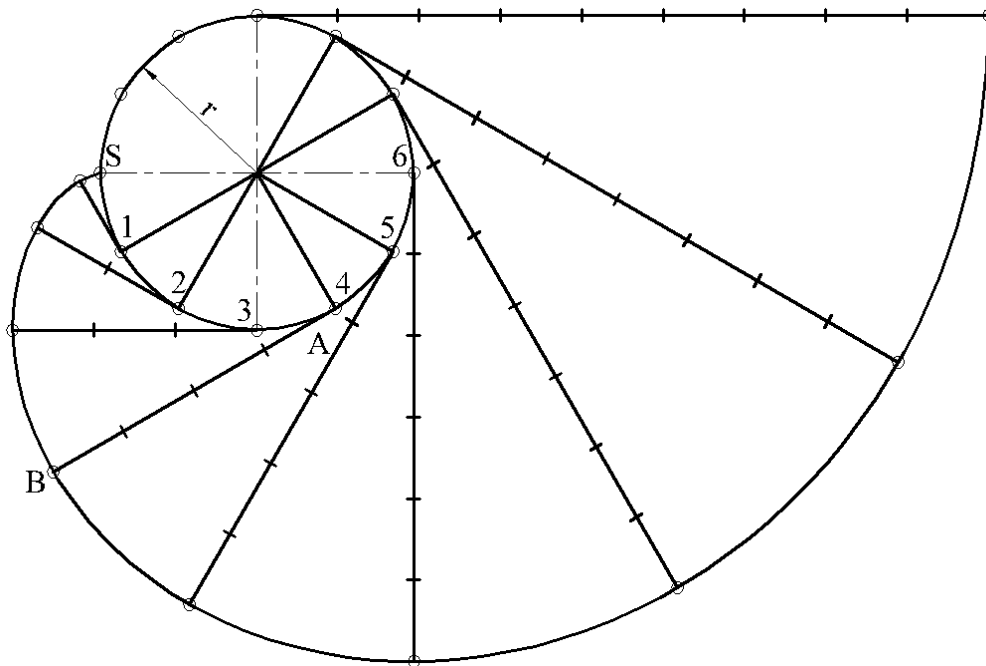


Рис. 4.15

Для архітекторів цікавою є трансцендентна крива, яка називається «ланцюговою лінією» (рис. 4.16).

Форму ланцюгової лінії приймає однорідна гнучка нерозтягнута нитка з закріпленими кінцями під дією власної ваги (рис. 4.16a). Її рівняння має вигляд:

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}), \quad (4.11)$$

де  $a$  – параметр ланцюгової лінії;  
 $e \approx 2,7183\dots$  – трансцендентне число.

Ланцюгова лінія є основою геометричного конструювання деяких вантових систем, арок, склепінь. В арці, яка окреслена за ланцюговою лінією, не виникає згинаючих моментів під дією власної ваги. Така арка, складена з цеглин або або каміння навіть без скріплюючого розчину не буде руйнуватися.

Рівняння ланцюгової лінії, що показана на рис. 4.16б має вигляд:

$$y = \frac{a}{2} \left( 2 - e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + h \quad (4.12)$$

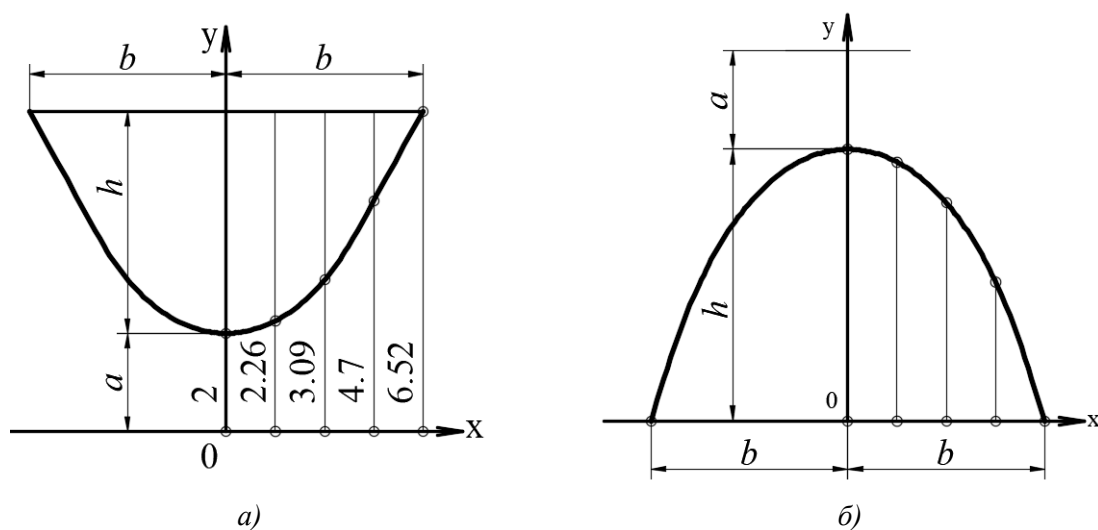


Рис. 4.16

Графічного алгоритму побудови точок ланцюгової лінії не існує, тому її точки будують за рівнянням (4.11) або (4.12).

Якщо задано стрілу підйому  $h$  арки та прогон  $b$ , то параметр  $a$  ланцюгової лінії можна визначити наближено за формулою:

$$a \approx \frac{b^2}{2h} \quad (4.13)$$

Формула (4.12) придатна тільки для пологих арок, у яких  $\frac{h}{2b} \leq \frac{1}{8}$ . Тоді відносна похибка у визначенні ординат точок ланцюгової лінії не перевищує 2 %.

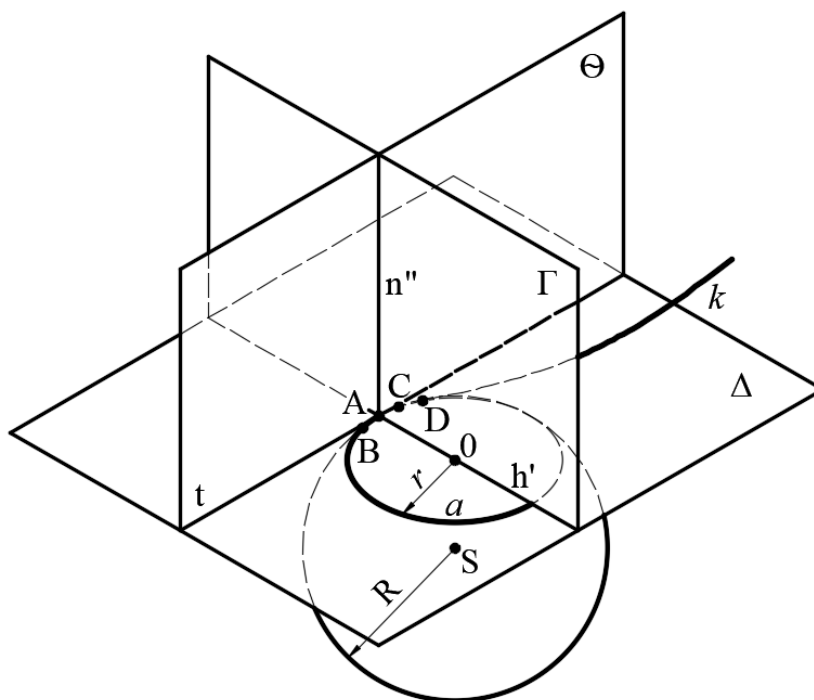
В архітектурному проектуванні ланцюгову лінію (4.8) часто замінюють параболою другого порядку:

$$y = h \cdot \frac{hx^2}{b^2} \quad (4.14)$$

#### 4.4. Просторові криві

Просторові криві, так само як і плоскі, поділяються на алгебраїчні і трансцендентні. Проекціями просторової кривої є плоскі криві і аналітично вона описується двома рівняннями своїх проекцій.

Локальні властивості просторових кривих визначаються за допомогою тригранника Френе \*, який складається з трьох взаємно перпендикулярних площин (рис. 4.17).



Пряма  $t$ , що проходить через дві нескінченно близькі точки ( $A$  і  $B$ ) просторової кривої  $k$ , є дотичною. Всі прямі, перпендикулярні до дотичної  $t$  у точці дотику  $A$  просторової кривої, належать **нормальній площині**  $\Gamma$ . Через три нескінченно близькі точки ( $A, B, C$ ) кривої  $k$  проходить **стична площина**  $\Delta$ . Площина  $\Theta$ , що проходить через дотичну  $t$  і перпендикулярна площинам  $\Gamma$  і  $\Delta$ , називається **спрямляючою площиною**.

Три нескінченно близькі точки  $A, B, C$  просторової кривої  $k$  визначають **стичне коло**  $a$ , яке належить стичній площині  $\Delta$ . Величина  $\frac{1}{r}$ , обернена до радіуса  $r$  стичного кола, є кривиною просторової кривої  $k$  у точці  $A$ . Сфера, яка проходить через чотири нескінченно близькі точки  $A, B, C, D$  просторової кривої  $k$ , називається **стичною сферою**. Величина, обернена до радіуса стичної сфери, називається **скрутом просторової кривої**  $k$  у точці  $A$ . Скрут є мірою повороту тригранника Френе навколо дотичної  $t$  при русі точки  $A$  вздовж кривої  $k$ . Перерізом стичної сфери стичною площиною  $\Delta$  є стичне коло  $a$ .

Проекціями дотичної до просторової кривої є дотичні до проєкцій кривої. Просторові криві, так само як і плоскі, можуть мати особливі точки, в яких порушуються локальні властивості кривої. Проекцією звичайної точки просторової кривої не завжди є звичайна точка проєкції. І навпаки, проєкцією особливої точки просторової кривої може бути звичайна точка проєкції.

---

\*Ф.Френе – французький математик 19 сторіччя

Наприклад (рис. 4.18), якщо дотична  $t$  до просторової кривої є проєкціовальною, то проєкцією звичайної точки дотику  $A$  просторової кривої буде особлива точка  $A_1$  проєкції  $k_1$ , а проєкцією особливої точки  $B$  може бути звичайна точка  $B_1$  проєкції  $k_1$ .

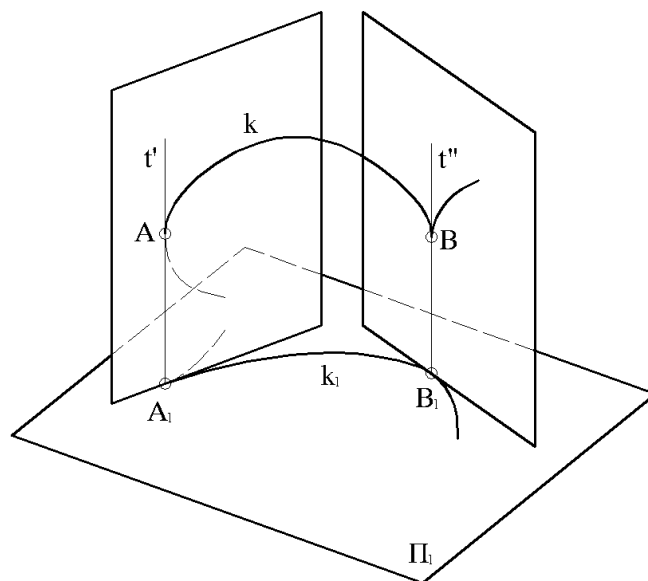


Рис. 4.18

Серед просторових кривих найбільше поширення у техніці мають гвинтові лінії, які є трансцендентними кривими.

**Циліндрична гвинтова лінія** (рис. 4.19) утворюється гвинтовим рухом точки ( $A$ ). Точка  $A$  рівномірно обертається навколо осі  $l$ , одночасно рівномірно рухаючись уздовж осі.

Для побудови точок гвинтової лінії прямий круговий циліндр, по поверхні якого рухається точка  $A$ , у межах заданого кроку  $h$  гвинтової лінії горизонтальними перерізами поділяють на певне число рівних частин. На таке саме число рівних частин поділяють коло основи циліндра.

При повороті точки  $A$  на кут  $A_1O_1I_1$  вона переміщується на перший рівень уздовж осі циліндра і т.д. Фронтальні проєкції точок будують за відповідністю з горизонтальними на відповідних горизонтальних перерізах.

Серед основних властивостей циліндричної гвинтової лінії можна зазначити такі:

- всі дотичні до гвинтової лінії однаково нахилені до площини  $\Pi_1$ ;
- в усіх точках циліндрична гвинтова лінія має однакову кривину і однаковий скрут;
- фронтальною проєкцією гвинтової лінії, яку показано на рис. 4.19, є синусоїда, якщо крок  $h$  дорівнює довжині кола горизонтальної проєкції.

У полярній циліндричній системі координат циліндрична гвинтова лінія описується системою рівнянь:

$$\rho = r$$

$$z = \frac{h\varphi}{360^\circ},$$
(4.15)

де  $r$  – радіус основи циліндра;  
 $h$  – крок гвинтової лінії;  
 $\varphi$  – кут повороту точки  $A$ .

Циліндрична гвинтова лінія є основою для утворення гвинтових поверхонь.

Конічною гвинтовою лінією (рис. 4.20) називають просторову криву, розміщену на поверхні конуса обертання та утворену рівномірним рухом точки по твірній, що рівномірно обертається навколо осі конуса.

Для побудови точок конічної гвинтової лінії вісь конуса на інтервалі  $h$  поділяють на певне число рівних частин та наносять таке саме число твірних з рівномірним кутовим кроком. Точки перетину твірних конуса з відповідними горизонтальними перерізами  $i$  є точками конічної гвинтової лінії.

Горизонтальною проекцією конічної гвинтової лінії, яку показано на рис. 4.20, є спіраль Архімеда.

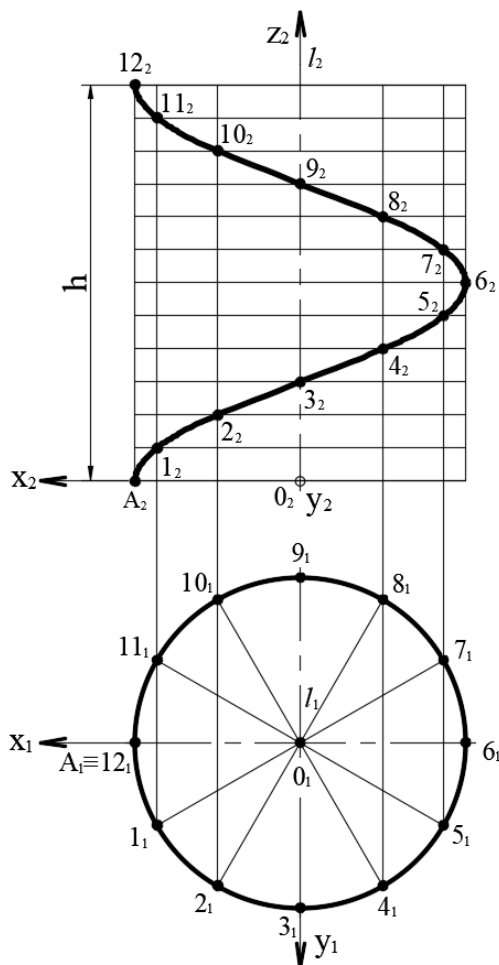


Рис. 4.19

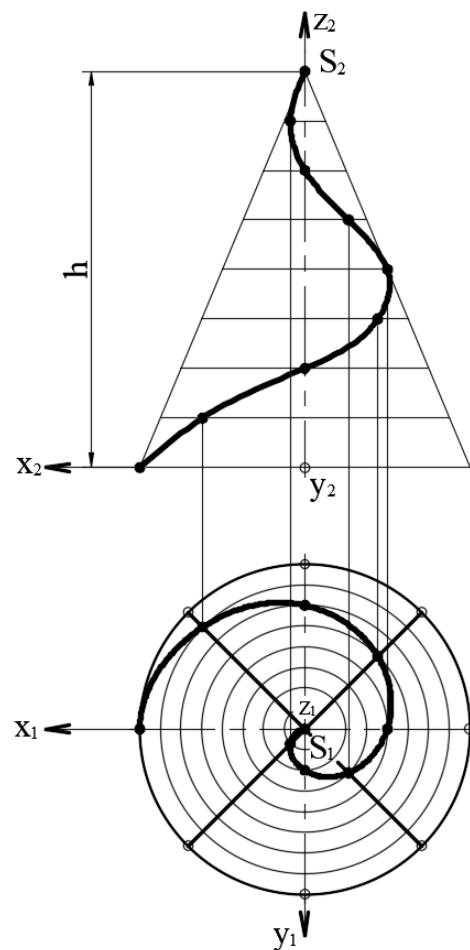


Рис. 4.20

У циліндричній полярній системі координат кінчна гвинтова лінія описується системою рівнянь:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r\varphi}{360^\circ} \\ z &= \frac{h\varphi}{360^\circ}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

де  $\varphi$  – полярний кут;  
 $h$  – висота конуса;  
 $r$  – радіус основи конуса.

#### 4.5. Параметри кривих ліній

Величини, які визначають єдину лінію на площині або у просторі, називаються її параметрами. Будь-які геометричні фігури, за винятком точки, прямої і площини, можуть відрізнятися за формою. Наприклад, два кола різних діаметрів сумістити неможливо. Єдине коло на площині визначається не тільки положенням центру, а й радіусом або діаметром. Радіус кола є параметром його форми, а координати центру – параметрами положення. Отже, величини, які визначають форму кривої (її розміри), називаються параметрами форми, а величини, що визначають положення кривої – параметрами положення.

Загальне число параметрів кривої у заданому просторі називається її параметричним числом у цьому просторі:

$$P = P_\varphi + P_n, \quad (4.17)$$

де  $P_\varphi$  – число параметрів форми;

$P_n$  – число параметрів положення. У загальному випадку будь-яка плоска крива на площині має три параметри положення, що дорівнює числу степенів вільності кривої (рис. 4.21).

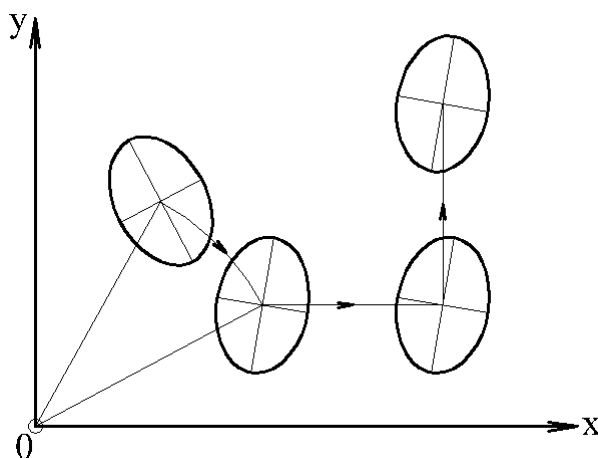


Рис. 4.21

Будь-яку зміну положення кривої на площині можна здійснити за допомогою трьох елементарних переміщень – повороту навколо довільно обраного центру і двох прямолінійно-поступальних рухів уздовж довільно призначених напрямів (рис. 4.21), тому  $P_n = 3$ . Винятками є коло, яке має тільки два параметри положення, оскільки обертання навколо власного центру не змінює положення кола, і пряма, яка також має два параметри положення.

Параметричне число  $P$  кривої на площині дорівнює числу незалежних коефіцієнтів у загальному рівнянні кривої. Наприклад, загальне рівняння кривої другого порядку

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + I = 0 \quad (4.18)$$

має п'ять незалежних коефіцієнтів, що відповідає параметричному числу кривої ( $P = 5$ ).

Криву лінію завжди можна так розмістити відносно системи координат, щоб параметри положення дорівнювали нулю. В такому разі рівняння кривої набуває найпростішого вигляду і називається стандартним або канонічним. Наприклад, якщо осями еліпса є координатні осі (рис. 4.22), його рівняння приймає вигляд (4.3).

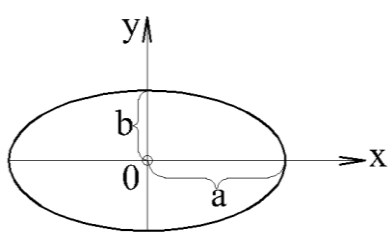


Рис. 4.22

Якщо всі параметри  $p$ -параметричної кривої зробити вільними, площина заповнюється  $p$ -параметричною множиною кривих. Для вилучення з цієї множини однієї конкретної кривої потрібно зв'язати всі її параметри. Зв'язувати параметри можна за допомогою геометричних умов. Так, наприклад, умова проходження кривої через задану точку або умова дотику кривої до заданої дотичної зв'язує один параметр множини. З цього випливає, що  $p$ -параметричну криву можна провести через  $p$  заданих точок або за  $p$  заданими дотичними, або якщо число заданих точок і заданих дотичних в сумі складає число  $p$ .

У тривимірному просторі будь-яка крива (плоска або просторова), за винятком кола та циліндричної гвинтової лінії, має шість параметрів положення за числом степенів вільності (рис. 4.23). Пряма у просторі має тільки чотири параметри положення і жодного параметру форми.

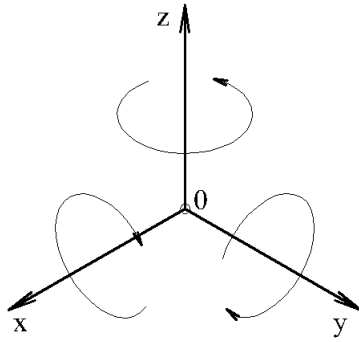


Рис. 4.23

Параметричне число кривої у просторі дорівнює:

$$P = P_\phi + 6, \quad (4.19)$$

де  $P_\phi$  – число параметрів форми. Наприклад, еліпс у тривимірному просторі має 2 параметри форми та 6 параметрів положення.

Якщо всі параметри кривої звільнити, простір заповнюється  $p$ -параметричною множиною кривих. Зв'язувати параметри у просторі можна так само, як і на площині за допомогою геометричних умов. Так, наприклад, умова перетину кривих простору з заданою лінією потребує витрати одного параметру, умова проходження кривих простору через задану точку потребує двох параметрів тощо.

#### 4.6. Інтерполяція точок на площині

З геометричної точки зору одновимірною інтерполяцією точок є проведення гладкої кривої через задані точки з можливим врахуванням заданих локальних характеристик кривої. Інтерполяція точок може бути суцільною, коли через задані точки проводять одну криву, або кусковою, коли точки з'єднуються дугами складеної кривої з забезпеченням гладкості стикування окремих дуг. Найпростішим прикладом суцільної інтерполяції трьох точок може бути проведення через них дуги кола (рис. 4.24).

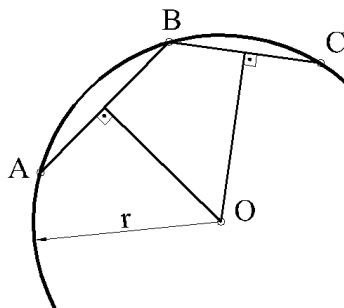


Рис. 4.24

При цьому центр  $O$  дуги визначається в результаті перетину двох перпендикулярів, проведених через середини хорд  $AB$  і  $BC$ .

Для суцільної інтерполяції точок на площині часто використовується поліном (4.7), який дозволяє проводити одну криву через довільне число  $n$  заданих точок. Така інтерполяція виконується аналітично, тобто аналітично визначаються коефіцієнти  $a_i$  в рівнянні кривої, яка проходить через задані точки.

Наприклад, для інтерполяції чотирьох точок  $A, B, C$  і  $D$  (рис. 4.25) береться частина полінома (4.7), яка має чотири коефіцієнти  $a_i$ , де  $i$  – номер коефіцієнта:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (4.20)$$

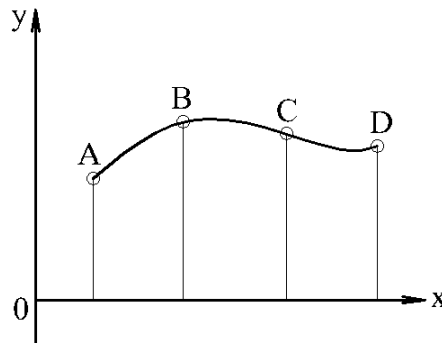


Рис. 4.25

До рівняння (4.20) по черзі підставляються координати заданих точок  $A, B, C, D$  і складається система рівнянь:

$$\begin{aligned} y_A &= a_0 + a_1x_A + a_2x_A^2 + a_3x_A^3 \\ y_B &= a_0 + a_1x_B + a_2x_B^2 + a_3x_B^3 \\ y_C &= a_0 + a_1x_C + a_2x_C^2 + a_3x_C^3 \\ y_D &= a_0 + a_1x_D + a_2x_D^2 + a_3x_D^3 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Невідомі коефіцієнти  $a_i$  визначаються при розв'язанні системи рівнянь (4.21).

Кускова інтерполяція точок передбачає гладке стикування дуг кривих, що проходять через задані точки. Тому в точках з'єднання дуг кривих повинні бути зазначені умови гладкого стикування. Кускову інтерполяцію точок на площині розглянемо на прикладі використання інженерного способу побудови кривих другого порядку (рис. 4.26).

Задано точки  $A, B, C, D, E$ . У точках  $A, B$  і  $E$  задано дотичні відповідно  $AT, TS$  і  $SE$ . Дотична  $TS$  є спільною для дуг  $ACB$  та  $BDE$  кривих другого порядку, що забезпечує їх гладке стикування у точці  $B$ . Проміжні точки  $1, 2, 3, 4$  побудовано так, як було показано на рис. 4.12б.

Кускова інтерполяція кубічною параболою (4.20) виконується аналітично. Параболу (4.20) проводять на всіх інтервалах між заданими точками, крім першого ( $AB$ ) і останнього ( $DE$ ). В усіх проміжних точках ( $B, C, D$ ) задають дотичні паралельно відповідним хордам ( $t_B \parallel AC; t_C \parallel BD; t_D \parallel CE$ ).

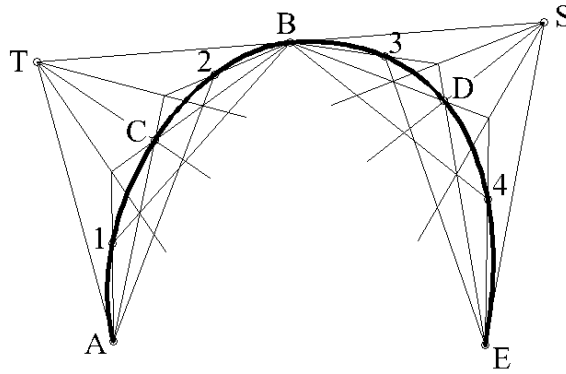


Рис. 4.26

Аналітично ця умова виглядає як задання тангенсів кутів нахилу дотичних до осі  $Ox$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}; \operatorname{tg} \alpha_C = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B}; \operatorname{tg} \alpha_D = \frac{y_E - y_C}{x_E - x_C} \quad (4.22)$$

Зазначені тангенси кутів дорівнюють першій похідній функції (4.20) у відповідній точці ( $B$ ,  $C$  або  $D$ ):

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = \operatorname{tg} \alpha \quad (4.23)$$

На довільному інтервалі (крім першого і останнього) визначають коефіцієнти  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  кубічної параболи, яка проходить через дві граничні точки інтервалу і дотикається до двох дотичних у цих точках. Для цього до рівняння (4.20) - підставляють задані координати двох точок, а до рівняння (4.23) визначений тангенс кута нахилу відповідних дотичних. Наприклад, на інтервалі  $BC$  така система рівнянь має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} y_B &= a_0 + a_1x_B + a_2x_B^2 + a_3x_B^3 \\ y_C &= a_0 + a_1x_C + a_2x_C^2 + a_3x_C^3 \\ \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} &= a_1 + 2a_2x_B + 3a_3x_B^2 \\ \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} &= a_1 + 2a_2x_C + 3a_3x_C^2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Невідомі коефіцієнти кривої (4.20), яка з'єднує точки  $B$  і  $C$  визначаються з системи рівнянь (4.24).

На першому ( $AB$ ) і останньому ( $DE$ ) інтервалах проводять дуги парабол другого порядку:

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 \quad (4.25)$$

за умовами їх проходження через точки границь інтервалів та дотику до визначеної дотичної в одній з точок. Наприклад, для інтервалу  $AB$  такі умови записуються у вигляді наступної системи рівнянь:

$$\begin{aligned} y_A &= b_0 + b_1 x_A + b_2 x_A^2 \\ y_B &= b_0 + b_1 x_B + b_2 x_B^2 \\ \frac{y_c - y_A}{x_c - x_A} &= b_1 + 2b_2 x_B \end{aligned} \quad (4.26)$$

З системи рівнянь (4.26) визначаються невідомі коефіцієнти  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  параболі (4.25), яка відповідає зазначеним умовам.

Одним з можливих способів одновимірної інтерполяції точок у просторі просторовими кривими є перехід до інтерполяції проєкцій точок на двох площинах проєкцій.

Вище було наведено лише окремі найпростіші випадки одновимірної інтерполяції точок. До цього часу досконально розроблено багато способів одновимірної інтерполяції, які дозволяють враховувати найрізноманітніші умови проведення гладких кривих через задані точки.

Одновимірна інтерполяція точок у тривимірному просторі зводиться до інтерполяції проєкцій точок на площинах проєкцій.

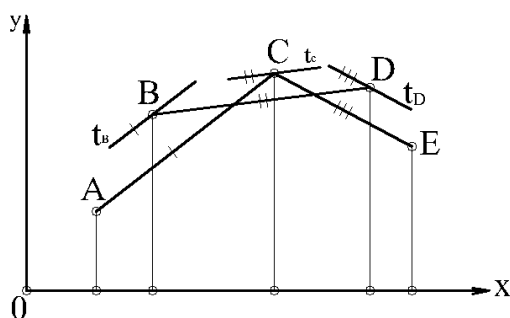


Рис. 4.27

### Запитання для самоконтролю

1. Чим відрізняються алгебраїчні криві від трансцендентних?
2. Яка крива є основою для утворення гвинтових поверхонь?
3. Що таке інтерполяція?
4. Як називаються площини, що утворюють тригранник Френе?
5. З яких параметрів складається параметричне число кривої лінії?

## РОЗДІЛ 5. КРИВІ ПОВЕРХНІ

Застосування будівельних та архітектурних конструкцій, обмежених кривими поверхнями, поширене ще з давніх часів. Різноманітні покриття, башти та куполи надавали особливої виразності архітектурним спорудам на фоні міської забудови та навколишнього ландшафту. Нині важливого значення набуває знання закономірностей побудови кривих поверхонь, коли застосування кривої поверхні в інженерному або архітектурному вирішенні є найоптимальнішим або єдино можливим. Форму кривих поверхонь мають просторові конструкції покриттів будівель і споруд (рис.5.1, рис.5.2).



Рис.5.1 УкрІНТІ, м. Київ Україна



Рис.5.2 Будинок меблів, м. Київ Україна

За допомогою таких конструкцій перекривають великі за площею приміщення без проміжних опор, що важливо при будівництві спортивних, видовищних, торгових залів, вокзалів, аеропортів та інших громадських споруд. Оптимальною є криволінійна форма таких промислових споруд, як резервуари, газгольдери тощо. Криволінійну форму мають багато елементів інженерного устаткування будівель; нарешті, земний рельєф, на якому розміщують об'єкти будівництва, також обмежується кривими поверхнями. Формоутворення кривих поверхонь широко застосовується у технічному дизайні. Щоб спроектувати і виготовити ці поверхні, необхідно володіти законами їх утворення і зображення.

### 5.1 Способи утворення кривих поверхонь та їх систематизація

**Крива поверхня** – це неперервна двопараметрична множина точок або однопараметрична множина ліній. В нарисної геометрії поверхні задаються графічно, їх проєкціями. Неперервна поверхня зображується точками або лініями з певним інтервалом. Множина точок або ліній, що належать поверхні, називається **каркасом поверхні**.

Однопараметричну множину ліній на поверхні, які мають спільний закон утворення та взаємозв'язані певною залежністю, називають **лінійним каркасом поверхні**. Форму та положення конкретної лінії каркаса на поверхні визначають єдиним параметром, який називають **законом каркаса**.

До утворення неперервного каркаса поверхні може бути застосовано два способи: каркасно-параметричний і каркасно-кінематичний.

**Каркасно-параметричний спосіб утворення поверхонь.** У цьому випадку поверхня утворюється завдяки зв'язуванню параметрів множини ліній, що заповнюють простір [11]. Визначають параметричне число лінії за формулою

$$P = P_{\phi} + P_{\Pi},$$

де  $P_{\phi}$ ,  $P_{\Pi}$  – число параметрів форми і положення кривої відповідно.

Задають умови, які зв'язують  $(P-1)$  параметрів множини ліній, що заповнюють простір. Один вільний параметр визначає однопараметричну ( $\infty^1$ ) множину ліній каркаса поверхні. Цей параметр є параметром каркаса.

На рис. 5.3 наведено приклад утворення поверхні з каркасом із кіл. Коло має один параметр форми і п'ять параметрів положення у просторі, тому простір заповнюється шестипараметричною множиною кіл. Для утворення поверхні потрібно зв'язати п'ять параметрів, залишивши вільним один параметр каркаса. Лініями каркаса в нашому прикладі є кола, що належать горизонтальним площинам.

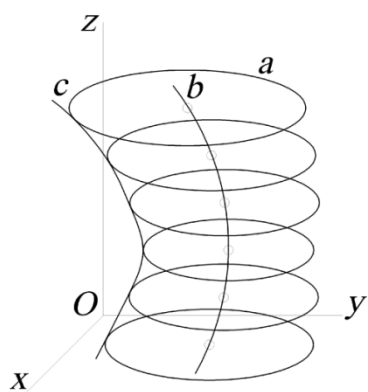


Рис.5.3

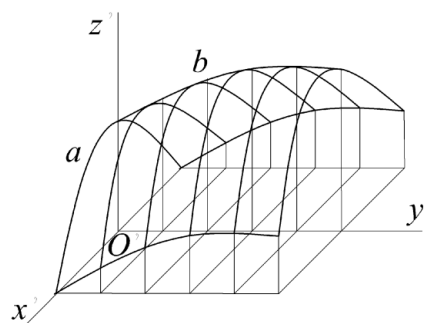


Рис.5.4

Ця умова зв'язує два параметри множини кіл. Умова належності центрів кіл каркаса до лінії  $b$  зв'язує ще два параметри множини, оскільки в кожній площині з двопараметричної множини точок виділяється єдина точка – центр кола. Умова належності до поверхні заданої лінії  $c$  зв'язує ще один параметр множини кіл, оскільки точки перетину лінії з кожною горизонтальною площиною визначають радіус кола. Таким чином з усіх шести параметрів множини кіл зв'язуються п'ять параметрів. Невизначеною залишається відстань кожного кола від горизонтальної площини проєкцій. Ця відстань  $i$  є параметром каркаса поверхні. Якщо її задавати з певним інтервалом, то можна визначити дискретний каркас поверхні для її графічного зображення.

**Каркасно-кінематичний спосіб утворення поверхонь.** Цей спосіб утворення поверхні ґрунтується на звільненні одного параметра заданої лінії. Через це утворюється однопараметрична множина ліній каркаса поверхні. Як правило, параметр звільнюється при заданні закону руху лінії у просторі. На рис.5.4 у площині  $xOz$  задано конкретну параболу  $a$ , яка не має вільних параметрів форми.

Звільнення одного параметра положення дає змогу параболі рухатися за визначеним законом, наприклад, поступально уздовж лінії  $b$ . Множина послідовних положень параболу у просторі утворює неперервний каркас поверхні. Такий спосіб утворення поверхонь називають кінематичним, лінію  $a$  каркасу – **твірною** поверхні, а лінію  $b$  – **напрямною**. Поверхні, які утворені рухом твірної певної форми, називають **кінематичними поверхнями з твірною сталої форми**.

З параметром положення лінії каркаса можуть зв'язуватися також параметри її форми. За параметр каркаса можна обрати будь-який з цих параметрів. При цьому незалежним (вільним) є тільки один параметр каркаса, а решта змінних параметрів визначаються як залежні від першого. Поверхню, яка утворюється у такий спосіб, називають **кінематичною поверхнею з твірною змінної форми**. Прикладом може бути поверхня, зображена на рис.5.3. Твірне коло рухається у просторі таким чином, що його центр переміщується уздовж напрямної  $b$ , а площина кола весь час залишається паралельною площині  $xOy$ . Зміна радіуса в процесі переміщення задається лінією  $c$ . Змінюються два параметри кола - положення площини кола та радіус, проте незалежним є тільки один.

Поверхня вважається заданою, якщо за однією проекцією точки, яка належить поверхні, можна визначити другу проекцію. Сукупність умов, які є необхідними і достатніми для задання поверхні називають **визначником поверхні**. Він складається з геометричної та алгоритмічної частин. Геометричною частиною визначника поверхні є геометричні фігури, зображені на рисунку, за допомогою яких зв'язуються параметри множини ліній простору. Алгоритмічна частина визначника – це сукупність правил застосування його геометричної частини для утворення поверхонь. Наприклад, геометричною частиною визначника поверхні, зображеної на рис.5.3, є лінії  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і площина  $xOy$ . До алгоритмічної частини визначника цієї поверхні належать правила:

- 1) коло  $a$  є лінією каркаса поверхні;
- 2) центр кола має належати лінії  $b$ ;
- 3) усі лінії каркаса поверхні мають перетинати лінію  $c$ .

Систематизація поверхонь за виглядом ліній, що утворюють каркас поверхні, чи за законом каркасу дозволяє створити узагальнені алгоритми їх побудови. Найбільш розповсюдженими в інженерній практиці є поверхні з найпростішими лініями каркасу – прямими та колами, які відповідно називають **лінійчатими** та **циклічними**. Деякі поверхні можуть належати як до лінійчатих так і до циклічних. Наприклад, на поверхні циліндра обертання можна визначити як лінійчатий каркас (множина прямолінійних твірних, паралельних до осі), так і циклічний (множина кіл у площинах, перпендикулярних до осі). Основою систематизації поверхонь за законом каркаса може бути вид руху твірної у просторі, якщо каркас поверхні утворюється при звільненні одного параметра твірної. В залежності від характеру переміщення твірної кінематичні поверхні систематизують у окремі групи.

Найпростішими видами руху є обертальний, поступальний та гвинтовий. Поверхні, що утворені обертанням твірної лінії навколо нерухомої осі, називають **поверхнями обертання**.

Поверхні, що утворюються в результаті поступального руху твірної, називаються **поверхнями паралельного перенесення**, а гвинтового руху – **гвинтовими поверхнями**.

Поверхні можна систематизувати також за іншими ознаками. У разі, коли каркас поверхні утворюється зв'язуванням параметрів множини ліній, що заповнюють простір, систематизація поверхонь за законом каркаса ґрунтується на різних сукупностях ліній, за допомогою яких зв'язуються параметри множини. Такий принцип систематизації лінійчатих поверхонь розглянуто в наступному підрозділі.

Поверхні як і криві лінії часто систематизують за алгебраїчними ознаками. У цьому разі всі поверхні за видом рівняння поділяють на алгебраїчні і трансцендентні. Алгебраїчні поверхні характеризуються порядком – найбільшою кількістю точок перетину поверхні з прямою лінією загального положення. В інженерній практиці частіше за усе використовують поверхні другого порядку – еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди, сфери, конуси та циліндри другого порядку. Властивості поверхонь другого порядку детально вивчають в курсі аналітичної геометрії.

## 5.2 Нерозгортні лінійчаті поверхні

Лінійчата поверхня утворюється при зв'язуванні трьох параметрів чотирипараметричної множини прямих, що заповнюють простір. Умова перетину прямих лінійчатого простору із заданою лінією зв'язує один параметр множини. Для доведення цього твердження досить визначити множину прямих, які перетинають задану лінію, і порівняти розмірність цієї множини з розмірністю множини прямих, що заповнюють простір. Кожна точка, яка належить площині проєкцій, наприклад  $\Pi_1$ , у парі з довільною точкою  $M$  заданої лінії  $m$  визначає єдину пряму (рис.5.5). Всі точки площини  $\Pi_1$  у парі з точкою  $M$  визначають двопараметричну множину прямих, які проходять через точку  $M$ . Лінії  $m$  належить однопараметрична множина точок, отже, прямі, які перетинають лінію  $m$  утворюють трипараметричну множину. Простір заповнюється чотирипараметричною множиною прямих, тому умова перетину прямих із заданою лінією зв'язує один параметр лінійчатого простору.

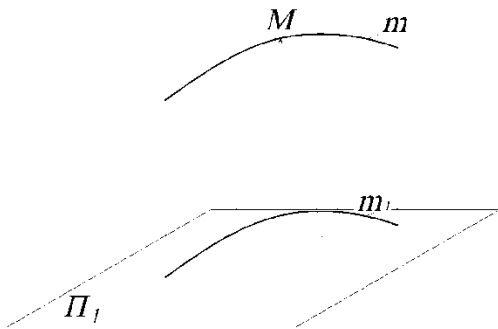


Рис.5.5

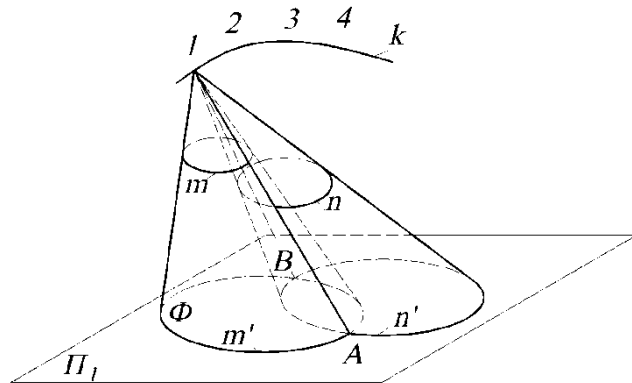


Рис.5.6

Для утворення поверхні потрібно зв'язати три параметри лінійчатого простору, для чого можна тричі використати умову перетину множини прямих із заданими лініями, наприклад  $k$ ,  $m$  та  $n$  (рис 5.6). Щоб побудувати дискретний лінійчатий каркас поверхні, слід на одній з ліній (наприклад на лінії  $k$ ) виділити з певним інтервалом точки  $1, 2, 3, \dots$  і через них провести твірні поверхні.

Для визначення твірних, які проходять через точку  $1$ , будують два конуси із спільною вершиною  $1$  і напрямними  $m$  і  $n$ . Конуси перетинаються з площиною проєкцій  $\Pi_1$  по лініях  $m'$  і  $n'$ . Точки  $A$  і  $B$  перетину ліній  $m'$  і  $n'$  визначають шукані твірні  $AI$  і  $BI$ .

У загальному випадку дві нескінченно близькі твірні лінійчатої поверхні є мимобіжними прямими. Таки поверхні називають нерозгортними. Їх систематизують залежно від виду ліній  $k$ ,  $m$  і  $n$ , які можуть бути кривими і прямими, власними і нескінченно віддаленими.

Поверхню, прямі лінії каркаса якої перетинають три задані мимобіжні прямі, називають **однопорожнинним гіперболоїдом** (рис.5.7). Для полегшення побудови каркаса поверхні одну з прямих задано в проєкціювальному положенні. Це дає змогу без додаткових побудов накреслити горизонтальну проєкцію дискретного

лінійчатого каркаса поверхні. Фронтальну проекцію каркаса будують за вертикальною відповідністю.

Особливим випадком однопорожнинного гіперболоїда є гіперболоїд обертання, якій утворюється обертанням прямої твірної навколо мимобіжної з нею осі. На рис.5.8 відрізок прямої  $MN$ , обертаючись навколо горизонтально-проекціовальної осі  $l$ , утворює лінійчату поверхню. Траєкторіями руху точок  $M$  і  $N$ , є горизонтальні кола, які для побудови дискретного каркаса поверхні поділено на 12 частин. При повороті точки  $M$  на кут  $30^\circ$  у положення  $M'$  точка  $N$  повернеться на такий самий кут і займе положення  $N'$ . Горизонтальні проекції точок  $M_1'$  і  $N_1'$  визначають горизонтальну проекцію твірної  $MN$  після її повороту на кут  $30^\circ$ . Фронтальну проекцію твірної будують за вертикальною відповідністю. Так саме будують інші положення твірної  $MN$ . Отримана поверхня обертання є симетричною відносно довільної горизонтально-проекціовальної площини, що проходить через вісь  $l$ . Тому кожна пряма лінія каркаса повинна мати симетричну їй лінію. Отже, утворена поверхня має дві множини прямих ліній каркаса, що перетинаються між собою (рис.5.8). Три довільно обрані лінії однієї множини можна взяти як напрямні лінії другої множини.

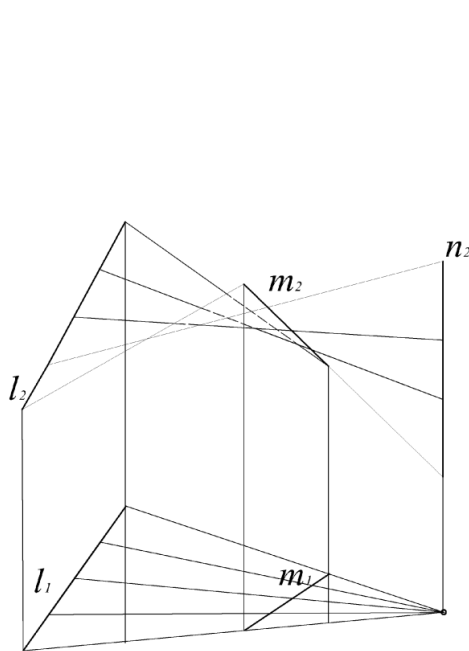


Рис.5.7

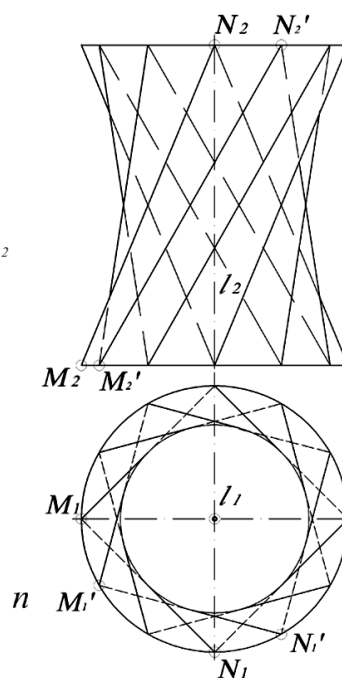


Рис.5.8

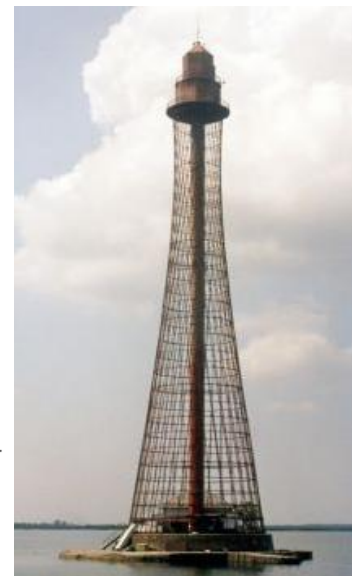


Рис.5.9

Можна навести численні приклади інженерних споруд, які мають форму гіперболоїда обертання, зокрема башта Аджигольського маяка (Дніпровський лиман, Херсонська область), що побудована за проектом інженера В.Г.Шухова в 1911р.(Рис.5.9).

Якщо напрямну  $n$  віддаляти від напрямних  $l$  і  $m$  (див. рис.5.7), то кути між горизонтальними проекціями ліній каркаса будуть зменшуватись до нуля, а

мимобіжні лінії каркаса у просторі стануть паралельними площині  $\Gamma$ , яку називають *площиною паралелізму* (рис.5.10).

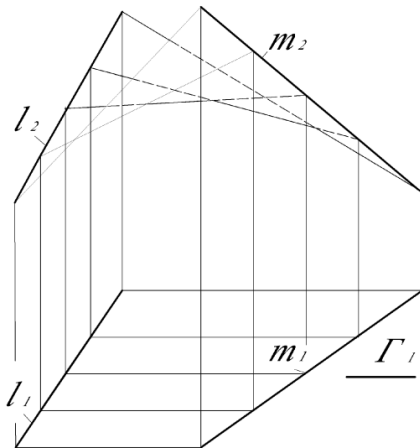


Рис.5.10

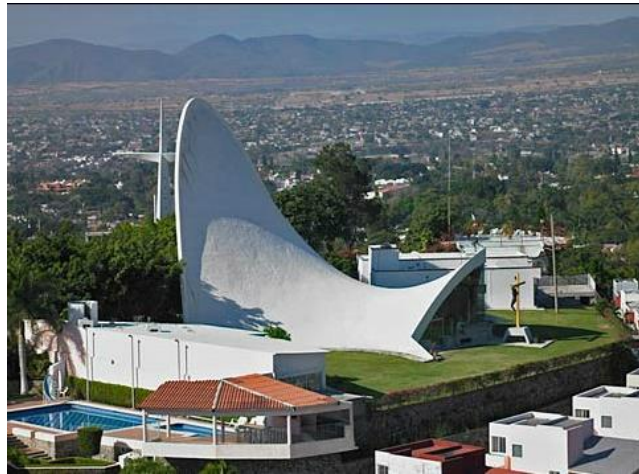


Рис.5.11

Отже нескінченно віддалена пряма замінюється площиною паралелізму ліній каркаса. Поверхню, утворену множиною прямих, що перетинають дві мимобіжні прямі напрямні і паралельні площині паралелізму називають *гіперболічним параболоїдом*, або нерозгортною площиною. На рис.5.11 (капличка Лас Ломас де Куернавака, арх. Ф Кандела) наведено приклад застосування такої поверхні в якості покриття споруд.

Лінійчаті поверхні з невласною прямою напрямною, яка замінюється площиною паралелізму, називають *поверхнями Каталана*. Крім гіперболічного параболоїда до поверхонь Каталана належать *коноїд* і *циліндроїд*. На відміну від гіперболічного параболоїда, в якого дві власні напрямні – прямі, у коноїда напрямними є пряма і крива (рис.5.12 і 5.13), а у циліндроїда – дві криві (рис.5.14).

