

АЛГОРИТМ УПРАВЛІННЯ ПАРАМЕТРАМИ В'ЯЗЕЙ СІТЧАСТИХ СТРУКТУР, НА ОСНОВІ КОРЕГУВАННЯ ВЕЛИЧИН СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ЗОВНІШНІХ ВПЛИВІВ

Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна

В роботі розкривається математичний алгоритм системного управління параметрами зв'язків між вузлами сітчастих структур, що базується на поступовому комплексному приведенню показників скалярного потенціалу польових впливів, які діють на дану структуру, до заздалегідь встановлених величин.

Постановка проблеми. Математичні моделі сітчастих структур широко застосовуються при моделюванні різноманітних складних систем. До таких систем можна віднести інженерні мережі, будівельні стрижневі та вантові конструкції, а також багатокомпонентні моделі фізичних явищ та процесів, складові яких перебувають у тісному взаємозв'язку та виявляють вплив одне на одного. Окрім того, до зазначених систем належать й абстрактні математичні моделі, що носять дискретний характер та реалізуються у комп'ютерному середовищі чисельних програмних комплексів.

Моделі усіх згаданих вище систем можна об'єднати за єдиним принципом розрахунку, якщо припустити, що поточний стан такої моделі повністю визначається параметрами її вузлів, параметрами її в'язей та величиною зовнішніх впливів. Якщо мова йде про інженерні мережі, то в якості параметрів в'язей (ділянок труб або провідників) можуть виступати відношення витрати потоку до довжини ділянки трубопроводу або відношення величини струму до довжини провідника для водопроводів або електромереж відповідно. Якщо мова йде про будівельні стрижневі чи вантові конструкції, то параметрами в'язей стрижнів являються їх жорсткісні характеристики, якими є відношення абсолютної величини внутрішніх зусиль, що діють у цих стрижнях, до їхніх довжин.

Часто виникає необхідність у тому, щоб вузлові параметри сітчастої структури приймали бажані величини. Найбільш наочно така потреба може бути проілюстрована на прикладі стрижневих конструкцій, а саме покриттів просторових архітектурних споруд, поверхні яких за задумом архітектора мають приймати ті чи інші форми. В даному випадку вузловими параметрами являються координати вузлів конструкцій. При цьому, параметрами варіювання можуть виступати виключно показники жорсткості стрижнів, оскільки зовнішні навантаження є апіорно заданими (визначеними згідно норм). Іншими словами, досягнення потрібної форми може бути здійснено підбором такого розподілу внутрішніх зусиль та довжин в'язей, що задовольнятиме умові належності кожного вузла поверхні відповідній функції її форми.

Відтак, пошук шляхів підбору оптимальних параметрів в'язей сітчастих

структур з метою досягнення їх шуканих конфігурацій є актуальною й важливою задачею.

Формулювання цілей та завдання публікації. Зважаючи на вище сказане, визначимо математичний алгоритм, що даватиме змогу змінювати величини вузлових параметрів сітчастих структур та загальну конфігурацію відповідних моделей на основі регулювання величин параметрів їхніх в'язей.

Аналіз основних досліджень. Для виконання поставленої мети, скористаємося математичною моделлю, що описує стан статичної рівноваги просторової стрижневої конструкції. Дана модель передбачає складання системи рівнянь рівноваги кожного вузла конструкції шляхом їх вирізання з подальшою заміною відсічених в'язей векторами внутрішніх зусиль [1]. Зазначені в'язі представляють собою прямолінійні відрізки (стрижні) із заданими фізико-механічними властивостями. Якщо задатися умовою, що жорсткісні параметри стрижнів є константами, заданими у вихідних умовах, то система рівнянь рівноваги набуває вигляду, яка відповідає статико-геометричному методу формування дискретних образів. Даний метод є дуже ефективним у задачах формоутворення, оскільки дає змогу визначати координати вузлів стрижневих конструкцій за наперед заданими умовами їх роботи та вузовими навантаженнями. У роботі [2] було продемонстровано принципи побудови параметричних рівнянь стану в'язей сітчастих структур. У поєднанні з рівняннями статичної рівноваги вузлів сітчастої структури параметричні рівняння утворюють систему, невідомі якої включають і координати вузлів моделі, і параметри стану (жорсткості) її в'язей. Слід зазначити, що дана система включає у себе й достатньо параметрів варіювання, якими є векторні та скалярні характеристики діючих на вузли моделі польових структур, а також крайові умови.

Основна частина. В даній роботі в якості параметра варіювання розглядатимемо скалярний потенціал поля зовнішнього впливу на вузли сітчастої структури. В першу чергу визначимося з послідовністю операцій, необхідних для досягнення необхідного поточного стану сітчастої структури. Ця послідовність має включати наступні кроки:

1. Складання системи рівнянь рівноваги вузлів сітчастої структури.
2. Виконання розрахунку поточних вузлових величин сітчастої структури за наближено заданими початковими умовами (до яких відносяться початкові значення зовнішніх навантажень та параметри жорсткості в'язей) та вихідними умовами.
3. Складання параметричних рівнянь в'язей сітчастої структури.
4. Визначення поточних величин скалярних потенціалів полів зовнішніх впливів.
5. Визначення констант інтегрування з параметричних рівнянь в'язей при поточних значеннях вузлових параметрів моделі (координат вузлів та скалярних потенціалів).
6. Розв'язання системи параметричних рівнянь відносно параметрів жорсткості з попередньою заміною значень поточного потенціалу на показники потенціалу, що відповідають бажаним, та з урахуванням раніше розрахованих

величин констант інтегрування.

7. Підстановка одержаних параметрів жорсткості до системи рівноваги вузлів сітчастої структури з подальшим розв'язанням цієї системи відносно вузлових величин сітчастої структури.

8. Повторення операцій 3 – 7 доти, доки не буде досягнуто встановленого рівня абсолютних або відносних похибок числення.

Тут в якості абсолютних похибок можуть виступати модулі різниць показників скалярних потенціалів, параметрів жорсткості або координат вузлів моделі на поточному та попередньому кроці розрахунку.

Запишемо сформульовану вище послідовність операцій у математичній постановці. Для цього спершу розглянемо рівняння рівноваги деякого i -го вузла сітчастої структури, що сполучається з n іншими вільними вузлами:

$$\sum_{j=1}^n (s_j - s_i) \cdot \aleph_{i,j} + \mathfrak{Z}_{si} = 0, \quad (1)$$

де s – узагальнене позначення координат вузлів; $\aleph_{ij}$ – параметр жорсткості в'язі, що сполучає i -й та j -й вузли; $\mathfrak{Z}_{si}$ – позначення проекцій вектора зовнішнього впливу в i -му вузлі моделі.

Система рівнянь рівноваги типу (1), складена для усіх k вузлів моделі, у матричній формі матиме вигляд:

$$[\aleph] \cdot [s] + [g] + [\mathfrak{Z}] = 0. \quad (2)$$

Тут: $[s]$ – матриця координат (розмірністю $k \times 3$), що має таку форму:

$$[s] = [X \quad Y \quad Z], \quad (3)$$

де $\{X\}$, $\{Y\}$ та $\{Z\}$ – вектор-стовпці координат вузлів, що мають вид:

$$\{X\}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_k], \quad (4)$$

$$\{Y\}^T = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_k], \quad (5)$$