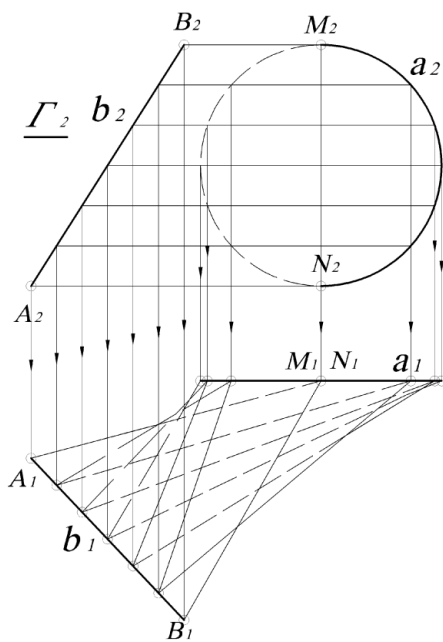


Рис.5.12

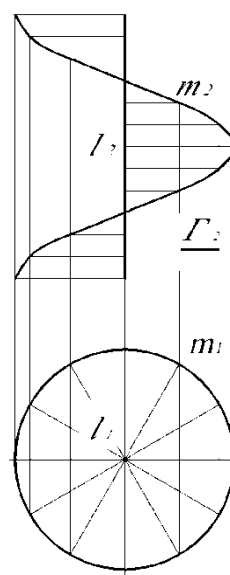


Рис.5.13

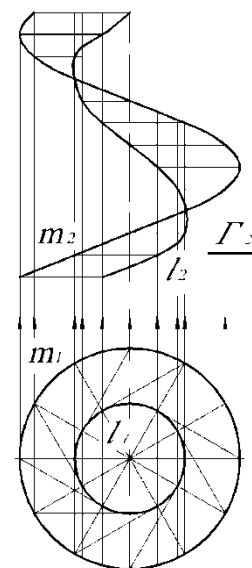


Рис.5.14

На рис.5.12 побудовано дві проекції лінійчатого каркасу коноїда, якій має за напрямні: коло  $a$ , що належить фронтальній площині, пряму  $b$ , загального положення та горизонтальну площину паралелізму  $\Gamma$ . Крок дискретного каркаса поверхні обрано рівномірним уздовж відрізка  $AB$  напрямної  $b$ .

Фронтальні проекції ліній каркаса проведено паралельно до площини  $\Gamma$ . Горизонтальну проекцію побудовано за вертикальною відповідністю.

Циліндроїди та коноїди широко застосовують у техніці та будівництві у вигляді гвинтових поверхонь, які утворюються гвинтовим рухом твірної по гвинтовій напрямній лінії. На рис.5.13 наведено приклад побудови поверхні гвинтового коноїда, який ще називають *прямим гелікоїдом*. Лінії каркаса поверхні паралельні горизонтальній площині  $\Gamma$  і перетинають гвинтову лінію  $m$  (криву напрямну) і вісь гвинтової лінії  $l$  (пряму напрямну).

На рис.5.14 показано гвинтовий циліндроїд, двома кривими напрямними якого є дві співвісні гвинтові лінії  $m$  та  $l$ , а третьою – горизонтальна площина паралелізму  $\Gamma$ . У практиці будівництва у вигляді прямих гвинтових коноїдів (циліндроїдів) споруджують гвинтові сходи. На рис.5.15 (м.Одеса, дім Яншека на вул. Коблевській) наведено приклад таких сходів.



Рис.5.15

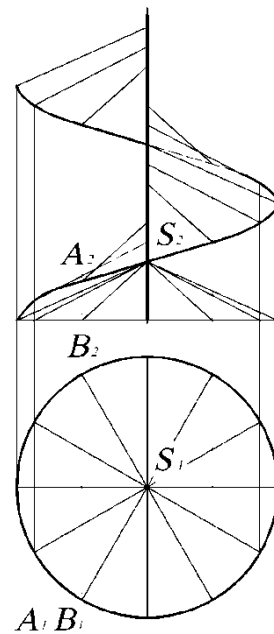


Рис.5.16

Якщо площина паралелізму ліній каркаса поверхні замінює нескінченно віддалену пряму напрямну, то нескінченно віддалена крива напрямна замінюється напрямним конусом. На рис.5.16 наведено приклад поверхні з напрямним конусом.

Цю поверхню називають *нерозгортним гелікоїдом*. Крім напрямного конуса вона має ще дві власні напрямні – гвинтову лінію і вісь гвинтової лінії. Прямі лінії каркаса гелікоїда перетинають власні напрямні і паралельні

відповідним твірним напрямного конуса. Для побудови довільної лінії каркаса, яка, наприклад, проходить через точку  $A$  гвинтової лінії, спочатку визначають твірну  $BS$  конуса, горизонтальна проекція якої збігається з проекцією лінії каркаса гелікоїда. Фронтальну проекцію лінії каркаса проводять через точку  $A$  паралельно до твірної  $BS$  конуса. Нерозгортний гелікоїд обмежує поверхню трикутної різьби.

### 5.3 Розгортні лінійчаті поверхні

На відміну від нерозгортних поверхонь, у яких кожна пара нескінченно близьких ліній каркаса є мимобіжними, у розгортних поверхонь вони перетинаються. Розгортну лінійчатую поверхню можна уявити як граничне положення гранної поверхні з гранями, ширина яких наближається до нуля. Тому така поверхня може бути, як багатогранник розгорнута на площину. В загальному вигляді розгортна поверхня утворюється як неперервна однопараметрична множина дотичних до просторової кривої лінії  $m$  і називається **торсом** (рис.5.17). Криву  $m$  називають **ребром звороту торса**. Найпростішими окремими випадками розгортної поверхні є конус і циліндр.

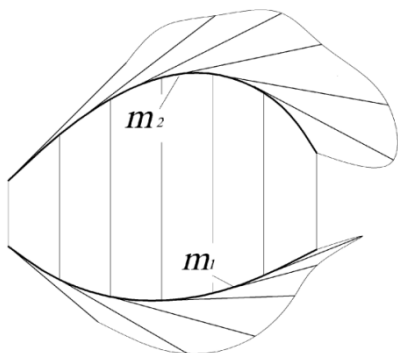


Рис.5.17

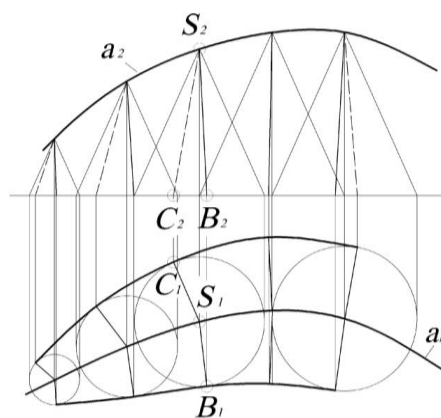


Рис.5.18

Під час розв'язання задач дорожнього будівництва та вертикального планування місцевості укоси криволінійних ділянок виконують у вигляді торса. Таку поверхню називають **поверхнею однакового нахилу** (рис.5.18). Вона характеризується тим, що всі її твірні мають однакові кути нахилу до горизонтальної площини проєкцій. З цієї властивості випливає алгоритм побудови лінійчатого каркаса поверхні.

Задану просторову криву  $a$  розглядають як множину вершин конусів, твірні яких однаково нахилені до горизонтальної площини проєкцій. Поверхню однакового нахилу визначають як обвідну множини конусів. Тільки дві твірні –  $SB$  і  $SC$  - кожного конуса є лініями каркаса шуканої поверхні.

Особливим випадком поверхні однакового нахилу є **розгортний гелікоїд** (рис.5.19). Ребром звороту цієї поверхні є циліндрична гвинтова лінія. Поверхня

розгортного гелікоїда перетинається з горизонтальною площиною по плоскій кривій – евольвенті кола. Таку властивість розгортного гелікоїда використовують для побудови його лінійчатого каркаса.

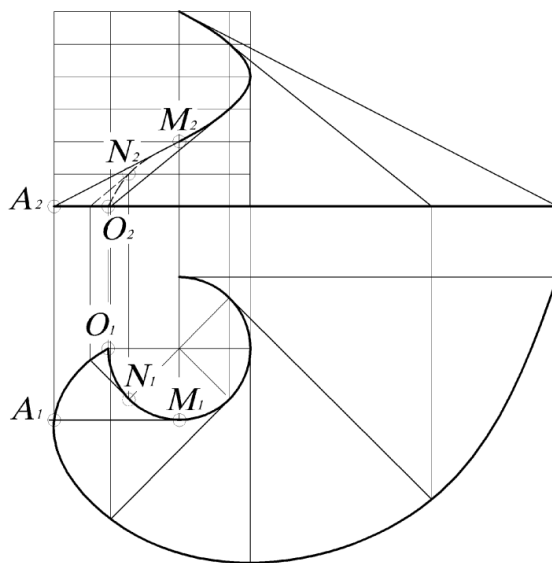


Рис.5.19

Для цього спочатку будують евольвенту, яка відсікає на дотичних до кола відрізки, що дорівнюють довжині дуги кола між точкою дотику і початковою точкою  $O$ , наприклад  $M_1A_1 = \cup M_1N_1O_1$ . Відрізки дотичних між точкою дотику і точкою евольвенти є горизонтальними проєкціями каркаса поверхні. Фронтальну проєкцію каркаса будують за вертикальною відповідністю.

#### 5.4 Поверхні з кривими лініями каркаса

Інженерна практика потребує застосування поверхонь з найпростішими лініями каркаса. Такими кривими є криві другого порядку, зокрема коло. Поверхні, на яких існує каркас кіл, називають циклічними. Найпоширеніший спосіб утворення таких поверхонь – кінематичний. Систематизують їх переважно за законом каркаса (законом руху твірної). Поверхні обертання утворюються шляхом обертання прямої або кривої лінії навколо нерухомої осі. Для спрощення побудови каркаса поверхні за вісь обертання приймається вертикальна пряма. Визначником поверхні обертання є **твірна** – лінія, що обертається навколо осі, і вісь обертання – нерухома лінія. Кожна точка твірної при обертанні навколо осі окреслює коло з центром, якій належить осі обертання. Ці кола називають **паралелями**. Паралель найбільшого діаметру називається **екватором**. Паралель найменшого діаметру називається **горлом**. Площини, що проходять через вісь обертання називаються меридіональними площинами, а лінії перетину цих площин з поверхнею обертання – **меридіанами**. Січна площина, що проходить через вісь обертання і є паралельною до площини проєкцій називається **головною меридіональною площиною**, а лінія її перетину з поверхнею – **головним меридіаном**. Кожна паралель перетинає всі меридіани під

прямим кутом. Паралелі і меридіани утворюють на поверхні сітчастий каркас ортогональних ліній.

При заданні поверхні обертання на рисунку вказують проекції осі обертання, фронтальну проекцію головного меридіана і горизонтальну проекцію екватора. Найпростішими прикладами поверхонь обертання є циліндр, конус обертання і сфера. Поверхня обертання кола навколо осі, що належить площині кола, але не проходить через центр кола, називається тором (рис.5.20а, 5.20б). Тор буває закритий, якщо вісь обертання перетинає твірне коло (рис.5.20,а), і відкритим, якщо вісь не перетинає твірне коло (рис. 5.20б). Всі поверхні обертання належать до циклічних поверхонь.

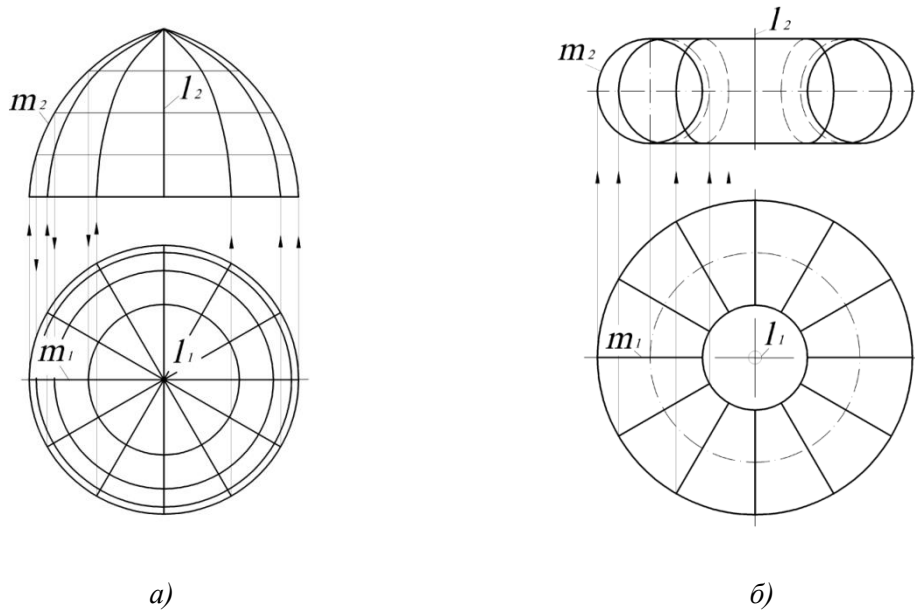


Рис.5.20

Із давніх часів поверхні обертання застосовують в архітектурі як поверхні куполів культових і громадських споруд. Поверхні, утворені обертанням кривої другого порядку навколо власної осі, називають поверхнями обертання другого порядку. При обертанні еліпса навколо його осі утворюється еліпсоїд обертання, при обертанні параболи – параболоїд обертання. Гіперболоїд обертання може бути однопорожнинним – при обертанні гіперболи навколо уявної осі, та двопорожнинним, якщо гіпербола обертається навколо дійсної осі.

Гвинтові циклічні поверхні утворюються рухом кола, центр якого ковзає по циліндричній гвинтовій лінії. Якщо площина кола весь час залишається нормальною до гвинтовій лінії, то поверхню називають **гелікоїдальним циліндром**.

Цю саму поверхню можна утворити як обвідну однопараметричної множини однакових куль, центри яких розміщені на гвинтовій лінії.(Рис. 5.21) Прикладом застосування такої поверхні в техніці є циліндрична пружина. Точку  $M$  обрису гелікоїдального циліндра називають точкою зникнення видимого контуру. Точність її визначення залежить від розміру кроку твірних куль.

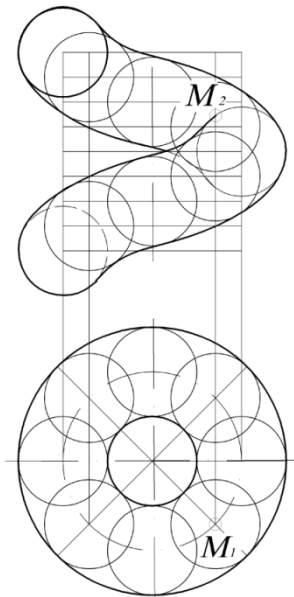


Рис.5.21

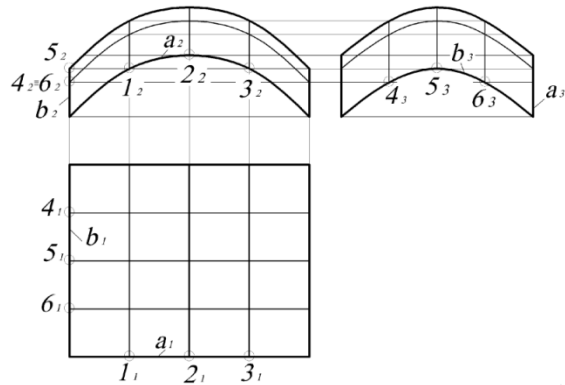


Рис.5.22

Поверхні паралельного перенесення утворюються поступальним рухом твірної за заданою траєкторією. Геометричною частиною визначника такої поверхні є одна з її твірних і траєкторія будь якої точки твірної.

Якщо задану твірну і траєкторію руху точки твірної поміняти ролями, то утворюється та сама поверхня. Множина твірних і траєкторій точок твірних утворюють на поверхні *сітку Чебишова* (названа так за ім'ям російського математика XIX ст., який вивчав властивості цих сіток). Довільна клітина такої сітки має однакові за довжиною протилежні сторони.

На рис.5.22 показано побудову сітчастого каркаса поверхні перенесення, якщо твірною та напрямною є дуги кіл, розташовані у фронтальній та профільній площинах. Горизонтальна проекція сітчастого каркаса зображується прямокутною сіткою, оскільки лінії каркаса поверхні перенесення розміщені в паралельних площинах. Для побудови фронтальної проекції каркаса спочатку визначають фронтальні проекції точок 5, 4, 6 напрямної  $b$  за відповідністю з профільною проекцією, через які проходять дуги, що дорівнюють і паралельні твірній  $a$ . Так саме будують профільну проекцію каркаса.

Поверхню перенесення, в якій твірною і напрямною є параболи з паралельними осями, називають *параболоїдом*. Якщо твірна і напрямна параболи обернено вершинами в один бік, то утворюється *еліптичний параболоїд* (Рис. 5.23), зокрема, коли ці параболи однакові, то утворюється *параболоїд обертання*. Якщо твірна та напрямна параболи обернено вершинами в протилежні боки, то утворюється *гіперболічний параболоїд*. (Рис. 5.24).

Поверхні перенесення широко застосовують в архітектурному проектуванні для утворення оболонок покриттів будівель і споруд.

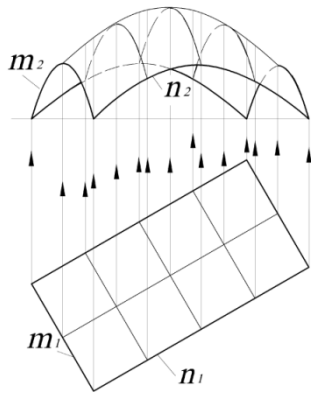


Рис.5.23

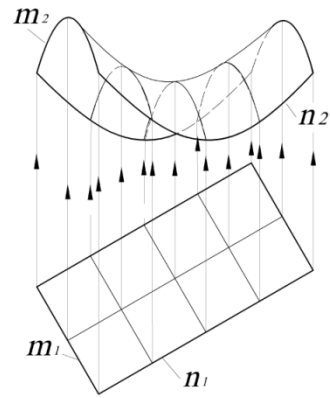


Рис.5.24

### 5.5. Каркасні поверхні

В архітектурному проектуванні інколи використовуються поверхні, які не можна утворити каркасно-параметричним, або каркасно-кінематичним способом через те, що в основі їх утворення знаходяться не геометричні, а фізичні закономірності. Прикладом можуть бути поверхні вантових покриттів, що утворюються під дією власної ваги покриття, або поверхні пневматичних оболонок, утворення яких пов'язано з надлишковим тиском повітря. Такі поверхні математично описуються диференціальними рівняннями з заданими крайовими умовами (опорним контуром). У загальному випадку такі диференціальні рівняння розв'язуються лише наближено числовими методами, зокрема методом скінчених різниць. Наочним трактуванням методу скінчених різниць є так званий статико-геометричний метод [11], в основі якого знаходиться статична рівновага сітки, на вузли якої діють певні зовнішні зусилля (рис. 5.25).

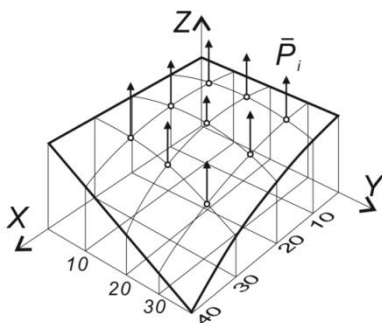


Рис. 5.25

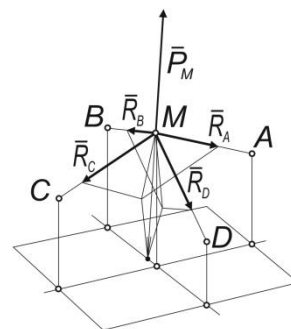


Рис. 5.26

На рис. 5.26 показано п'ять суміжних вузлів сітки і рівноважний стан вузла  $M$  під дією п'яти зусиль, чотири з яких ( $\bar{R}_A; \bar{R}_B; \bar{R}_C; \bar{R}_D$ ) є зусиллями натягіння (або стиску) відповідних в'язей:  $AM, BM, CM$  і  $DM$ , а п'яте ( $\bar{P}_M$ ) їх врівноважує. Тоді,

$$\bar{R}_A + \bar{R}_B + \bar{R}_C + \bar{R}_D + \bar{P}_M = 0, \quad (5.1)$$

або у координатній формі:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{Ax} + \bar{R}_{Bx} + \bar{R}_{Cx} + \bar{R}_{Dx} + \bar{P}_{Mx} &= 0; \\ \bar{R}_{Ay} + \bar{R}_{By} + \bar{R}_{Cy} + \bar{R}_{Dy} + \bar{P}_{My} &= 0; \\ \bar{R}_{Az} + \bar{R}_{Bz} + \bar{R}_{Cz} + \bar{R}_{Dz} + \bar{P}_{Mz} &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Існує чотирипараметрична множина комбінацій зазначених зусиль у кожному вузлі, оскільки довжина кожного з векторів  $(\bar{R}_A; \bar{R}_B; \bar{R}_C; \bar{R}_D)$  може приймати довільне значення, а зусилля  $(\bar{P}_M)$  їх врівноважує.

З усієї множини комбінацій зусиль розглянемо найпростіший випадок, коли довжина вектору зусилля у кожній в'язі пропорційна довжині цієї в'язі:

$$\begin{aligned} k\bar{R}_A &= AM; \\ k\bar{R}_B &= BM; \\ k\bar{R}_C &= CM; \\ k\bar{R}_D &= DM, \end{aligned} \quad (5.3)$$

де  $k$  – заданий коефіцієнт пропорційності.

Тоді, кожне зусилля (5.3) можна виразити через координати відповідних вузлів сітки, наприклад:

$$\begin{aligned} k\bar{R}_{Ax} &= x_A - x_M; \\ k\bar{R}_{Ay} &= y_A - y_M; \\ k\bar{R}_{Az} &= z_A - z_M; \end{aligned} \quad (5.4)$$

У цьому разі рівновагу (5.2) кожного вузла сітки можна описати в координатній формі:

$$\begin{aligned} X_A + X_B + X_C + X_D - 4X_M + k\bar{P}_{Mx} &= 0; \\ Y_A + Y_B + Y_C + Y_D - 4Y_M + k\bar{P}_{My} &= 0; \\ Z_A + Z_B + Z_C + Z_D - 4Z_M + k\bar{P}_{Mz} &= 0; \end{aligned} \quad (5.5)$$

Для того, щоб розрізняти вузли сітки між собою, їх потрібно пронумерувати. Нумерацію вузлів сітки прийнято робити у плані за допомогою двох індексів (рис. 5.27), перший з яких  $(i)$  визначає номер вузла уздовж осі  $Ox$ , а другий  $(j)$  – уздовж осі  $Oy$ .

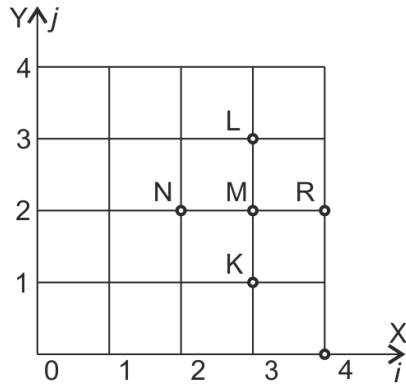


Рис. 5.27

Тоді, наприклад, координати вузла  $M$  дискретної сітки (рис. 5.27) можна записати у вигляді:

$$x_M = x_{3,2};$$

$$y_M = y_{3,2};$$

$$z_M = z_{3,2};$$

а координати довільного вузла –  $x_{i,j}$ ;  $y_{i,j}$ ;  $z_{i,j}$ .

Вузли суміжні з вузлом  $M_{i,j}$  матимуть координати:

$$\begin{aligned} x_N &= x_{i-1,j}; & x_K &= x_{i,j-1}; & x_L &= x_{i,j+1}; & x_R &= x_{i+1,j}; \\ y_N &= y_{i-1,j}; & y_K &= y_{i,j-1}; & y_L &= y_{i,j+1}; & y_R &= y_{i+1,j}; \\ z_N &= z_{i-1,j}; & z_K &= z_{i,j-1}; & z_L &= z_{i,j+1}; & z_R &= z_{i+1,j}; \end{aligned} \quad (5.6)$$

Замінюючи координати у (5.5) виразами (5.6) отримаємо рівняння рівноваги довільного вузла сітки:

$$\begin{aligned} X_{i-1,j} + X_{i,j-1} + X_{i+1,j} + X_{i,j+1} - 4X_{i,j} + k\bar{P}_{i,j,x} &= 0; \\ Y_{i-1,j} + Y_{i,j-1} + Y_{i+1,j} + Y_{i,j+1} - 4Y_{i,j} + k\bar{P}_{i,j,y} &= 0; \\ Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1} + Z_{i+1,j} + Z_{i,j+1} - 4Z_{i,j} + k\bar{P}_{i,j,z} &= 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

де  $\bar{P}_{i,j,x}$ ,  $\bar{P}_{i,j,y}$ ,  $\bar{P}_{i,j,z}$  – координатні складові зовнішнього зусилля  $\bar{P}_{i,j}$ , у довільному вузлі сітки,  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

Для формування рівноважної сітки на заданому опорному контурі необхідно задати: сітку у плані, координати вузлів опорного контуру та величини векторів зусиль  $\bar{P}_{i,j}$ , прикладених до кожного вузла сітки. Сформована сітка може бути наближеною дискретною моделлю безмоментної оболонки, що формується під дією власної ваги при однакових вертикальних зовнішніх зусиллях в усіх вузлах сітки ( $P_{i,j,x} = 0$ ;  $P_{i,j,y} = 0$ ;  $P_{i,j,z} = \bar{P}$ ). Якщо зусилля  $\bar{P}$  вважати невідомим, потрібно задати аплікату одного із вузлів.

На рис. 5.28 наведено приклад опорного контура такої сітки у вигляді просторової ламаної, де  $z_A = z_C = z_E = z_G = 0$ ;  $z_B = z_D = z_F = z_M = 4$  лін. од.

Якщо задано квадратну сітку у плані то друге та третє рівняння системи (5.7) при вертикальних зусиллях  $k\bar{P}$  складати не потрібно, оскільки отримаємо абсциси і ординати вузлів тієї ж сітки.

Систему рівнянь рівноваги проекцій зусиль на вісь  $Oz$  з урахуванням симетрії вихідних даних складаємо тільки для  $1/8$  частини плану. На рис. 5.29 ці вузли виділено кружечками.

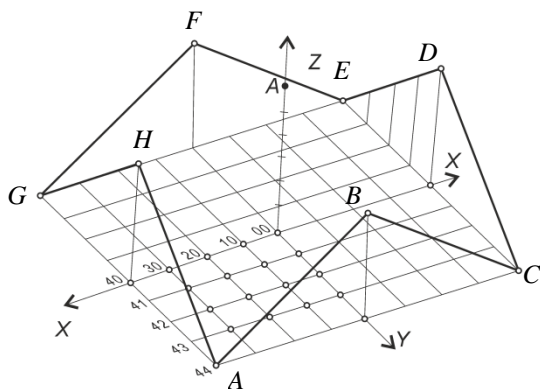


Рис. 5.28

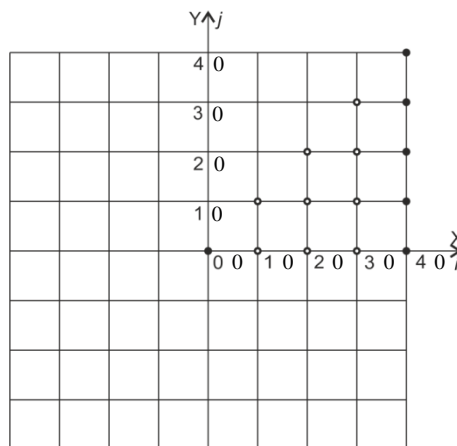


Рис. 5.29

Ця система має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
 4Z_{10} + kP - 24 &= 0; \\
 -4Z_{10} + 2Z_{11} + Z_{20} + kP &= 6 = 0; \\
 Z_{10} - 4Z_{20} + 2Z_{21} + Z_{30} + kP &= 0; \\
 Z_{20} - 4Z_{30} + 2Z_{31} + kP + 4 &= 0; \\
 2Z_{10} - 4Z_{11} + 2Z_{21} + kP &= 0; \\
 Z_{11} + Z_{20} - 4Z_{21} + Z_{22} + Z_{31} + kP &= 0; \\
 Z_{21} + Z_{30} - 4Z_{31} + Z_{32} + kP + 3 &= 0; \\
 2Z_{21} - 4Z_{22} + 2Z_{32} + kP &= 0; \\
 Z_{22} + Z_{31} - 4Z_{32} + Z_{33} + kP + 2 &= 0; \\
 2Z_{32} - 4Z_{33} + kP + 2 &= 0;
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Результати її розв'язання системи рівнянь рівноваги вузлів для чверті сітки наведено в табл. 5.5.1. Аплікати вузлів крайового контуру та центрального вузла виділені в цій таблиці. За результатами розв'язання системи величина отриманого зовнішнього формоутворюючого зусилля  $kP = 0.7103$ .

На рис. 5.30 представлено сітку, яку побудовано за результатами табл. 5.1.

Таблиця 5.1

$j=4$	4	3	2	1	0
$j=3$	4.6137	4.2096	3.4378	2.3965	1
$j=2$	5.3250	5.0768	4.4349	3.4378	2
$j=1$	5.8224	5.6272	5.0768	4.2096	3
$j=0$	6	5.8224	5.3250	4.6137	4
$j/i$	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$

Якщо план опорного контура відрізняється від прямокутного, для визначення вузлів сітки в плані потрібно скласти системи рівнянь рівноваги проекцій зусиль на осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ . Більш детально і розширено наведений спосіб формування дискретних каркасів поверхонь розглянуто в [13].

Якщо зусилля  $P_{i,j}$  зовнішнього навантаження не пов'язувати з власною вагою оболонки то їх можна розглядати як формоутворюючі чинники. Такий підхід дозволить розширити можливості використання статико-геометричного методу (СГМ) для формоутворення різноманітних криволінійних поверхонь у задачах технічного дизайну, наприклад, дозволить надавати виробу з довільно заданими крайовими умовами певного образу у вигляді єдиної поверхні .

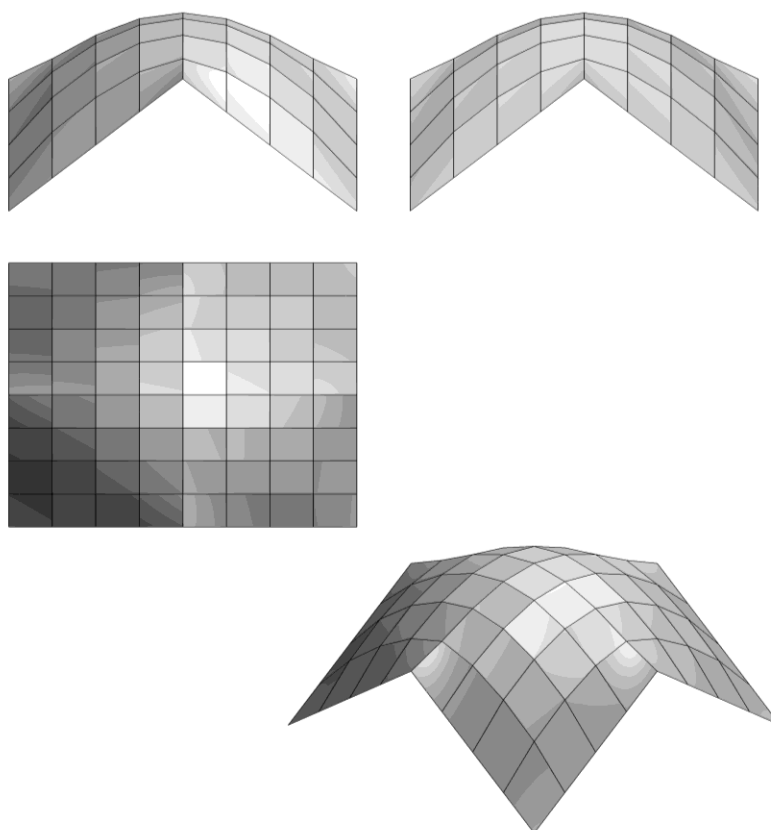


Рис. 5.30

Наприклад, бажаний прообраз задається у вигляді простої поверхні, на яку нанесено дискретну сітку. Тоді, за виразом (5.7) визначаються зовнішні зусилля, які врівноважують зусилля у в'язях нанесеної сітки. Нова поверхня (образ) формується на новому (довільно заданому) опорному контурі за визначеними зусиллями.

На рис. 5.31 наведено приклад формування поверхні вази за зовнішніми зусиллями, які перенесено з сітки, нанесеної на поверхню прообраз. За прообраз поверхні, що моделюється обрано поверхню півсфери (рис. 5.31, а):

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

За опорний контур поверхні вази (поверхні образу) (рис. 5.31, б) прийнято дві компоненти, які знаходяться на висоті нижньої (зрізаної) і верхньої основ півсфери.

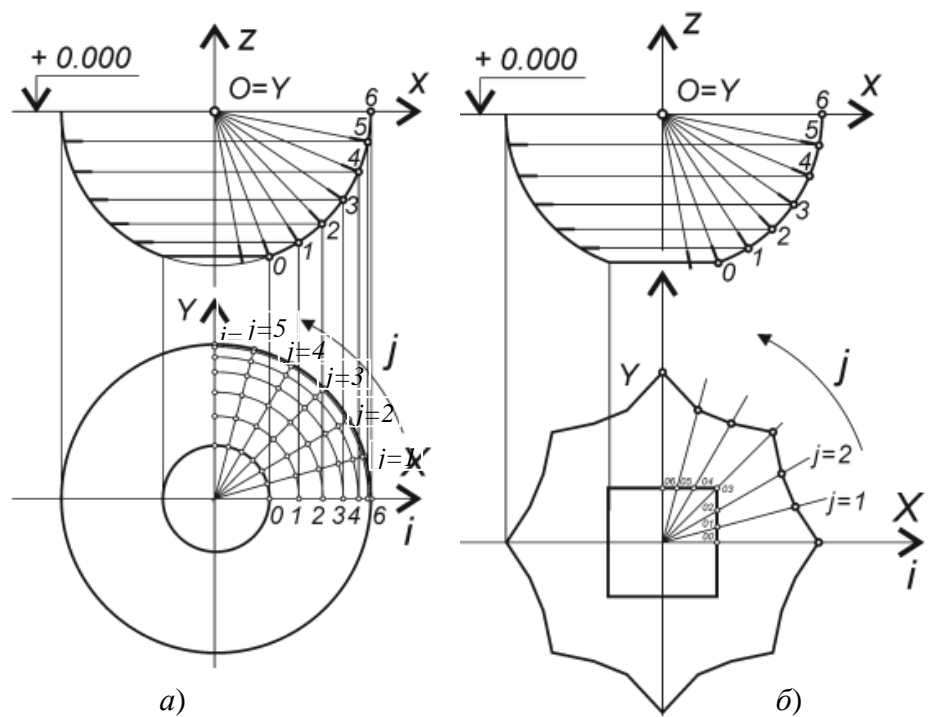


Рис. 5.31

Нові крайові умови складаються із нижньої основи вази у вигляді квадрата і верхньої основи вази у вигляді рівноланкової симетричної ламаної. Ці крайові умови задано у вигляді дискретних рядів вузлів, число яких відповідає крайовим умовам сітки на півсфері радіуса  $R = 150$ .

На півсферу нанесено радіально-кільцеву сітку з рівномірним кроком уздовж головного меридіану і рівномірним кутовим кроком. Абсиси вузлів сітки на півсфері ( $X_{i,j}$ ) визначено за рівнянням (5.8) і занесено в таблицю 5.2.

Таблиця 5.2

$j=6$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$j=5$	14.86	21.57	27.45	32.28	35.87	38.08	38.82
$j=4$	28.70	41.67	53.04	62.36	69.29	73.56	75.00
$j=3$	40.59	58.930	75.00	88.19	97.99	104.03	106.07
$j=2$	49.71	72.17	91.86	108.01	120.01	127.40	129.90
$j=1$	55.44	80.50	102.46	120.47	133.86	142.10	144.89
$j=0$	57.41	83.34	106.07	124.72	138.58	147.12	150.00
$j/i$	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$

Ординати вузлів сітки можна не визначати, оскільки вони симетричні абсцисам. В табл. 5.3 наведено аплікати вузлів одного меридіану ( $Z_{i,j}$ ), оскільки у кожній паралелі аплікати вузлів однакові.

Таблиця 5.3

$Z_{i,0}$	-138.58	-124.72	-106.07	-83.34	-57.40	-29.26	0.00
Номер	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$

За відомими абсцисами та аплікатами вузлів сітки на півсфері, за формулам (5.7), визначаються координатні складові векторів зовнішніх зусиль  $k\bar{P}_{i,j,x}$  та  $k\bar{P}_{i,j,z}$ . Результати занесено в таблицю 5.4.

Таблиця 5.4

$l$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$
$j=5$	$P_x$	2.309	2.91	3.44	3.82	4.06
	$P_z$	-4.79	-4.08	-3.21	-2.20	-1.12
$j=4$	$P_x$	4.45	5.68	6.65	7.38	7.84
	$P_z$	-4.79	-4.08	-3.21	-2.20	-1.12
$j=3$	$P_x$	6.29	7.98	9.40	10.44	11.10
	$P_z$	-4.79	-4.08	-3.21	-2.20	-1.12

Моделювання поверхні вази відбувається з урахуванням симетрії вихідних умов (рис. 5.31, б). Систему рівнянь (5.8) рівноваги проекцій зусиль на осі  $Ox$  і  $Oz$  складено тільки для 1/4 частини сітки. Симетрія вихідних даних дозволяє скласти систему лінійних рівнянь рівноваги для 30 вузлів сітки.

$$\begin{aligned}
&4X_{10} - 2X_{11} - X_{20} - 45 + 8.89 = 0; & -X_{10} + 4X_{11} - X_{12} - X_{21} - 45 + 8.89 = 0; \\
&-X_{10} + 4X_{20} - 2X_{21} - X_{30} + 11.31 = 0; & -X_{11} - X_{20} + 4X_{21} - X_{22} - X_{31} + 10.91 = 0; \\
&-X_{20} + 4X_{30} - 2X_{31} - X_{40} + 13.29 = 0; & -X_{21} - X_{30} + 4X_{31} - X_{32} - X_{41} + 12.84 = 0; \\
&-X_{30} + 4X_{40} - 2X_{41} - X_{50} + 14.76 = 0; & -X_{31} - X_{40} + 4X_{41} - X_{42} - X_{51} + 14.26 = 0; \\
&-X_{40} + 4X_{50} - 2X_{51} - 160 + 15.68 = 0; & -X_{41} - X_{50} + 4X_{51} - X_{52} - 129.59 + 15.15 = 0; \\
&-X_{11} + 4X_{12} - X_{13} - X_{22} - 45 + 7.70 = 0; & -X_{10} + 4X_{11} - X_{12} - X_{21} - 45 + 8.89 = 0; \\
&-X_{12} - X_{21} + 4X_{22} - X_{23} - X_{32} + 9.79 = 0; & -X_{11} - X_{20} + 4X_{21} - X_{22} - X_{31} + 10.91 = 0; \\
&-X_{22} - X_{31} + 4X_{32} - X_{33} - X_{42} + 11.51 = 0; & -X_{21} - X_{30} + 4X_{31} - X_{32} - X_{41} + 12.84 = 0; \\
&-X_{32} - X_{41} + 4X_{42} - X_{43} - X_{52} + 12.78 = 0; & -X_{31} - X_{40} + 4X_{41} - X_{42} - X_{51} + 14.26 = 0; \\
&-X_{42} - X_{51} + 4X_{52} - X_{53} - 113.14 + 13.58 = 0; & -X_{41} - X_{50} + 4X_{51} - X_{52} - 129.59 + 15.15 = 0; \\
&-X_{12} + 4X_{13} - X_{14} - X_{23} - 45 + 6.29 = 0; & -X_{10} + 4X_{11} - X_{12} - X_{21} - 45 + 8.89 = 0; \\
&-X_{13} - X_{22} + 4X_{23} - X_{24} - X_{33} + 7.99 = 0; & -X_{11} - X_{20} + 4X_{21} - X_{22} - X_{31} + 10.91 = 0; \\
&-X_{23} - X_{32} + 4X_{33} - X_{34} - X_{43} + 9.40 = 0; & -X_{21} - X_{30} + 4X_{31} - X_{32} - X_{41} + 12.84 = 0; \\
&-X_{33} - X_{42} + 4X_{43} - X_{44} - X_{53} + 10.44 = 0; & -X_{31} - X_{40} + 4X_{41} - X_{42} - X_{51} + 14.26 = 0; \\
&-X_{43} - X_{52} + 4X_{53} - X_{54} - 113.14 + 11.09 = 0; & -X_{41} - X_{50} + 4X_{51} - X_{52} - 129.59 + 15.15 = 0;
\end{aligned}
\tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
& -X_{13} + 4X_{14} - X_{15} - X_{24} - 30 + 4.45 = 0; & -X_{14} + 4X_{15} - X_{25} - 15 + 2.30 = 0; \\
& -X_{14} - X_{23} + 4X_{24} - X_{25} - X_{34} + 5.65 = 0; & -X_{15} - X_{24} + 4X_{25} - X_{35} + 2.92 = 0; \\
& -X_{24} - X_{33} + 4X_{34} - X_{35} - X_{44} + 6.65 = 0; & -X_{25} - X_{34} + 4X_{35} - X_{45} + 3.44 = 0; \\
& -X_{34} - X_{43} + 4X_{44} - X_{45} - X_{55} + 7.38 = 0; & -X_{35} - X_{45} + 4X_{45} - X_{55} + 3.82 = 0; \\
& -X_{44} - X_{53} + 4X_{54} - X_{55} - 70.14 + 7.84 = 0; & -X_{45} - X_{54} + 4X_{55} - 30.41 + 4.06 = 0;
\end{aligned}$$

Результати розв'язання системи (5.8) наведено в таблиці 5.5. За цими результатами на рис. 5.32 побудовано дві проекції та аксонометричне зображення поверхні вази.

Таблиця 5.5

Найменування координати		Координати вузлів сітки						
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>j=6</i>	<i>X</i>	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	<i>Y</i>	45.0000	74.9429	99.5173	118.9316	133.3396	144.2570	160.0000
	<i>Z</i>	-138.5800	-105.5705	-77.3343	-53.2061	-32.8199	-15.3609	0.0000
<i>j=5</i>	<i>X</i>	12.0580	20.1062	26.2351	30.9250	34.0113	34.7083	34.7240
	<i>Y</i>	45.0000	73.1822	99.5173	118.9316	133.3396	144.2570	129.5900
	<i>Z</i>	-138.5800	-105.5789	-77.3203	-52.9401	-32.4564	-14.8718	0.0000
<i>j=4</i>	<i>X</i>	25.9810	39.8306	51.0033	60.0125	66.5921	70.3518	65.3210
	<i>Y</i>	45.0000	67.7535	87.3700	103.2403	114.4118	119.3133	113.1400
	<i>Z</i>	-138.5800	-105.6348	-77.5079	-53.5676	-33.2736	-15.7501	0.0000
<i>j=3</i>	<i>X</i>	45.0000	57.7820	72.2538	84.8798	94.6127	102.1269	113.1400
	<i>Y</i>	45.0000	57.7820	72.2538	84.8798	94.6127	102.1269	113.1400
	<i>Z</i>	-138.5800	-105.6622	-77.5892	-53.7586	-33.5202	-15.9751	0.0000
<i>j=2</i>	<i>X</i>	45.0000	67.7535	87.3700	103.2403	114.4118	119.3133	113.1400
	<i>Y</i>	25.9810	39.8306	51.0033	60.0125	66.5921	70.3518	65.3210
	<i>Z</i>	-138.5800	-105.6348	-77.5079	-53.5676	-33.2736	-15.7501	0.0000
<i>j=1</i>	<i>X</i>	45.0000	73.1822	96.4423	114.7898	127.7049	133.9993	129.5900
	<i>Y</i>	12.0580	20.1062	26.2361	30.9250	34.0113	35.9000	34.724
	<i>Z</i>	-138.5800	-105.5789	-77.3203	-52.9401	-32.4564	-14.8718	0.0000
<i>j=0</i>	<i>X</i>	45.000	74.9429	99.5173	118.9316	133.3396	144.2570	160.0000
	<i>Y</i>	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	<i>Z</i>	-138.5800	-105.5705	-77.3343	-53.2061	-32.8199	-15.3609	0.0000
<i>j/i</i>		<i>i=0</i>	<i>i=1</i>	<i>i=2</i>	<i>i=3</i>	<i>i=4</i>	<i>i=5</i>	<i>i=6</i>

Нижче наведено алгоритм формування дискретного каркаса поверхні із заданими властивостями з урахуванням зовнішнього навантаження, як формоутворюючого чинника.

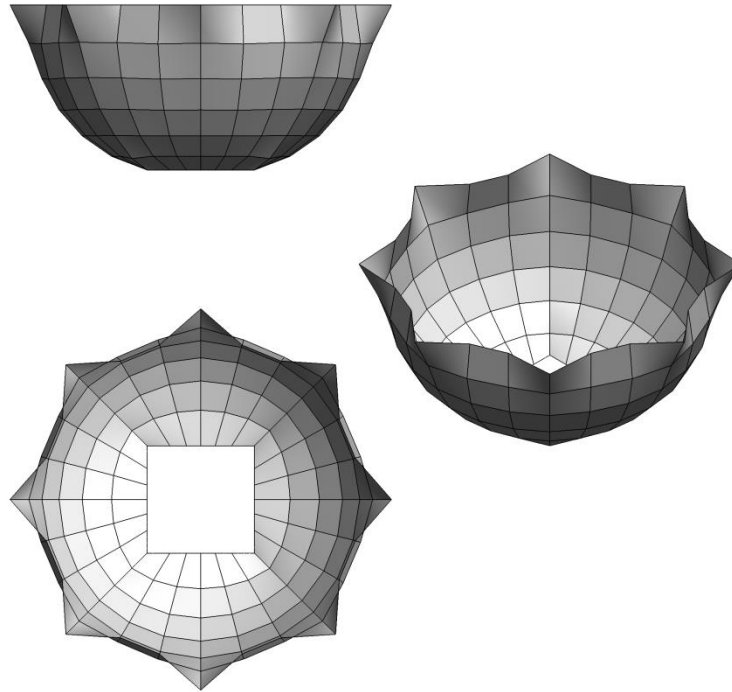


Рис. 5.32

#### Алгоритм

1. Обирається проста поверхня-прообраз, на яку буде накладатись дискретна сітка. Топологія сітки, далі в процесі моделювання поверхні-образу, зберігається.

2. Оскільки координати вузлів сітки на поверхні, що є прототипом відомі, то проекції зовнішніх зусиль визначаються за рівняннями рівноваги (5.7).

3. З урахуванням заданих вихідних умов – на довільно заданому опорному контурі (контурах) поверхні, що моделюється, складається нова система рівнянь рівноваги проекцій зусиль (5.7) з урахуванням отриманих в п. 2 проекцій зусиль з поверхні-прообразу.

4. За результатами розв'язання системи п. 3 визначаються абсциси, ординати та аплікати вузлів сітки на поверхні, що моделюється, і будується дискретний каркас нової поверхні, що несе на собі властивості поверхні-прообразу.

Використання алгоритму в процесі дискретного моделювання криволінійних поверхонь дозволяє при заданих крайових умовах, заданій топології сітки та заданій кількості вузлів отримати найкраще, у деякому розуміння, наближення до бажаної поверхні з точки зору геометрії її форми.

На рис. 5.33б показано такий самий приклад, як і на рис. 5.32, якщо змінено опорний контур (рис.5.33а) поверхні-образу.

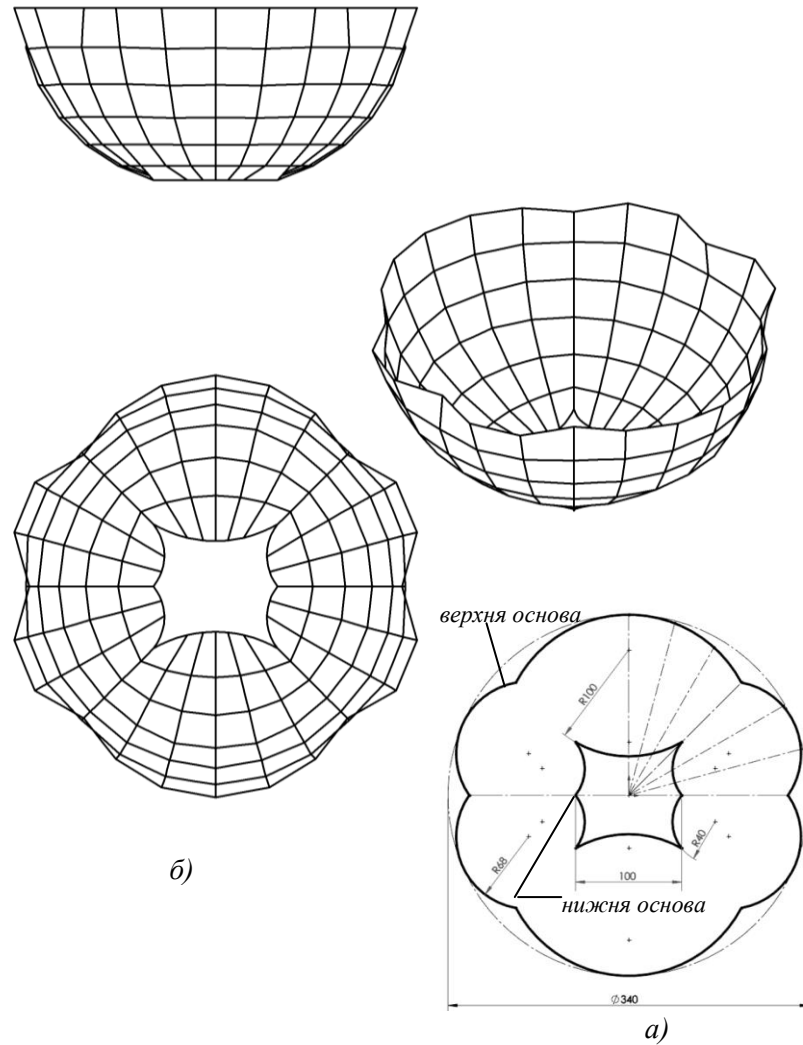


Рис. 5.33

На рис. 5.34 показано ще одну поверхню вази на тому самому опорному контурі (рис. 5.33а), але за поверхню-прообраз обрано поверхню обертання параболи (рис.5.35)  $x = \frac{z^2}{2p} + r$ , навколо осі  $Oz$ , де  $p$  – параметр параболи;  $r$  – відстань від вершини параболи до осі обертання.

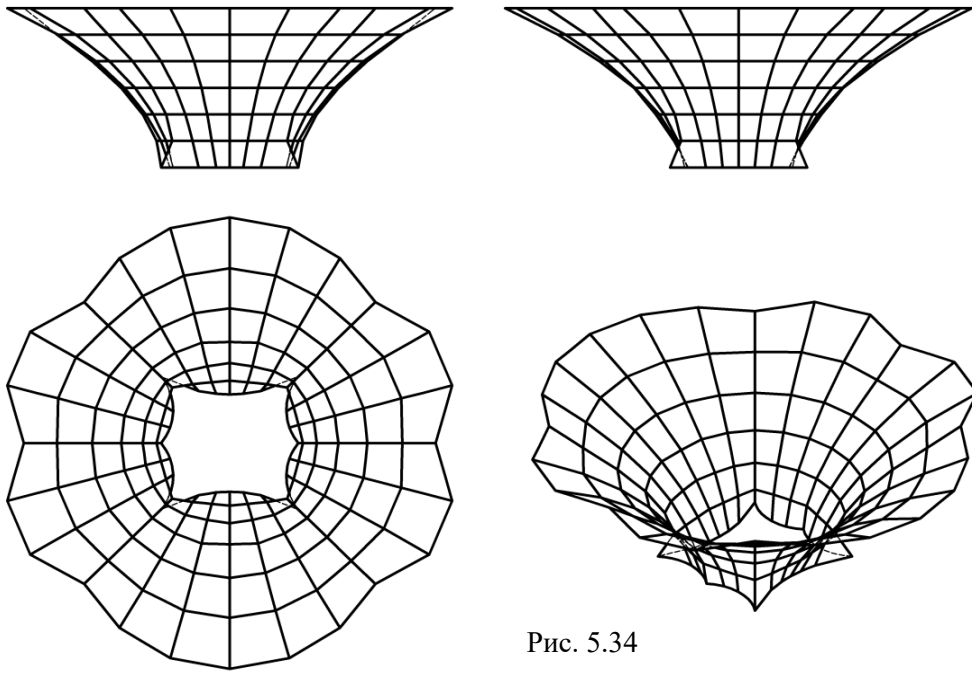


Рис. 5.34

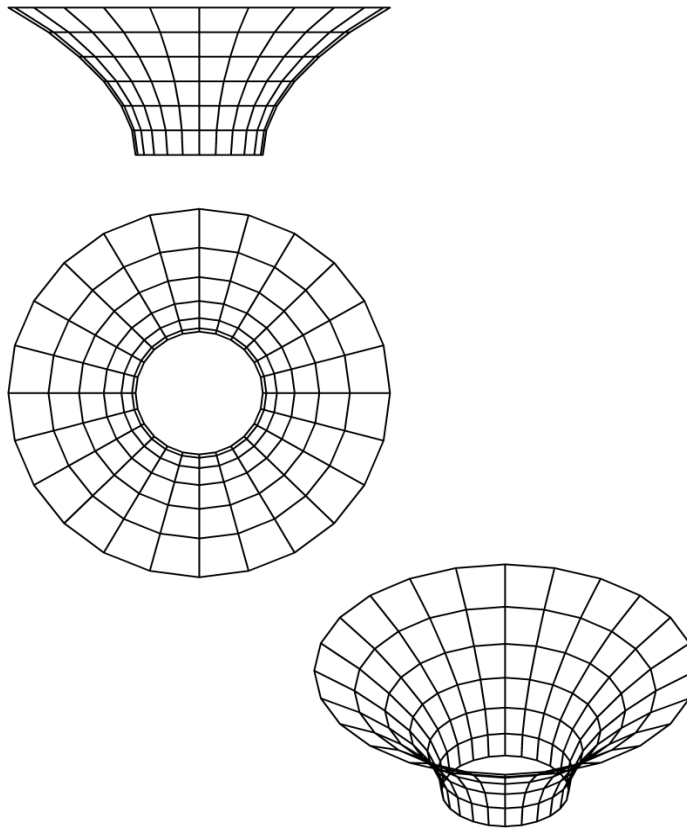


Рис. 5.35

Отримані моделі будуються за допомогою програмного комплексу [SolidWorks](#). Моделі дискретних каркасів поверхонь дизайнерських об'єктів зберігається у форматі *STL* файлу, які далі можна використовувати для створення 3D-моделей за допомогою 3D-принтера (*3DP three dimensional printing*), коли друкуватимуться реальні об'єкти із цифрових комп'ютерних моделей.

З появою новітніх технологій виникла можливість отримувати результати моделювання у вигляді тривимірних моделей (адитивне виробництво). Таке виробництво (від англ. «add» - додавати) орієнтується на пошарове нарощування об'єкту з площини на нульовому рівні, до створення готової моделі поверхні, постійно додаючи матеріал і пошарово формуючи об'єкт.

Такі моделі можуть використовуватись як прототипи майбутніх об'єктів серійного виробництва, або для виготовлення прототипів різноманітних моделей та дизайнерських об'єктів, що дозволить зробити віртуальні моделі будь-якого дизайну та геометричної форми абсолютно реальними. Отримані моделі можна не лише потримати у руках, а і використати у дизайні інтер'єрів, підібрати колір і проаналізувати естетичні характеристики отриманих моделей.

Роботу 3D-принтера по виготовленню моделі «Ваза-2» представлено на рис.5.36.

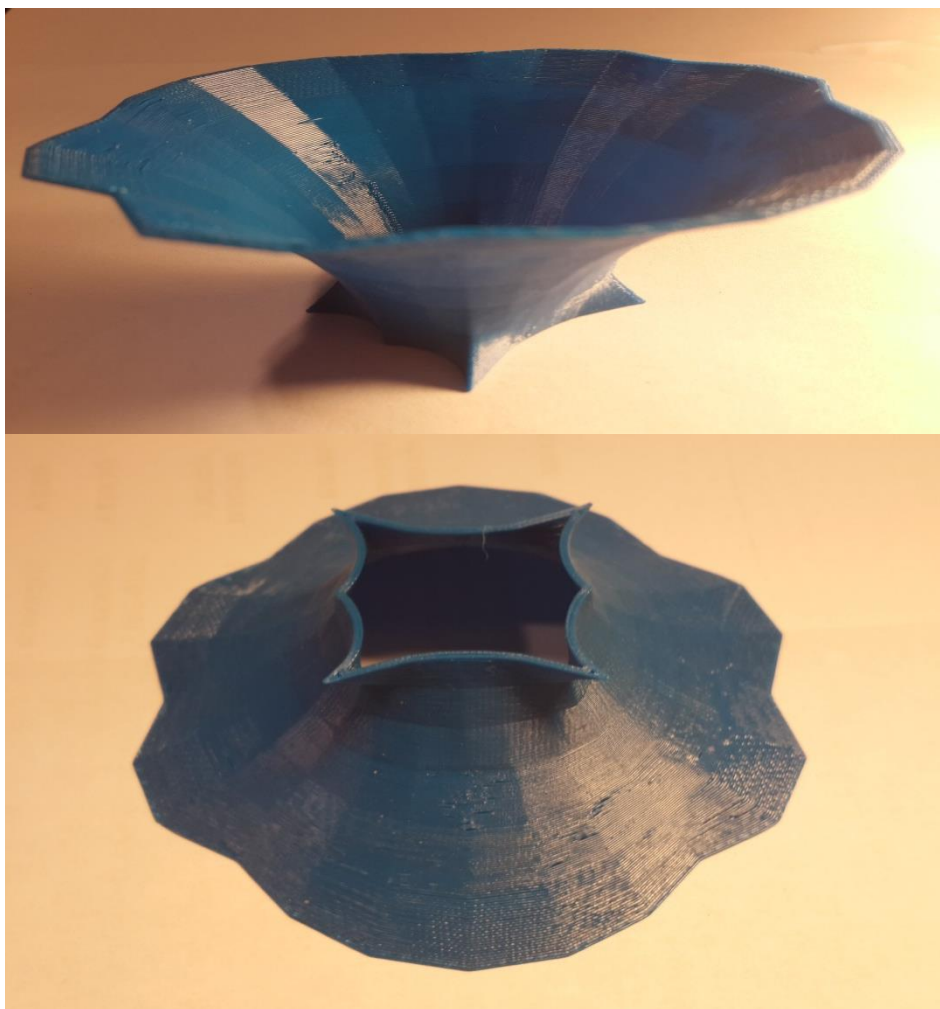


Рис. 5.36

Об'єкти дизайну, наведені у прикладах розділу 5, несуть на собі особливості форми поверхонь-прообразів, властивості яких бажали б бачити архітектори або дизайнери при створенні абсолютно нових об'єктів.

Наведені приклади довели, що при збереженні геометрії опорного контуру, варіювання форми об'єкту може відбуватись за рахунок використання різних поверхонь-прообразів, з яких знімається зовнішнє навантаження, прикладене до кожного з вузлів сітки, накладеної на поверхню, що надалі виступатиме в якості формоутворюючих чинників.

Такий підхід до формування каркасів поверхонь дозволяє в подальшому дизайнерам та архітекторам використовувати прості поверхні (в якості прообразів), аналітичні рівняння яких відомі, для перенесення особливостей форми, що сподобалась, для збереження естетичних характеристик об'єктів.

## 5.6. Дотичні площини

Якщо на поверхні через будь-яку точку  $K$  провести множину кривих, то всі дотичні до цих кривих у точці  $K$  належать єдиній площині, яку називають **дотичною площиною** (рис.5.37). Оскільки площина цілком визначається двома прямими, що перетинаються, то для проведення в точці на поверхні дотичної площини слід побудувати дві дотичні прямі до будь-яких двох кривих ліній поверхні, що проходять через цю точку (криві  $m$  та  $p$  і дотичні  $l$  та  $q$ ).

**Нормаллю** до поверхні називають прямою, проведену перпендикулярно до дотичної площини в точці дотику. Для побудови нормалі в цій точці поверхні досить провести перпендикуляр до двох дотичних ( $n$  на рис.5.37).

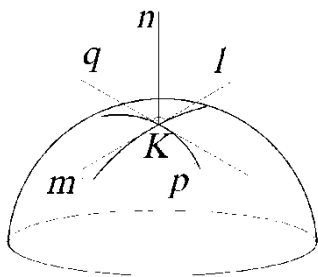


Рис.5.37

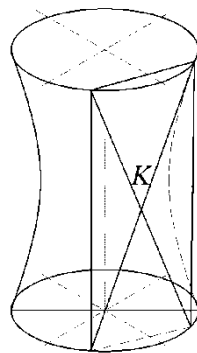


Рис.5.38

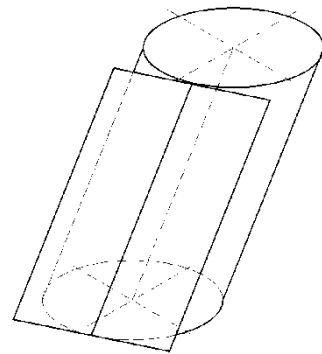


Рис.5.39

На кривих поверхнях є особливі точки, в яких дотична площина або не визначена, або не є єдиною. До них належать, наприклад, вершина конуса або точки лінії самоперетину поверхні.

Залежно від виду кривої поверхні дотична площина може мати з нею

а) одну спільну точку (рис.5.37);

б) одну точку дотику та лінію перетину у вигляді двох прямих, прямої та кривої або кривої з вузловою точкою (на рис.5.38 показано дотичну площину до одноповерхнинного гіперболоїда, яка перетинає поверхню по двох прямих);

в) множина точок, що належать одній прямій або кривій лінії поверхні (рис.5.39).

В усіх випадках точка дотику, що задана на поверхні, цілком визначає єдину дотичну площину, яку для зручності будують у вигляді двох перетинних або паралельних прямих.

На рис.5.40 показано побудову площини, дотичної до сфери у заданій точці  $A$ . Площину визначено за допомогою дотичних  $h$  і  $f$  до горизонтального та фронтального кіл, що є перерізами сфери горизонтальною і фронтальною площинами, проведеними через точку  $A$ .

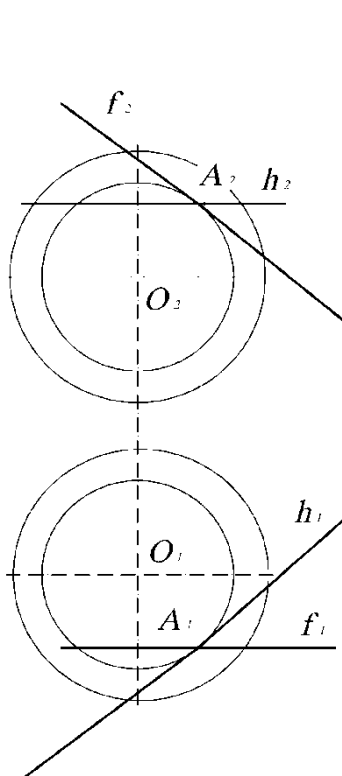


Рис.5.40

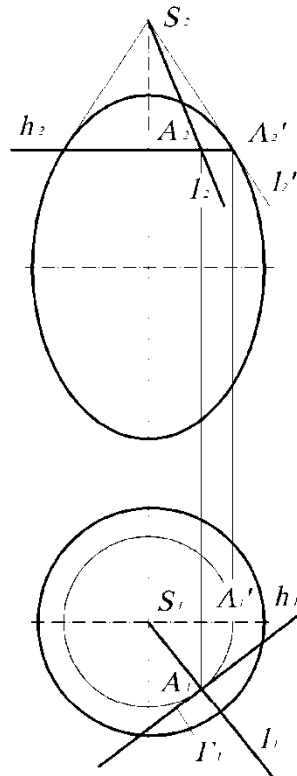


Рис.5.41

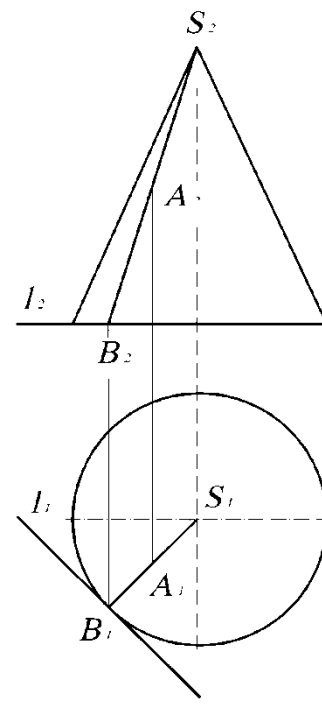


Рис.5.42

На рис.5.41 показано побудову площини, дотичної до еліпсоїда обертання в точці  $A$  на його поверхні. Для побудови дотичних, що визначають шукану площину, використовують паралель і меридіан, які проходять через точку  $A$ . Дотична  $h$  до кола паралелі є горизонталлю. Горизонтальна проекція меридіонального перерізу еліпсоїда площиною  $\Gamma$  є прямою лінією, що проходить через горизонтальну проекцію осі еліпсоїда і точку  $A$ . З цією проекцією збігається горизонтальна проекція  $l_1$  дотичної до меридіана. Для побудови фронтальної проекції дотичної  $l$  до меридіонального перерізу площину  $\Gamma$  перерізу повертають навколо осі еліпсоїда у фронтальне положення. Після повороту площини  $\Gamma$  точка  $A$  займе положення  $A'$  на контурному меридіані.

Через обернену точку  $A'$  проводять дотичну  $l'$  до контурного меридіана і визначають точку  $S$  перетину її з віссю еліпсоїда обертання. Всі дотичні до меридіональних перерізів, що проходять через точки кола паралелі, перетинатимуть

вісь еліпсоїда у точці  $S$ , тому фронтальна проекція дотичної до меридіана, яка проходить через точку  $A$ , зобразиться прямою  $A_2S_2$ . Як видно з рисунка, дотичну площину визначено за допомогою її горизонталі  $h$  та лінії найбільшого нахилу  $l$ .

На рис.5.42 точка  $A$ , через яку потрібно провести дотичну площину, належить поверхні конуса обертання. Однією з прямих, що визначають дотичну площину, є твірна конуса, яка проходить через вершину  $S$  і точку  $A$ . Другу пряму –  $l$ , дотичну до кола основи конуса, проведено через точку  $B$  перетину основи з твірною  $SA$ . Якщо точку дотику не задано, то до поверхні можна провести нескінченну множину дотичних площин. Усі площини, дотичні до нерозгортної поверхні, становлять двопараметричну множину за кількістю точок на поверхні. До розгортної поверхні можна провести лише однопараметричну множину дотичних площин, оскільки в усіх точках кожної прямолінійної твірної дотичною до поверхні є одна спільна площина.

Щоб визначити єдину дотичну площину, потрібно зв'язати всі вільні параметри множини. Тому для побудови площини, дотичної до нерозгортної поверхні, потрібно додатково задати умови, що зв'язують два параметри множини дотичних площин, а для побудови площини, дотичної до розгортної поверхні, – умову, що зв'язує один вільний параметр множини площин. Два параметри можна зв'язати умовою проходження площини через власну або невласну пряму (умова паралельності до заданої площини).

На рис.5.43 показано приклад проведення дотичної площини до конуса обертання через власну точку  $A$ . Оскільки всі площини, дотичні до конуса проходять через його вершину, шукана площина має пройти через пряму  $SA$ , що перетинається з горизонтальною площиною проєкцій у точці  $M$ . Другою прямою, яка визначає дотичну площину, може бути дотична  $m$  або  $l$ , проведена через точку  $M$

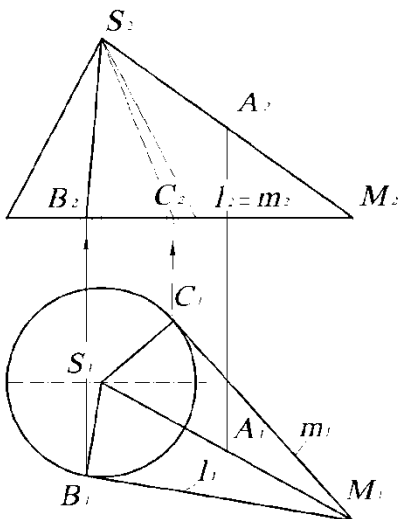


Рис.5.43

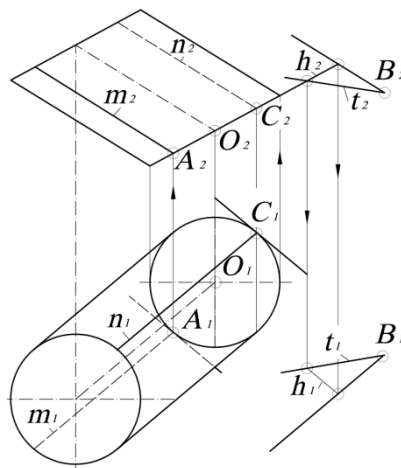


Рис.5.44

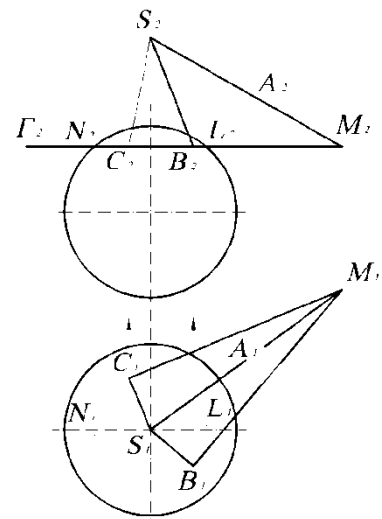


Рис.5.45

до кола основи конуса. По точках  $B$  і  $C$  дотику прямих до основи конуса визначають твірні дотику  $SB$  і  $SC$ .

Для побудови площини, яка дотична до циліндра і проходить через невласну точку або паралельно заданому напрямку  $t$  (рис.5.44), треба врахувати те, що вона має містити твірні циліндра. Через довільно обрану точку  $B$  на прямій  $t$  проводять пряму, паралельну твірним циліндра, і отримують площину, паралельну шуканій. Будують слід цієї площини  $h$  на площині основи циліндра. Дотичні, паралельні цьому сліду, та твірні  $m$  і  $n$  дотику визначають дві площини, дотичні до циліндра.

Алгоритм побудови площин, дотичних до циліндра та конуса, є основою для розв'язування складніших задач проведення площин, дотичних до нерозгортних поверхонь другого порядку.

Умова проходження через задану точку площини, дотичної до нерозгортної поверхні, зв'язує тільки один з двох вільних параметрів множини всіх дотичних площин і тому є недостатньою для побудови конкретної площини. Другий вільний параметр можна зв'язати умовою належності точки дотику до заданого перерізу поверхні.

На рис.5.45 показано проведення через точку  $A$  двох площин, дотичних до сфери у заданому горизонтальному перерізі площиною  $\Gamma$ . Спочатку будують конус, усі прямолінійні твірні якого дотичні до сфери у точках заданого перерізу. Вершину  $S$  цього конуса визначають як точку взаємного перетину контурних твірних конуса, що дотикаються до контуру сфери в точках  $N$  і  $L$  заданого перерізу. Потім через точку  $A$  проводять дві площини, дотичні до цього конуса, як це було зроблено на рис.5.43. Площини  $MBS$  та  $MCS$  є дотичними до сфери, оскільки прямі  $MB$  і  $MC$  дотикаються до горизонтального перерізу сфери, а прямі  $SB$  і  $SC$  є твірними конуса. Як і за побудовою також дотикаються до сфери в точках  $B$  та  $C$ .

На рис.5.46 показано приклад проведення площини, дотичної до сфери. через невласну пряму, яку задано площиною загального положення  $\Gamma$ . Площину  $\Gamma$  визначено фронталлю  $f$  та горизонталлю  $h$ , що перетинаються в точці  $B$ . Спочатку будують циліндр, твірні якого є паралельними до  $f$  і дотичними до сфери. Множина точок дотику твірних циліндра до сфери утворює коло в площині  $\Delta$ . Площини, дотичні до цього циліндра і паралельні прямій  $h$ , є шуканими. Площина  $\Omega$  перерізує циліндр по еліпсу. горизонтальною проекцією якого є коло, що збігається з горизонтальним контуром сфери. Твірні  $m$  і  $n$  дотику шуканих площин до циліндра будують так само, як було показано на рис.5.44. Точки дотику  $M$  і  $N$  площин до сфери визначають як точки перетину твірних  $m$  і  $n$  з площиною  $\Delta$ .

На рис.5.47 побудовано площину, дотичну до тора, яка паралельна заданій площині  $ABC$ . Тор і площину  $ABC$  повертають навколо осі тора таким чином, щоб горизонталь  $BC$  площини  $ABC$  стала перпендикулярною до фронтальної площини проєкцій. Після повороту контур фронтальної проєкції тора не змінюється, а площина  $ABC$  стає фронтально проєкціовальною. У цьому положенні паралельно  $A_2B_2'$  проводять фронтальний слід дотичної площини і визначають точку дотику  $M_2'$ . Вихідне положення точки  $M$  отримують поворотом тора у зворотному

напрямі. Дотичну площину визначають горизонталлю  $h$  та лінією найбільшого нахилу  $SM$ .

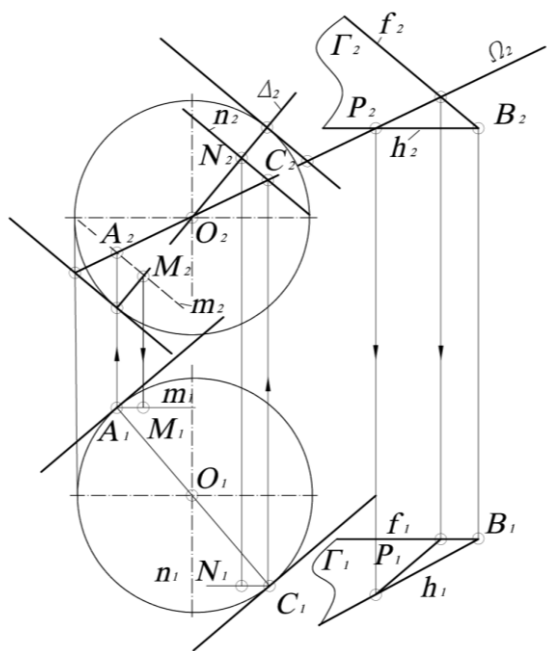


Рис.5.46

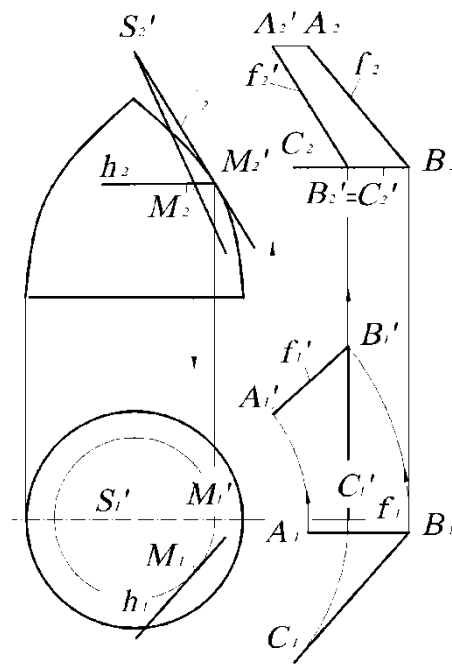


Рис.5.47

### Запитання для самоконтролю

1. Що таке визначник поверхні?
2. Які поверхні є розгортними?
3. Що таке ребро звороту торса?
4. Які поверхні називаються лінійчатими?
5. Як утворюються поверхні паралельного перенесення?

## РОЗДІЛ 6. ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Позиційні задачі передбачають геометричні побудови, пов'язані із взаємним положенням геометричних фігур. Прикладами найпростіших позиційних задач можуть бути розглянуте раніше (у розділі 3) визначення точки перетину прямої і площини (рис. 3.8) або побудова лінії перетину двох площин (рис. 3.11). Більш складні позиційні задачі пов'язані з гранними і кривими поверхнями. При перерізанні поверхні площиною утворюється плоска крива лінія, кожна точка якої є точкою перетину лінії каркаса поверхні з січною площиною. Для побудови точок перерізу можна застосувати способи допоміжних січних площин або способи перетворення проєкцій. Допоміжні січні площини здебільшого обирають проєкціювальними, що дає можливість визначати множину точок ліній перетину плоских ліній каркаса поверхні із заданою площиною. Способи перетворення проєкцій дають змогу перевести площину чи поверхню, що перетинається, в проєкціювальне положення і, таким чином, спростити розв'язання задачі. Отже обидва способи ґрунтуються на алгоритмах побудови перерізу поверхні проєкціювальною площиною.

### 6.1 Переріз поверхні проєкціювальною площиною

На рис.6.1 наведено побудову перерізу сфери проєкціювальною площиною  $\Sigma$ , перпендикулярною до площини проєкцій, на якій вона зображується прямою лінією. Цю проєкцію називають *виродженою*. Одна з проєкцій лінії перерізу поверхні завжди збігається з виродженою проєкцією проєкціювальної січної площини. Отже задача побудови лінії перерізу зводиться до пошуку її другої проєкції або до визначення другої проєкції множини точок, що належать поверхні. Другу проєкцію точки, що належить будь - якій лінії, будують просто за вертикальною відповідністю, тому для побудови другої проєкції лінії перерізу досить задати поверхню у вигляді множини простих ліній каркаса, проєкції яких можна накреслити інструментально без додаткових побудов. Відсутню проєкцію кожної точки лінії перерізу визначають як проєкцію точки, що належить відповідній лінії каркаса.

На рис.6.2 наведено побудову перерізу конуса обертання фронтально проєкціювальною площиною  $\Omega$ . Фронтальна проєкція перерізу збігається з проєкцією  $\Omega_2$  площини  $\Omega$ . Точки горизонтальної проєкції будують за вертикальною відповідністю, як проєкції точок, що належать лініям каркаса конуса. Це можуть бути кола горизонтальних перерізів чи прямолінійні твірні. На рис.6.2 точки  $A$  і  $B$  знайдено як результат перетину площини з твірними  $SM$  і  $SN$ . Для побудови точок  $C$  і  $D$  проводять допоміжну горизонтальну площину  $\Delta$ , яка перерізає поверхню по колу. Це коло перетинає площину  $\Omega$  в шуканих точках  $C$  і  $D$ , фронтальні проєкції яких визначають безпосередньо на колі радіусу  $r$ . Горизонтальні проєкції  $C_1$  і  $D_1$  визначають за вертикальною відповідністю на горизонтальній проєкції того самого

кола перерізу. Таким чином можна побудувати безліч точок лінії перерізу, яка в цьому випадку є еліпсом.

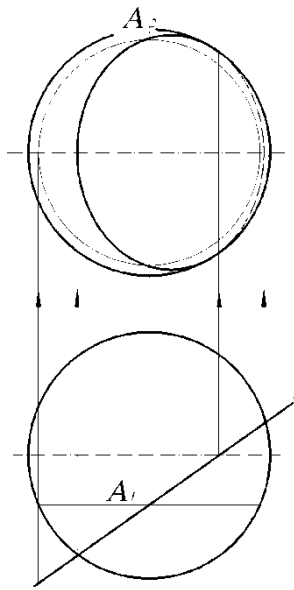


Рис.6.1

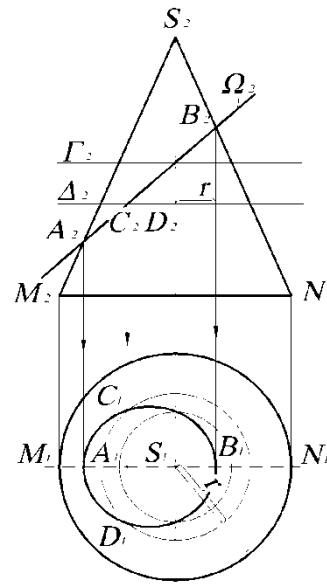


Рис.6.2

## 6.2 Спосіб косокутного допоміжного проєкціювання

Беручи до уваги простоту визначення лінії перерізу поверхні проєкціовальною площиною, доцільно подати задану площину загального положення як проєкціовальну. Це можна зробити, якщо обрати за напрям проєкціювання довільну пряму, що належить цій площині. На додатковій проєкції, що утворюється при цьому, січна площина проєкціюється прямою, тому точки її перетину з проєкціями ліній каркаса поверхні визначають безпосередньо на цій проєкції. Основні проєкції точок лінії перерізу будують за відповідністю з допоміжними проєкціями точок перетину ліній каркаса з площиною. За площину допоміжних проєкцій обирають площину, що забезпечує простоту побудов.

На рис. 6.3 наведено побудову перерізу конуса обертання площиною загального положення, що задана слідами  $f$  і  $h$ . Напрямок допоміжного проєкціювання обрано паралельним горизонтальному сліду  $h$  площини, а допоміжну проєкцію побудовано на фронтальній площині проєкцій. Косокутною проєкцією площини є її фронтальний слід  $f$ , з яким збігається косокутна проєкція перерізу. Фронтальну і горизонтальну проєкції точок лінії перерізу будують за відповідністю з допоміжними проєкціями точок перерізу.

На рис.6.4 наведено побудову перерізу циліндра другого порядку площиною загального положення, що задана паралельними прямими  $m$  і  $n$ .

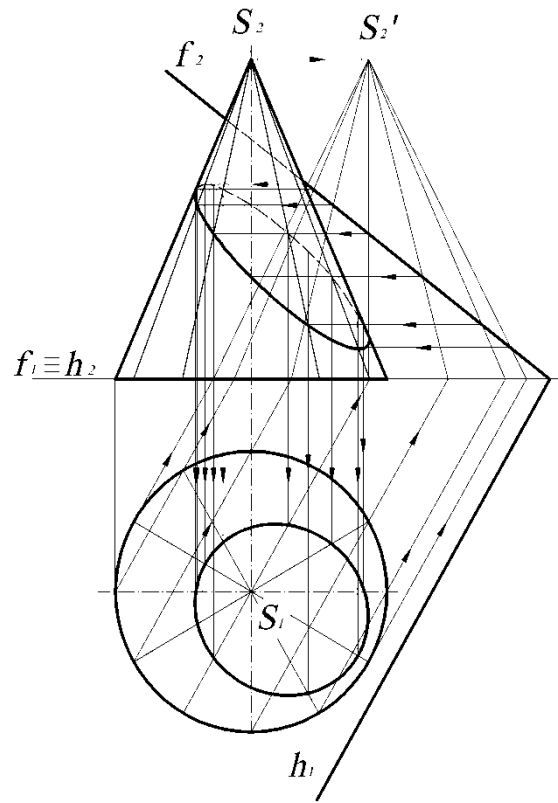


Рис.6.3

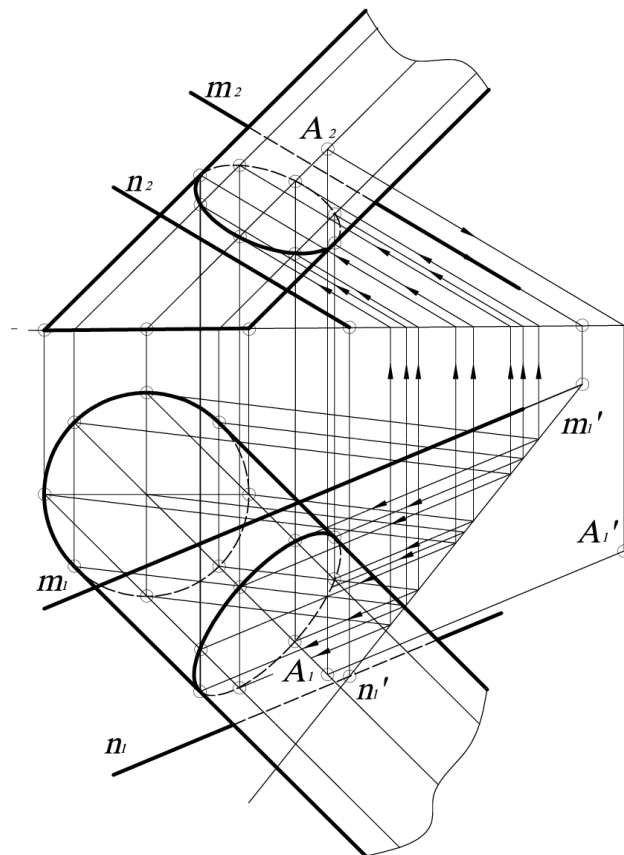


Рис.6.4

За напрям проєкціювання обираю задані прямі  $m$  і  $n$ , а за площину допоміжних проєкцій – площину основи циліндра. Такий вибір зменшує кількість операцій побудови, оскільки косокутна проєкція основи циліндра збігається з її горизонтальною проєкцією. Косокутні проєкції твірних циліндра зберігають паралельність. Тому для визначення напрямку допоміжних проєкцій твірних циліндра будують допоміжну проєкцію лише однієї точки  $A$ , що належить осі циліндра, визначають напрям допоміжної проєкції осі, паралельно до якої проводять проєкції твірних. Допоміжна проєкція лінії перерізу збігається з виродженою допоміжною проєкцією площини  $mn$ , що дає змогу визначити допоміжні проєкції шуканих точок на твірних циліндра. Основні проєкції точок лінії перерізу визначають косокутним проєкціюванням у зворотному напрямі.

Допоміжна проєкція дає можливість наочно визначити видимість фігур, що перетинаються. Якщо подивитися на допоміжну проєкцію в напрямі, протилежному косокутному проєкціювання, то можна побачити, яка частина циліндра знаходиться поза січною площиною на основних проєкціях.

### 6.3 Спосіб січних площин

На рис.6.5 наведено побудову перерізу поверхні обертання площиною загального положення за допомогою січних площин. Будь-яка допоміжна січна площина перерізає задану площину по прямій лінії, а поверхню – по лінії її каркаса. Ці дві лінії, перетинаючись між собою, визначають точки, спільні для поверхні та заданої площини.

Використання множини січних площин дає змогу побудувати множину точок лінії перерізу. Отже, розв'язування задачі зводяться до того, щоб вибрати множину допоміжних площин, що перетинають поверхню по простих лініях каркаса (прямих або колах), які можна накреслити інструментально без допоміжних побудов. Площина перерізу на рис.6.5 задана фронталлю  $f$  і горизонталлю  $h$ . Для розв'язування задачі використовують допоміжні січні горизонтальні площини  $\Sigma$  і  $\Omega$ , що перерізають поверхню по паралелях, та горизонтально проєкціювальні площини  $\Gamma$  та  $\Delta$ , які перерізають поверхню по меридіанах. Спочатку визначають характерні точки проєкцій перерізу – точки на контурному меридіані, а також найвищу та найнижчі точки лінії перерізу.

Для визначення точок 1 і 2 перерізу, що лежать на контурному меридіані, проводять допоміжну фронтальну площину  $\Gamma$ , що проходить через вісь поверхні та перерізає її по цьому меридіану. Задана площина перетинається з допоміжною площиною  $\Gamma$  по фронталі  $t$ , горизонтальна проєкція якої збігається з  $\Gamma$ , а фронтальна проєкція паралельна  $f_2$  і проходить через точку  $A$  перетину горизонталі  $h$  з  $t$ . Горизонтальні проєкції точок 1 і 2 знаходять за вертикальною відповідністю в площині  $\Gamma$ .

Щоб визначити найвищу точку 3 перерізу, через вісь проводять допоміжну січну площину  $\Delta$ , перпендикулярну до горизонталі  $h$ . Площина  $\Delta$  перетинає задану

площину по лінії найбільшого нахилу  $BC$ , а поверхню – по меридіану. Отримані лінії перетину повертають у фронтальне положення обертанням навколо осі поверхні. В оберненому положенні меридіан перерізу поверхні площиною  $\Delta$  збігається з фронтальною проекцією контуру поверхні, а лінія  $BC$  перетину площини переміщується в положення  $B'C'$ . Точку  $3'$  перетину прямої  $B'C'$  з контуром поверхні повертають у вихідне положення площини  $\Delta$ . Таким чином визначають основні проекції точки  $3$ .

Проміжні точки шуканого перерізу визначають за допомогою горизонтальних січних площин  $\Sigma$  і  $\Omega$ , кожна з яких перетинає задану площину по горизонталях, а поверхню – по колу. Коло і горизонталь, які належать одній допоміжній площині, перетинаються в двох точках шуканого перерізу.

На рис.6.6 показано побудову перерізу гіперболічного параболоїда площиною загального положення, яку задано трикутником. Переріз визначають як множину точок перетину твірних поверхні із заданою площиною. Через кожну твірну проводять допоміжну горизонтально проєкціювальну січну площину. Знайдені фронтальні проєкції лінії перетину допоміжних площин із площиною  $ABC$ , перетинаючись з відповідними твірними, визначають точки шуканого перерізу.

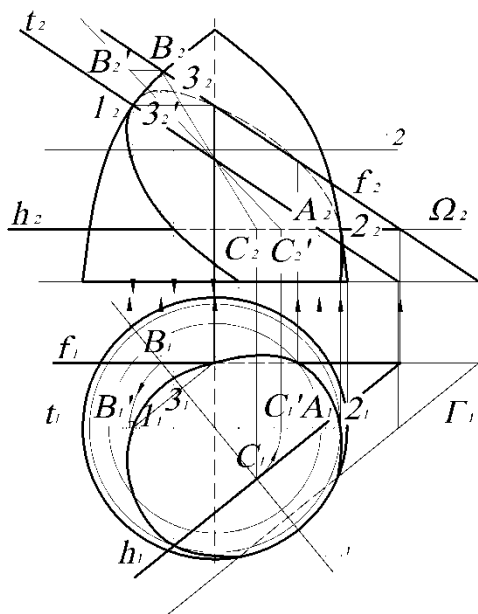


Рис.6.5

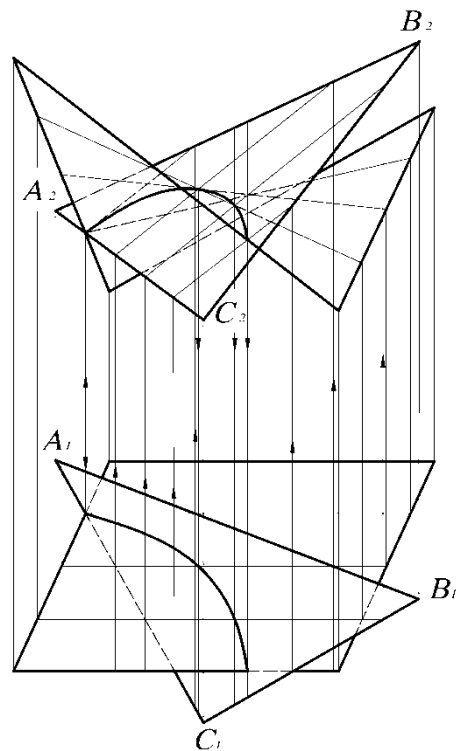


Рис.6.6

#### 6.4 Перетин поверхонь другого порядку з прямою лінією

Пряма перетинає поверхню другого порядку в двох точках. Точки перетину прямої  $m$  з проєкціювальним циліндром другого порядку (рис.6.7,б) визначають на виродженій проєкції циліндра як результат перетину двох ліній. Другу проєкцію точок визначають за вертикальною відповідністю.

Для побудови точок перетину прямої  $AB$  з циліндром другого порядку загального положення можна побудувати допоміжну проекцію, де циліндр зображується лінією, і тоді визначити шукані точки, як показано на рис.6.7,а. Таку проекцію будують косокутним проекціюванням. На рис.6.7,б точки 1 і 2 перетину прямої  $AB$  з поверхнею циліндра побудовано допоміжним проекціюванням поверхні та прямої на площину основи циліндра в напрямі, паралельному твірним циліндра. При цьому кожна твірна поверхні буде проекціювальною, а допоміжна проекція поверхні збігатиметься з колом основи циліндра. Допоміжною проекцією прямої  $AB$  є пряма  $A_1'B_1'$ . Точки  $1_1'$  і  $2_1'$  перетину основи циліндра з прямою  $A_1'B_1'$  - допоміжні проекції шуканих точок, їх основні проекції визначають косокутним проекціюванням у зворотному напрямі. Точки перетину прямої з кінцевою поверхнею можна побудувати так само, але треба мати на увазі, що для побудови виродженої проекції конуса всі його твірні мають стати проекціювальними, а паралельним проекціюванням цього зробити не можна.

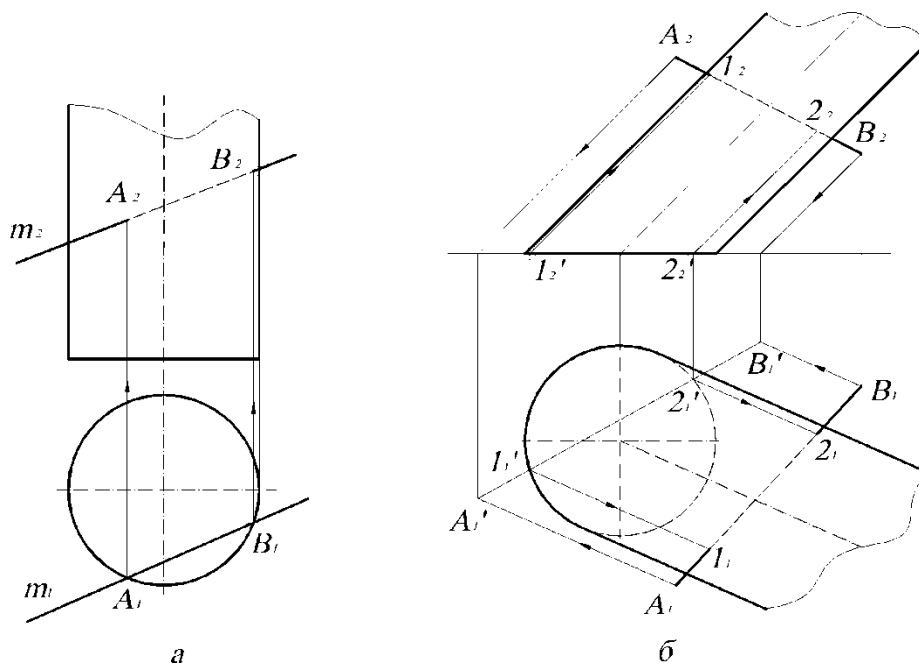


Рис.6.7

При розв'язанні цієї задачі застосовують центральне допоміжне проекціювання, як показано на рис.6.8. Центр проекціювання обирають у вершині  $S$  конуса, і кожна твірна стає проекціювальною прямою, а допоміжна проекція поверхні конуса збігається з колом його основи. Допоміжні проекції шуканих точок утворюються в результаті перетину кола основи конуса та допоміжної проекції  $A_1'B_1'$  прямої  $AB$ . Основні проекції точок  $1$  і  $2$  визначають зворотнім проекціюванням допоміжних проекцій  $1_1'$  і  $2_1'$  з вершини  $S$  на пряму  $AB$ .

Щоб побудувати точки перетину прямої з довільною поверхнею другого порядку, потрібно знати таку властивість: *через два довільні перерізи поверхні другого порядку можна провести поверхню конуса або циліндра.*

На рис.6.9 наведено побудову точок перетину тривісного еліпсоїда з прямою  $AB$  за допомогою центрального допоміжного проєкціювання. Через пряму  $AB$  проводять фронтально проєкціювальну площину  $\Gamma$ , яка перетинає поверхню по еліпсу. Без побудови цього еліпса визначають вершину конуса, твірні якого проходять через точки двох перерізів еліпсоїда площинами  $\Gamma$  і  $\Delta$ . Точки  $C$  і  $D$  перетину прямої  $AB$  з поверхнею конуса визначають так само, як у попередньому прикладі (див. рис.6.8). Переріз конуса площиною  $\Gamma$  є також перерізом еліпсоїда, тому знайдені точки  $C$  і  $D$  є шуканими.

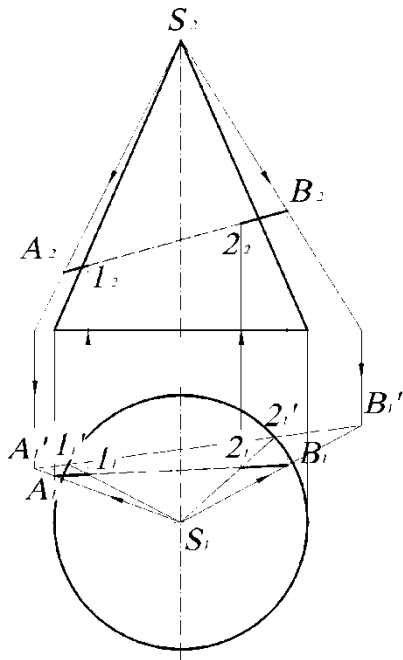


Рис.6.8

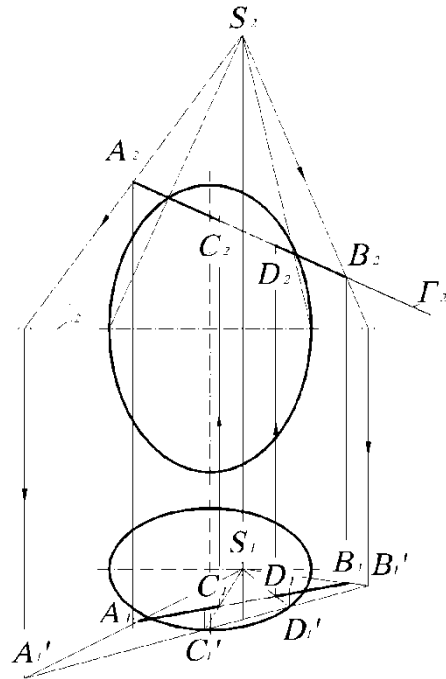


Рис.6.9

### 6.5 Побудова лінії взаємного перетину двох поверхонь, одна з яких проєкціювальна

Найпростішим випадком взаємного перетину двох багатограних або кривих поверхонь є такий, коли одна з поверхонь займає проєкціювальне положення. Проєкціювальними можуть бути призматична або циліндрична поверхні, грані або твірні яких перпендикулярні до площин проєкцій. Згідно з властивостями проєкціювальних фігур одна проєкція лінії перетину двох поверхонь збігається з виродженою проєкцією проєкціювальної поверхні, і задача зводиться до побудови другої проєкції лінії перетину за принципом її належності геометричній фігурі.

На рис.6.10 показано перетин двох трикутних призм, коли одна з них знаходиться в особливому положенні – її грані є горизонтально проєкціювальними площинами. Лінія взаємного перетину складається з двох замкнених ламаних – трикутника та просторового багатокутника. Фронтальні проєкції точок 1, 2, 3, 4, 6 і 8, які належать ребрам  $l$ ,  $m$  і  $n$ , знаходять за вертикальною відповідністю на

фронтальних проекціях цих ребер. Для побудови точок 5 і 7, які належать ребру  $c$  призми  $abc$ , у гранях  $lm$  і  $ln$  проводять прямі  $6M$  і  $8M$ . Фронтальні проекції точок 5 і 7 визначають у результаті перетину прямих  $6M$  і  $8M$  з ребром  $c$ . При сполученні точок ламаної слід брати до уваги належність їх певній грані. Наприклад, можна сполучати точки просторової ламаної: точку  $b$ , яка належить грані  $bc$ , з точками 5 і 8, які належать цій самій грані, проте точку 7 не можна сполучати з точкою  $b$  через те, що вони належать різним граням призми  $lmn$ . Точка 4 сполучається з точками 5 і 7, а точка 8 – з точкою 6. Видимість точок і відрізків ламаних визначають за видимістю граней. Видима частина ламаної може належати видимим граням обох призм.

На рис.6.11 показано побудову лінії взаємного перетину горизонтально проекціювального циліндра обертання з гіперболічним параболоїдом, що заданий напрямними  $AB$  і  $CD$  та площиною паралелізму  $\Gamma$ . Горизонтальна проекція лінії перетину збігається з виродженою проекцією циліндра. Тому безпосередньо на горизонтальній проекції можна визначити точки перетину твірних гіперболічного параболоїда з поверхнею циліндра. Фронтальні проекції цих точок визначають за вертикальною відповідністю на фронтальних проекціях твірних параболоїда.

Характерними точками лінії перетину є точки  $G$  і  $H$  на контурних твірних циліндра. Вони відділяють видиму частину лінії перетину від невидимої. Тому для побудови фронтальних проекцій цих точок через їхні відомі горизонтальні проекції додатково проводять твірні  $MN$  і  $PQ$  параболоїда. Невидима частина шуканої лінії четвертого порядку належить невидимій частині поверхні циліндра.

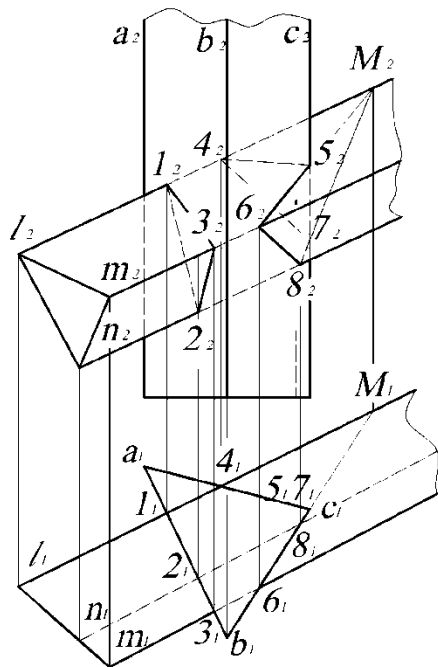


Рис.6.10

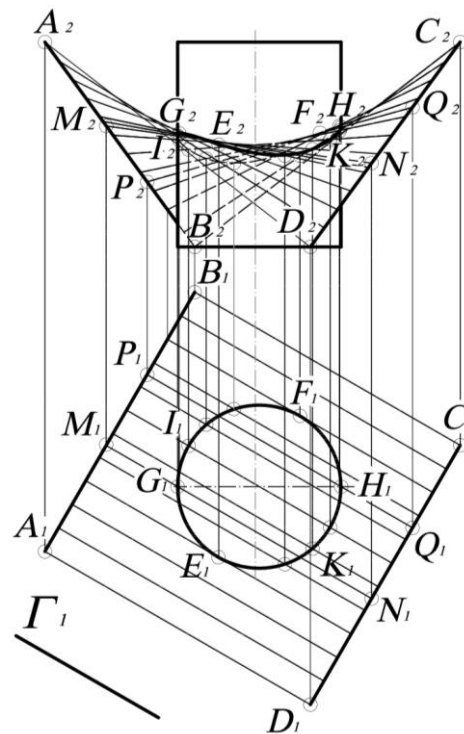


Рис.6.11

## 6.6 Побудова ліній взаємного перетину способом допоміжного проєкціювання

Спосіб допоміжного проєкціювання дає найбільший ефект, якщо поверхнями, що перетинаються, є призми, піраміди, циліндри та конуси загального положення. Суть способу полягає в тому, щоб побудувати допоміжну вироджену проєкцію однієї з поверхонь, що значно спрощує розв'язання задачі, як було показано в попередньому підрозділі. Для побудови виродженої проєкції призматичної або циліндричної поверхні використовують косокутне допоміжне проєкціювання вздовж ребер призми або прямокутних твірних циліндра. Вироджену проєкцію піраміди або конуса будують за допомогою центрального проєкціювання, центр якого суміщають з вершиною поверхні. Площину для побудови допоміжної проєкції обирають з міркувань простоти побудов. Найчастіше - це площина основи поверхні.

На рис.6.12, а показано побудову ліній взаємного перетину трикутних призми та піраміди загального положення.

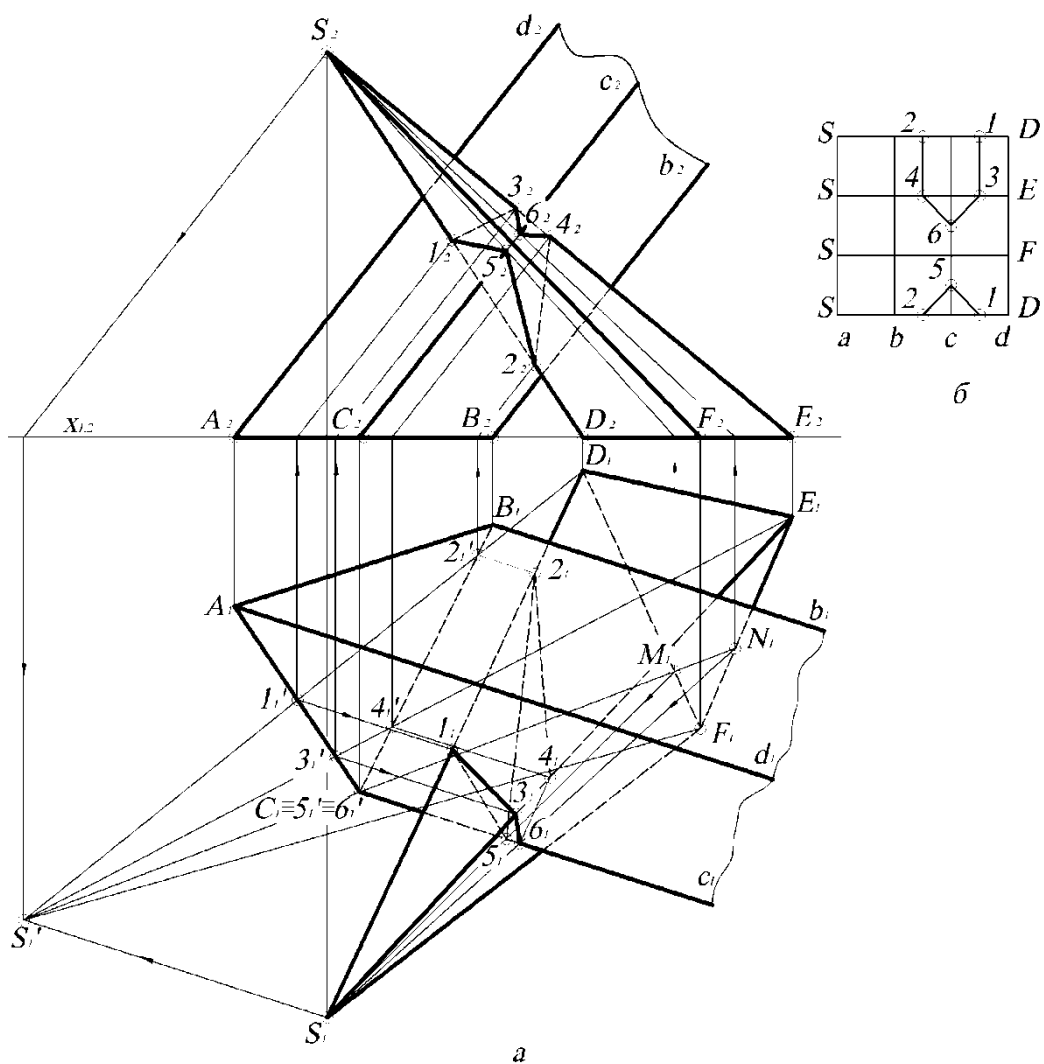


Рис.6.12

Для розв'язування цієї задачі застосовують косокутне допоміжне проєкціювання обох фігур у напрямі ребер призми на горизонтальну площину їхніх основ. За такого проєкціювання призма спроекціюється трикутником своєї основи  $A_1B_1C_1$ , а піраміда – фігурою  $S'_1D_1E_1F_1$ , оскільки косокутні проєкції основ збігаються з їх горизонтальними проєкціями. Із розгляду допоміжних проєкцій призми та піраміди видно, що ламана лінія перетину належить двом граням призми –  $AC$  і  $BC$ . Горизонтальні і фронтальні проєкції точок 1, 2, 3 і 4 отримані зворотним проєкціюванням їхніх допоміжних проєкцій на відповідні ребра піраміди у напрямі протилежного допоміжного проєкціювання. Ребро  $c$  перетинає грані  $DFS$  і  $EFS$  у точках 5 і 6. Для побудови основних проєкцій цих точок через них проведено прямі  $SM$  і  $SN$ , що належать граням піраміди.

Певні труднощі викликає процес сполучення знайдених точок на основних проєкціях. Запобігти цим труднощам допомагає спеціальний граф (схема сполучення), наведений на рис.6.12,б. Ребра призми та піраміди подають у вигляді сітки в порядку їх обходу навколо основ багатогранників. Проміжки між лініями сітки відповідають бічним граням фігур. На лінії сітки наносять знайдені точки перетину. Наприклад, точку 2, яку дістали в результаті перетину ребра  $SD$  піраміди з гранню  $bc$  призми, наносять на лінію  $SD$  у проміжку  $bc$ . Точки, нанесені на сітку, сполучають попарно тільки в межах кожної ділянки сітки. Отримана ламана визначає послідовність сполучення точок лінії перетину багатогранників. Видимі елементи лінії перетину належать видимим граням фігур.

На рис.6.13 показано взаємний перетин двох похилих конусів другого порядку. Для побудови лінії їх взаємного перетину застосовують спосіб центрального проєкціювання з вершини конусів на площину їхніх основ. Спочатку обидва конуси проєкціюють з вершини  $T$ . Вищий конус проєкціюється своєю основою, а нижчий – множиною твірних, обмежених дотичними із точки  $S'_1$  до основи нижчого конуса. Допоміжна проєкція лінії взаємного перетину збігається з частиною кола, яке є основою вищого конуса. Щоб побудувати точки перетину довільної твірної конуса  $S$  з поверхнею конуса  $T$  слід провести допоміжну проєкцію цієї твірної до перетину з колом основи конуса  $T$ . Отримані точки проєкціюють з центра  $T$  у зворотному напрямі на відповідні твірні конуса  $S$ . Наприклад, для визначення точок 5 і 6 перетину твірної  $AS$  з конусом  $T$  будують центральну проєкцію  $A_1S'_1$  твірної  $AS$ , знаходять центральні проєкції  $5'_1$  і  $6'_1$ , які повертають на основні проєкції твірної  $AS$  проєкціюванням з центра  $T$ . Якщо обидві поверхні спроекціювати з центра  $S$ , то проєкція конуса  $S$  буде виродженою і зіллється з його основою, а центральною проєкцією конуса  $T$  буде множина прямих, що перетинаються в точці  $T'_1$ . Використовуючи центральну допоміжну проєкцію з вершини  $S$ , можна визначити точки перетину будь-яких твірних конуса  $T$  з поверхнею конуса  $S$ . Отримавши достатню кількість точок, можна провести плавну криву лінії перетину двох конусів. Вона матиме четвертий порядок.

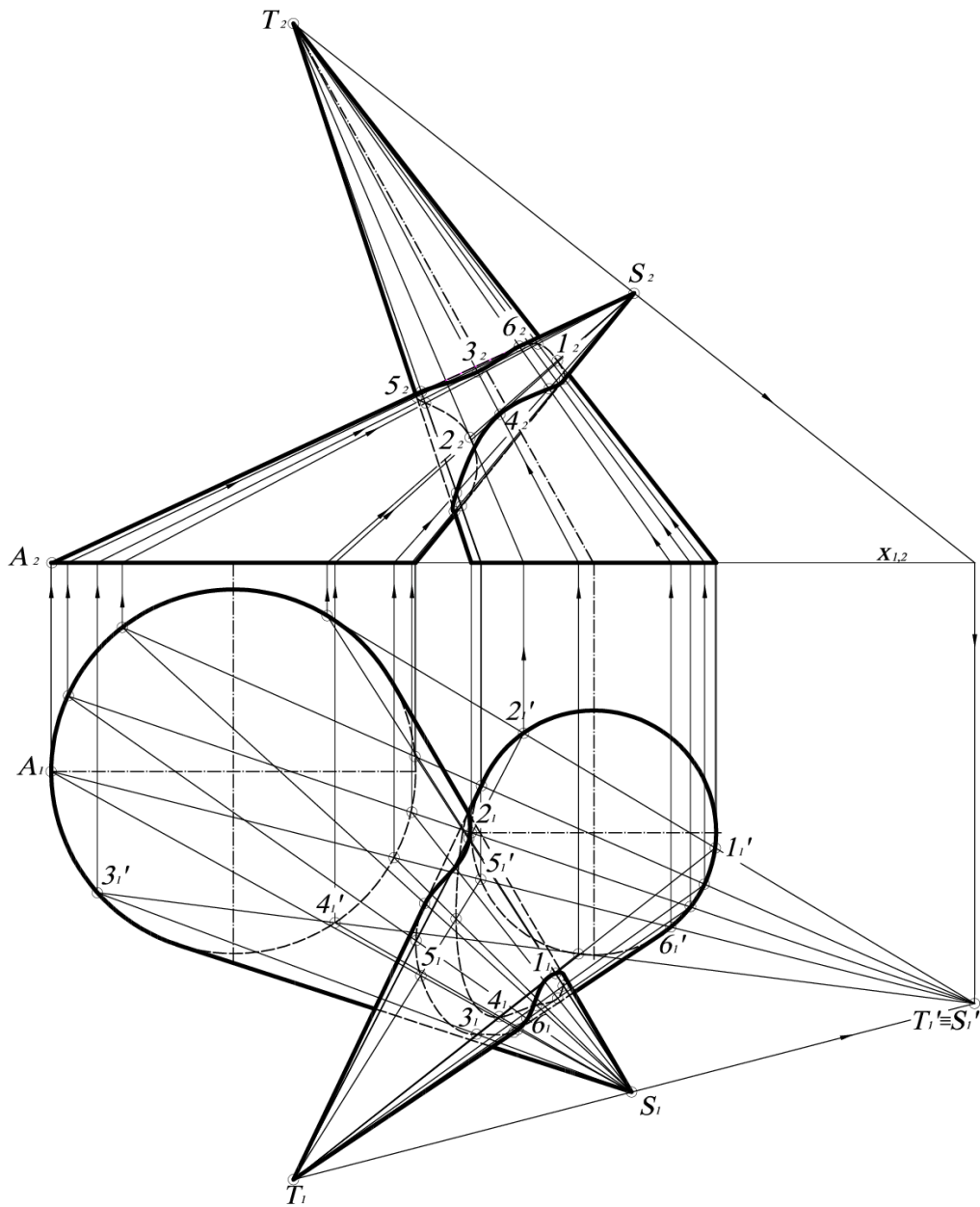


Рис.6.13

На рис.6.14 побудовано лінію перетину конуса обертання з гіперболічним параболоїдом. Напрямними параболоїда є профільні прямі  $a$  і  $b$ , а площина паралелізму  $\Gamma$  – фронтальна. Задачу розв'язують способом центрального допоміжного проєкціювання обох поверхонь з центра  $S$  (вершини конуса) на горизонтальну площину проєкцій. Центральною проєкцією конуса є коло його основи. Для побудови центральної проєкції лінійчатого каркаса гіперболічного параболоїда спочатку знаходять допоміжні проєкції точок його напрямних. Прямі лінії, які відповідно сполучають проєкції цих точок, є центральними проєкціями ліній каркаса поверхні. Точки перетину допоміжних проєкцій твірних конуса та ліній каркаса параболоїда повертають на основі проєкції ліній каркаса зворотним проєкціюванням із центра  $S$ .

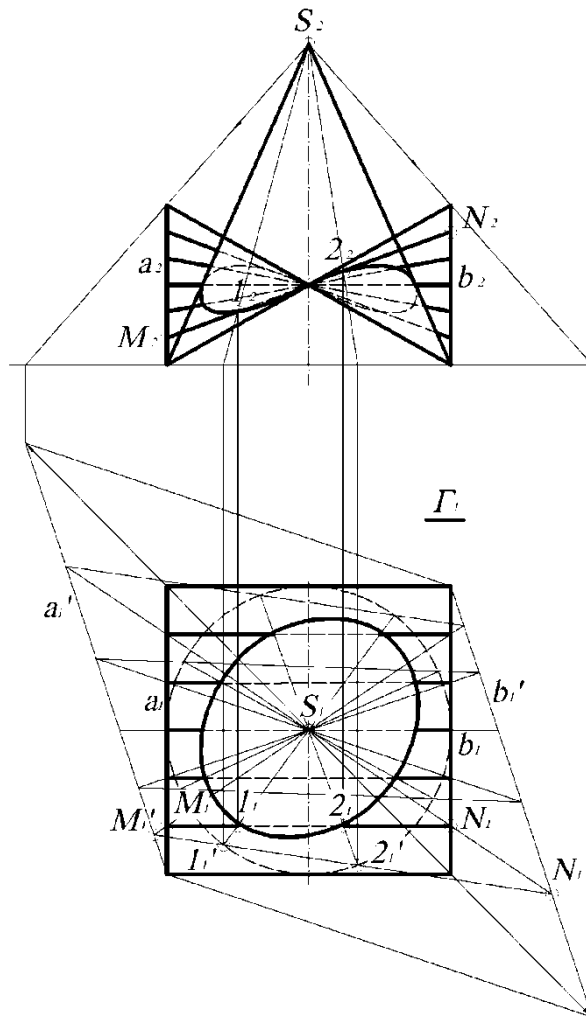


Рис.6.14

Наприклад, центральна проекція  $M_1'N_1'$  лінії  $MN$  каркаса гіперболічного параболоїда перетинає коло основи конуса в точках  $1_1'$  і  $2_1'$ , які є центральними проекціями точок  $I$  і  $2$  шуканої лінії перетину, яка також має четвертий алгебраїчний порядок.

### 6.7 Спосіб допоміжних перерізів

Для визначення лінії взаємного перетину двох поверхонь способом допоміжних перерізів їх перетинають третьою поверхнею  $\Omega$  – посередником (рис.6.15).

Лінії  $m$  і  $n$  допоміжної поверхні, перетинаючись між собою, дають точки шуканої лінії перетину. Виконуючи таку операцію декілька разів, можна отримати потрібну кількість точок для проведення кривої взаємного перетину. Допоміжні січні поверхні слід обирати так, щоб лінії  $m$  і  $n$  були прямими або колами і не потребували додаткових побудов. Найчастіше за січні поверхні беруть площини та сфери. В цих випадках спосіб допоміжних перерізів називають способами **допоміжних січних площин**, або **допоміжних січних сфер**.

На рис. 6.16 показано визначення лінії взаємного перетину прямого гелікоїда (гвинтового коноїда) і конуса обертання. Основа конуса та горизонтальна проекція

гелікоїда збігаються. Щоб визначити точки, які належать лінії взаємного перетину двох поверхонь, доцільно скористатися множиною горизонтальних площин, кожна з яких перетинає конус по колу певного радіуса, а гелікоїд – по прямолінійній твірній.

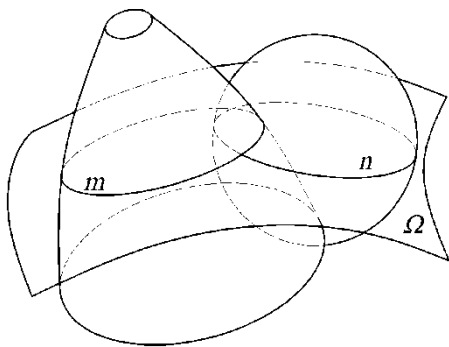


Рис.6.15

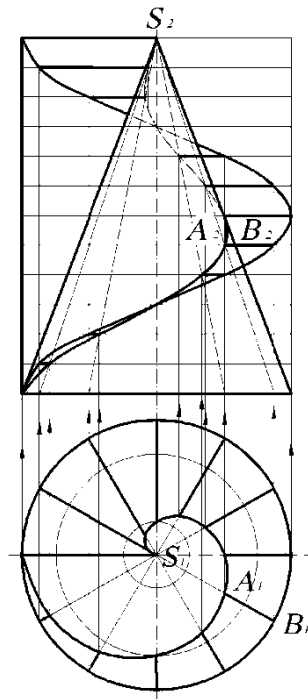


Рис.6.16

Коло та пряма, які належать одній січній площині, перетинаючись між собою, дають точки шуканої лінії. Результатом перетину двох поверхонь є кінчна гвинтова лінія. На рис.6.17 перетинаються дві поверхні: половина тора та сфера. Центр сфери належить площині вищої паралелі тора. Для визначення точок лінії взаємного перетину використовують множини горизонтальних січних площин, кожна з яких перерізає сферу по колу, а тор – по двох колах, за винятком вищої і нижчої площин, кожна з яких дотикається до тора по одному колу. Наприклад, горизонтальна площина Г дотикається до тора по вищому колу, а сферу перерізає по екватору. В результаті перетину цих двох кривих визначають горизонтальну проекцію точки 1, фронтальну проекцію якої будують за вертикальною відповідністю в площині Г. Горизонтальна січна площина Ф перерізає сферу по колу радіуса  $R_1$ , а тор – по колах радіусів  $R_2$  і  $R_3$ . Перетин цих кіл дає горизонтальні проекції точок 4, і 5, які належать лінії взаємного перетину поверхонь. Характерні точки 2 і 3 визначають за допомогою профільної січної площини, що проведена через центр сфери. Кола, по яких ця площина перерізає сферу і тор, збігаються з проекціями січної площини, і точки 2 та 3 перетину цих кіл безпосередньо на проекціях визначити не можна. Тому площину повертають у фронтальне положення навколо вертикальної осі тора. Коло, по якому ця площина перерізає сферу, матиме вигляд  $l'_2$ , а коло перетину цієї площини з тором зобразиться колом  $m'_2$ .

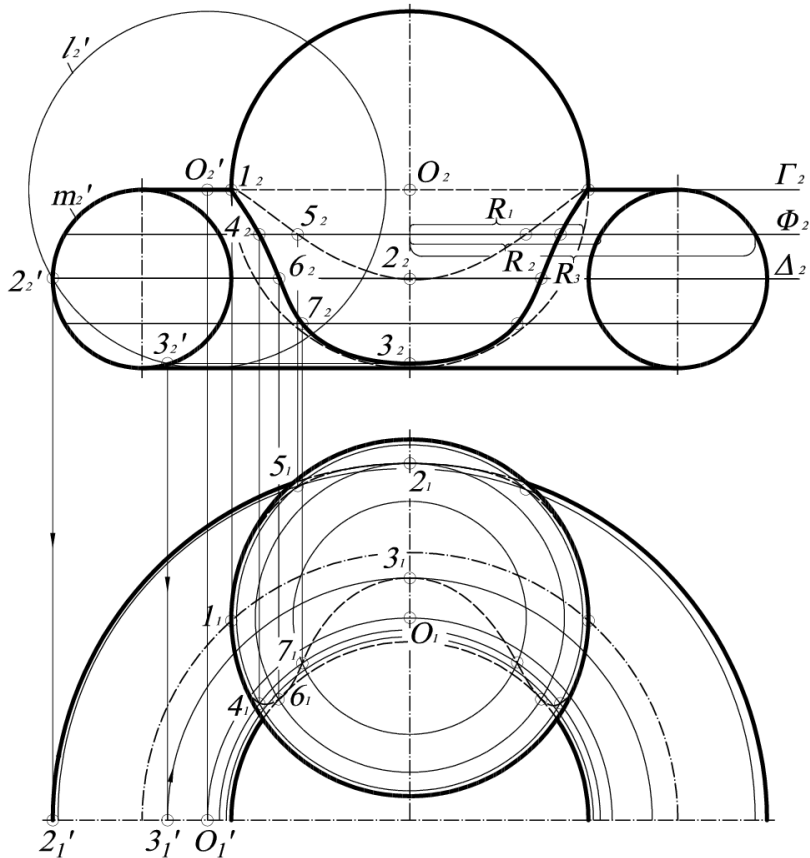


Рис.6.17

У цьому положенні визначають точки  $2'_2$  і  $3'_2$ , які повертають у вихідне положення 2 і 3.

Спосіб січних сфер поділяють на прийоми концентричних сфер, коли всі сфери мають спільний центр, і ексцентричних січних сфер, коли їх центри різні.

Концентричні січні сфери застосовують в особливому випадку, коли осі двох поверхонь обертання перетинаються і паралельні одній з площин проєкцій. Цей прийом ґрунтується на тому, що поверхня обертання, вісь якої проходить через центр сфери, перетинається зі сферою по колах. Якщо вісь поверхні обертання розміщена паралельно одній з площин проєкцій, то ці кола зображуються прямими лініями.

На рис.6.18 показано побудову лінії перетину циліндра обертання з частиною тора. Осі обох поверхонь паралельні фронтальній площині проєкцій і перетинаються в точці  $O$ . Чотири точки –  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  - знаходять безпосередньо в результаті перетину контурних твірних поверхонь. Для визначення проєкцій будь-яких проміжних точок проводять допоміжну сферу з центром у точці  $O$  перетину осей. Сфера перетинається з поверхнями по колах. Точки взаємного перетину кіл належать шуканій лінії. Для визначення горизонтальних проєкцій точок лінії перетину спочатку будують горизонтальні проєкції кіл, по яких сфера перетинає тор, а потім за вертикальною відповідністю визначають проєкції точок.

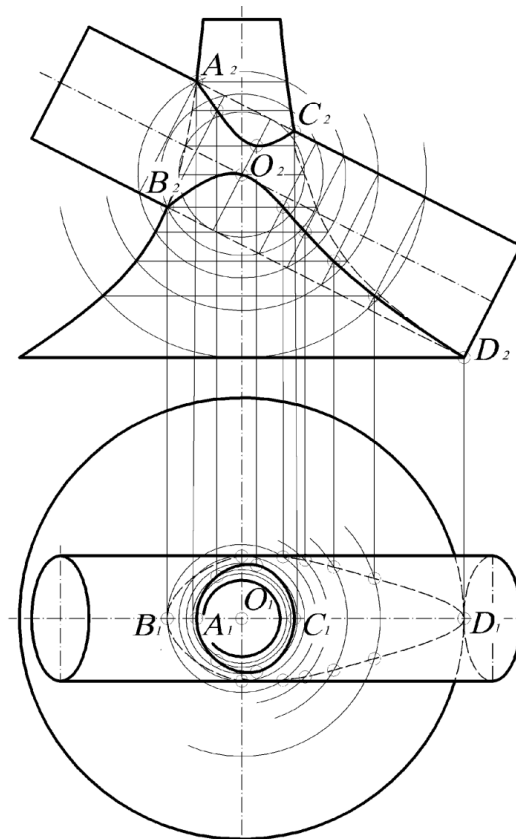


Рис.6.18

На рис.6.19 наведено приклад застосування прийому січних ексцентричних сфер. Перетинаються тор та однопорожнинний гіперboloїд обертання.

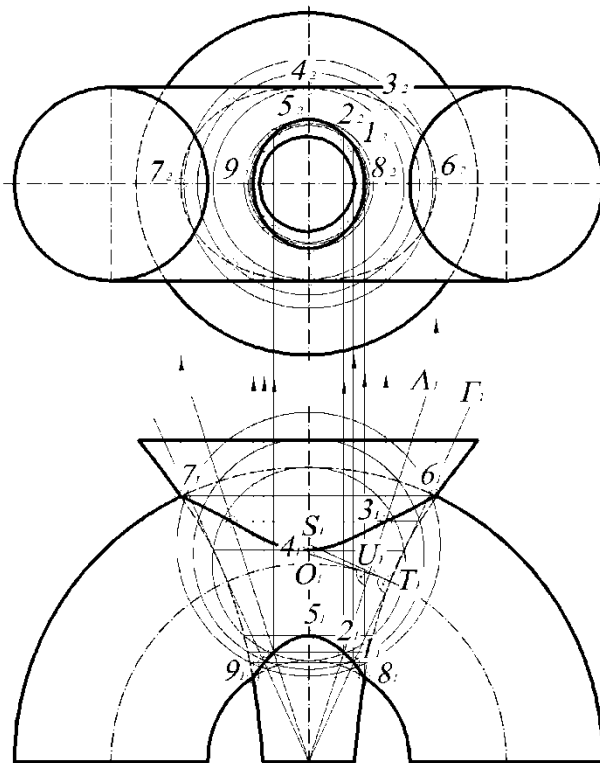


Рис.6.19

Колова вісь тора перетинається з віссю обертання гіперboloїда, обидві осі належать одній горизонтальній площині. Через прямолинійну вісь тора у зоні орієнтованого перетину поверхонь проведено січну площину  $\Gamma$ , яка перерізає тор по колу з центром  $T$ . На осі гіперboloїда визначають положення центра  $S_1$  січної сфери, що перерізає тор по колу з центром  $T$ . Ця сфера перерізає гіперboloїд по двох фронтальних колах. Менше коло перетинається з перерізом тора в точці  $I$ . Ще одна січна площина  $\Lambda$  перерізає тор по колу з центром  $U$ , через яку проводять перпендикуляр до перетину з віссю гіперboloїда в точці  $O$ . Ця точка є центром другої січної сфери, за допомогою якої визначають точки 2 і 3. Точки 6, 7, 8 і 9 лінії перетину визначають безпосередньо як точки перетину горизонтальних контурів поверхонь. Шукана лінія перетину має дві замкнені частини, симетричні відносно профільної площини, що проходить через вісь гіперboloїда.

### 6.8 Особливі випадки взаємного перетину поверхонь другого порядку

При перетині двох алгебраїчних поверхонь лінія перетину має порядок, який дорівнює добутку порядків поверхонь, які перетинаються. Тому дві поверхні другого порядку в загальному випадку перетинаються по просторовій кривій четвертого порядку. Просторові криві четвертого порядку можуть набирати різної форми. Види перетину поверхонь другого порядку систематизують за виглядом лінії перетину.

1. Якщо лінія перетину має одну замкнену гілку без особливих точок, то перетин поверхонь називають частковим урізуванням (див.рис.6.13)

2. Повне проникнення – це випадок перетину, коли просторова крива має дві замкнені гілки (рис.6.20).

3. Однобічне внутрішнє стикання відбувається, коли поверхні, що перетинаються мають в одній точці (точка  $M$  на рис.6.21) спільну дотичну площину. Крива лінія перетинає сама себе у точці дотику.

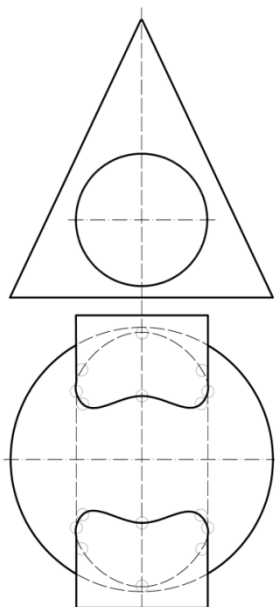


Рис.6.20

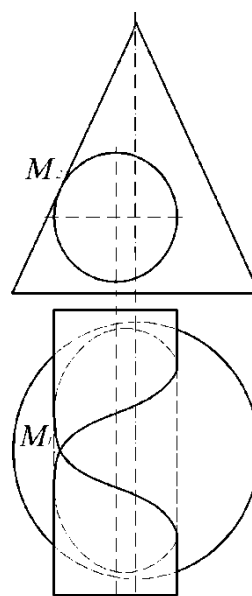


Рис.6.21

4. Подвійне стикання – це особливий випадок перетину поверхонь, які мають дві спільні дотичні площини. У цьому разі просторова крива четвертого порядку розпадається на дві плоскі криві другого порядку, які перетинаються в точках дотику  $M$  і  $N$  (рис.6.22).

Загальний випадок, коли просторова крива четвертого порядку розпадається на дві плоскі криві другого порядку, визначає теорема Монжа: *якщо дві поверхні другого порядку можна вписати в третю поверхню другого порядку або описати навколо неї, то перші дві перетинаються по двох плоских кривих другого порядку.*

На рис.6.22 показано сферу, яка вписана у два циліндри обертання. Сфера дотикається до вертикального циліндра по колу, розташованому в горизонтальній площині, яке проходить через точки  $M$  і  $N$ . Площина кола, по якому сфера дотикається до горизонтального циліндра, є вертикальною і також проходить через точки  $M$  і  $N$ .

На рис.6.23 показано лінію взаємного перетину конуса та циліндра обертання, які огинають спільну сферу. Ця умова відповідає теоремі Монжа про розпад лінії перетину поверхонь другого порядку. Отже, лінія перетину цих поверхонь розпадається на дві плоскі криві другого порядку (еліпси), розміщені у фронтально проєкціювальних площинах  $\Sigma$  і  $\Theta$ . Горизонтальні проєкції вершин еліпсів визначають за вертикальною відповідністю. Еліпси можна побудувати відомими способами за двома осями.

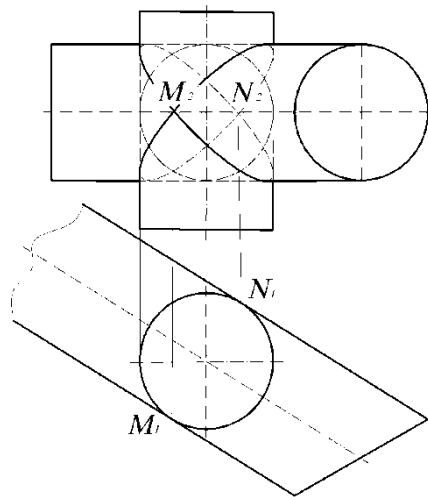


Рис.6.22

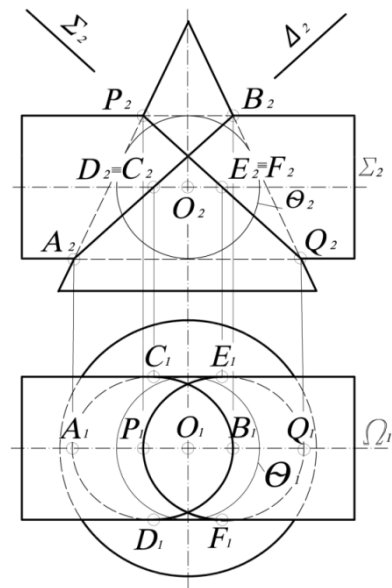


Рис.6.23

### Запитання для самоконтролю

1. Назвіть умови застосування методу січних сфер?
2. Яку криву ми отримаємо в результаті перерізу конуса площиною, паралельною до його осі?
3. Які задачі нарисної геометрії називають позиційними?
4. Який порядок має крива перетину двох поверхонь другого порядку?

## РОЗДІЛ 7. МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

При довільному розміщенні у просторі геометричні фігури проєкціюються зі спотвореннями. Наприклад, довжина прямокутної проєкції відрізка прямої загального положення завжди менша, ніж довжина самого відрізка. Кут між прямими загального положення не дорівнює куту між їх проєкціями тощо. Задачі на визначення метричних характеристик геометричних фігур (відстаней, кутів та площ) за їх проєкціями називаються метричними задачами. Для їх розв'язання існують спеціальні способи, які дозволяють привести взаємне положення геометричних фігур і площин проєкцій до окремого випадку, коли та чи інша метрична характеристика проєкціюється без спотворення.

Якщо розглядати тільки елементарні геометричні фігури (точку, необмежену пряму і необмежену площину), то поняття відстані або кута має сенс тільки для пари таких фігур. Відстань між двома фігурами завжди вимірюється певним відрізком, а кут – певним плоским кутом.

### 7.1. Метричні властивості проєкцій пар геометричних фігур

Метричні властивості проєкцій пар геометричних фігур відповідають на запитання: яке положення повинна займати пара фігур відносно площин проєкцій, щоб ту чи іншу метричну характеристику можна було виміряти безпосередньо на проєкції.

Між двома точками, точкою і прямою та точкою і площиною можна виміряти тільки відстань.

Властивість 1. Відстань між двома точками проєкціюється у натуральну величину, якщо точки належать прямій, що паралельна до площини проєкцій (рис. 7.1).

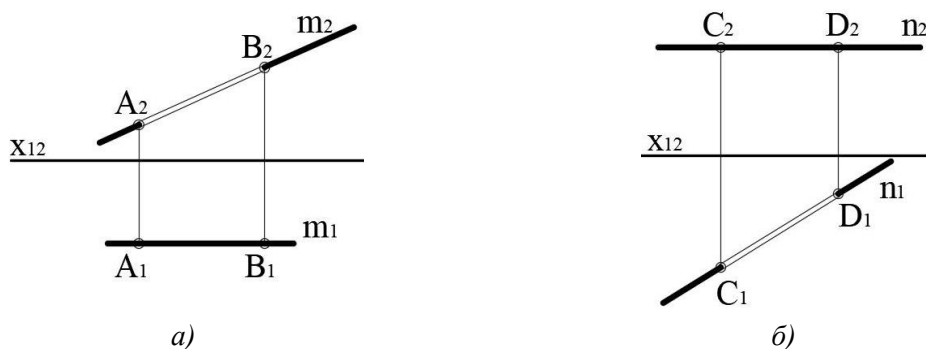


Рис. 7.1

Дійсно, відстань між двома точками вимірюється відрізком, який з'єднує ці точки, а він зобразиться без спотворення у тому разі, якщо буде відрізком прямої рівня. На рис. 7.1 показано пари точок  $A$  і  $B$  та  $C$  і  $D$ , що належать відповідно

фронтальній прямій  $m$  та горизонтальній прямій  $n$ . Натуральну величину відстані показано подвійною тонкою лінією.

Властивість 2. Відстань від точки до прямої проєкціюється у натуральну величину, якщо пряма є лінією найбільшого нахилу площини, яка визначається заданими точкою і прямою, до площини проєкцій.

На рис. 7.2. точка  $A$  і пряма  $m$  визначають площину  $ABC$ . Відстань від точки  $A$  до прямої  $m$  вимірюється відрізком  $AD$ , який є горизонталлю площини  $ABC$ . Тоді пряма  $m$  є лінією найбільшого нахилу площини  $ABC$  до горизонтальної площини проєкцій.

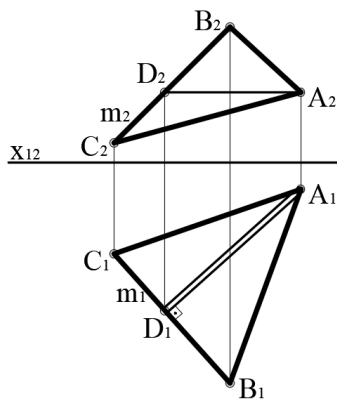


Рис. 7.2

В окремих випадках відстань від точки  $A$  до прямої  $m$  зображається у натуральну величину, якщо пряма  $m$  є проєкціовальною (рис. 7.3), або якщо точка  $A$  і пряма  $m$  належать площині рівня (рис. 7.4). Саме такі окремі випадки найчастіше використовуються при розв'язанні метричних задач.

Властивість 3. Відстань від точки  $A$  до площини  $\Gamma$  проєкціюється без спотворення, якщо площина  $\Gamma$  проєкціовальна.

На рис. 7.5 фронтально-проєкціовальну площину  $\Gamma$  задано слідами  $f$  і  $h$ . Відстань від точки  $A$  до цієї площини вимірюється відрізком  $AB$ , який є перпендикулярним до площини  $\Gamma$  і паралельним до фронтальної площини проєкцій.

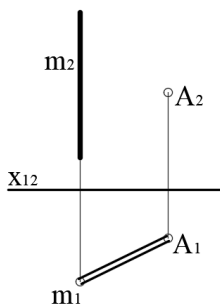


Рис. 7.3

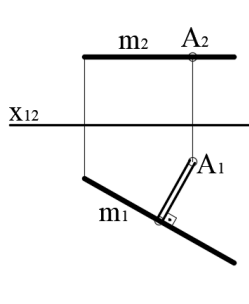


Рис. 7.4

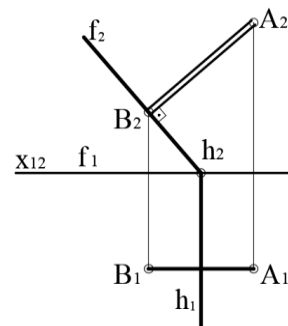


Рис. 7.5

Між іншими парами елементарних геометричних фігур залежно від їх взаємного розташування можна вимірювати як відстані, так і кути. Так, наприклад,

між двома паралельними прямими можна виміряти відстань, а між прямими, що перетинаються – кут. Між двома мимобіжними прямими вимірюється як відстань, так і кут.

**Визначення.** Кут між двома мимобіжними прямими (*кут мимобіжності*) вимірюється плоским кутом між двома прямими, що перетинаються і паралельні даними мимобіжними прямим.

На рис.7.6 задано дві мимобіжні прямі  $m$  і  $n$ . Якщо через довільну точку  $A$  провести прямі  $k \parallel m$  і  $l \parallel n$ , то кут  $\alpha$  між прямими  $k$  і  $l$  є кутом мимобіжності прямих  $m$  і  $n$ .

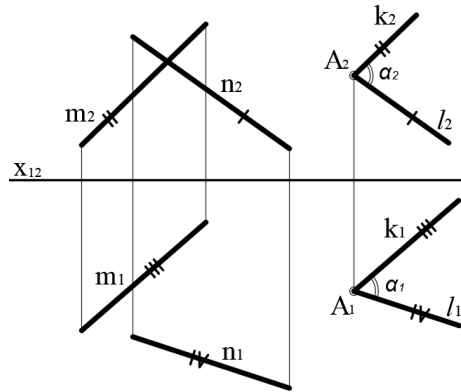


Рис. 7.6

**Властивість 4.** Кут між двома прямими (мимобіжними або такими, що перетинаються) проєкціюється без спотворення, якщо обидві прямі паралельні до однієї площини проєкцій.

На рис. 7.7 показано дві горизонтальні мимобіжні прямі, на рис. 7.8 – дві фронтальні прямі, що перетинаються. В обох випадках кут  $\alpha$  між відповідними прямими зображається у натуральну величину.

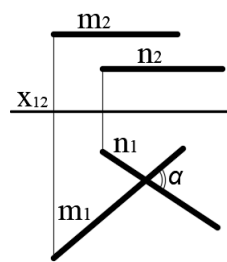


Рис. 7.7

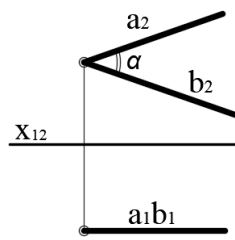


Рис. 7.8

**Властивість 5.** Прямий кут між двома прямими (мимобіжними або такими, що перетинаються) проєкціюється без спотворення, якщо хоча б одна пряма паралельна до площини проєкцій.

На рис. 7.9 показано дві прямі  $a$  і  $b$ , які перетинаються під прямим кутом. Пряма  $b$  паралельна до горизонтальної площини проєкцій. Для побудови горизонтальної проєкції  $a_1$  прямої  $a$  через неї проведено горизонтально-

проекціювальну площину  $\Delta$ , яка перпендикулярна до прямої  $b$ . Але  $b_1 \parallel b$ , тому  $b_1 \perp a_1$ .

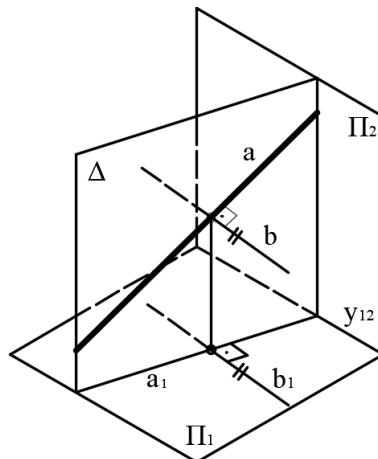


Рис. 7.9

На рис. 7.10 прямий кут між перетинними прямими  $a$  і  $b$  зображається без спотворення на  $\Pi_1$ , оскільки  $b \parallel \Pi_1$ . На рис. 7.11 прямий кут між мимобіжними прямими  $m$  і  $n$  проєкціюється у натуральну величину на  $\Pi_2$ , тому що  $m \parallel \Pi_2$ .

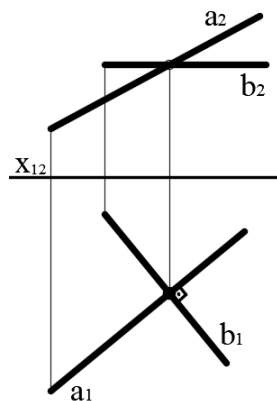


Рис. 7.10

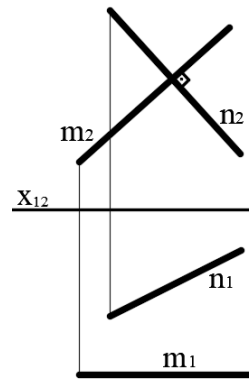


Рис. 7.11

Властивість прямого кута між двома прямими використовується для побудови **ліній найбільшого нахилу** площини загального положення до площин проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  (рис. 7.12). Лінія  $(BD)$  найбільшого нахилу площини  $(ABC)$  до горизонтальної площини проєкцій складає прямий кут з горизонталлю  $(CH)$  цієї площини. Лінія  $(BE)$  найбільшого нахилу площини до  $\Pi_2$  складає прямий кут з фронталлю.

**Властивість 6.** Відстань між мимобіжними прямими зображається у натуральну величину, якщо площина їх паралелізму є проєкціювальною. Площиною паралелізму двох прямих є площина, яка одночасно паралельна обом прямим.

У випадку, показаному на рис. 7.13, мимобіжні прямі  $a$  і  $b$  мають вертикальну площину паралелізму  $\Gamma$ . Горизонтальні проєкції  $a_1$  і  $b_1$  прямих  $a$  і  $b$  паралельні між собою, а відстань між ними вимірюється відрізком спільного перпендикуляра.

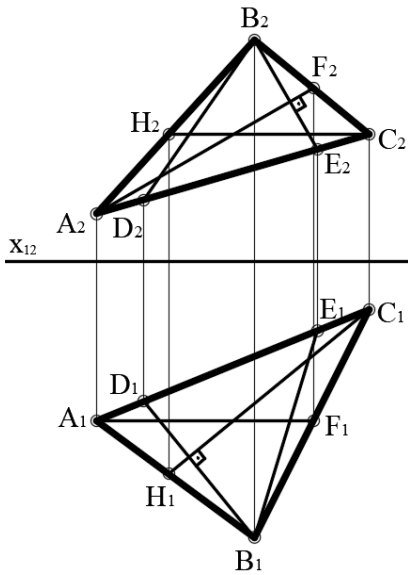


Рис. 7.12

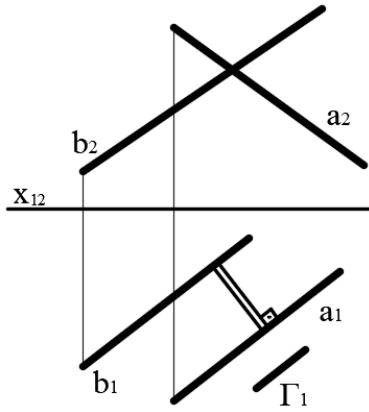


Рис. 7.13

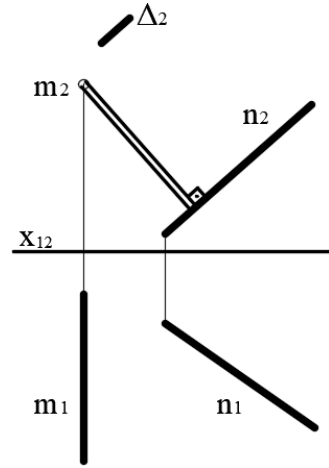


Рис. 7.14

В окремому випадку відстань між мимобіжними прямими проєкціюється у натуральну величину, якщо одна з них перпендикулярна до площини проєкцій (рис.7.14). У цьому випадку площина паралелізму прямих  $\Delta$  також є проєкціювальною.

Властивість 7. (рис. 7.15). Відстань між паралельними прямими проєкціюється у натуральну величину, якщо прямі є лініями найбільшого нахилу площини, яку вони визначають, до площини проєкцій.

На прямій  $a$  взято довільну точку  $A$ . Відстань  $AD$  від точки  $A$  до прямої  $m$  і буде відстанню між паралельними прямими  $a$  і  $m$ . Тоді доведення властивості 7 зводиться до властивості 2 (рис. 7.2).

На рис. 7.16 і 7.17 показано окремі випадки властивості 7, коли обидві прямі є проєкціювальними (рис. 7.16) або належать одній площині рівня (рис. 7.17).

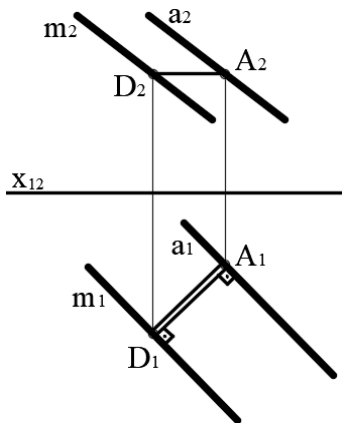


Рис. 7.15

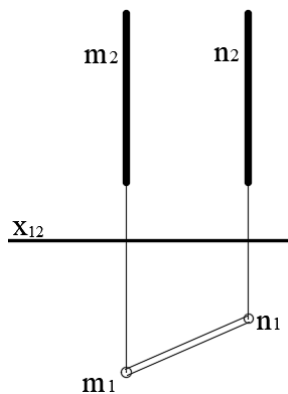


Рис. 7.16

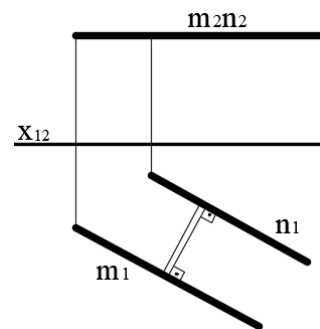


Рис. 7.17

**Властивість 8.** (рис. 7.18). Відстань від точки до площини або відстань від прямої до паралельної їй площини зображається у натуральну величину, якщо площина є проєкціовальною.

Відстань від точки  $A$  до площини  $BCD$  вимірюється перпендикуляром  $AE$  до площини. Якщо площина  $BCD$  перпендикулярна до площини проєкцій, то відрізок  $AE$  паралельний до тієї ж площини проєкцій, і тому зображається у натуральну величину.

Якщо через точку  $A$  провести пряму  $a$  паралельну площині  $BCD$ , то відрізок  $AE$  вимірюватиме відстань від прямої  $a$  до площини  $BCD$ .

**Визначення.** Кут між прямою і площиною вимірюється плоским кутом, утвореним самою прямою і її прямокутною проєкцією на цю площину. На рис. 7.19 відрізок  $KB$  є ортогональною проєкцією відрізка  $AK$  на площину  $\Gamma$ . Плоский кут  $AKB$  є кутом між прямою  $l$  і площиною  $\Gamma$ .

**Властивість 9.** (рис.7.20). Кут між прямою і площиною проєкціюється у натуральну величину, якщо пряма паралельна, а площина перпендикулярна до однієї і тієї ж площини проєкцій. Дійсно, якщо пряма  $l$  паралельна до площини проєкцій  $\Pi_1$ , а площина  $\Gamma$  перпендикулярна до  $\Pi_1$ , то площина  $AKB \parallel \Pi_1$  і кут  $AKB$  проєкціюється у натуральну величину.

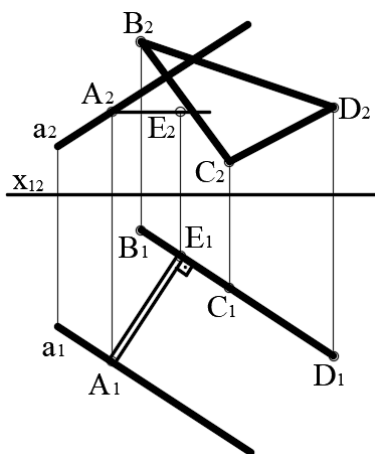


Рис. 7.18

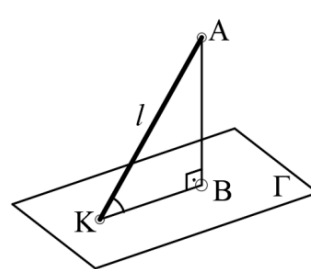


Рис. 7.19

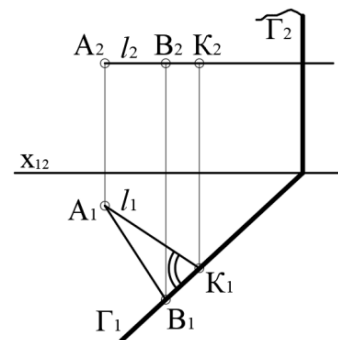


Рис. 7.20

**Визначення.** **Двогранним кутом** називається кут між двома площинами ( $\Gamma$  і  $\Delta$ ). Він вимірюється плоским кутом  $\alpha$ , який утворюється при перерізі двох даних площин ( $\Gamma$  і  $\Delta$ ) третьою ( $\Sigma$ ), перпендикулярною до перших двох (рис. 7.21).

**Властивість 10.** Двогранний кут між двома площинами, що перетинаються, або відстань між двома паралельними площинами зображається у натуральну величину, якщо обидві площини перпендикулярні до однієї площини проєкцій.

На рис. 7.22а, показано дві фронтально-проєкціовальні площини  $ABC$  і  $ABD$ , кут  $\alpha$  між якими зображається у натуральну величину на  $\Pi_2$ . На рис. 7.22б, відстань  $a$  між паралельними площинами проєкціюється у натуральну величину на  $\Pi_1$ .

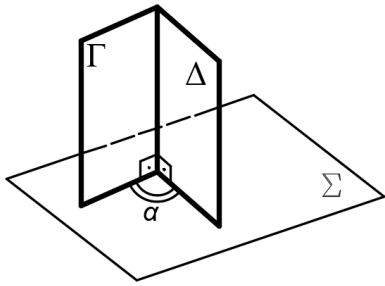


Рис. 7.21

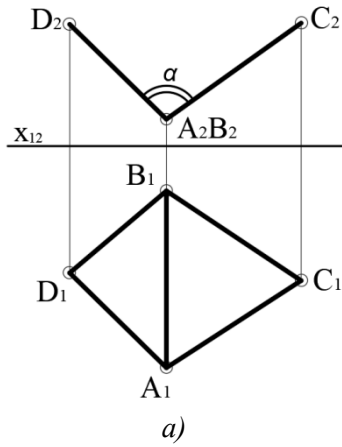
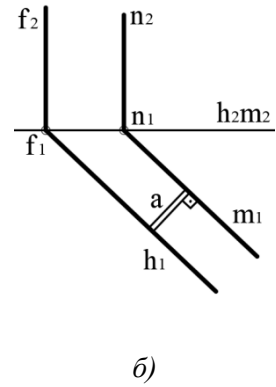


Рис. 7.22



**Визначення.** *Перпендикуляром до площини* називається пряма, яка перпендикулярна до двох непаралельних прямих, що належать цій площині.

**Властивість 11.** Фронтальна та горизонтальна проекції перпендикуляра до площини утворюють прямий кут відповідно з фронтальною проекцією фронталі та горизонтальною проекцією горизонталі цієї площини.

Властивість проєкцій перпендикуляра до площини впливає з властивості проєкцій прямого кута (властивість 5). При цьому сторонами прямого кута, паралельними до площин проєкцій, є горизонталь і фронталь площини.

На рис. 7.23 показано дві проєкції площини  $\Sigma$ , заданої трикутником  $ABC$ . З довільної точки  $P$  побудовано перпендикуляр  $p$  до площини  $\Sigma$ . Для цього спочатку у площині трикутника побудовано фронталь  $f$  та горизонталь  $h$ . З фронтальної проєкції  $P_2$  точки  $P$  проведено фронтальну проєкцію  $p_2$  перпендикуляра  $p$  під прямим кутом до фронтальної проєкції  $f_2$  фронталі  $f$ . З горизонтальної проєкції  $P_1$  точки  $P$  проведено горизонтальну проєкцію  $p_1$  перпендикуляра  $p$  під прямим кутом до горизонтальної проєкції  $h_1$  горизонталі  $h$ .

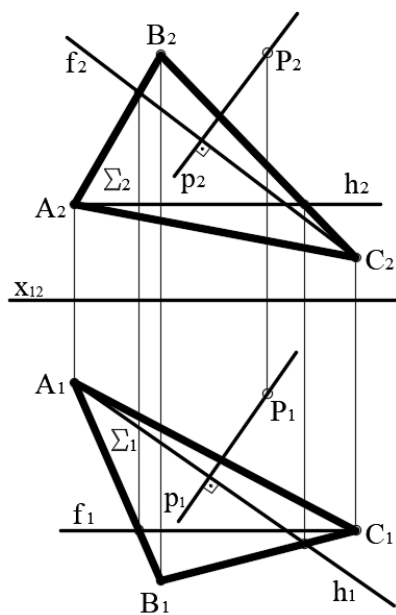


Рис. 7.23

## 7.2. Спосіб прямокутного трикутника

Основною метричною задачею нарисної геометрії вважається визначення довжини відрізка загального положення за заданими прямокутними проекціями.

На рис. 7.24, *a* показано відрізок  $AB$  прямої загального положення у просторі, на рис. 7.24, *б* – на комплексному рисунку.

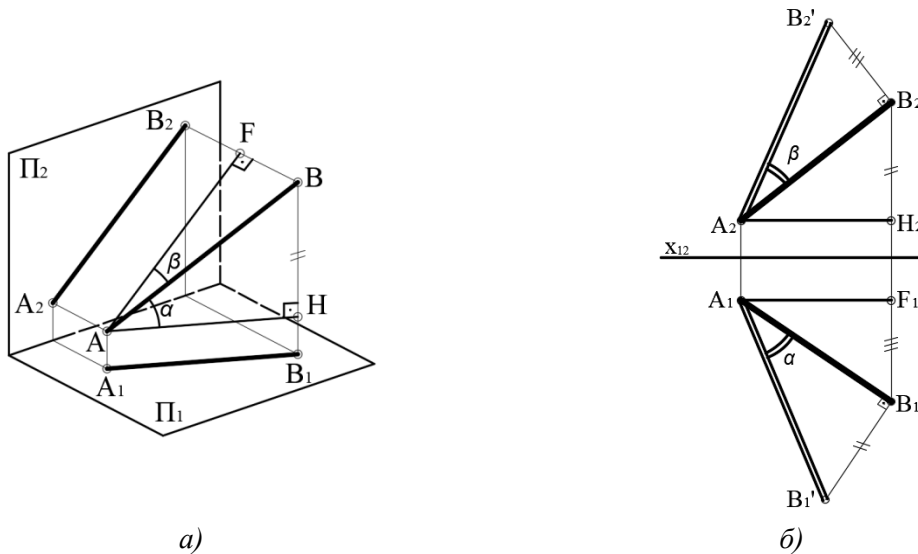


Рис. 7.24

Необхідно за заданими проекціями (рис. 7.24 *б*)  $A_1B_1$  і  $A_2B_2$  відрізка  $AB$  визначити його довжину у просторі. Якщо з точки  $A$  (рис. 7.24*a*) провести пряму  $AH \parallel \Pi_1$ , утвориться прямокутний трикутник  $ABH$ , гіпотенуза якого дорівнює довжині відрізка  $AB$ . Будь-який прямокутний трикутник можна побудувати, якщо відомі значення його катетів. Катет  $AH$  має таку ж довжину, як горизонтальна проекція  $A_1B_1$  відрізка. Катет  $BH$  можна визначити як перевищення точки  $B$  над точкою  $H$ . Приймавши  $A_1B_1$  за один з катетів трикутника, до нього можна побудувати катет  $B_1B_1' = B_2H_2$  і визначити довжину гіпотенузи  $A_1B_1' = AB$ . Кут  $\alpha$  трикутника  $B_1A_1B_1'$  дорівнює куту нахилу відрізка  $AB$  до горизонтальної площини проєкцій  $\Pi_1$ .

Так само можна визначити кут  $\beta$  нахилу відрізка до  $\Pi_2$ , побудувавши у просторі прямокутний трикутник  $AFB$ , у якого катет  $AF = A_2B_2$ , а відрізок  $FB$  показує, наскільки точка  $A$  знаходиться ближче до  $\Pi_1$  ( $\Pi_2$ ), ніж точка  $B$ . На рис. 7.24, *б*, цей трикутник побудовано до фронтальної проєкції  $A_2B_2$  відрізка  $AB$ , де катет  $B_2B_2'$  дорівнює відстані  $F_1B_1$ . Отримано таку саму довжину  $A_2B_2' = A_1B_1'$  відрізка  $AB$  і кут  $\beta$  його нахилу до площини  $\Pi_2$ .

За допомогою способу прямокутного трикутника можна розв'язати більшість метричних задач нарисної геометрії.

**Приклад 7.1.** Визначити натуральну величину довільного трикутника  $ABC$  (рис. 7.25).

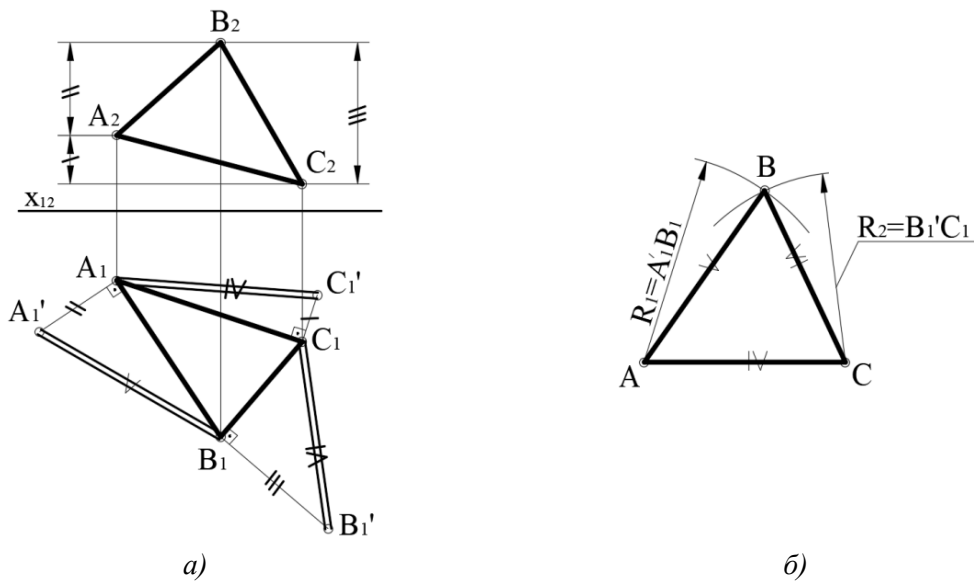


Рис. 7.25

Способом прямокутного трикутника визначено довжини всіх сторін трикутника (рис. 7.25а). Потім за трьома відомими сторонами за допомогою засічок побудовано натуральну величину трикутника  $ABC$  (рис. 7.25б).

**Приклад 7.2.** Визначити кут нахилу прямої  $t$  загального положення до площини  $\Sigma$  ( $f, h$ ) загального положення (рис. 7.27).

Кут нахилу прямої  $t$  до площини  $\Sigma$  вимірюється плоским кутом між прямою  $t$  та її ортогональною проекцією  $PK$  на площині  $\Sigma$  (рис. 7.26). Такий же кут доповнює до  $90^\circ$  кут  $PAK$  між прямою  $t$  та перпендикуляром  $n$ . Отже, достатньо визначити величину кута  $PAK$  і доповнити його до  $90^\circ$ .

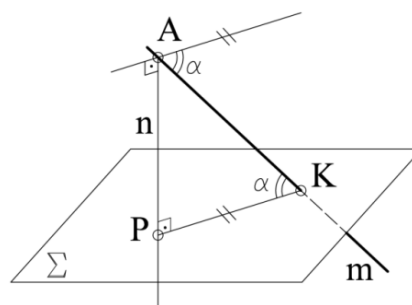


Рис. 7.26

На прямій  $t$  призначено довільну точку  $A$ , через яку згідно з властивістю 11 побудовано проєкції  $n_1$  і  $n_2$  перпендикуляра  $n$  до площини  $\Sigma$  (рис. 7.27).

Побудовано точки  $M$  і  $N$  перетину відповідно прямої  $t$  і перпендикуляра  $n$  з горизонтальною площиною проєкцій. Натуральну величину утвореного трикутника  $AMN$  (рис. 7.27, б) побудовано за трьома сторонами  $MN$ ,  $AM$  і  $AN$ . Натуральну величину  $MN$  виміряно безпосередньо на  $\Pi_1$ , а натуральні величини сторін  $AM$  і  $AN$  визначено способом прямокутного трикутника.

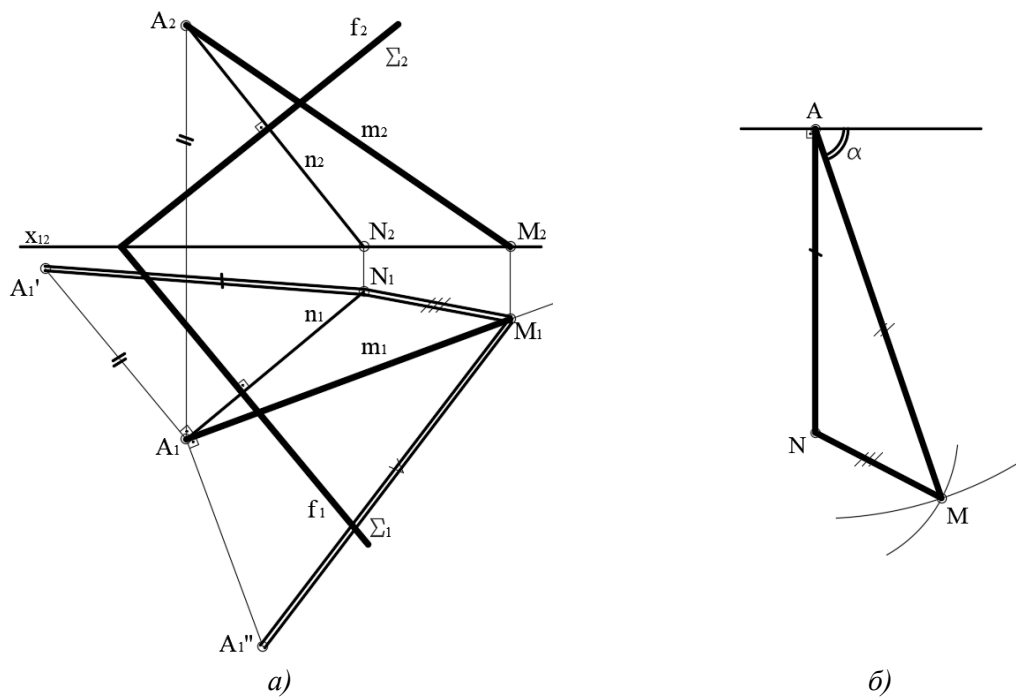


Рис. 7.27

**Приклад 7.3.** Визначити відстань від точки  $A$  до прямої  $l$  загального положення (рис.7.28).

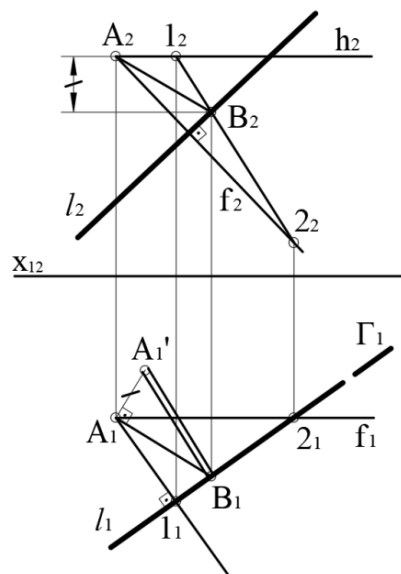


Рис. 7.28

Відстань від точки до прямої – це довжина перпендикуляра, опущеного з точки на пряму. Для розв'язання задачі потрібно через точку  $A$  провести площину, перпендикулярну до заданої прямої, і знайти точку перетину цієї площини з прямою. Відстань від точки перетину до заданої точки і визначить відстань від точки до прямої.

На рис. 7.28 задано пряму  $l$  загального положення та точку  $A$ . Площину, перпендикулярну до прямої  $l$ , задано лініями рівня, відповідно до властивостей проєкцій перпендикуляра до площини, яким виступає пряма  $l$ :  $h_1 \perp l_1$  та  $f_2 \perp l_2$ .

Для визначення точки перетину прямої  $l$  з побудованою площиною через пряму  $l$  проведено допоміжну вертикальну січну площину  $\Gamma$ . Вона перетинає площину  $(f, h)$  по лінії 1-2. Точку  $B$  перетину прямої  $l$  і площини  $(f, h)$  знайдено на перетині фронтальних проєкцій  $l_2 2_2$  та  $l_2$ . Відрізок  $AB$  є проєкцією відстані від точки  $A$  до прямої  $l$ . Для визначення дійсного значення відстані знайдено натуральну величину відрізка  $AB$  способом прямокутного трикутника.

Для розв'язання метричних задач нарисної геометрії найчастіше використовують так звані способи перетворення проєкцій, в основу яких покладено зміну взаємного положення геометричних фігур і площин проєкцій так, щоб задані геометричні фігури відповідали метричним властивостям, сформульованим у підрозділі 7.1.

До цих способів відносяться:

1. Спосіб обертання навколо проєкціювальних осей.
2. Спосіб плоско-паралельного переміщення.
3. Спосіб заміни площин проєкцій.
4. Спосіб обертання площини навколо лінії рівня.

### 7.3. Спосіб обертання навколо проєкціювальних осей

Натуральну величину відрізка прямої можна визначити, повертаючи його навколо проєкціювальної осі у положення, паралельне до площини проєкцій.

На рис. 7.29 задано проєкції відрізка  $AB$  прямої загального положення. Через точку  $B$  проведено горизонтально-проєкціювальну вісь  $l$ , навколо якої відрізок  $AB$  повернуто у фронтальне положення  $A'B$ . Тоді  $A_2'B_2$  – натуральна величина відрізка  $AB$ , а  $\alpha$  – натуральна величина кута його нахилу до горизонтальної площини проєкцій.

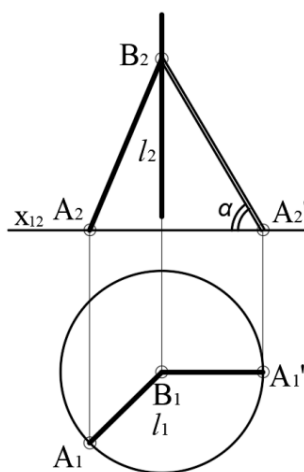


Рис. 7.29

Відрізок  $AB$  можна повернути як за годинниковою стрілкою, так і проти неї. Множина положень відрізка  $AB$  навколо осі  $l$  утворює поверхню конуса обертання. Тому зазначений спосіб має ще одну назву «спосіб допоміжного конуса».

Способом обертання фігури навколо проєкціювальних осей можна розв'язувати й інші метричні задачі, послідовно повертаючи геометричні фігури навколо двох осей – горизонтально-проєкціювальної (вертикальної) та фронтально-проєкціювальної. Наприклад, для визначення відстані від точки  $M$  до прямої  $AB$  (рис. 7.30) потрібно послідовно виконати два повороти. При першому повороті точку і пряму повернуто навколо довільно призначеної вертикальної осі  $l$  так, щоб відрізок  $AB$  зайняв фронтальне положення. Другим поворотом відрізок  $AB$  повернуто навколо довільно призначеної фронтально-проєкціювальної осі  $m$  у горизонтально-проєкціювальне положення. В результаті отримано вироджену проєкцію  $A_1''B_1''$  відрізка, відстань від якої до проєкції  $M_1''$  точки  $M$  є шуканою. При цьому положення проєкціювальних осей  $l$  і  $m$  не впливає на результат розв'язання задачі.

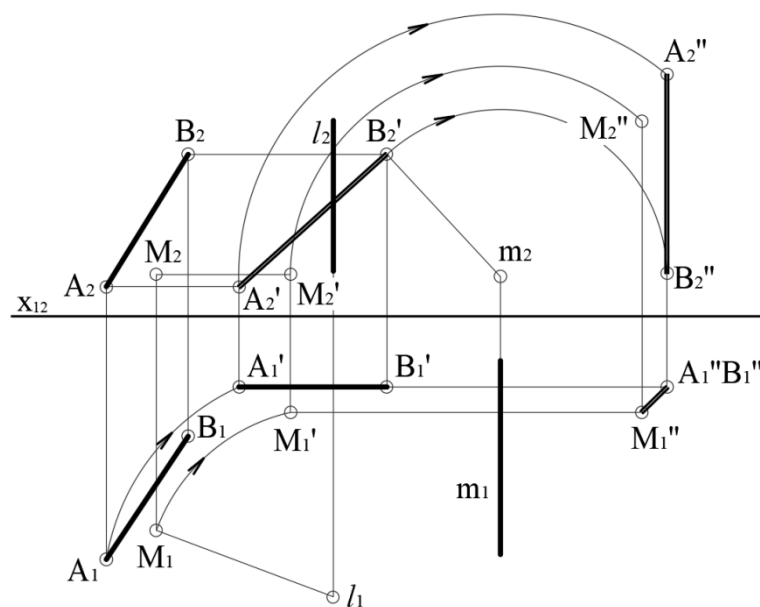


Рис. 7.30

Зазначені осі взагалі можна не фіксувати, а побудувати лише вихідні фігури ( $AB$  і  $M$ ) у повернутих положеннях. У цьому випадку спосіб має назву «плоско-паралельне переміщення».

#### 7.4. Спосіб плоско-паралельного переміщення

Суть способу плоско-паралельного переміщення полягає у зміні розташування геометричних фігур відносно площин проєкцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  до положення, при якому метричні характеристики фігур проєкціюються у

**Натуральна величина відрізка.**

На рис. 7.31, б показано відрізок прямої загального положення  $AB$ . Для визначення його натуральної величини відрізок потрібно повернути у горизонтальне

або у фронтальне положення. Тоді на відповідній площині проєкцій він зобразиться у натуральну величину.

На рис. 7.31, *в* відрізок  $AB$  повернуто у горизонтальне положення. Для цього його фронтальну проєкцію розміщено паралельно осі  $x_{12}$  (положення  $A_2'B_2'$ ). В результаті на площині проєкцій  $\Pi_1$  у натуральну величину зобразився сам відрізок ( $A_1'B_1'$ ) та кут  $\beta$  його нахилу до площини  $\Pi_2$ .

На рис. 7.31, *а* відрізок  $AB$  переведено у фронтальне положення, для чого його горизонтальну проєкцію розміщено паралельно до осі  $x_{12}$  (положення  $A_1''B_1''$ ). На площині проєкцій  $\Pi_2$  отримано натуральну величину відрізка  $AB$  ( $A_2''B_2''$ ) та кута  $\alpha$  його нахилу до площини  $\Pi_1$ .

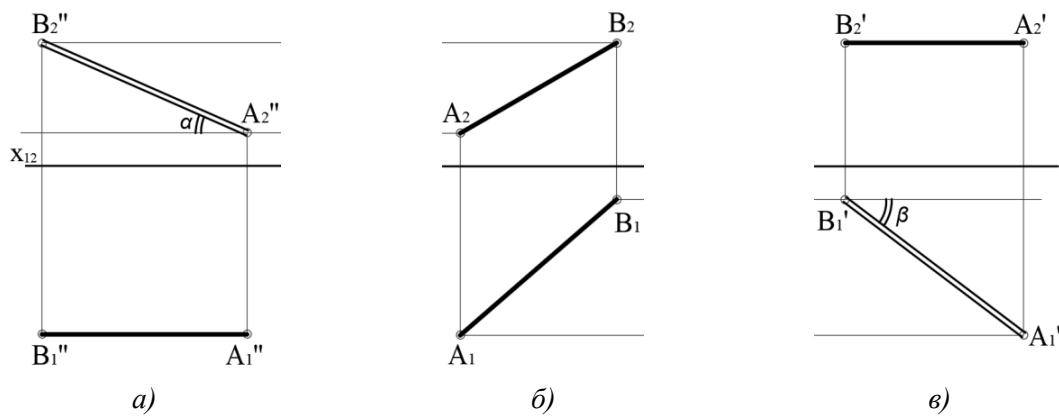


Рис. 7.31

Якщо відрізок потрібно перевести у проєкціювальне положення, його натуральну величину слід розмістити перпендикулярно до однієї з площин проєкцій. На рис. 7.32 горизонтальну проєкцію горизонтального відрізка  $A_1'B_1'$ , яка є його натуральною величиною, повернуто у положення, перпендикулярне до площини  $\Pi_2$  ( $A_1''B_1''$ ). В результаті на фронтальній площині проєкцій відрізок  $AB$  зобразився точкою.

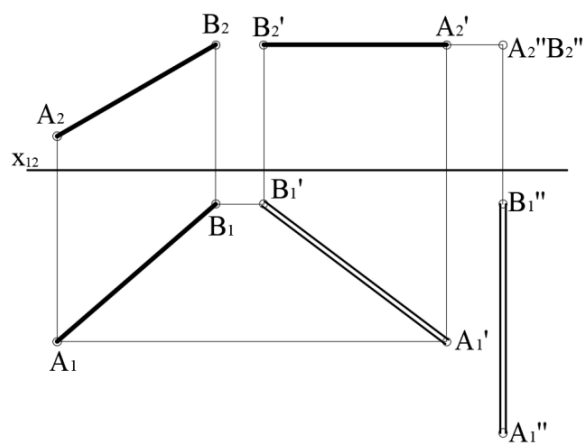


Рис. 7.32

### **Відстань від точки до прямої.**

Для розв'язання цієї задачі способом плоско-паралельного переміщення спершу необхідно розмістити пряму паралельно до однієї з площин проєкцій, а потім перевести її у положення, перпендикулярне до іншої з площини проєкцій.

На рис. 7.33 відрізок  $AB$  прямої спочатку повернуто у фронтальне положення. При цьому горизонтальна проєкція точки  $M$  повертається разом з горизонтальною проєкцією відрізка зі збереженням взаємного розташування горизонтальних проєкцій. Знайдену на площині  $\Pi_2$  натуральну величину відрізка  $AB$  повернуто у вертикальне положення. Нова проєкція точки  $M$  також повертається зі збереженням її розташування відносно  $A_2'B_2'$ .

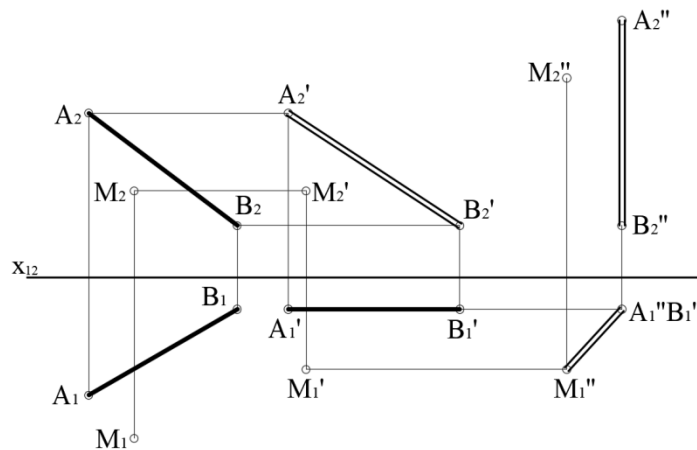


Рис. 7.33

В результаті перетворень відрізок  $AB$  на площині  $\Pi_1$  зображується точкою, де і визначається відстань між ним та точкою  $M$ .

### **Відстань від точки до площини. Натуральна величина відсіку площини.**

Для знаходження відстані від точки до площини останню потрібно перевести або у вертикальне, або фронтально-проєкціювальне положення. Для цього у відповідне положення слід перевести якусь лінію площини. Якщо цією лінією є лінія рівня площини, то для розв'язання задачі достатньо виконати одне переміщення.

На рис. 7.34 показано трикутник  $ABC$  загального положення та точку  $M$ .

У трикутнику  $ABC$  проведено горизонталь  $h$ . Потім горизонтальну проєкцію трикутника повернуто таким чином, щоб горизонталь зайняла положення, перпендикулярне до площини  $\Pi_2$ . Разом з проєкцією трикутника повернуто горизонтальну проєкцію точки  $M$  зі збереженням їх взаємного розташування. В результаті на площині  $\Pi_2$  горизонталь трикутника спроєкціювалась точкою, трикутник – лінією, що дозволило показати відстань між ним та точкою  $M$ .

На рис. 7.35 у трикутнику  $ABC$  проведено горизонталь, після чого трикутник повернуто у фронтально-проєкціювальне положення. На цьому етапі перетворень знайдено кут  $\alpha$  нахилу площини трикутника  $ABC$  до площини проєкцій  $\Pi_1$ .

Далі положення трикутника змінено на горизонтальне, для чого його вироджену проєкцію  $A_2'B_2'C_2'$  розміщено паралельно до осі  $x_{12}$ . В результаті на площині  $\Pi_1$  трикутник зображується у натуральну величину.

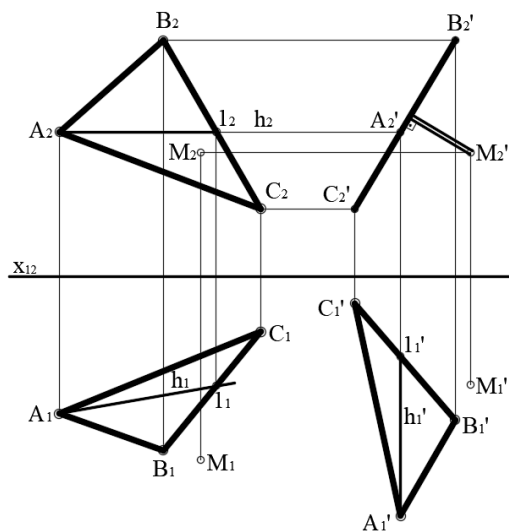


Рис. 7.34

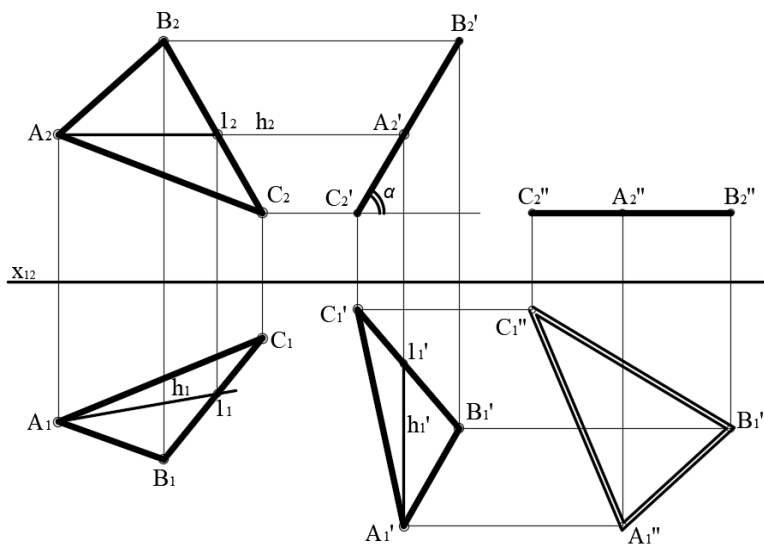


Рис. 7.35

На рис. 7.36 показано аналогічне перетворення з використанням фронталі площини  $ABC$ .

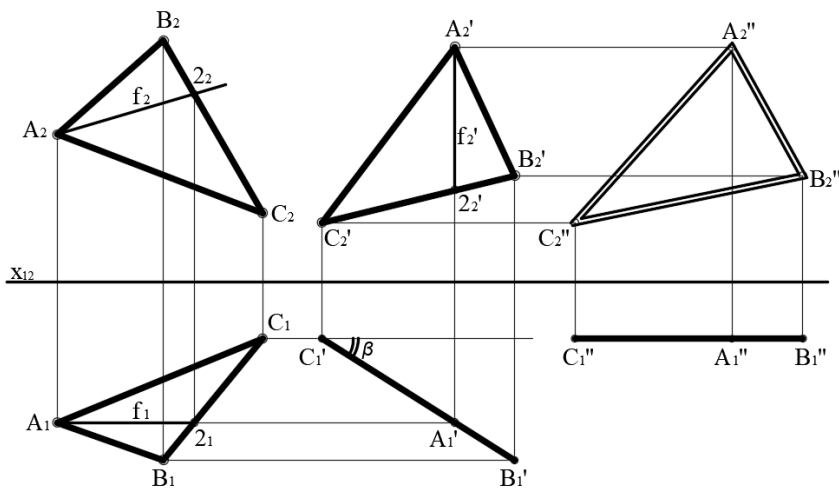


Рис. 7.36

Спершу трикутник переведено у вертикальне положення, потім – у положення, паралельне до площини проєкцій  $\Pi_2$ , на якій він і зображується у натуральну величину. Кут  $\beta$  між виродженою проєкцією трикутника  $A_1B_1C_1$  та горизонтальною прямою є кутом його нахилу до площини проєкцій  $\Pi_2$ .

### 7.5. Спосіб заміни площин проєкцій

Для визначення метричних характеристик геометричних фігур останні повинні займати певне положення відносно площин проєкцій. Геометричні фігури повинні бути паралельні або перпендикулярні до площин проєкцій. Спосіб заміни площин проєкцій полягає у застосуванні додаткових площин, відносно яких геометричні фігури займатимуть необхідне положення.

На рис. 7.37а зображено т.  $A$  у системі площин проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ . Проведено нову вертикальну площину проєкцій  $\Pi_4$ , на якій побудовано нову ортогональну проєкцію т.  $A$ . Нову площину проєкцій позначено не  $\Pi_3$ , а  $\Pi_4$ , оскільки  $\Pi_3$  – традиційне позначення профільної площини проєкцій. Лінія перетину площини  $\Pi_4$  з площиною  $\Pi_1$  – нова вісь  $x_{14}$ , перпендикулярно до якої проведено нову лінію зв'язку з проєкції  $A_1$  (рис. 7.37б).

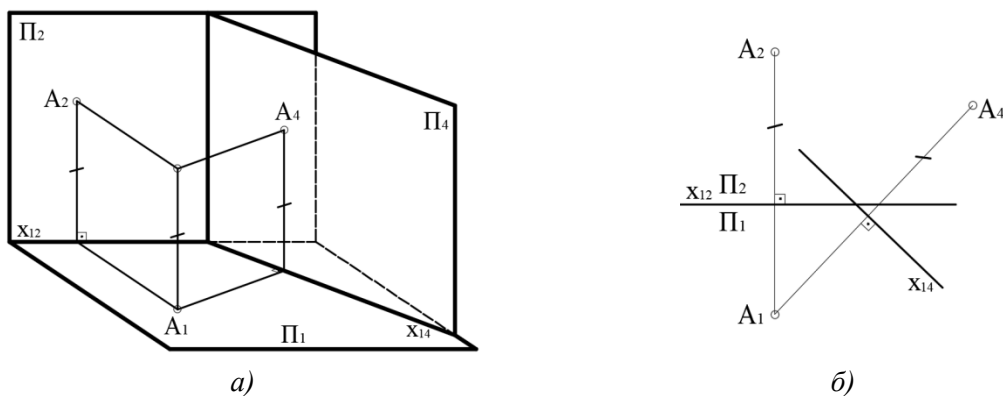


Рис. 7.37

Як видно з рис. 7.37а відстань від проєкції  $A_4$  до осі  $x_{14}$  така ж, як відстань від проєкції  $A_2$  до осі  $x_{12}$ . Отже, при заміні площин проєкцій відстань від старої проєкції до старої осі дорівнює відстані від нової проєкції до нової осі. Тому для побудови проєкції  $A_4$  слід виміряти відстань від  $A_2$  до  $x_{12}$  і відкласти на новій лінії зв'язку від осі  $x_{14}$  (рис. 7.37б).

#### **Натуральна величина відрізка.**

На рис. 7.38 показано відрізок  $AB$  прямої загального положення у системі площин проєкцій  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ . Для визначення його натуральної величини потрібно провести допоміжну площину проєкцій, паралельну до відрізка. Якщо допоміжна площина  $\Pi_4$  вертикальна, то нова вісь  $x_{14}$  буде паралельна до горизонтальної проєкції  $A_1B_1$  відрізка.

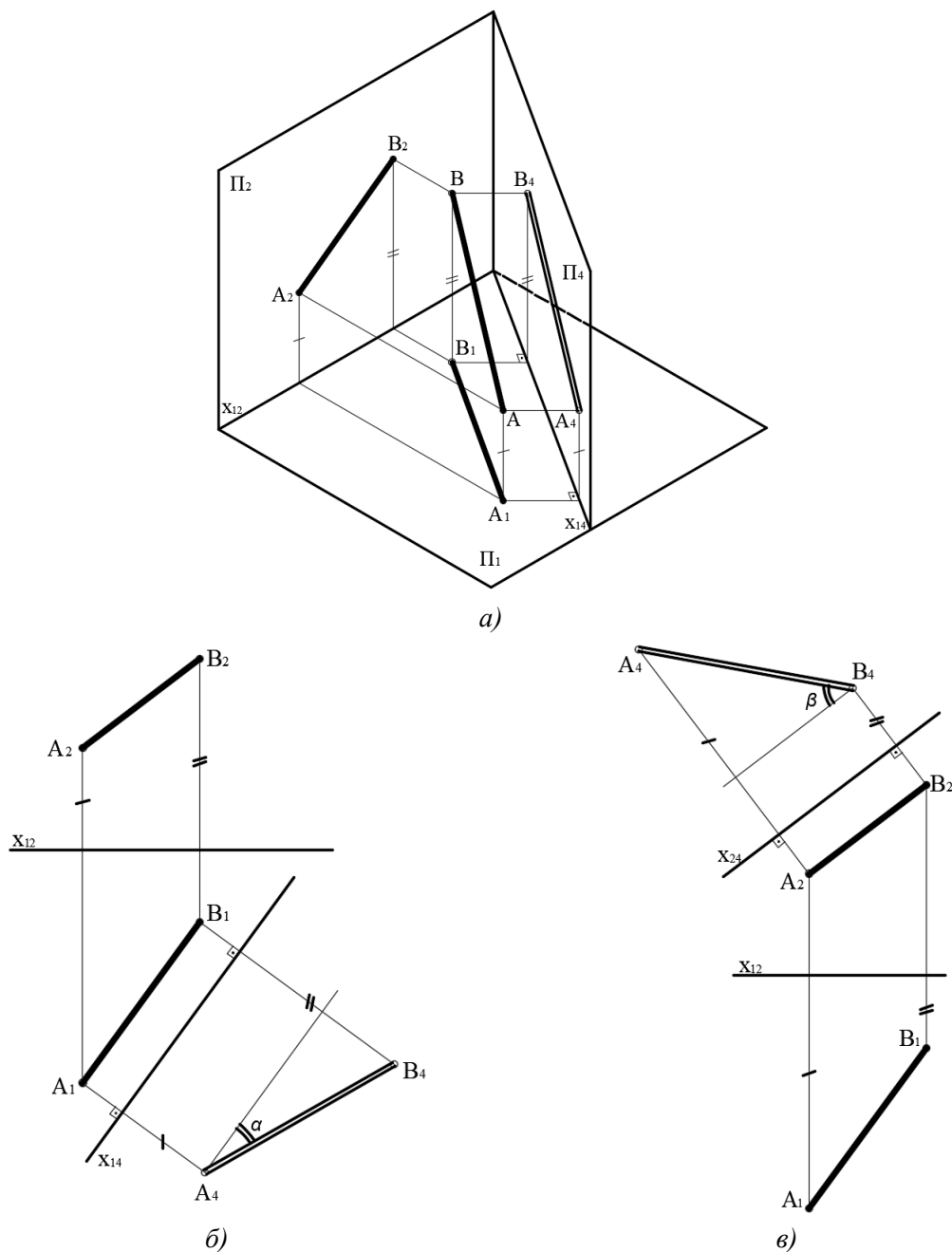


Рис. 7.38

Через горизонтальні проекції точок  $A_1$  та  $B_1$  проведено нові лінії зв'язку під прямим кутом до нової осі  $x_{14}$ . На них від нової осі відкладено відстані від проекцій  $A_2$  і  $B_2$  до осі  $x_{12}$  (рис. 7.38б). На новій проекції побудовано відрізок  $A_4B_4$ , який є натуральною величиною відрізка  $AB$ .

Через т.  $A_4$  проведено пряму, паралельну до осі  $x_{14}$ . Кут  $\alpha$  між цією прямою і відрізком  $A_4B_4$  є натуральною величиною кута нахилу відрізка  $AB$  до площини проєкцій  $\Pi_1$ .

Для визначення кута нахилу відрізка до площини проєкцій  $\Pi_2$  потрібно провести фронтально-проєкціювальну допоміжну площину проєкцій. Нова вісь  $x_{24}$  буде паралельна до фронтальної проєкції  $A_2B_2$  відрізка (рис. 7.38в). Перпендикулярно до нової осі проведено нові лінії зв'язку, на яких відкладено відстані від проєкцій  $A_1$

і  $B_1$  до осі  $x_{12}$ . Побудовано проекцію  $A_4B_4$ , яка є натуральною величиною відрізка  $AB$ . Кут  $\beta$  між проекцією  $A_4B_4$  та прямою, проведеною з т.  $B_4$  паралельно до осі  $x_{24}$  і є натуральною величиною кута нахилу відрізка  $AB$  до площини проєкцій  $\Pi_2$ .

**Відстань від точки до прямої.**

Для розв'язання даної задачі пряму необхідно спроекціювати в точку. Для цього потрібно провести додаткову площину проєкцій, перпендикулярну до прямої. Проте нову площину проєкцій, перпендикулярну до заданої прямої, можна провести лише в тому разі, якщо пряма є лінією рівня. Тому спочатку потрібно пряму загального положення перетворити на пряму рівня, а потім обирати площину проєкцій, перпендикулярну до цієї прямої.

Отже, для визначення відстані від точки до прямої потрібно виконати такі дії:

- провести площину, паралельну до прямої, та знайти натуральну величину прямої;
- провести площину, перпендикулярну до прямої, та спроекціювати пряму в точку.

На рис. 7.39 дано дві проєкції відрізка прямої  $AB$  загального положення та точки  $M$ . Спочатку проведено нову вертикальну площину проєкцій  $\Pi_4$ , паралельну до відрізка  $AB$ . Нова вісь  $x_{14}$  паралельна до горизонтальної проєкції  $A_1B_1$  відрізка  $AB$ . З горизонтальних проєкцій точок  $A$ ,  $B$  та  $M$  проведено лінії зв'язку перпендикулярно до нової осі; на площині  $\Pi_4$  побудовано нову проєкцію відрізка  $AB$  – його натуральну величину, та нову проєкцію точки  $M$ .

Далі проведено площину  $\Pi_5$ , перпендикулярну до відрізка  $AB$ . Нова вісь  $x_{45}$  перпендикулярна до проєкції  $A_4B_4$ , яка є натуральною величиною відрізка  $AB$ .

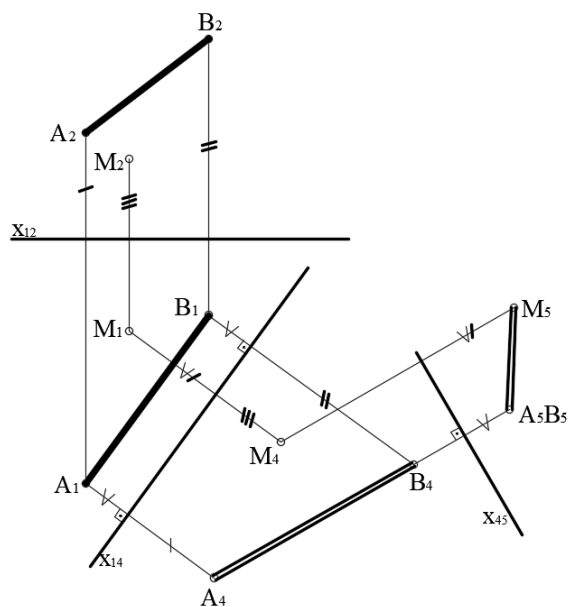


Рис. 7.39

На нових лініях зв'язку відкладено відстані від  $A_1$  і  $B_1$  до осі  $x_{14}$ . Оскільки ці відстані для обох точок однакові, відрізок  $AB$  зобразиться точкою. Також проведено нову лінію зв'язку перпендикулярно до нової осі  $x_{45}$  від проєкції  $M_4$  точки  $M$  та

побудовано нову проекцію  $M_5$  точки  $M$ . Відстань між виродженою проекцією відрізка  $A_5B_5$  та проекцією  $M_5$  точки  $M$  і є натуральною величиною відстані між відрізком  $AB$  та точкою  $M$ .

**Відстань від точки до площини. Натуральна величина відсіку площини.**

Для визначення відстані від точки до площини потрібно площину спроекціювати в лінію. Для цього слід провести додаткову площину проекцій, перпендикулярну до заданої площини. Щоб спроекціювати площину в лінію, необхідно якусь лінію цієї площини спроекціювати в точку. Тобто, фактично слід провести додаткову площину проекцій, перпендикулярну до якоїсь лінії заданої площини.

На рис. 7.40 показано площину загального положення ( $ABC$ ) і точку  $M$ .

У трикутнику  $ABC$  проведено горизонталь  $h$ . Оскільки горизонталь паралельна до площини  $\Pi_1$ , то її горизонтальна проекція  $h_1$  – натуральна величина. Як було показано в попередньому прикладі, лінію рівня, наприклад, горизонталь, можна спроекціювати в точку лише однією заміною фронтальної площини проекцій. Тому далі проведено додаткову вертикальну площину  $\Pi_4$ , перпендикулярну до горизонталі  $h$  трикутника  $ABC$ . Нова вісь  $x_{14}$  перпендикулярна до горизонтальної проекції  $h_1$  горизонталі  $h$ .

На новій площині проекцій горизонталь зобразиться точкою  $A_4I_4$ , а трикутник  $ABC$  – лінією. Також побудовано нову проекцію точки  $M$ . Довжина перпендикуляра, опущеного з проекції  $M_4$  точки  $M$  на вироджену проекцію площини  $ABC$  і є натуральною величиною відстані від точки  $M$  до площини трикутника  $ABC$ .

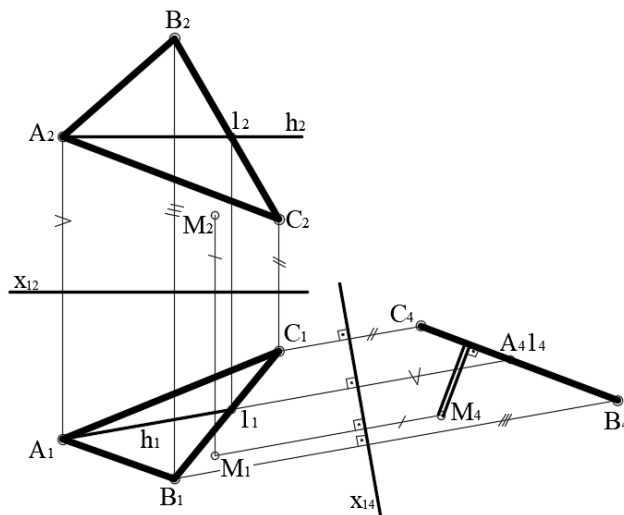


Рис. 7.40

На рис. 7.41 та 7.42 показано знаходження натуральної величини трикутника  $ABC$  та кутів його нахилу до площин проекцій  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ .

Для визначення натуральної величини відсіку площини потрібно застосувати додаткову площину проекцій, паралельну до заданої.

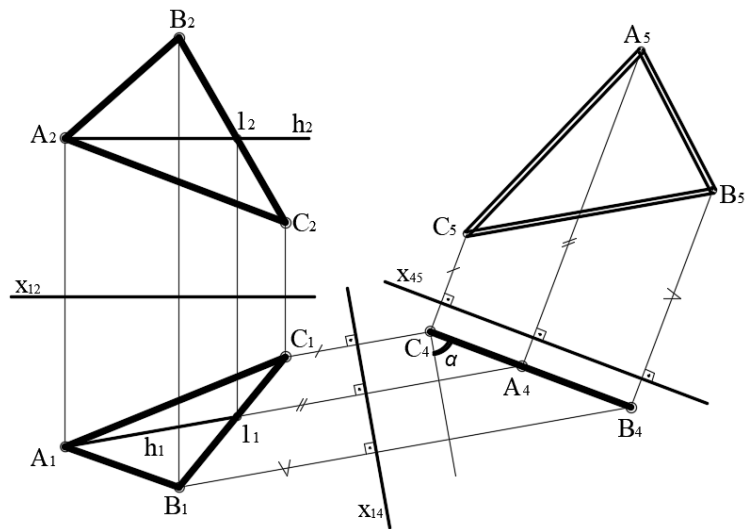


Рис. 7.41

У продовження побудов, наведених на рис. 7.40, на рис. 7.41 проведено додаткову площину  $\Pi_5$ , паралельну до площини трикутника  $ABC$ . Нова вісь  $x_{45}$  паралельна до виродженої проекції  $A_4B_4C_4$  трикутника  $ABC$ . Побудована проекція  $A_5B_5C_5$  і є натуральною величиною трикутника  $ABC$  – усіх його сторін та плоских кутів.

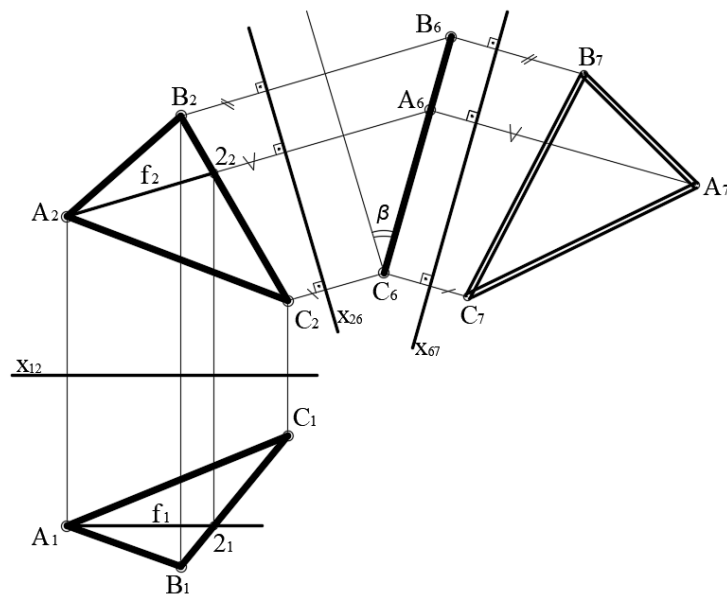


Рис. 7.42

Для визначення кута  $\alpha$  нахилу трикутника  $ABC$  до площини  $\Pi_1$  через точку  $C_4$  його виродженої проекції проведено пряму, паралельну до осі  $x_{14}$ . Кут між цією прямою та проекцією  $A_4B_4C_4$  і є шуканим.

Для знаходження кута  $\beta$  нахилу трикутника  $ABC$  до площини  $\Pi_2$  (рис. 7.42) проведено фронтально-проекціювальну додаткову площину  $\Pi_6$ , перпендикулярну до фронталі трикутника.

## 7.6. Спосіб обертання навколо лінії рівня

### 7.6.1. Обертання площини навколо ліній рівня. Натуральна величина відсіку площини

Якщо площину повернути навколо лінії рівня як навколо нерухомої осі у положення, паралельне до відповідної площини проєкцій, то вона зобразиться на цій площині проєкцій у натуральну величину.

На рис. 7.43 показано трикутник  $ABC$ , сторона  $AC$  якого – горизонталь, а сторона  $AB$  – фронталь. Трикутник повернуто навколо горизонталі  $AC$  у горизонтальне положення. При цьому точка  $B$  рухається у вертикальній площині  $\Gamma$ , перпендикулярній до  $AC$ . Відстань між точками  $A$  і  $B$  у повернутому положенні дорівнюватиме натуральній величині  $A_2B_2$  фронталі  $AB$ . З точки  $A_1$  як з центру засічкою радіусом  $A_2B_2$  на виродженій проєкції площини  $\Gamma$  визначено повернуте положення  $B_1'$  точки  $B$ . Натуральною величиною трикутника  $ABC$  є трикутник  $A_1B_1'C_1$ .

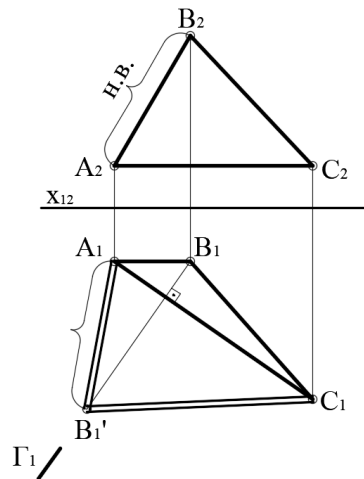


Рис. 7.43

На рис. 7.44 наведено трикутник  $ABC$ , у якого лише одна сторона  $AC$  є лінією рівня, а саме – горизонталлю.

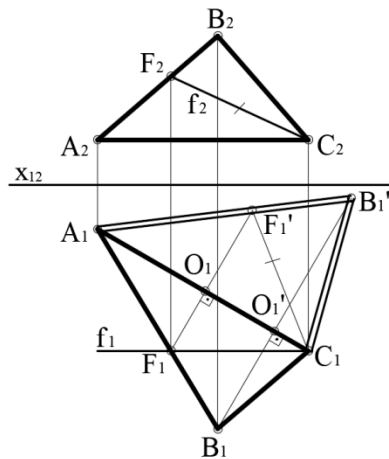


Рис. 7.44

Через т.  $C$  у площині трикутника проведено фронталь  $CF$ . Фронтальна проекція  $C_2F_2$  – натуральна величина відрізка  $CF$ . При обертанні навколо горизонталі трикутника  $AC$  точки  $F$  і  $B$  рухатимуться у паралельних вертикальних площинах, перпендикулярних до  $AC$ . Нове положення точки  $F$  знайдено на перетині дуги з центром у т.  $C_1$  радіуса  $C_2F_2$  та перпендикуляра  $F_1O_1$ . Нове положення т.  $B$  визначиться в результаті перетину прямої  $A_1F_1'$  і перпендикуляра  $B_1O_1'$ .

На рис. 7.45 показано трикутник  $ABC$ , усі сторони якого є відрізками загального положення. У трикутнику через т.  $A$  проведено горизонталь  $AH$ . Через т.  $H$  проведено фронталь  $HF$ . Трикутник  $ABC$  обертається навколо горизонталі  $AH$ . Нове положення точок  $F$  і  $B$  знайдено, як у попередньому прикладі. Нове положення точки  $C$  визначено на перетині прямої  $B_1'H_1$  і перпендикуляра  $C_1O_1''$ .

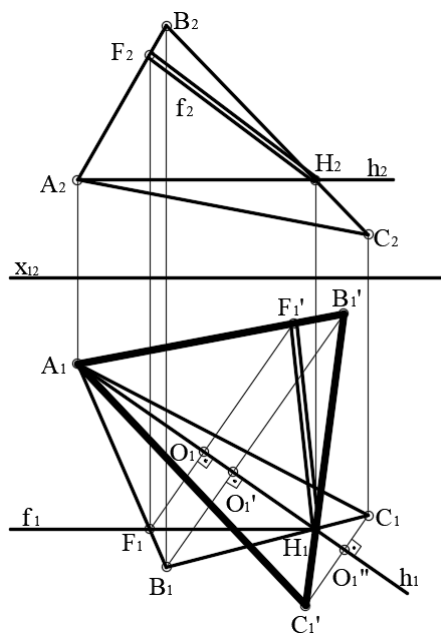


Рис. 7.45

### 7.6.2. Суміщення площини загального положення з площиною проєкцій

Окремим випадком способу обертання навколо лінії рівня є спосіб суміщення площини з площиною проєкцій, якщо віссю обертання є слід площини на площині проєкцій.

На рис. 7.46 зображено площину загального положення, задану слідами ( $f$ ,  $h$ ). Для визначення натуральної величини плоского кута, утвореного слідами площини, її потрібно сумістити з однією з площин проєкцій, наприклад, з  $\Pi_1$ . Для цього площину повернуто навколо її горизонтального сліду. Для побудови суміщеного фронтального сліду на нього обрано довільну точку  $A$ . При обертанні площини навколо горизонтального сліду точка  $A$  рухатиметься у вертикальній площині, перпендикулярній до  $h$ . На  $\Pi_1$  ця площина зобразиться прямою, перпендикулярною до  $h_1$ . Відстань від т.  $A$  до точки перетину слідів на суміщеній проєкції збережеться:  $P_{12}A_2 = P_{12}A_0$ . Точку  $A_0$  знайдено на перетині дуги радіуса  $P_{12}A_2$  з перпендикуляром, опущеним з т.  $A_1$  до  $h_1$ . Суміщений з площиною  $\Pi_1$  фронтальний слід  $f_0$  пройде через

точку перетину слідів і визначену точку  $A_0$ . Натуральна величина кута  $\alpha$  між слідами площини – це кут між горизонтальним слідом  $h_1$  та суміщеним фронтальним слідом  $f_0$ .

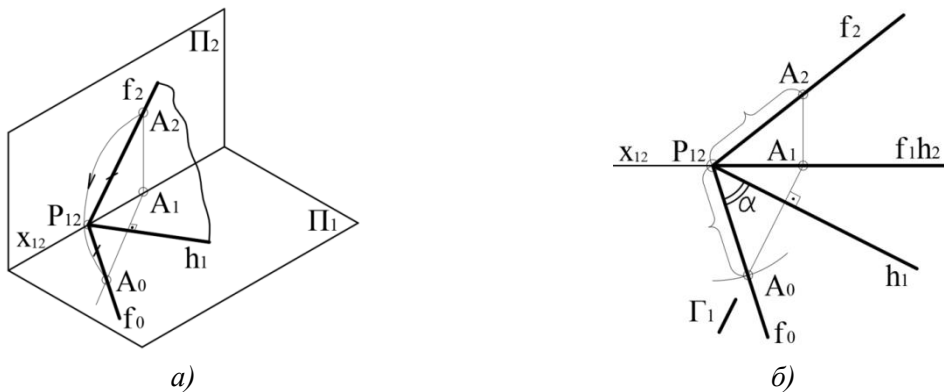


Рис. 7.46

На рис. 7.47 показано побудови при обертанні відсіку площини навколо її фронтального сліду до суміщення з площиною проєкцій  $\Pi_2$ . В цьому випадку розв'язання задачі зводиться до побудови суміщеного горизонтального сліду  $h_0$ . При обертанні відсіку площини усі її точки рухатимуться у фронтально-проєкціювальних площинах, перпендикулярних до фронтального сліду  $f_2$ . Побудови аналогічні розглянутим у попередньому прикладі.

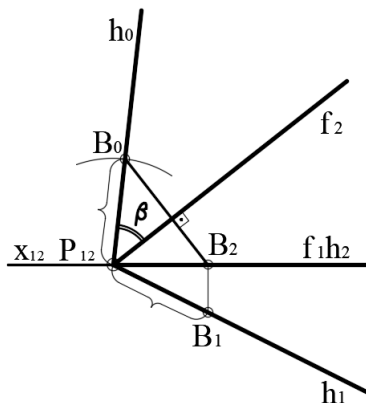


Рис. 7.47

### 7.6.3. Визначення натуральної величини плоскої фігури

На рис. 7.48, а показано площину  $\Gamma$ , задану слідами ( $f, h$ ).

Задано фронтальну проєкцію трикутника  $ABC$ , який належить площині  $\Gamma$ . Необхідно визначити натуральну величину трикутника  $ABC$  способом суміщення. Спершу потрібно побудувати горизонтальну проєкцію трикутника  $ABC$ . Як відомо, точка належить площині, якщо вона належить якійсь лінії цієї площини. Точка  $A$  належить фронтальному сліду площини  $\Gamma$ . Через точки  $B$  і  $C$  проведено горизонталі

$h'$  і  $h''$ . Вони перетинають фронтальний слід площини  $\Gamma$  відповідно у точках  $1$ ,  $2$ . Побудовано горизонтальні проєкції точок  $1$  і  $2$ . Через них проведено горизонтальні проєкції горизонталей  $h'$  і  $h''$  паралельно до горизонтального сліду  $h_1$  площини. На них знайдено горизонтальні проєкції точок  $B$  і  $C$  (рис. 7.48, б).

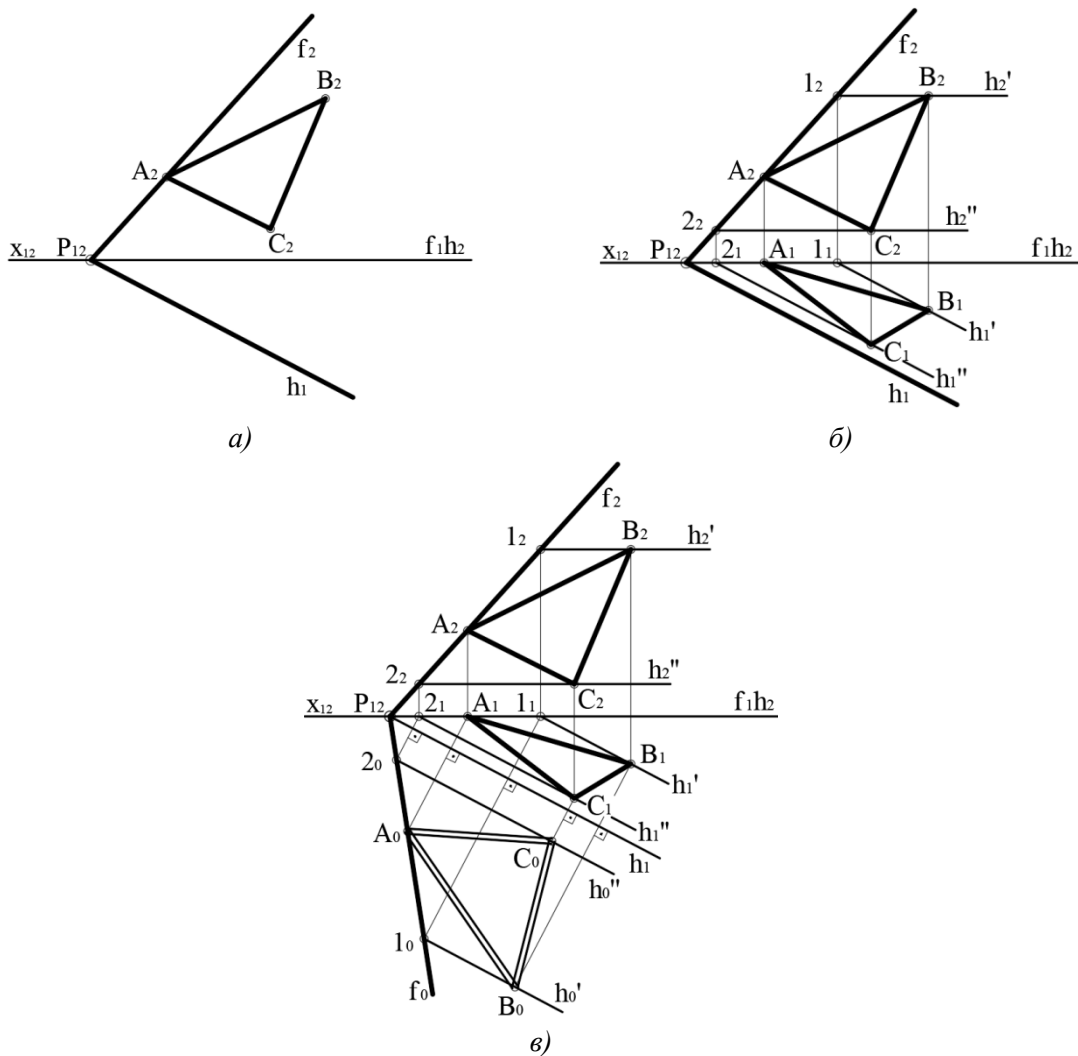


Рис. 7.48

Потім площину  $\Gamma$  повернуто навколо її горизонтального сліду до суміщення з площиною проєкцій  $\Pi_1$  (рис.7.48, в). При цьому точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  рухаються у вертикальних площинах, перпендикулярних до  $h$ . Через горизонтальні проєкції  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  точок проведено лінії зв'язку, перпендикулярні до  $h_1$ .

Суміщену проєкцію точки  $A$  побудовано, як у попередньому прикладі. Через неї та точку перетину слідів  $P_{12}$  проведено суміщену проєкцію фронтального сліду  $f_0$ . Знайдено нові проєкції горизонталей  $h'$  і  $h''$ . Для цього на суміщеному фронтальному сліді побудовано нові проєкції точок  $1_0$  і  $2_0$ , через які проведено нові проєкції горизонталей  $h_0'$  і  $h_0''$  паралельно до горизонтального сліду  $h_1$  площини  $\Gamma$ . На перетині їх з відповідними лініями зв'язку побудовано нові проєкції точок  $B$  і  $C$ .  $A_0B_0C_0$  – натуральна величина трикутника  $ABC$ .

#### 7.6.4. Побудова у площині геометричної фігури заданої форми

На рис. 7.49 дано дві проекції площини  $\Gamma$ , заданої слідами  $(f, h)$ . Задано фронтальну проекцію точки  $O$ . Потрібно побудувати у площині  $\Gamma$  коло радіуса  $R$  з центром у точці  $O$ .

Для розв'язання задачі площину  $\Gamma$  потрібно сумістити, наприклад, з горизонтальною площиною проекцій. На суміщеній проекції слід побудувати коло, а потім разом з площиною  $\Gamma$  повернути у вихідне положення.

Спершу через точку  $O$  проведено горизонталь  $h'$  і на ній побудовано горизонтальну проекцію  $O_1$  центра кола. Для побудови суміщеної проекції  $f_0$  фронтального сліду використано точку  $A$  – точку його перетину з горизонталлю  $h'$ . При обертанні площини  $\Gamma$  навколо її горизонтального сліду  $h$  точки рухаються у вертикальних площинах, перпендикулярних до  $h_1$ . Відстані від точки перетину слідів до точки  $A$  (і до будь-яких точок на фронтальному сліді) на фронтальній і суміщеній проекціях однакові.

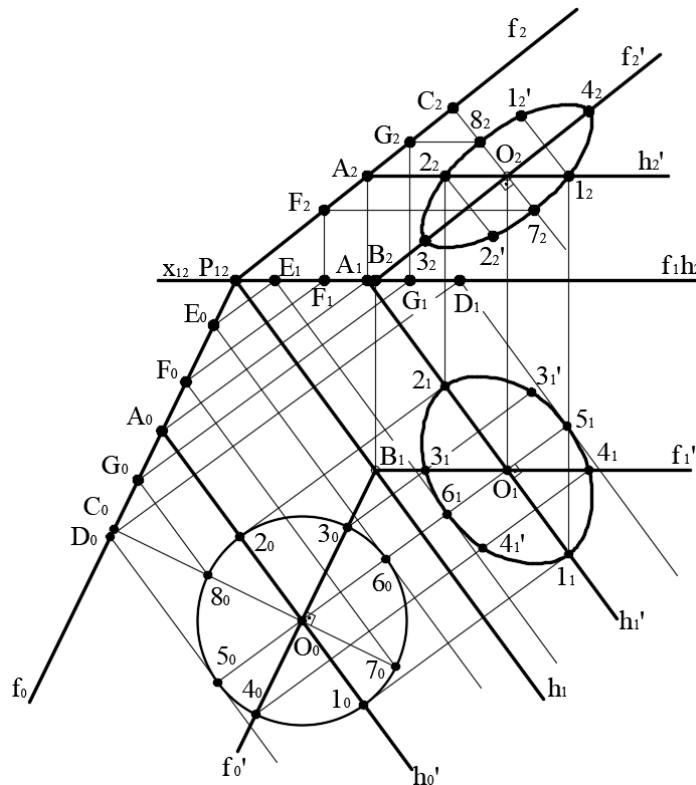


Рис. 7.49

Побудовано суміщену проекцію горизонталі  $h'_0$  та знайдено суміщену проекцію  $O_0$  центра кола. Побудовано коло заданого радіуса  $R$ .

На фронтальній та горизонтальній площинах проекцій коло зобразиться еліпсами. Для їх побудови необхідно знайти ряд характерних точок, зокрема тих, які визначають велику та малу осі еліпсів на  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ .

Велику вісь еліпса на  $\Pi_1$  визначають точки  $1$  і  $2$ , що належать горизонталі  $h'$ , яка проходить через центр кола. Велику вісь еліпса на  $\Pi_2$  визначають точки  $3$  і  $4$ , що належать фронталі  $f'$ , яка проходить через центр кола. Ці точки можна побудувати як з використанням суміщеної проекції кола, так і без неї, оскільки довжина великих осей еліпсів – проекцій кола дорівнює його діаметру.

Малі осі еліпсів належать прямим максимального нахилу площини  $\Gamma$  до  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ , які проходять через центр кола. Малу вісь еліпса на  $\Pi_1$  визначають точки  $5$  і  $6$  прямої, перпендикулярної до горизонталі  $h'$ . Через точки  $5_0$  і  $6_0$  на суміщеній проекції кола проведено додаткові горизонталі, які перетинають фронтальний слід  $f$  відповідно у точках  $D$  і  $E$ . Побудовано горизонтальні проекції цих горизонталей, на яких визначено проекції точок  $5_1$  і  $6_1$ .

Малу вісь еліпса на  $\Pi_2$  визначають точки  $7$  і  $8$  прямої  $CO$ , перпендикулярної до фронталі  $f'$ . На суміщеній проекції кола через точки  $7_0$  і  $8_0$  також проведено додаткові горизонталі, які перетинають фронтальний слід  $f$  у точках  $F$  і  $G$ . Побудовано фронтальні проекції цих горизонталей, на яких визначено проекції точок  $7_2$  і  $8_2$ .

На горизонтальній проекції побудовано точки  $3_1'$  та  $4_1'$ , симетричні точкам  $3_1$  і  $4_1$  відносно великої осі  $1-2$  еліпса. На фронтальній проекції аналогічно знайдено точки  $1_2'$  та  $2_2'$ , симетричні точкам  $1_2$  і  $2_2$  відносно великої осі еліпса  $3-4$ . Це зроблено для зручнішої побудови симетричних зображень еліпсів, що є проекціями кола.

На рис. 7.50 зображено площину загального положення  $\Gamma$ , яку задано слідами, і точку  $O$ , що належить цій площині. Потрібно побудувати конус обертання, основою якого є коло радіуса  $R$  у площині  $\Gamma$  з центром у точці  $O$ . Задано також висоту  $b$  конуса.

Спочатку задану площину потрібно сумістити з площиною проекцій  $\Pi_1$  обертанням навколо горизонтального сліду. На суміщеній проекції побудовано коло-основу конуса. Далі зворотнім проекціюванням побудовано еліпси – проекції кола на  $\Pi_1$  та  $\Pi_2$ .

Вісь конуса буде перпендикулярна до заданої площини  $\Gamma$ . Тому через центр основи конуса (точку  $O$ ) проведено перпендикуляр до площини  $\Gamma$ . Фронтальна проекція осі перпендикулярна до фронтального сліду площини, а горизонтальна проекція осі – до горизонтального сліду.

Для побудови конуса заданої висоти на його осі обрано довільну точку  $M$  і способом прямокутного трикутника визначено натуральну величину відрізка  $OM$  (гіпотенуза  $O_2M_2$ ). На цій гіпотенузі відкладено висоту конуса  $b$  і знайдено точку  $S_2'$ , за допомогою якої визначено фронтальну проекцію вершини конуса  $S_2$ . За вертикальною відповідністю знайдено горизонтальну проекцію вершини конуса  $S_1$ . Насамкінець побудовано контурні твірні конуса. Для цього з проекцій вершини  $S_1, S_2$  проведено дотичні до еліпсів – проекцій кола – основи конуса.

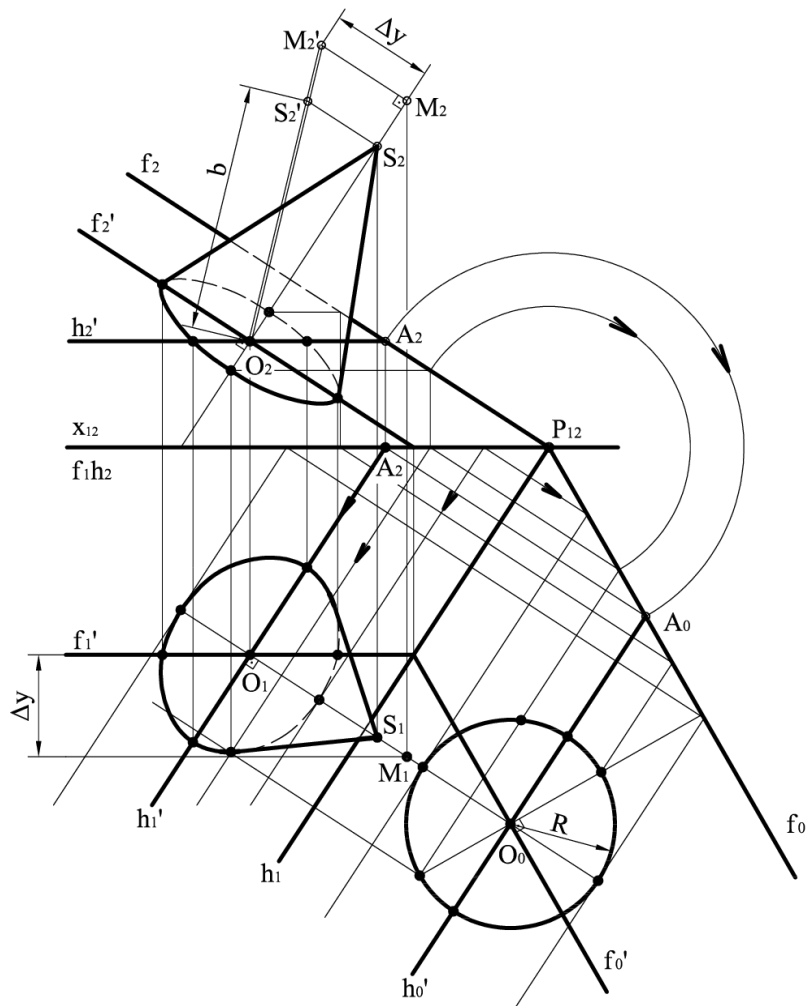


Рис. 7.50

## 7.7 Розгортки багатогранних і кривих поверхонь

Розгорткою відсіку поверхні називають плоску фігуру, що утворюється при суміщенні відсіку поверхні з площиною при його розгинанні. Деякі геометричні властивості елементів поверхонь не змінюються при розгортці. Так, лінія поверхні переходить у лінії розгортки; довжини ліній, розміри плоских кутів та площ, обмежених замкненими лініями, зберігаються.

Точну розгортку можна побудувати лише для багатогранників та відсіків розгортних поверхонь (циліндра, конуса, торса). Поверхню багатогранника завжди можна сумістити з площиною, адже вона складається з плоских відсіків. Однак при послідовному суміщенні граней складних багатогранників з площиною можуть бути накладки на фігурі розгортки. Побудова точної розгортки розгортної поверхні пов'язана з обчисленням довжини кривої лінії, що є непростим завданням. Тому розгортки, як правило будують наближено. Винятком є циліндри та конуси обертання, для яких можна легко визначити параметри розгортки.

Інженерна практика часто потребує розв'язування задач виготовлення виробів, що мають форму нерозгортних поверхонь, з листового матеріалу. Отже виникає потреба у побудові розгортки нерозгортних поверхонь, що суперечить

самому визначенню нерозгортної поверхні. Для розв'язування цієї задачі нерозгортну поверхню апроксимують відсіками розгортних або площин, після чого будують розгортку. Сукупність розгорток відсіків розгортних поверхонь або площин, якими замінюється нерозгортна поверхня, називають *умовною наближеною розгорткою нерозгортної поверхні*.

### 7.7.1. Побудова розгортки поверхні багатогранника

Для побудови розгортки багатогранника всі його грані суміщують з площиною проєкцій або з площиною яка паралельна площині проєкцій, щоб запобігти спотвореному зображенню граней. Можна рекомендувати два способи: обертання граней навколо спільних ребер, які паралельні площині проєкцій; другий – побудова неспотворених величин граней за визначеними довжинами ребер (для трикутних граней).

На рис.7.51 побудовано розгортку тригранної піраміди  $ABCS$  на горизонтальну площину її основи. Для цього кожен грань обертають навколо її горизонталі – ребра основи. Побудову розгортки почато з обертання грані  $SBC$  навколо горизонталі  $BC$ . Проєкції  $B_1$  і  $C_1$  при обертанні не змінюють свого положення, а вершина  $S$  переміщується у просторі по колу, площина якого перпендикулярна до осі обертання  $BC$ .

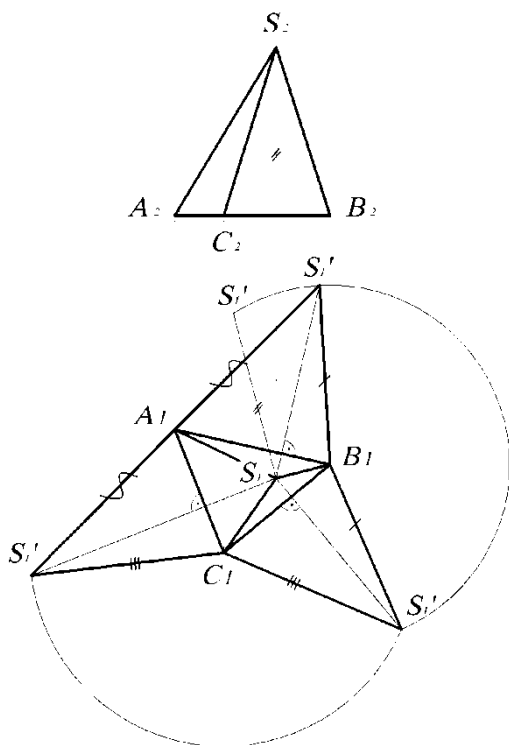


Рис.7.51

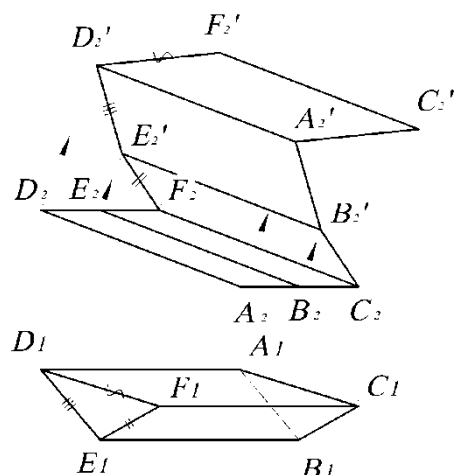


Рис.7.52

Горизонтальну проєкцію цієї площини є пряма, перпендикулярна до проєкції  $B_1C_1$ . Щоб визначити положення точки  $S_1'$  розгортки, спочатку знаходять натуральну

величину ребра  $SB$  за способом прямокутного трикутника, а потім відстань  $S_1'B_1$  відкладають від точки  $B_1$  засічкою на перпендикулярі. Трикутник  $S_1'B_1C_1$  є натуральною величиною грані  $SBC$ . Бічні грані  $SAB$  і  $SAC$  піраміди обертають навколо  $AB$  і  $AC$ . Для побудови використано натуральні величини ребер  $S_1'B_1$  і  $S_1'C_1$ , отримані при обертанні першої грані. Побудована плоска фігура є розгорткою поверхні піраміди на горизонтальну площину її основи.

На рис.7.52 показано побудову розгортки бічної поверхні призми з фронтальними ребрами послідовним обертанням граней навколо бічних ребер до суміщення граней з фронтальною площиною, що проходить через ребро  $CF$ . Вершини багатогранника переміщуються у фронтально проєкціювальних площинах, перпендикулярних до ребра  $CF$ . Для побудови використано те, що ребра основ призми горизонтальні й зображуються на горизонтальній проєкції без спотворення.

Якщо всі ребра багатогранника знаходяться в загальному положенні, то спочатку визначають їх натуральні величини, а потім будують розгортку.

На рис. 7.53,а зображено тригранну піраміду в загальному положенні. За способом прямокутного трикутника визначають натуральні величини ребер. На рис.7.53,б спочатку побудовано грань  $ABS$ . Для цього на довільній прямій відкладають натуральну величину ребра  $AB$  і із точок  $A$  і  $B$  засічками, які дорівнюють натуральним величинам ребер  $AS$  і  $BS$ , знаходять точку  $S$ . Точки  $C'$ ,  $C''$  і  $C'''$  розгортки будують за допомогою засічок із вершин  $A$ ,  $B$  і  $S$  грані  $ASB$ .

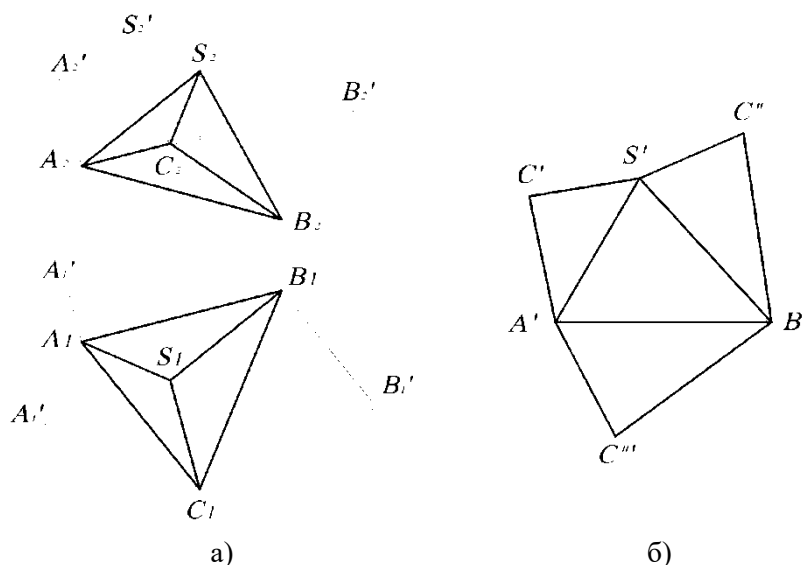


Рис.7.53

### 7.7.2 Розгортки циліндричних і конічних поверхонь

Розгортку відсіку циліндра обертання (рис.7.54) можна побудувати точно, оскільки довжина розгортки  $l$  дорівнює довжині кола нормального перерізу циліндра горизонтальною площиною  $\Gamma: l = 2\pi r$ , де  $r$  - радіус кола нормального перерізу.

Для побудови розгортки ліній перерізу циліндра площинами  $\Delta$  і  $\Omega$  коло його нормального перерізу поділено на 12 однакових частин. На 12 однакових частин

поділяють також відрізок прямої, який є розгорткою нормального перерізу. Довжина кожної твірної циліндра перенесена на розгортку за відповідністю.

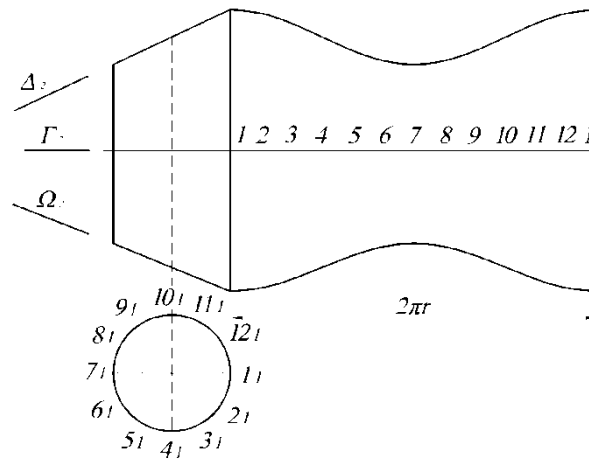


Рис.7.54

Розгорткою конуса обертання (рис. 7.55) є сектор, довжина дуги якого дорівнює довжині кола основи конуса  $2\pi r$ .

Щоб побудувати точну розгортку, визначають кут між двома граничними радіусами сектора за формулою  $\varphi = 360^\circ r : l$ , де  $r$  - довжина радіуса основи конуса, а  $l$  - довжина твірної конуса.

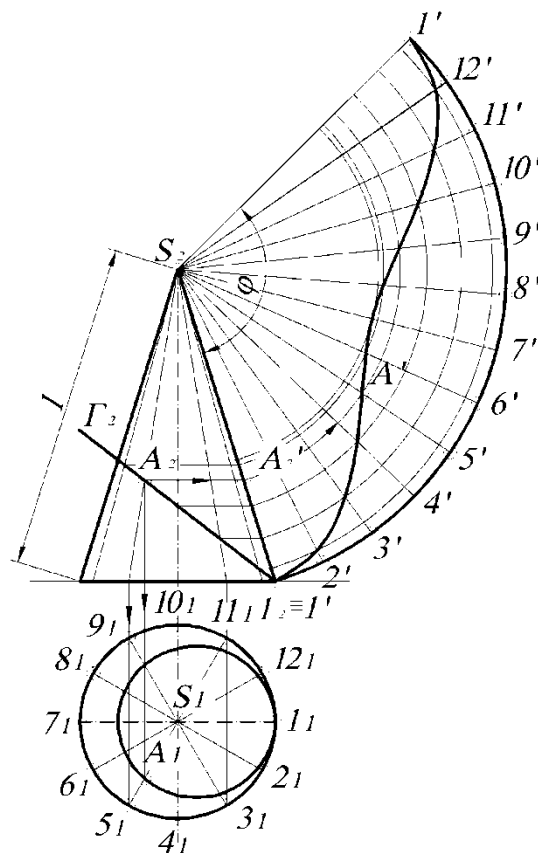


Рис.7.55

Для побудови розгортки будь-якого перерізу конуса, наприклад площиною  $\Gamma$ , на поверхні конуса та на розгортці визначають певну кількість твірних з постійним кроком. Довжину відрізка кожної твірної від вершини  $S$  до перерізу визначають її обертанням навколо осі конуса до фронтального положення. Щоб визначити, наприклад, довжину відрізка  $SA$ , його повертають до фронтального положення  $S_2A_2'$  і тоді відкладають на відповідній твірній розгортки від вершини  $S_2$ .

Розгортки циліндрів і конусів, які не є поверхнями обертання, будують наближено. На рис.7.56 еліптичний циліндр задано в загальному положенні, тому його твірні зображуються на проекціях спотворено. Для побудови розгортки його поверхні спочатку замінюють фронтальну площину проєкцій так, щоб на новій площині проєкцій твірні зобразились в натуральну величину. Потім бічну поверхню циліндра апроксимують призмою, бічні ребра якого збігаються з дискретним каркасом твірних циліндра.

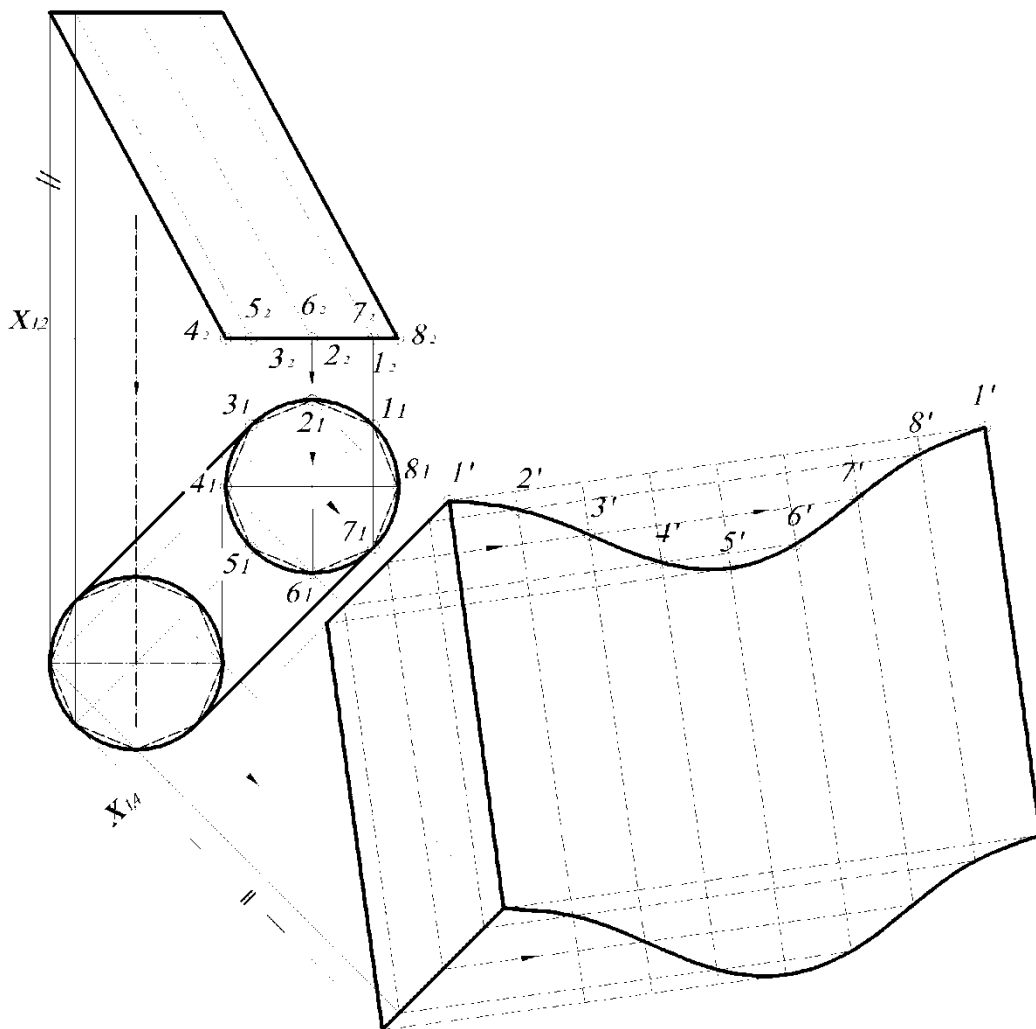


Рис.7.56

Розгортку призми будують так само, як у прикладі, наведеному на рис.7.52. Точність розгортки залежить від кроку дискретного каркаса твірних.

Для побудови розгортки конуса (рис. 7.57) його апроксимують пірамідою, ребра якої збігаються з дискретним каркасом прямолінійних твірних конуса.

Розгортка піраміди за своїми розмірами наближається до розгортки конуса. Точність цього наближення залежить від кроку дискретного каркаса твірних конуса. Натуральні величини твірних конуса визначають їх обертанням навколо вертикальної осі, що проходить через вершину конуса. Твірна  $SI$ , наприклад, повернута в положення  $SI'$ , фронтальна проекція якого  $S_2I_2'$  є натуральною величиною  $SI$ . Після визначення натуральних величин усіх твірних розгортку поверхні будують як сукупність трикутників, усі сторони яких відомі. Для побудови лінії будь-якого перерізу конуса (наприклад, площиною  $\Gamma$ ) на розгортці спочатку виявляють положення точок перерізу на натуральних величинах твірних, а потім – на твірних розгортки.

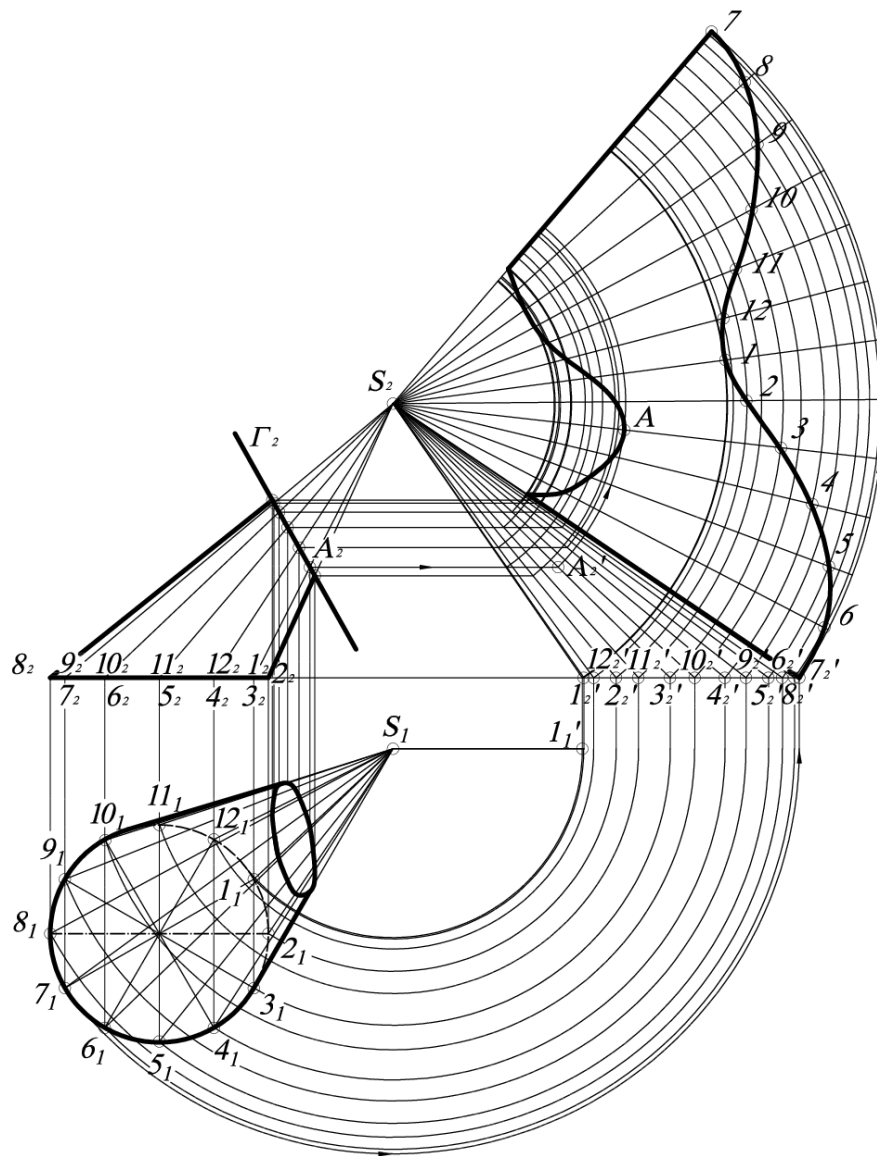


Рис.7.57

### 7.7.3 Умовні розгортки нерозгортних поверхонь

Для побудови наближених умовних розгорток нерозгортних поверхонь спочатку їх апроксимують розгортними поверхнями, або багатогранниками з наступною розгорткою відсіків апроксимуючих поверхонь або багатогранників.

Один із способів побудови розгортки поверхні обертання (наприклад, сфери) полягає в тому, що поверхню розрізають площинами, які проходять через вісь поверхні, на кілька однакових відсіків (рис.7.58). Після цього один відсік наближено замінюють відсіком циліндричної поверхні і будують його розгортку. Отриману фігуру повторюють стільки разів, на скільки частин розрізано поверхню обертання.

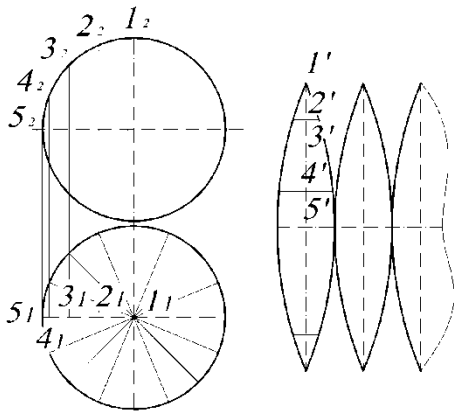


Рис.7.58

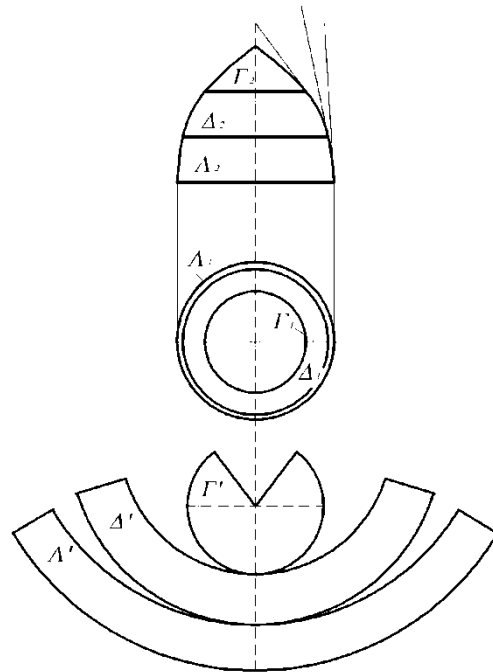


Рис.7.59

Другий спосіб побудови розгортки поверхні обертання ґрунтується на апроксимації поверхні конусами (рис.7.59). На поверхні визначають з певним кроком дискретний каркас горизонтальних кіл, після чого кільцеподібні відсіки поверхні обертання апроксимують конусами обертання, для яких і будують розгортку.

Розгортки косих лінійчатих поверхонь будують за допомогою триангуляції (апроксимації трикутними відсіками площин). Прямолінійні твірні поверхні використовують при цьому як сторони апроксимуючих трикутників.

На рис.7.60 побудовано умовну розгортку відсіку коноїда, напрямними якого є пряма 1-6, дуга фронтального кола 7-9-12 та горизонтальна площина  $\Gamma$  паралелізму. На проєкціях поверхні визначають з певним кроком дискретний каркас прямолінійних твірних. Ділянки кривої напрямної між двома суміжними

твірними замінюють хордами, наприклад дугу 7-8 замінюють хордою 7-8. Кожна пара суміжних твірних разом з відрізками напрямних утворюють просторові чотирикутники, які за допомогою діагоналей замінюють парами трикутників. Способом прямокутного трикутника визначають натуральні величини діагоналей. На розгортці послідовно будують неспотворені трикутники, множина яких апроксимує поверхню.

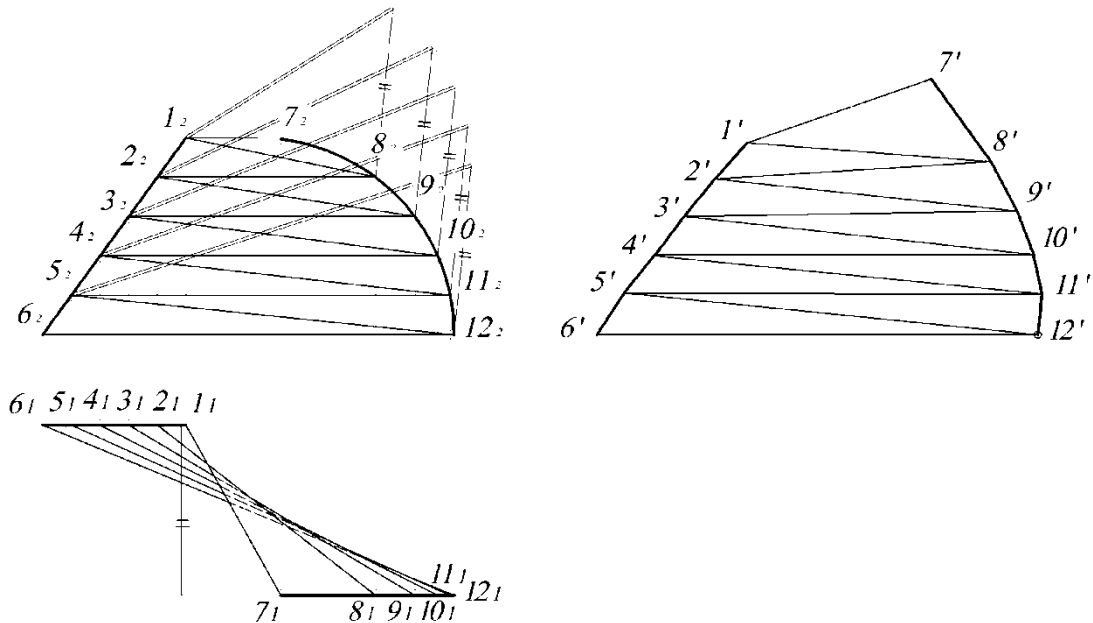


Рис.7.60

### Запитання для самоконтролю

1. У чому суть способу заміни площин проекцій?
2. Чи можна використати спосіб заміни площин проекцій для розв'язання позиційної задачі?
3. Чи можна способом плоско-паралельного переміщення розв'язати задачу на визначення натуральної величини відстані між паралельними прямими?
4. Назвіть способи перетворення площин проекцій.
5. Для чого потрібні розгортки?

## РОЗДІЛ 8. ТІНІ У ПРЯМОКУТНИХ ПРОЕКЦІЯХ

Для надання наочної об'ємності архітектурних форм на площинних зображеннях в архітектурному проектуванні використовують світлотінь [6]. В основі побудови контурів тіней лежать методи нарисної геометрії. Світлотінь – це розподіл освітленості поверхонь предмету. В залежності від фізичного процесу утворення тіней розрізняють як самі тіні, так і їх окремі місця:

– *власна тінь* утворюється на поверхнях, обернених в бік протилежний джерелу освітлення (рис. 8.1);

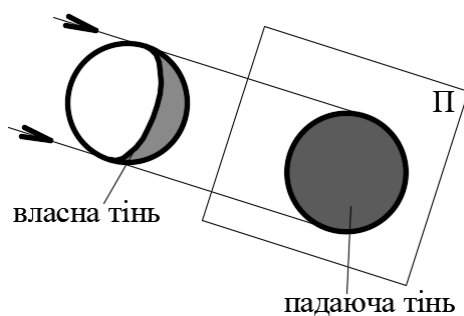


Рис. 8.1

– *падаюча тінь* утворюється на поверхні, що обернена у бік джерела освітлення, але закрита від попадання світлових променів непрозорим тілом;

– *рефлекс* – тіньова зона, яка ослаблена відбитими променями;

– *полюск* – найяскравіша точка освітленої частини поверхні.

Яскравість освітленої частини поверхні залежить від кута падіння світлових променів.

### 8.1. Загальні положення

Освітлення може бути природним і штучним. Джерелом природного освітлення є Сонце і тоді світлові промені вважаються паралельними між собою. При штучному освітленні всі промені виходять з центру – джерела освітлення.

Тіні на фасадах архітектурних споруд будують при природному освітленні.

Сонячний промінь  $s$  (рис. 8.2а) освітлює точку  $A$  поверхні тіла. При продовженні промінь перетинає поверхню ще в одній точці  $B$ . Наступний промінь  $s'$  також перетинає тіло у двох точках  $A'$  і  $B'$ . Серед множини променів можна знайти такий, що дві точки  $A$  і  $B$  його перетину з поверхнею тіла є необмежено близькі одна до одної ( $A''B''$ ). Такий промінь називається *дотичним* до тіла. Точка  $A''B''$  належить границі власної тіні тіла. Множина дотичних до тіла променів утворює обвідну циліндричну поверхню (рис. 8.2б), лінія  $m$  контакту якої з тілом є границею власної тіні, а лінія  $m_T$  – перетину обвідної поверхні з предметом, на який падає тінь від тіла є контуром падаючої тіні.

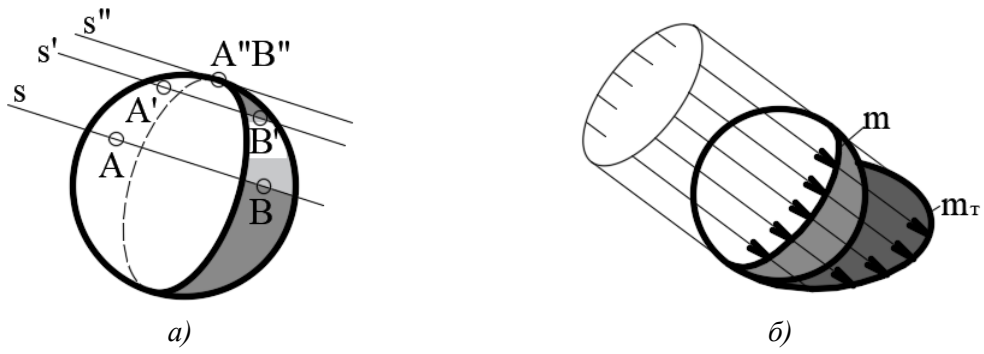


Рис. 8.2

При штучному освітленні світлові промені, що дотикаються до поверхні, утворюють конічну обвідну поверхню, вершиною якої є джерело освітлення  $S$  (рис. 8.3).

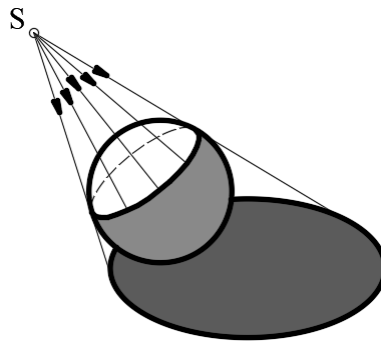


Рис. 8.3

Отже, контуром падаючої тіні від тіла на інший предмет (площину або поверхню) є тінь від контуру власної тіні тіла. Обвідні поверхні об'єктів, що мають форму циліндрів або конусів розпадаються на дотичні світлові площини (рис. 8.4).

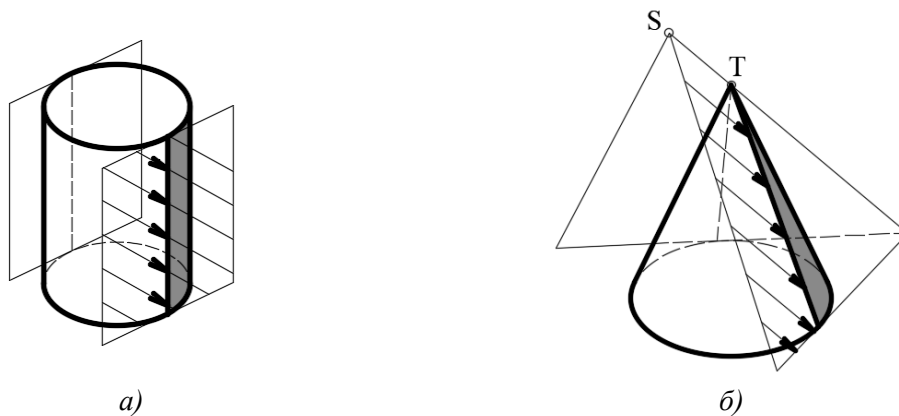


Рис. 8.4

При побудові тіней в прямокутних проекціях традиційно склались такі позначення:

$A_{T1}, A_{T2} \dots$  – падаюча тінь від точки  $A$  на відповідну площину проєкцій, або проєкції падаючої тіні від точки на будь який предмет;

$A_T$  – падаюча тінь від точки  $A$  на будь-який предмет, коли не потрібно визначати проєкцію тіні.

$s_1, s_2 \dots$  – проєкції напрямку світлових променів на відповідну площину проєкцій;

$S$  – точкове джерело освітлення.

Для спрощення побудови тіней в ортогональних проєкціях за напрям світлових променів обирають діагональ куба, грані якого паралельні площинам проєкцій (рис. 8.5, а). Такий напрям називається *стандартним*. Тоді кожна з проєкцій світлового променя нахилена до відповідної осі проєкцій під кутом  $45^\circ$ , а кут  $\Theta$  нахилу променя до горизонтальної площини проєкцій наближено дорівнює  $35^\circ$ . Його можна визначити графічно з прямокутного трикутника  $AOC$  (рис. 8.5, б),

катети якого знаходяться у відношенні  $\frac{A\tilde{N}}{\tilde{N}I} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (рис. 8.5, а).

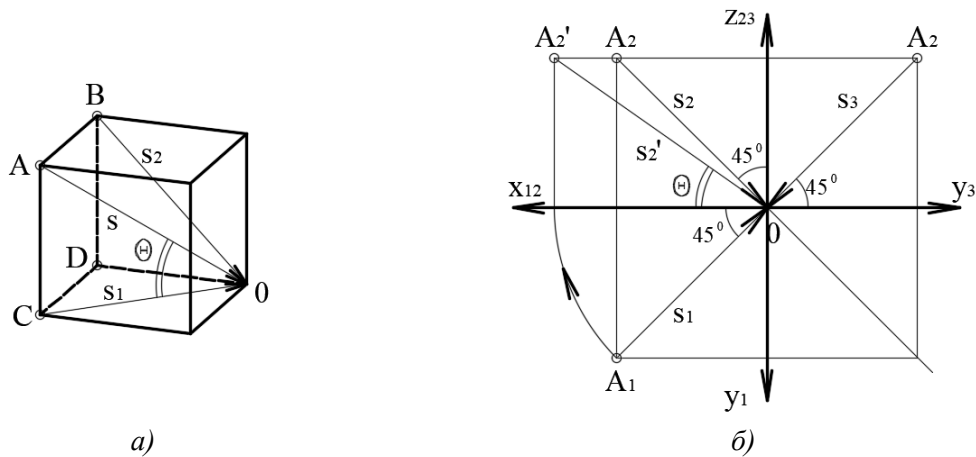


Рис. 8.5

Площина, яка проходить через світловий промінь, називається *світловою*. Наприклад,  $AOC$  – горизонтально-проєкціювальна світлова площина, а  $AOB$  – фронтально-проєкціювальна світлова площина. Кожна світлова площина містить множину паралельних між собою світлових променів.

### 8.1.1. Падаючі тіні від точки і відрізка прямої лінії

Падаючою тінню від точки на площині проєкцій є слід світлового променя (рис. 8.6). Побудову слідів прямої лінії на площинах проєкцій було показано на рис. 2.4 (розділ 2.2). Падаючою тінню від точки  $A$  на  $\Pi_2$  є точка  $A_{T2}$ , а на  $\Pi_1$  –  $A_{T1}$ .

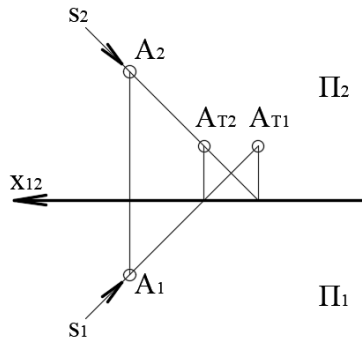


Рис. 8.6

Падаючою тінню від відрізка прямої  $AB$  (рис. 8.7) на фронтальній і горизонтальній площинах проєкцій у загальному випадку є дволанкова ламана, однією ланкою ( $A_{T1}C_{T1}$ ) якої є тінь від відрізка  $AB$  на  $\Pi_1$ , а другою ( $B_{T2}C_{T2}$ ) – тінь на  $\Pi_2$ . Для визначення точки ( $C_{T1} C_{T2}$ ) зламу тині потрібно побудувати повну тінь від відрізка  $AB$  на одній з площин проєкцій, наприклад на  $\Pi_1$ . Точка перетину тині  $A_{T1}B_{T1}$  з віссю  $x_{12}$  і є точкою зламу.

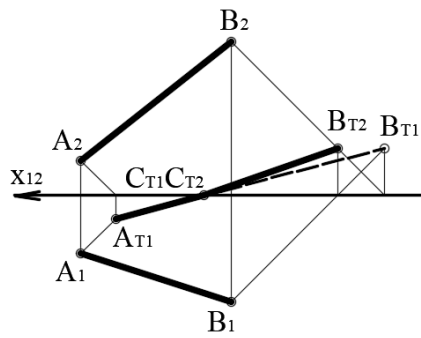


Рис. 8.7

Елементами тіней на архітектурних формах є тині від відрізків прямих окремого положення на площинах проєкцій.

Властивість 8.1. Тінь від відрізка проєкціювальної прямої збігається з проєкцією напрямку світлового променя (рис. 8.8, а).

Властивість 8.2. Тінь від відрізка, що паралельний площині проєкцій, паралельна і рівна за довжиною самому відріжку (рис. 8.8, б).

Властивість 8.3. Тінню від відрізка, що паралельний світловим променям, є точка (рис. 8.8, в).

Властивість 8.4. Тінню відрізка, одна проєкція якого збігається з проєкцією світлового променя, є відрізок, що перпендикулярний до осі проєкцій (рис. 8.8, г).

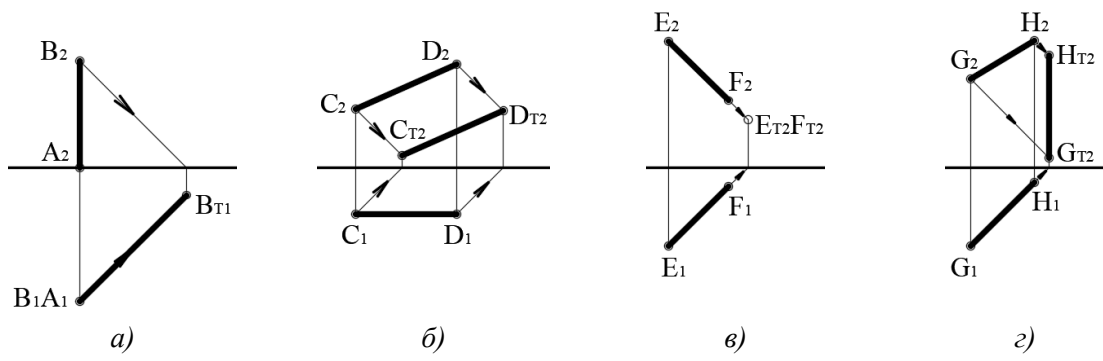


Рис. 8.8

**Властивість 8.5.** Падаюча тінь від горизонтально-проекціовальної прямої на поздовжню форму дзеркально повторює профільну проекцію поздовжньої форми (рис. 8.9).

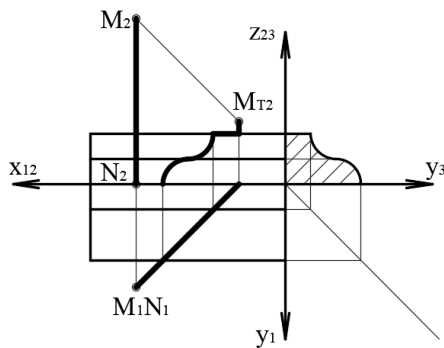


Рис. 8.9

## 8.2. Падаючі тіні від плоских фігур

Для побудови падаючої тіні від багатокутника на площинах проекцій можна визначити тінь від кожної вершини багатокутника і з'єднати їх відрізками прямих. На рис. 8.10 показано побудову падаючої тіні від довільного трикутника на площини проекцій.

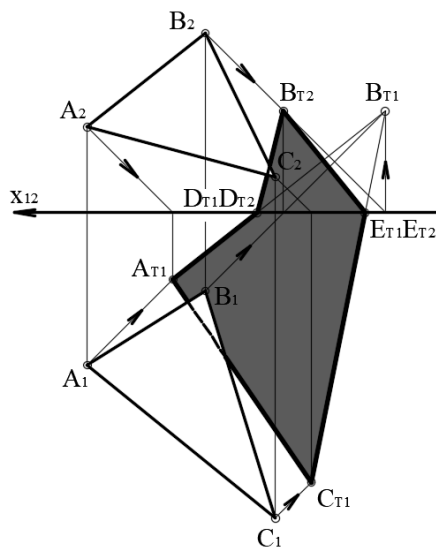


Рис. 8.10

Спочатку побудовано повну тінь  $A_{T1}B_{T1}C_{T1}$  від  $ABC$  на горизонтальну площину проєкцій і визначено її видиму частину  $A_{T1}D_{T1}E_{T1}C_{T1}$ , а тоді – тінь  $B_{T2}$  від вершини  $B$  трикутника на фронтальну площину проєкцій. Видима частина тіні на фронтальній площині проєкцій визначається точками  $D_{T2}$ ,  $B_{T2}$  і  $E_{T2}$ .

Основою побудови падаючих тіней від правильних горизонтальних багатокутників і круга є тінь від горизонтального квадрата (рис. 8.11а, рис.8.11б). На рис. 8.11 б видно, що падаючу тінь від квадрата на фронтальну площину проєкцій можна побудувати, не використовуючи горизонтальну проєкцію, а маючи лише відстань  $a$  від центра квадрата до фронтальної площини проєкцій. Цю обставину часто використовують для побудови тіней на фасадах архітектурних споруд, коли план споруди знаходиться на іншому аркуші.

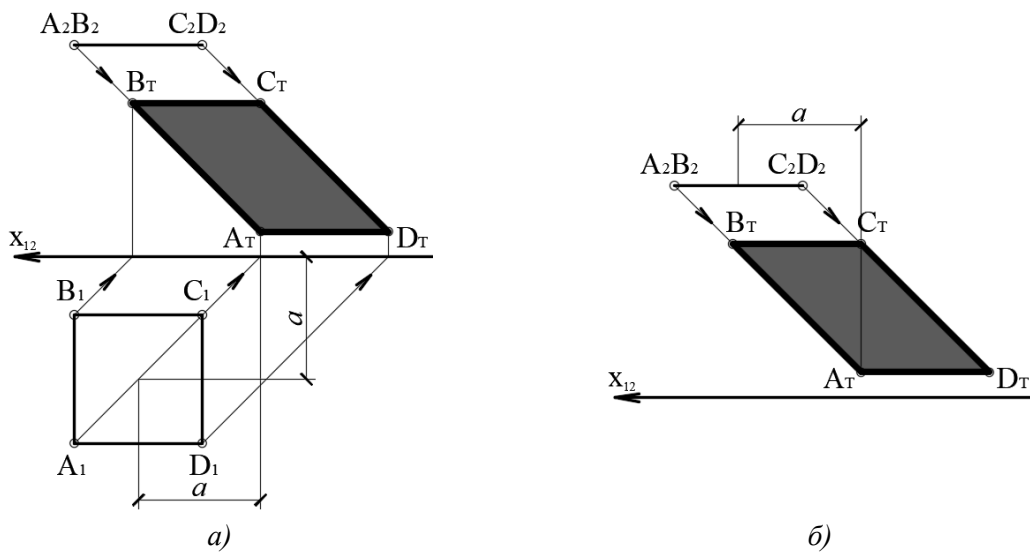


Рис. 8.11

На рис. 8.12 показано побудову падаючих тіней на фронтальну площину проєкцій від деяких правильних фігур на основі горизонтального квадрата.

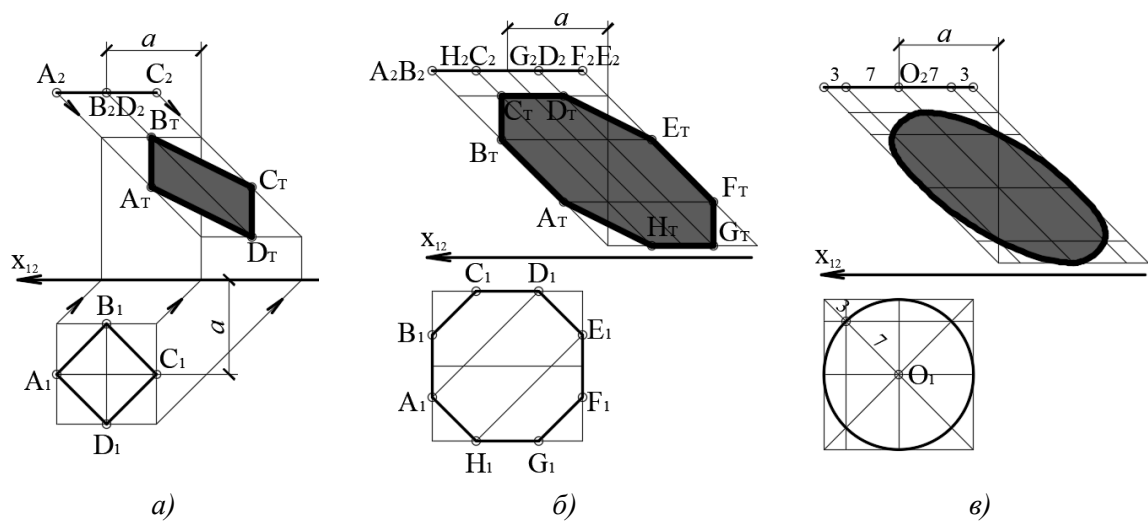


Рис. 8.12

При побудові точок  $A_T$  і  $C_T$  на рис. 8.12, а враховано, що точки  $A$  і  $C$  належать профільно-проекціювальній прямій, тень від якої на  $\Pi_2$  паралельна осі  $x_{12}$ . При побудові точок  $B_T$  і  $F_T$  на рис. 8.12, б враховано паралельність прямих  $BC$  і  $GF$ , горизонтальні проекції яких збігаються з горизонтальною проекцією світлового променя. При побудові точок падаючої тіні від кола (рис. 8.12, в) враховано, що діагональ квадрата наближено поділяється вписаним колом у відношенні 3:7.

Аналогічно будуються падаючі тіні на  $\Pi_2$  від профільних правильних фігур (рис. 8.13, а, б).

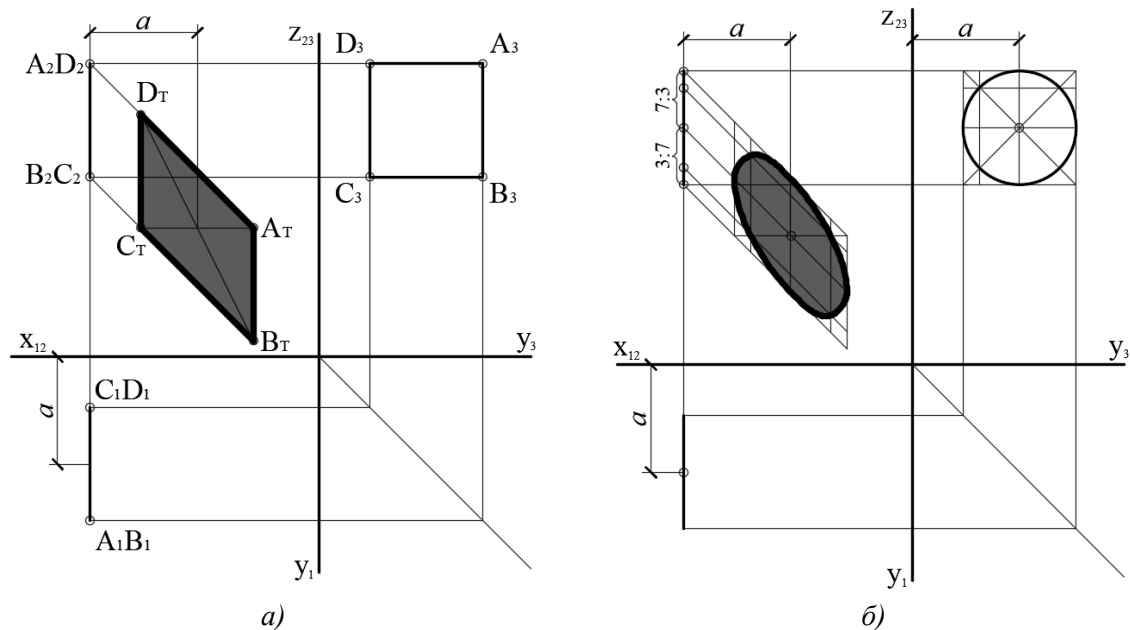


Рис. 8.13

При побудові падаючих тіней від плоских фігур слід враховувати наступні властивості.

**Властивість 8.6.** Тінню від фігури, що належить світловій площині, є відрізок прямої. На рис. 8.14 показано падаючу тень  $A_T C_T B_T$  від трикутника  $ABC$  на похилу площину  $\Gamma$ , яку задано слідами  $f$  і  $h$ .

Для побудови тіні площину  $\Gamma$  перерізано горизонтально-проекціювальною світловою площиною  $ABC$ . На сліді  $MN$  світлової площини побудовано тіні  $A_T$ ,  $B_T$  і  $C_T$  від вершин  $A$ ,  $B$  і  $C$  трикутника.

**Властивість 8.7.** Тіні від плоскої фігури на площині, що паралельна площині фігури, повторює форму самої фігури.

На рис. 8.15 показано падаючу тень від фронтального круга на фронтальну площину проєкцій.

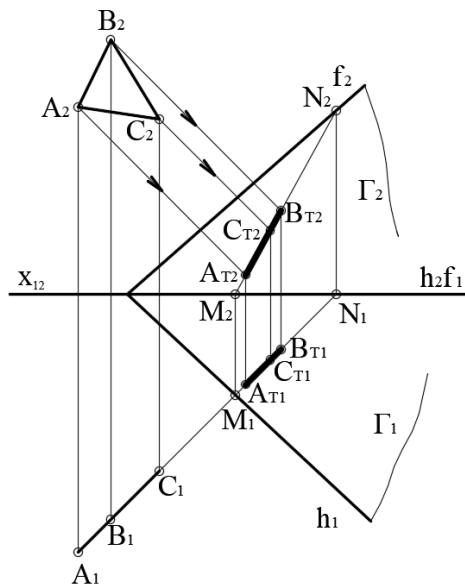


Рис. 8.14

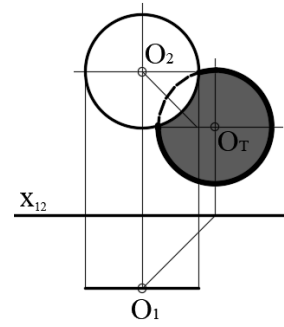


Рис. 8.15

### 8.3. Власні тіні на поверхнях обертання

Власні тіні на поверхнях обертання з вертикальною віссю будуються за допомогою обвідних конусів і циліндрів, що огортають поверхню обертання уздовж горизонтальних кіл. Наприклад, (рис. 8.16) точка  $A$  власної тіні на перерізі  $a$  поверхні обертання  $\Gamma$  збігається з точкою  $A$  власної тіні на конусі  $\Delta$ , що огортає поверхню уздовж кола  $a$ .

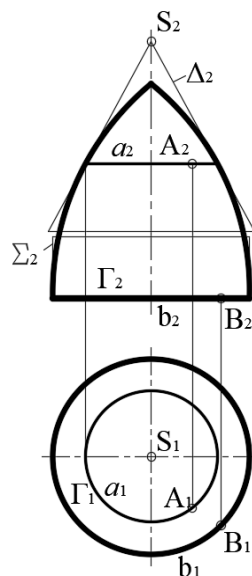


Рис. 8.16

Точка  $B$  власної тіні на перерізі поверхні площиною  $\Gamma$  збігається з точкою  $B$  власної тіні на циліндрі  $\Sigma$ , що огортає поверхню обертання уздовж кола  $b$  і т.д.

Тому для побудови власної тіні на довільній поверхні обертання з вертикальною віссю достатньо знати алгоритм побудови власних тіней на конусі і циліндрі. Власна тінь на вертикальному циліндрі обертання (рис. 8.17) визначається

за допомогою двох світлових площин  $\Delta$  і  $\Gamma$ , які дотикаються до циліндра уздовж двох прямих відповідно  $m$  і  $n$ . Лінії дотику  $m$  і  $n$  є границею власної тіні на циліндрі. Границею падаючої тіні на площинах проєкцій є тінь від границі власної тіні, яка складається з прямих  $m$  і  $n$  та півкола  $ACB$  (рис. 8.17). На рис. 8.18 показано спрощений спосіб побудови власної тіні на циліндрі без використання горизонтальної проєкції.

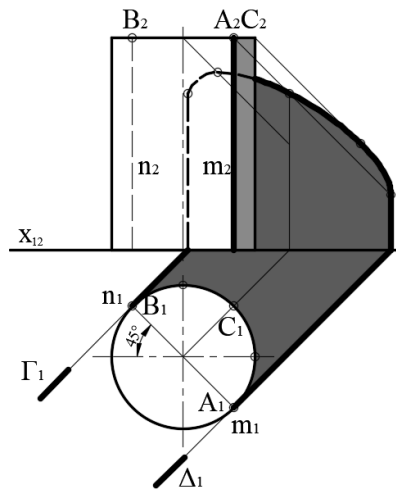


Рис. 8.17

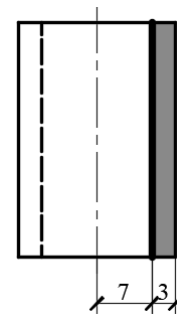


Рис. 8.18

Власна тінь на конусі обертання (рис. 8.19) будується за допомогою двох світлових площин загального положення, які дотикаються до конуса уздовж двох твірних  $AS$  і  $BS$ . Світлові площини  $ASS_T$  і  $BSS_T$  визначаються спільним світловим променем  $SS_T$ , що проходить через вершину конуса  $S$ , та горизонтальними слідами  $AS$  і  $BS$ , які дотикаються до основи конуса відповідно у точках  $A$  і  $B$ .

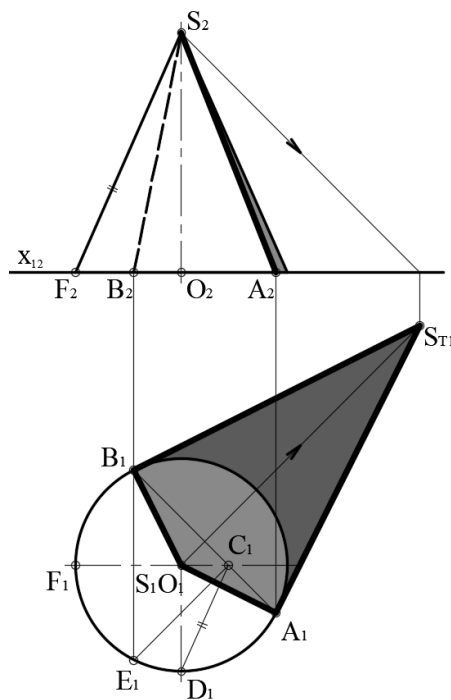


Рис. 8.19

Якщо точку  $C_1$  з'єднати з точкою  $D_1$  (на горизонтальній проекції конуса) нескладно довести, що трикутники  $S_1C_1D_1$  і  $F_2S_2O_2$  подібні і тому  $C_1D_1 \parallel F_2S_2$ . Ця властивість використовується для побудови власної тіні конуса обертання без горизонтальної проекції. Таку побудову показано на рис. 8.20, а.

На фронтальній проекції основи конуса як на діаметрі проводять півкола. З точки  $D_1$  перетину півкола з віссю конуса проводять пряму  $D_1C_1$  паралельно твірній  $F_2S_2$ . З точки  $C_1$  проводять дві прямі  $C_1A_1$  і  $C_1E_1$  під кутами  $45^\circ$  до осі  $Ox$  і визначають точки  $A_1$  і  $E_1$  на півколі основи конуса. На рис. 8.20, б показано аналогічні побудови для визначення власної тіні на перегорнутому конусі.

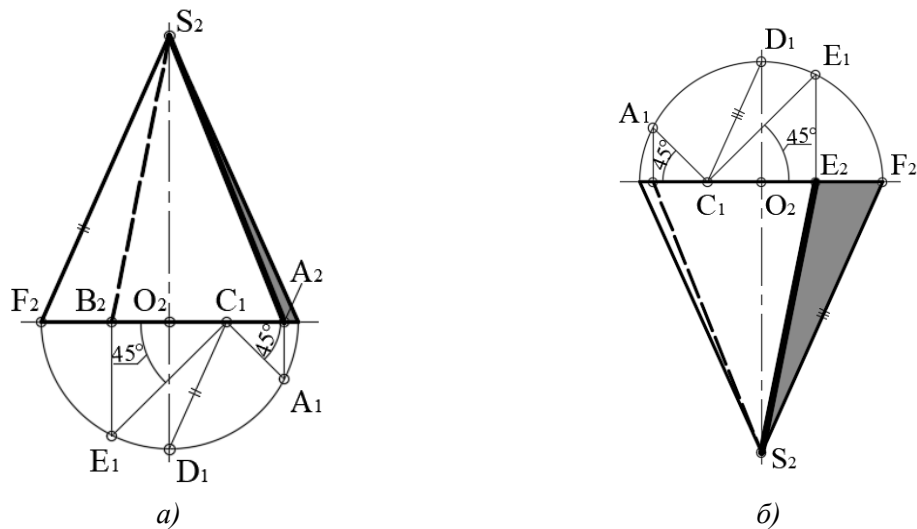


Рис. 8.20

Для побудови характерних точок власної тіні поверхні обертання використовують обвідні конуси з кутами нахилу твірних  $45^\circ$  і  $35^\circ$  (рис. 8.21). У випадку а три чверті поверхні освітлені, у випадку б – одна чверть. Якщо кут нахилу твірних конуса до горизонтальної площини складає  $\theta \approx 35^\circ$ , то у випадку в вся поверхня освітлена, а власна тінь вироджується в одну пряму  $SC$ . У випадку г – вся поверхня знаходиться у тіні і лише уздовж твірної  $SD$  ковзає світловий промінь.

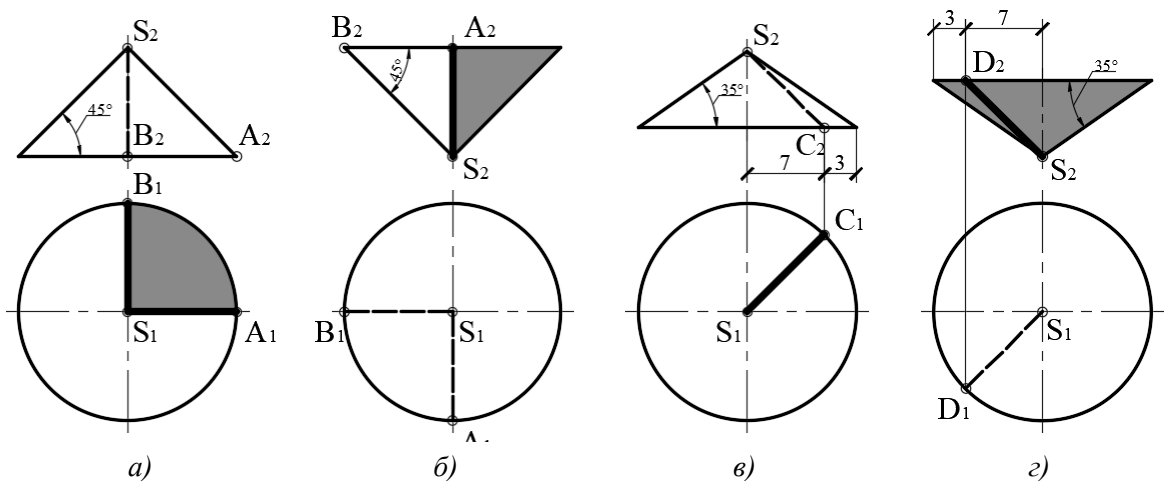


Рис. 8.21

Графічні прийоми, які показано на рис. 8.20 та 8.21 використовують для побудови власної тіні довільної поверхні обертання з вертикальною віссю.

На рис. 8.22 показано побудову власної тіні на поверхні обертання без використання горизонтальної проекції. Найвища невидима точка  $A$  власної тіні визначається за допомогою обвідного конуса з вершиною  $S$  і кутом нахилу твірних  $\theta \approx 35^\circ$  (рис. 8.21в). Точки  $B, C, F$  і  $G$  визначено за допомогою двох обвідних конусів з кутом нахилу твірних  $45^\circ$  і вершинами відповідно  $T$  і  $U$  (рис. 8.21 а і б). Проміжні точки  $K$  і  $H$  побудовано за допомогою конуса з вершиною  $V$  так, як було показано на рис. 8.20, б.

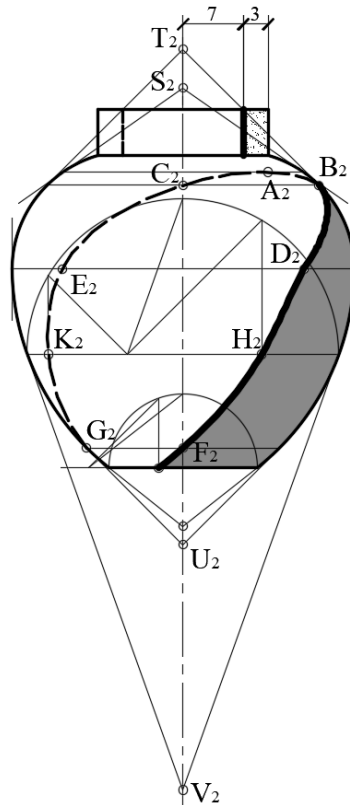


Рис. 8.22

Власну тїнь на кулі (Рис. 8.23) можна побудувати так, як на будь якій поверхні обертання, але можна використати і формальний спосіб, оскільки границею власної тїни є коло у площині, фронталь і горизонталь якої нахилені під кутами  $45^\circ$  до площин проекцій, а проекцією кола у похилій площині є еліпс.

Спочатку будують точки  $1$  і  $2$  на контурі сфери при його перетині з прямою  $12$ , що нахилена до осей контура сфери під кутами  $45^\circ$ . Далі будують точки  $3, 4, 6$  і  $5$ , використовуючи вже визначені точки  $1$  і  $2$ . Точки  $7$  і  $8$  будують з умови, що  $\angle 712 = \angle 218 = 30^\circ$ . Останніми будують точки  $9, 10, 11$  і  $12$  з умови, що осі контура сфери поділяють відрізки  $79, 811, 810$  і  $712$  у відношенні  $1:2$ .

Падаюча тїнь  $O_T$  від центра сфери  $O$  на фронтальну площину проекцій будується за заданою відстанню  $a$  від центра  $O$  до площини проекцій  $\Pi_2$ . Відрізок  $12$  є паралельним до  $\Pi_2$  і тому тїнь  $1_T 2_T$  паралельна цьому відрізку. Точки  $11$  і  $12$  належать вертикальній світловій площині, що проходить через центр сфери і тому



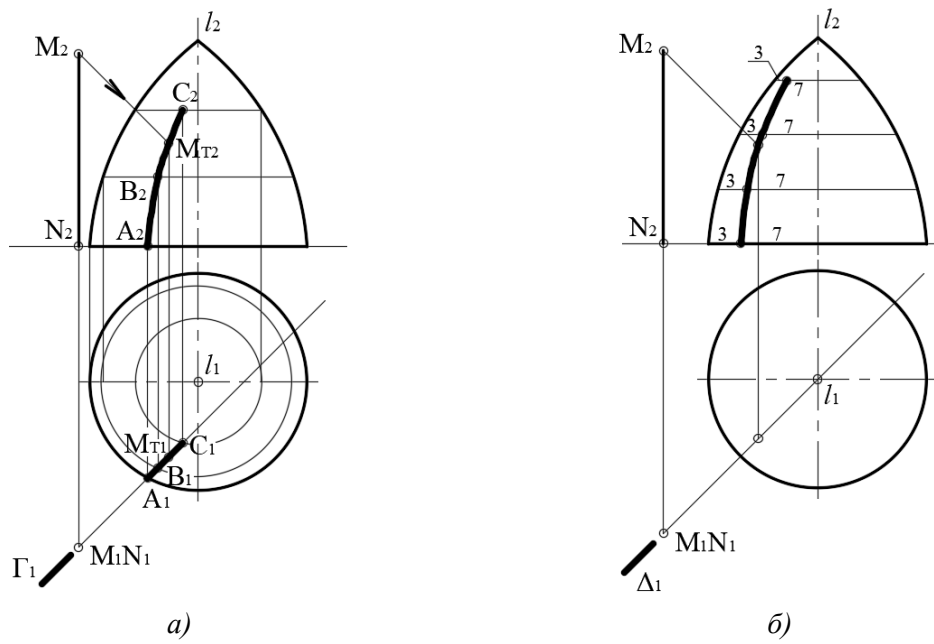


Рис. 8.24

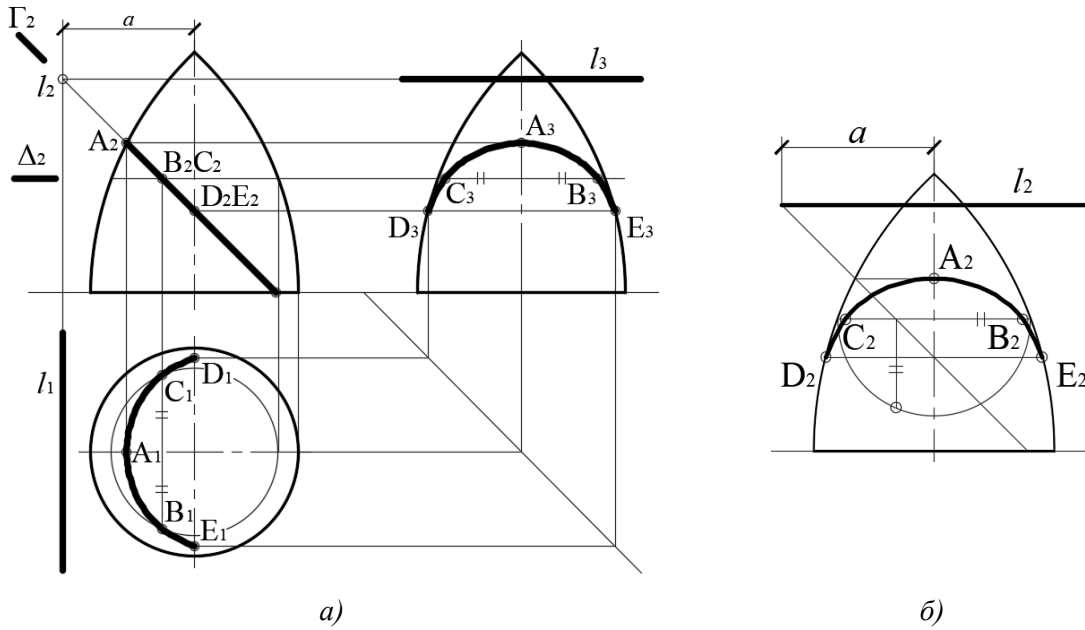


Рис. 8.25

Профільні проекції точок  $A$ ,  $D$  і  $E$  визначено за відповідністю з фронтальною проекцією, а профільні проекції проміжних точок  $B$  і  $C$  у довільному горизонтальному перерізі поверхні площиною  $\Delta$  – за відповідністю з горизонтальною проекцією. Якщо поєднати всі побудови на одній проекції (рис. 8.25, б), отримаємо побудову точок падаючої тіні від поздовжньої прямої  $l$  за однією проекцією.

На рис. 8.26 - 8.27 поетапно показано побудову падаючої тіні від горизонтального кола  $m$  на поверхні обертання. Центр  $O$  кола належить осі  $l$  поверхні обертання.

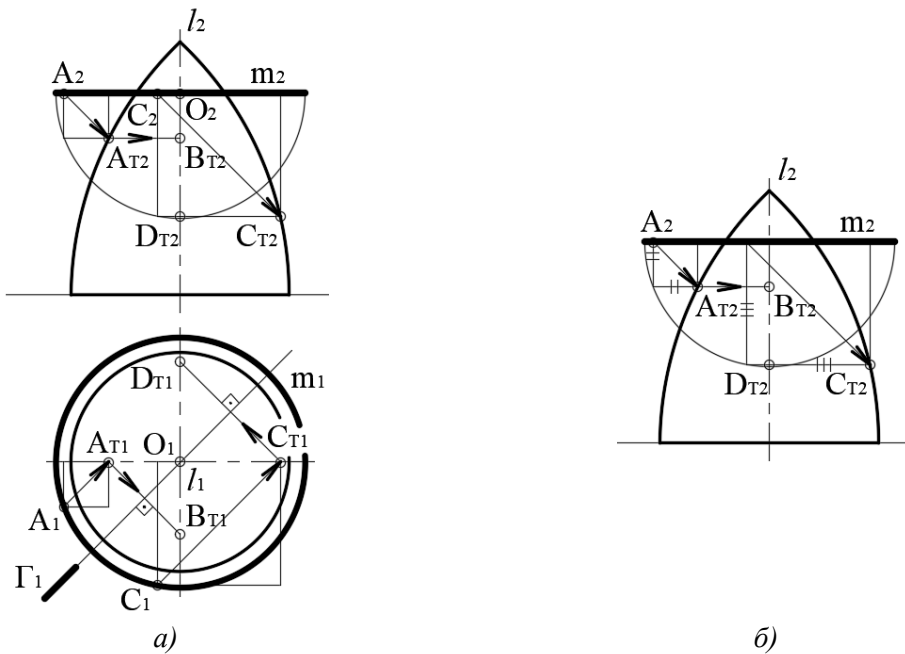


Рис. 8.26

Для побудови точок тіні на контурі поверхні (рис. 8.26, а) між колом  $m$  і контуром поверхні вписують світловий кубик так, щоб точка  $A$  світлового променя належала колу  $m$ , а точка  $A_T$  – фронтальному контуру поверхні. Симетрично до точки  $A_T$  відносно вертикальної світлової площини  $\Gamma$  будують точку  $B_T$ . Аналогічно будують точки  $C_T$  і  $D_T$  падаючої тіні. На рис. 8.26 б всі зазначені побудови виконано на одній фронтальній проекції.

На рис. 8.27 показано побудову найвищої точки  $E_T$  падаючої тіні у світловій площині  $\Gamma$ .

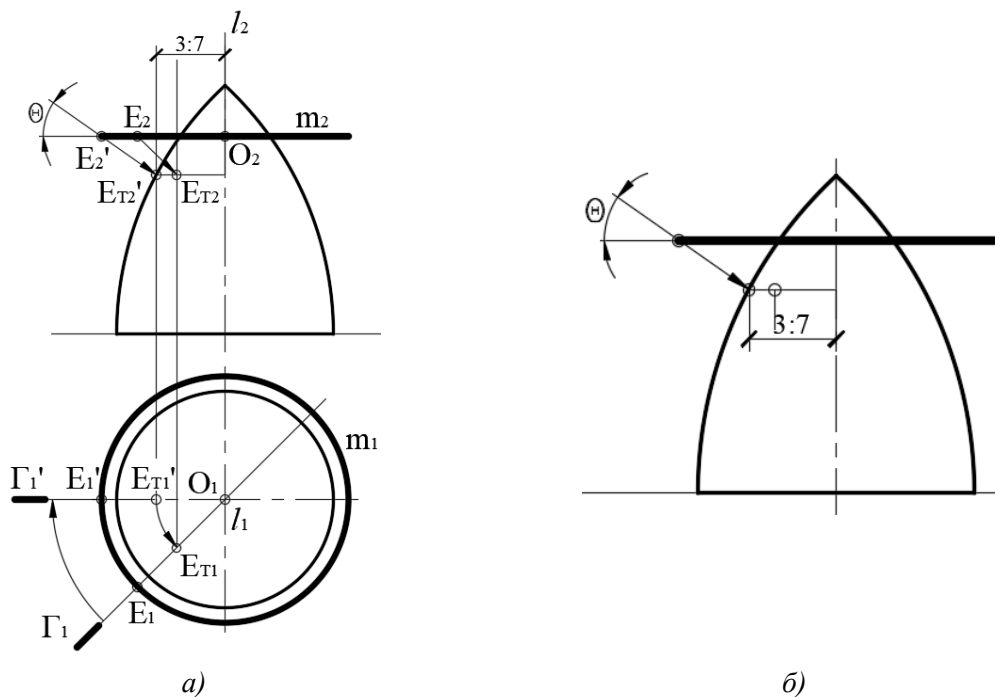


Рис. 8.27

Для того, щоб не будувати переріз поверхні світловою площиною  $\Gamma$ , її разом з перерізом і разом з світловим променем  $EE_T$  повертають навколо осі  $l$  у фронтальне положення. Тоді у повернутому положенні переріз поверхні збігається з її фронтальним контуром, а промінь  $E'E'_T$  проводять через точку  $E'$  кола  $m$  під кутом  $\theta \approx 35^\circ$ . Побудовану точку  $E'_T$  на контурі повертають навколо осі  $l$  у вихідне положення  $E_T$ . На рис. 8.27б показано зазначені побудови без використання горизонтальної проекції.

Проміжні точки  $F_T$  і  $G_T$  падаючої тіні (рис. 8.28) у перерізі довільною горизонтальною площиною  $\Sigma$  будуються як падаюча тінь від одного горизонтального кола ( $m$ ) на інше ( $a$ ). Для цього на площині  $\Sigma$  визначають тінь  $O_T$  від центру  $O$  кола  $m$  і будують тінь  $m_T$  від кола  $m$ . Точки  $F_T$  і  $G_T$  перетину кіл  $m_T$  і  $a$  є шуканими. На рис. 8.28 б показано таку побудову без використання горизонтальної проекції. На рис. 8.29 побудови всіх точок  $A_T, B_T, C_T, E_T$  і  $F_T$  зведено разом.

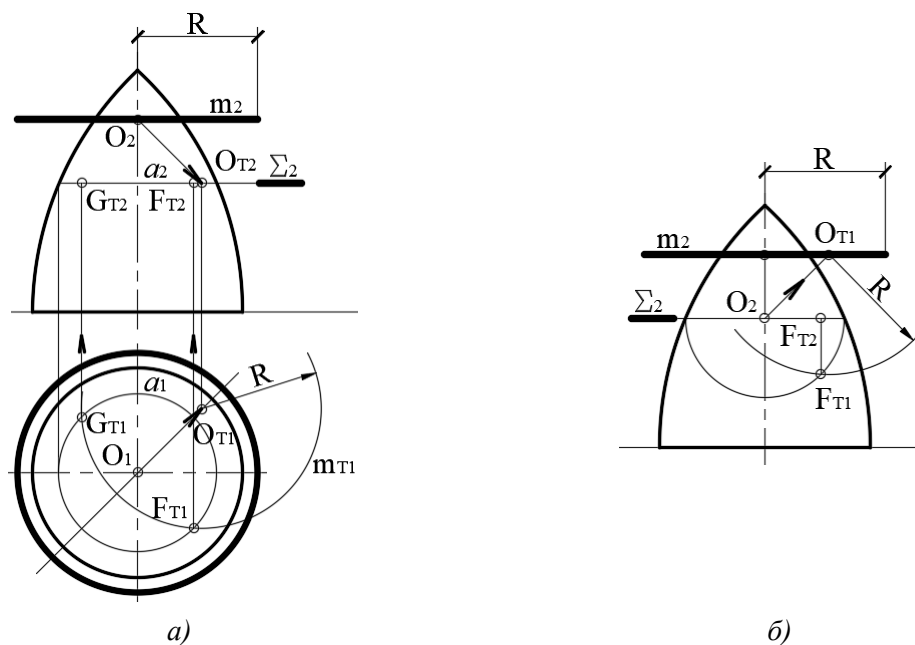


Рис. 8.28

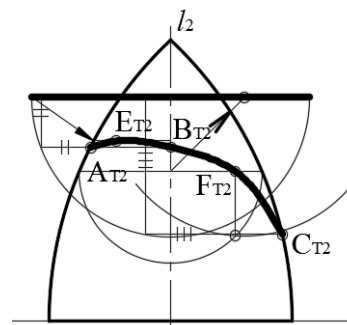


Рис. 8.29

Дещо складніше побудувати падаючу тінь від однієї поверхні обертання на іншу. На рис. 8.30 показано дві співвісні поверхні обертання  $\Gamma$  і  $\Delta$ . Власна тінь  $ABCD$

на поверхні  $\Gamma$  побудовано так, як було показано на рис. 8.22. Контуром  $E_T B_T F_T G_T$  падаючої тіні на поверхні  $\Delta$  є тінь від границі  $ABCD$  власної тіні поверхні  $\Gamma$ .

Падаючу тінь  $B_T$  від точки  $B$  побудовано так, як було показано на рис. 8.27. Інші точки ( $E_T$ ,  $F_T$  і  $G_T$ ) для спрощення побудов визначено наближено не як тінь від кривої  $ABC$ , а як тінь від кола перерізу поверхні  $\Gamma$  горизонтальною площиною  $\Omega$  (рис. 8.29).

Побудова падаючих тіней значно спрощується, якщо поверхнею обертання є прямий круговий циліндр. На рис. 8.31 показано побудову тіней від горизонтальної плити, яка має архітектурну назву "абака" на циліндричну колону.

На рис. 8.31, *a* абака має квадратну форму, на рис. 8.31, *б* – шестикутну, а на рис. 8.31, *в* – круглу. Для побудову тіней горизонтальні проєкції частково суміщені з фронтальними.

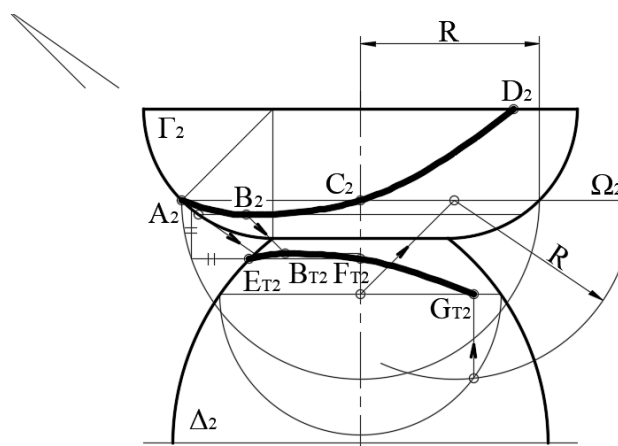


Рис. 8.30

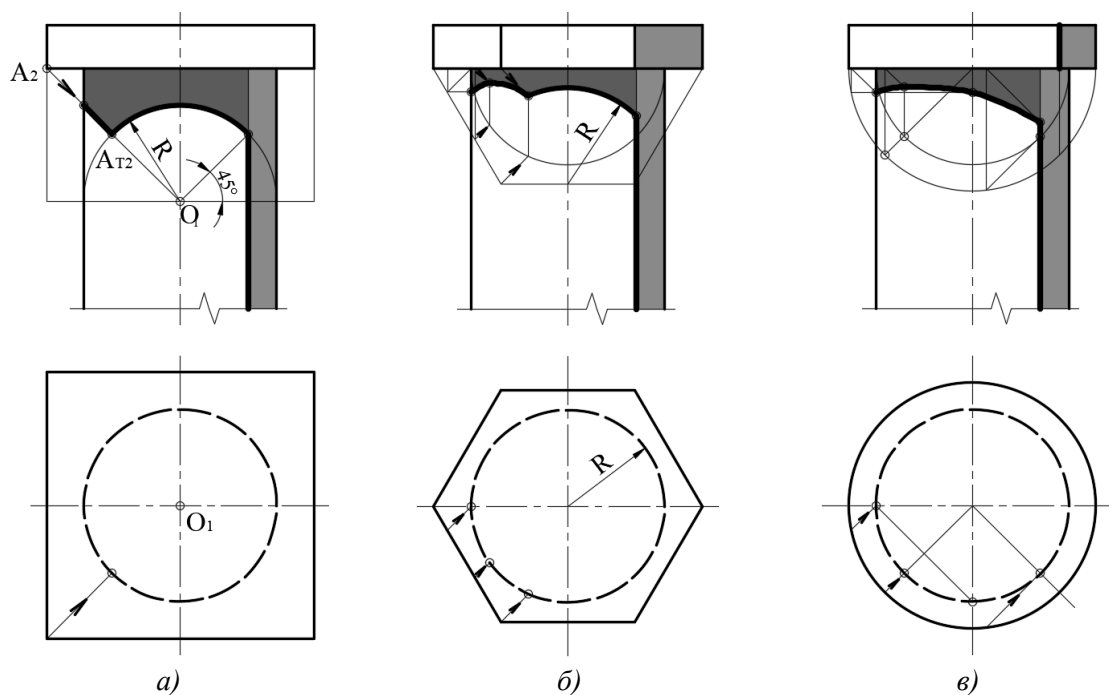


Рис. 8.31

## 8.5. Тіні на поздовжніх формах

До поздовжніх форм можна віднести профільно-проекціювальні площини дахів, сходи, карнизи, профільовані поздовжні пояси тощо. Основою побудови падаючих тіней є властивість 8.5 (рис.8.9), відповідно до якої тінь від вертикальної прямої повторює профіль поздовжньої форми.

На рис. 8.32 показано побудову падаючої тіні від квадратного у плані димаря на профільно-проекціювальну площину рівноскатного даху.

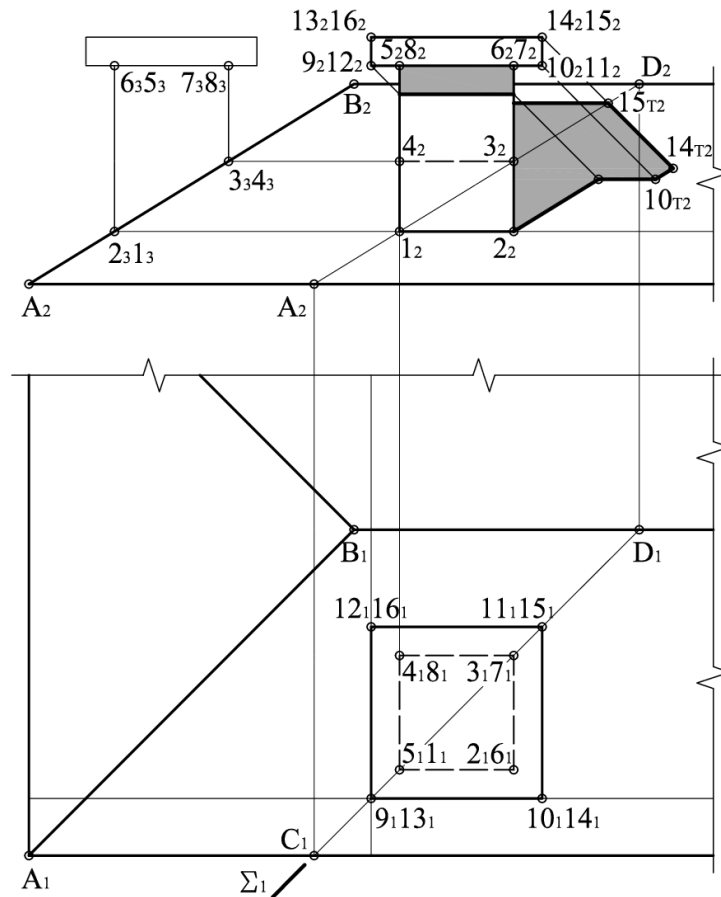


Рис. 8.32

За допомогою вертикальної січної площини  $S$  визначено лінію 3-4 перетину задньої фронтальної площини 3-7-8-4 димаря з площиною даху. Тіні від вертикальних ребер 1-5, 2-6, 3-7, 4-8, 9-13, 10-14, 11-15 і 12-16 згідно з властивістю 8.5 (рис. 8.9) дзеркально повторюють профіль даху. Тіні від профільно-проекціювальних ребер 9-10 і 15-16 паралельні до самих ребер, а тінь від фронтально-проекціювального ребра 14-15 збігається з фронтальною проекцією світлового променя.

На рис. 8.33 наведено приклад побудови падаючої тіні від димаря циліндричної форми на поздовжню площину даху.

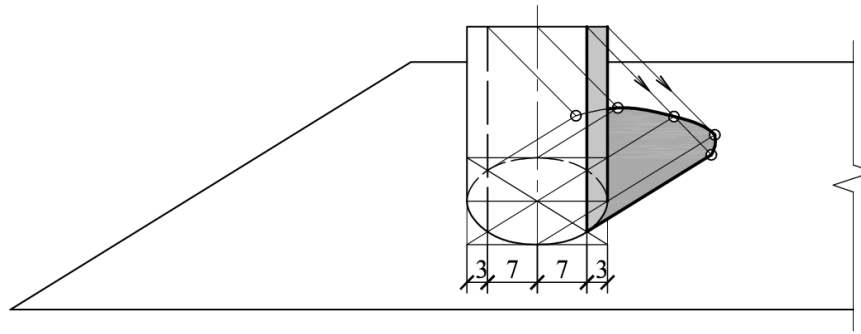


Рис. 8.33

Основою побудови падаючих тіней на сходах (рис. 8.34) від бічної стінки також є властивість 8.5 (рис. 8.9). Тінь від вертикального відрізка  $AB$  повторює профіль сходів, по якому вертикальна світлова площина  $S$  перерізає сходи. Тінь від фронтально-проекціювального ребра стінки побудовано як слід світлової площини  $D$ . На рис. 8.34 видно, що фронтальну проекцію тіні можна побудувати без використання горизонтальної проекції сходів, якщо є їх профільна проекція.

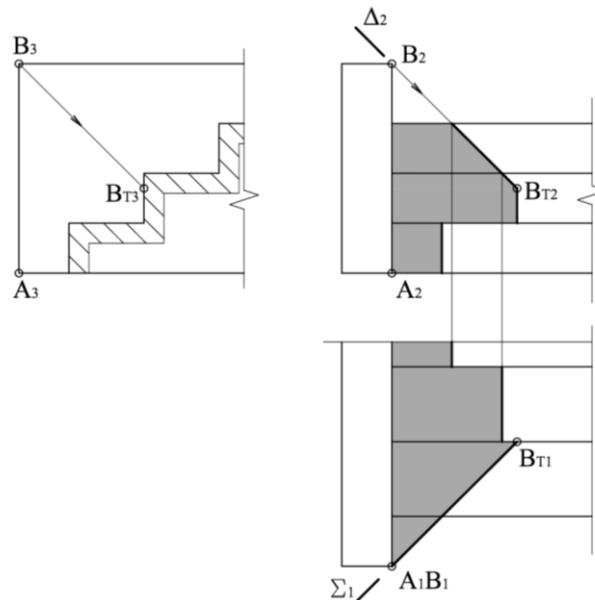


Рис. 8.34

Якщо бічна стінка сходів має криволінійний профіль (рис. 8.35), для побудови тіні використовують профільну проекцію (профільний розріз).

Тінь будується від точок криволінійного профілю на профільно-проекціювальні прямі сходів. Наприклад, для побудови тіні на прямій  $m$  через неї проводять профільно-проекціювальну світлову площину  $S$ , визначають на профілі бічної стінки точку  $A$ , від якої тінь падає саме на пряму  $m$ . Потім на фронтальній проекції будують тінь  $A_T$ .

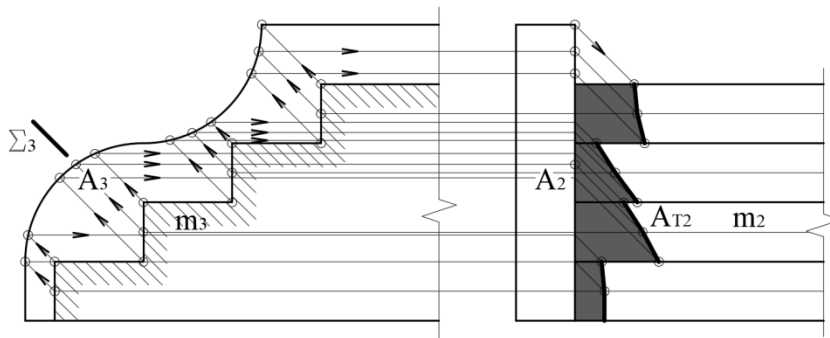
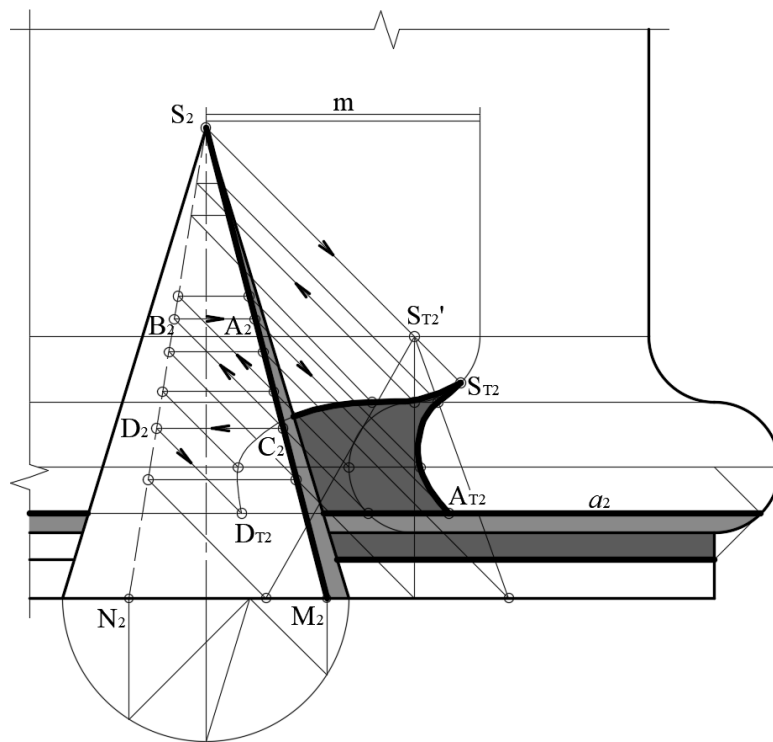
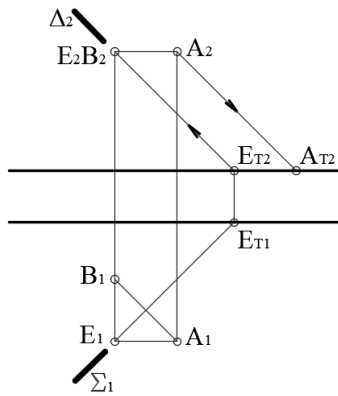


Рис. 8.35

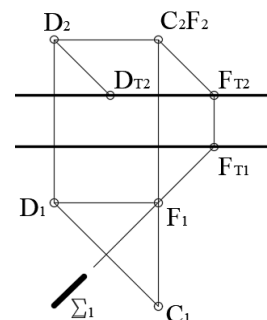
На рис. 8.36 показано побудову падаючої тіні від конуса обертання на поздовжній пояс.



a)



б)



в)

Рис. 8.36

Власну тінь на конусі побудовано так, як було показано на рис. 8.20. Падаюча тінь від осі конуса дзеркально повторює профіль поздовжньої форми. Для побудови падаючої тіні за однією фронтальною проекцією використано симетрію границь власної тіні конуса відносно вертикальної світлової площини  $S$  (рис. 8.36 б). На довільній поздовжній прямій ( $a$ ) поясу визначається точка  $E_T$  перетину зі світловою площиною  $S$ . У світловій площині  $S$  визначається точка  $E$ , фронтальна проекція  $E_2$  якої збігається з фронтальною проекцією точки  $B$ . Три точки  $A$ ,  $B$  і  $E$  утворюють прямокутний трикутник, катет  $AE$  якого є паралельним прямій  $a$ . Тому тінь від точки  $A$  буде на прямій  $a$ . Аналогічно будується падаюча тінь  $D_T$  від твірної  $SN$  конуса на прямій  $a$  (рис. 8.36 в).

## 8.6. Тіні в нішах

Для побудови падаючих тіней в нішах звичайно використовують допоміжні світлові січні площини за принципом, який було показано на рис. 8.24. Допоміжну січну площину обирають так, щоб її слід (переріз поверхні ніші) проєкціювався або колом, або прямою лінією, що спрощує побудову тіні.

На рис. 8.37 показано побудову тіней у циліндричних нішах за однією фронтальною проекцією: відкрита зверху ніша – рис. 8.37а; закрита ніша – рис. 8.37б. Власні тіні побудовано так, як було показано на рис. 8.18.

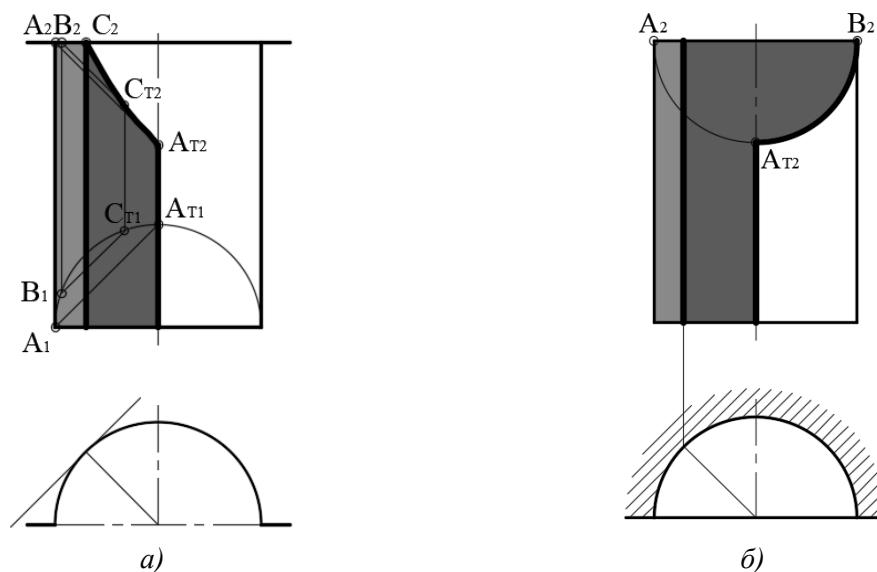


Рис. 8.37

На рис. 8.37а горизонтальну проєкцію ніші суміщено з фронтальною. В середину ніші падає тінь від вертикальної твірної  $A_1A_2$  і від дуги  $ABC$  півкола завершення ніші. Тінь від довільної точки  $B$  будується за допомогою вертикальної світлової площини, що проходить через точку  $B$  і перетинає циліндр по прямій  $C_1C_2$ .

Падаюча тінь від прямої  $AB$  закритої циліндричної ніші (рис. 8.37, б) будується за допомогою поздовжньої світлової площини, яка перерізає циліндр по

дузі еліпса  $AA_1B$ . Оскільки світлова площина нахилена до фронтальної площини під кутом  $45^\circ$ , фронтальною проекцією дуги еліпса є дуга кола.

Власну тінь у сферичній ніші (рис. 8.38) побудовано так, як було показано на рис. 8.23. Тінь в середину ніші падає від дуги  $BEA$ . Для побудови точки  $C_T$  падаючої тіні на горизонтальний переріз площиною  $S$  використано світловий кубик, який вершинами  $C$  і  $K$  спирається на дугу  $BEA$ , а вершиною  $D$  – на переріз ніші площиною  $S$ . Світловий кубик можна підібрати так, як було показано на рис. 8.26. Але у даному окремому випадку вершину  $K$  можна визначити як точку перетину контура ніші з гіпотенузою трикутника  $OLM$ , катети якого дорівнюють відповідно радіусу і діаметру ніші. Для побудови падаючих тіней від довільних точок ( $G$  або  $E$ ) використовуються фронтально-проекціювальні світлові площини ( $\Gamma$  або  $D$ ). Аналітичні розрахунки показують, що фронтальна проекція світлового променя (наприклад  $G_2G_{T2}$ ) поділяється діаметром  $A_2B_2$  у відношенні 3:1.

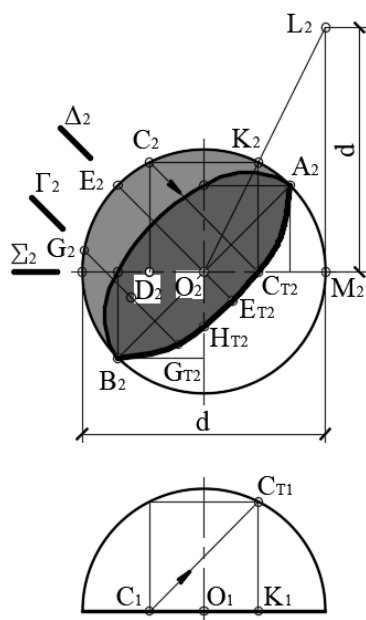


Рис. 8.38

На рис. 8.39 показано побудову падаючої тіні у циліндричній ніші зі сферичним завершенням. Точки  $A_T$ ,  $C_T$  падаючої тіні побудовано так, як показано на рис. 8.37 і 8.38. Точку  $B_T$  падаючої тіні від довільної точки  $B$  на циліндричну частину ніші побудовано за допомогою фронтально-проекціювальної світлової площини  $\Gamma$ . Для спрощення побудов горизонтальну проекцію ніші суміщено з дугою  $ABK$ . Довільну точку  $D_T$  тіні побудовано, як тінь від напівциркульного фронтального ребра ніші на довільний фронтальний переріз площиною  $D$ , яка перетинає сферичну частину ніші по колу  $l$ . Горизонтальну проекцію ніші суміщено з дугою  $a$ . Побудовано тінь  $O_T$  від точки  $O$  на площину  $D$ . Після цього з точки  $O_T$  як з центру описано дугу радіусом, що дорівнює радіусу контурного ребра ніші. Перетин цієї дуги з кривою  $l$  визначить точку  $D_T$  тіні.



слідом  $GS$  світлової площини. Точка  $C_T$  є падаючою тінню від точки  $C$  на поверхню конуса. Світлова площина  $ARS$  є проєкціювальною і тому для побудови падаючої тіні  $A_T$  від точки  $A$  необхідна друга проєкція.

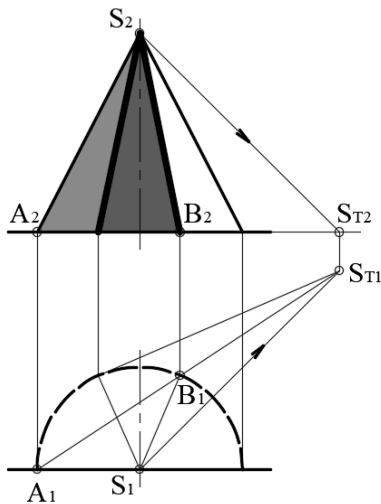


Рис. 8.40

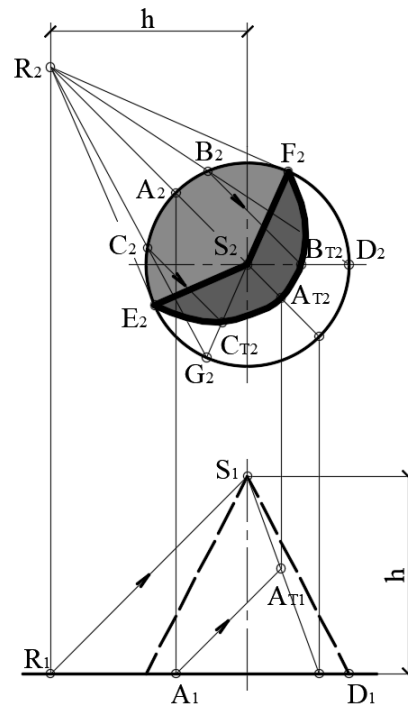


Рис. 8.41

На рис. 8.42 показано побудову падаючої тіні від правильної чотирикутної піраміди в циліндричній ніші. Для побудови точок  $A_T$  і  $C_T$  падаючої тіні від ребер піраміди на півколо основи ніші визначено горизонтальні проєкції тіней  $E_1S_{T1}$  і  $D_1S_{T1}$  від ребер  $ES$  і  $DS$  на площину основи ніші, які у перетині з півколом основи дають шукані точки  $A_T$  і  $C_T$ . У довільній горизонтальній площині  $S$  точки падаючої тіні будуються так само. На рис. 8.42а показано, як горизонтальну проєкцію фігур можна сумістити з фронтальною. Тінь  $S_T$  від вершини  $S$  піраміди визначається за допомогою вертикальної світлової площини  $D$ , яка проходить через вершину  $S$  і перерізає циліндр по вертикальній твірній. На рис. 8.42б показано ще один спосіб визначення точок падаючої тіні за допомогою профільно-проєкціювальної світлової площини  $G$ , яка перерізає піраміду по трапеції  $KLMN$ , а нішу по еліпсу. Оскільки площина  $G$  нахилена до  $\Pi_2$  під кутом  $45^\circ$ , фронтальною проєкцією перерізу ніші є півколо. На рис. 8.42б також показано, як усі побудови можна виконати без використання профільної проєкції.



## 8.7. Тіні деяких архітектурних елементів

На рис. 8.43-8.45 показано побудову власних і падаючих тіней на деяких криволінійних архітектурних обломах у вигляді тіл обертання: гусьок (рис. 8.43), каблучок (рис. 8.44) і скоція (рис. 8.45).

Точки границь власних тіней (1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 на рис. 8.43; 1, 6, 7, 8, 9, 10, 11 на рис. 8.44 і 1, 2, 3, 4, 5 на рис. 8.45) побудовано так, як було показано на рис. 8.22. Для побудови точок границь падаючих тіней (2<sub>T</sub>, 5<sub>T</sub>, 6<sub>T</sub>, 7<sub>T</sub>, 8<sub>T</sub>, 10<sub>T</sub>, 12<sub>T</sub>, 13<sub>T</sub>, 14<sub>T</sub> на рис. 8.43; 1<sub>T</sub>, 2<sub>T</sub>, 3<sub>T</sub>, 4<sub>T</sub>, 6<sub>T</sub>, 12<sub>T</sub>, 13<sub>T</sub>, 14<sub>T</sub>, 15<sub>T</sub>, 16<sub>T</sub>, 17<sub>T</sub>, 18<sub>T</sub>, 19<sub>T</sub>, 20<sub>T</sub>, 21<sub>T</sub>, 22<sub>T</sub> на рис. 8.44 і 6<sub>T</sub>, 7<sub>T</sub>, 8<sub>T</sub>, 9<sub>T</sub>, 10<sub>T</sub> на рис. 8.45) побудовано з використанням прийомів, які було наведено на рис. 8.24-8.30.

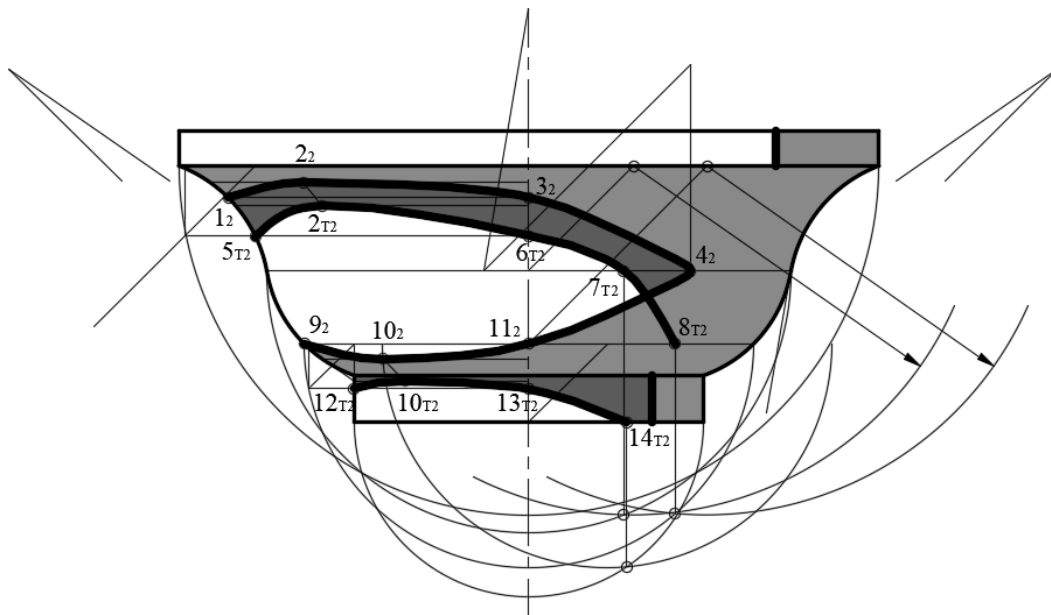


Рис. 8.43

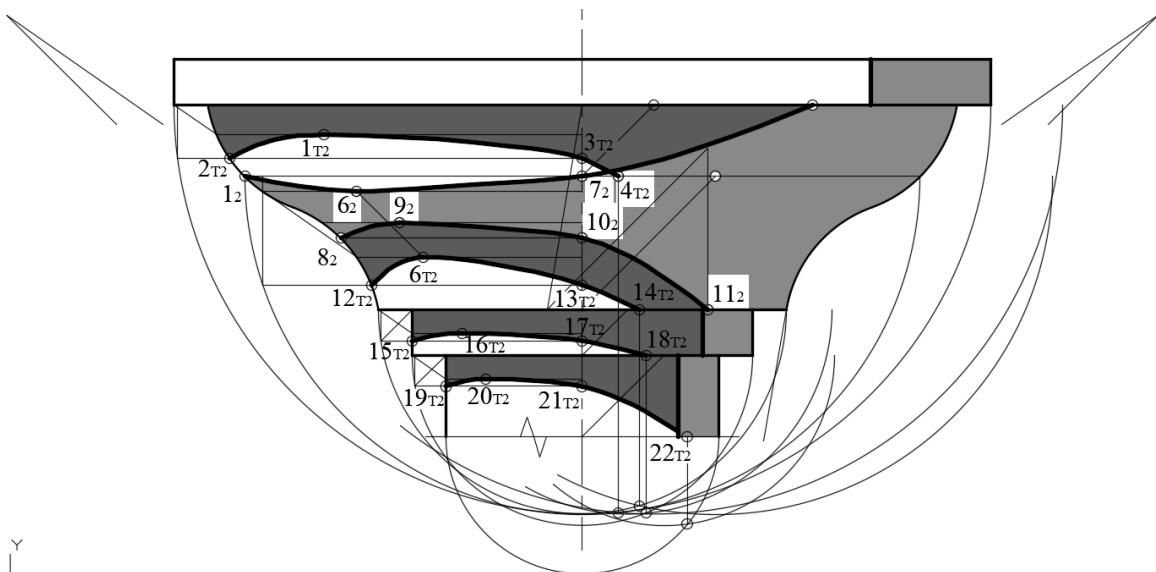


Рис. 8.44

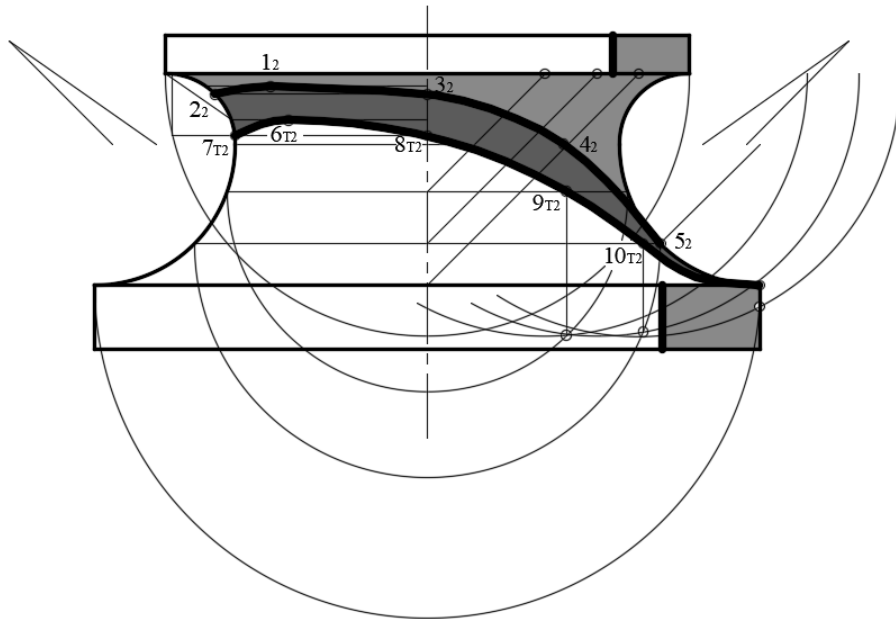


Рис. 8.45

На рис. 8.46 наведено приклад побудови тіней на колоні доричного ордера за допомогою способів, які було показано на рис. 8.22-8.30.

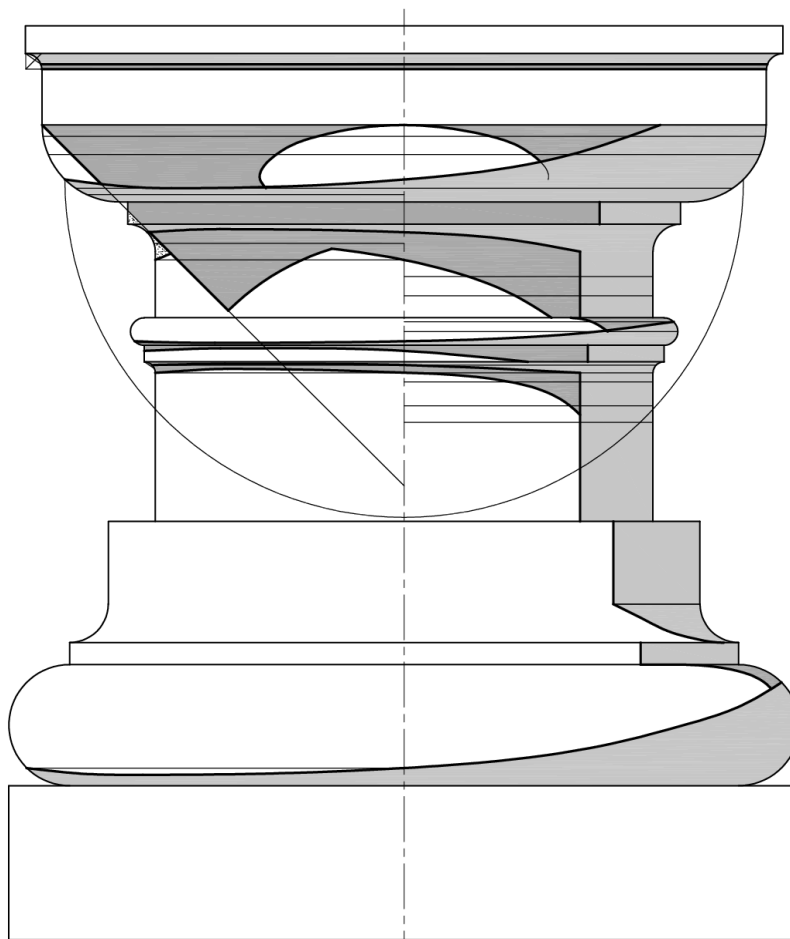


Рис. 8.46

## 8.8 Ізофоти

Для правильного відображення засобами архітектурної графіки форми кривої поверхні, а також положення поверхонь (площин) у просторі відносно напрямку світла потрібно знати ступінь освітленості кожної ділянки поверхні чи площини. Цей ступінь залежить від кута падіння променів у кожній її точці при постійному джерелі освітлення. Зі збільшенням кута зростає інтенсивність освітленості. Якщо цей кут становить  $90^\circ$ , то освітленість стає максимальною.

Для виявлення на поверхнях ділянок, які відзначаються приблизно однаковою інтенсивністю освітленості, спочатку на цих поверхнях будують лінії однакової освітленості – *ізофоти*.

З метою полегшення побудови ізофот на поверхнях тіл використовують поверхні-шаблони, побудова ізофот на яких не викликає труднощів. Так, для перенесення ізофот на поверхні обертання як шаблон використовують сферу (рис.8.47а). При довільному положенні світлового променя в загальному випадку ізофоти на фронтальній проекції сфери будуть еліпсами. Щоб побудувати ці еліпси, доцільно звернутися до способу заміни площин проекцій (рис.8.47б). Нову площину вибирають паралельно світловим променям. Потім проводять вісь сфери паралельно знайденому положенню променя, а перпендикулярно до неї сферу перерізають кількома площинами.

При зворотній побудові ці перерізи на фронтальній проекції сфери зобразяться еліпсами. При цьому точка  $O$  є найбільш освітленою, лінія 4 – межа власної тіні. Інтенсивність затінення отриманих ділянок поверхні, обмежених ізофотами, на рис.8.47 позначено цифрами, які, з певною мірою умовності, показують, скільки шарів фарби потрібно нанести на кожну ділянку.

Щоб побудувати ізофоти на задній поверхні обертання, її перерізають горизонтальними площинами і знаходять відповідні перерізи на сфері за допомогою дотичних конусів чи циліндрів, побудованих у перерізах тіла обертання.

Точки ізофот, інцидентні лінії перетину сфери, переносять на відповідні перерізи тіла обертання методом графічного пропорційного поділу відрізка. аналогічно будують кілька перерізів. Однойменні точки, побудовані в перерізах, сполучають плавними кривими, які і є ізофотами. Ділянки поверхні між сусідніми ізофотами на тілі обертання затіняють відповідно до аналогічних ділянок сфери – шаблону.

За допомогою сфери-шаблону можна також визначити ступінь освітленості(затінення) площини. Для цього на сфері потрібно знайти точку дотику площини, паралельної даній. Залежно від того, на якій ділянці сфери лежить точка дотику, визначається і ступінь затінення площини.

Для побудови ізофот на інших поверхнях у визначених точках будують нормалі і знаходять кути між ними і напрямом світлових променів. Залежно від цього точкам присвоюють номер тієї чи іншої ізофоти.

Інтенсивність падаючої тіні умовно можна розрахувати так: інтенсивність затінення по ізофоті, що є межею власної тіні, подвоюється. Наприклад, сфера-



рівних частин. Зворотнім обертанням точки поділу осі ( $35^\circ$ ) переносять на вісь ( $45^\circ$ ). Для цього слід провести горизонтальні лінії через точки поділу осі ( $35^\circ$ ). Через точки поділу на осі ( $35^\circ$ ) проведемо площини, які мають бути розміщеними перпендикулярно до осі. Кожна з них перетне сферу по колу, діаметр якого можна визначити. Наприклад, діаметр перерізу з центром 1 дорівнює  $KL$ . Цей діаметр ( $2R_1$ ) відкладають на перпендикулярі вже до осі ( $45^\circ$ ) у точці  $1_0$ . На основі цього будують еліпс – проекцію кола (рис.8.48,б). Тобто, проєкціювальні кола, «нанизані» на вісь ( $35^\circ$ ), що зображуються відрізками, стануть еліпсами, «нанизаними» на вісь ( $45^\circ$ ).

Аналогічно будують усі інші еліпси – ізофоти сфери. Кожній ізофоті присвоюють номер-позначку. Ізофота 4 є межею власної тіні сфери (рис.8.48,в).

**Побудова ізофот на заданій поверхні.** Точки ізофот переносять зі сфери-шаблону на поверхню, як зазначалося, за допомогою вписаних чи описаних конусів і циліндрів (рис.8.48). Наприклад, проводять, де це можливо, вертикальні дотичні до контуру поверхні обертання (тобто будують обвідні циліндри).

Розглянемо побудову точок у перерізі I. Якщо до контуру сфери-шаблону провести вертикальні дотичні, то дістанемо переріз  $BE$ , що відповідає перерізу I заданої поверхні. Точки перетину лінії  $BE$  з ізофотами на сфері слід позначити і перенести їх у переріз I методом пропорційного поділу відрізка. Аналогічно будують точки ізофот у перерізі II. У перерізі III обвідним посередником буде конус. Паралельно його лівій контурній твірній будують дотичну до сфери, що дає змогу знайти потрібний переріз. Точки ізофот, що потрапили до цього перерізу на основі пропорційного поділу відрізка, переносять на переріз III заданої поверхні.

Для уточнення форми ізофоти треба вміти будувати її найвищу та найнижчу точки. Наприклад, щоб знайти найнижчу точку  $N$  ізофоти 0, виконують зворотню побудову, а саме:

- проводять горизонтальну дотичну до ізофоти 2 на сфері, в точці її перетину з контуром сфери будують дотичну  $m$  до її контуру (твірна допоміжного конуса);
- паралельно цій твірній будують дотичну до контуру поверхні обертання і в точці дотику проводять горизонтальну пряму (переріз);
- точки з перерізу сфери переносять на переріз заданої поверхні.

Найнижча точка  $N$  ізофоти 2 залишається точкою дотику цієї ізофоти до горизонтального перерізу.

Одноїменні точки при достатній їх кількості сполучають плавною кривою. Побудовані зони відтіняють відповідно до номерів ізофот, що свідчить про інтенсивність заливки.

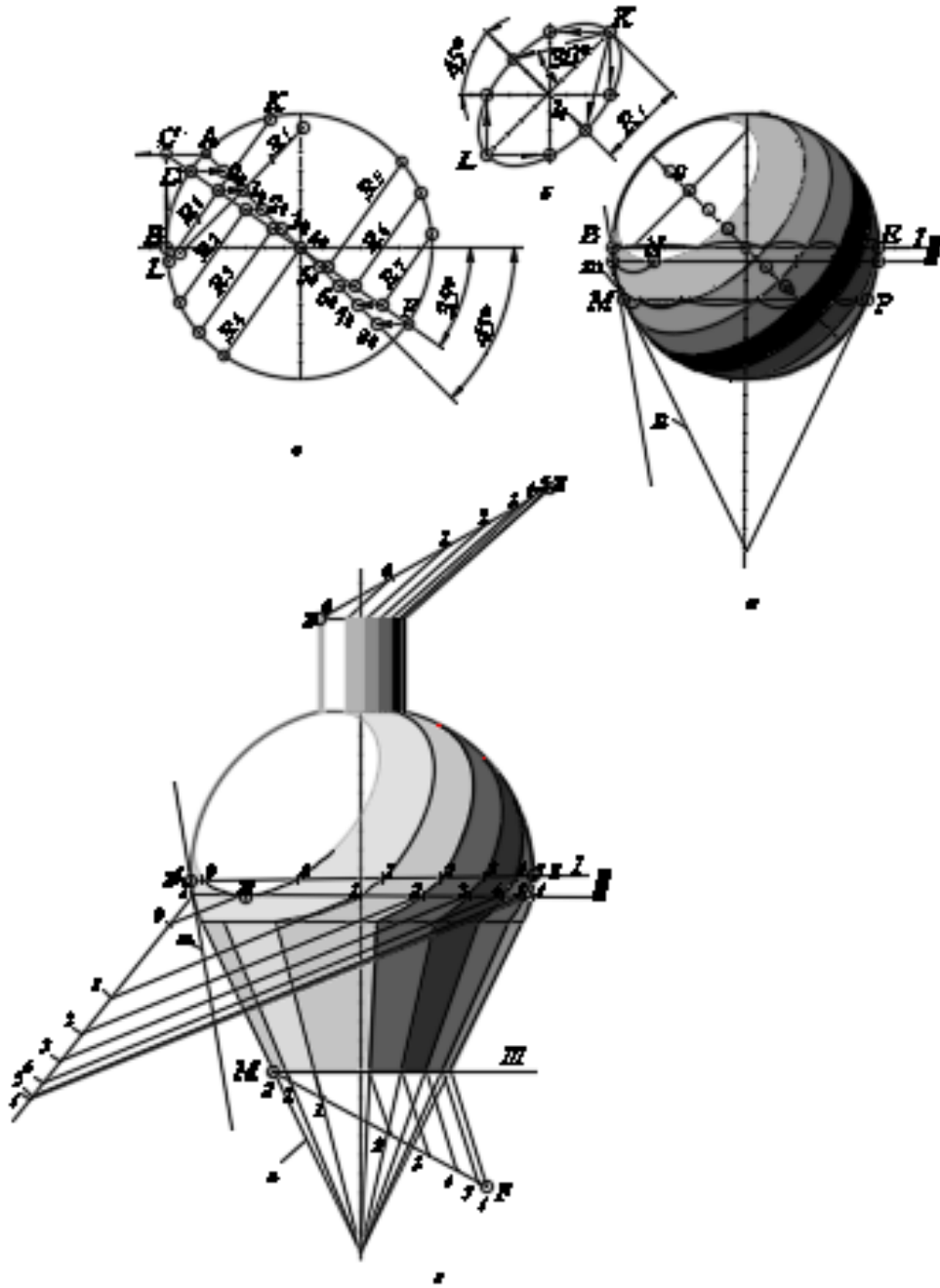


Рис.8.48

### Запитання для самоконтролю

1. Що таке світлотінь?
2. Який кут нахилу світлового променя на ортогональних проекціях?
3. Що таке падаюча тінь?
4. Яка площина називається світловою?
5. Яку поверхню як шаблон використовують при побудові ізофот на поверхнях обертання?

## Список літератури

1. *Архитектурное черчение: справочник* Д.И.Ткач, Н.Л.Русскевич, П.Р.Нириинберг, И.Н.Ткач. – К.: Будівельник, 1991. – 272 с.
2. *Бубенников А.В.* Начертательная геометрия – М.: Высш. шк., 1985. – 288 с.: ил. Верещагина Т.А. Перспектива. Тени. Проекции с числовыми отметками: учебное пособие. – Пермь: Изд-во перм. госуд. техн. ун-та, 2010. – 81 с.: ил.
3. *Иванов Г.С.* Теоретические основы начертательной геометрии: Учебное пособие. – М.: Машиностроение, 1998. – 157 с.
4. *Інженерна та комп'ютерна графіка* (Михайленко В.Є., Найдиш В.М., Підкоритов А.М., Скидан І.А. – 2-ге видання. – К.: Вища школа, 2001. – 352 с.
5. *Інженерна та комп'ютерна графіка* / В.Є.Михайленко, В.В.Ванін, С.М.Ковальов. – 3-є вид. – К.: Каравела, 2004. – 344 с.
6. *Короев Ю.И.* Начертательная геометрия: учебник / Короев Ю.И. - 3-е изд., стер. – Москва: КноРус, 2014. – 422 с.: ил.
7. *Михайленко В.Є., Ванін В.В., Ковальов С.М.* Інженерна графіка. – Львів: Новий світ – 2002. – 284 с. – 157 с.
8. *Михайленко В.Є., Євстифєєв М.Ф., Ковальов С.М., Кащенко О.В.* Нарисна геометрія. – К.: Вища школа, 2004. – 303 с.
9. *Михайленко В.Е., Ковалев С.Н., Седлецкая Н.И.* Инженерная геометрия с элементами теории параметризации – К.: УМК ВО, 1989. – 64 с.
10. *Михайленко В.Е., Найдиш В.М.* Тлумачення термінів з прикладної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки – К.: Урожай, 1998. – 197 с.
11. *Рыжов Н.Н.* Параметрическая геометрия – М.: МАДИ, 1988. – 52 с.
12. *Ковалёв С.Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. дис. ...доктора техн. наук. 05.01.01. М. : МАИ, 1986. 348с.
13. *Ботвіновська С.І., Ковальов С.М., Золотова А.В.* Геометричне моделювання поверхонь із заданими властивостями в дизайні та архітектурі. Управління розвитком складних систем Розділ «Інформаційні технології проектування». Київ : КНУБА. 2016. №. 25. С. 121– 26.

Навчальне видання

# Нарисна геометрія

**КОВАЛЬОВ** Сергій Миколайович  
**БОТВІНОВСЬКА** Світлана Іванівна  
**ГЕРМАШ** Катерина Михайлівна  
**ЗОЛотоВА** Алла Василівна  
**ЛЕВІНА** Жанетта Григорівна

Редагування та коректура

Комп'ютерне верстання *К.М.Гермаш, А.В.Золотова,*  
*С.І.Ботвіновська, Ж.Г.Левіна*

Підписано до друку р. **Формат 60x84<sub>1/8</sub>.**  
**Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різнографі.**  
**Ум. друк. арк. 18,60. Обл.-вид. арк. 20,00. Ум. фарбовідб. 161. Тираж 300**  
**прим. Вид. № 47/1. Замовлення №**

КНУБА, 03037, Київ-37, Повітрофлотський проспект, 31  
Віддруковано в редакційно-видавничому відділі  
Київського національного університету будівництва і архітектури.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів  
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.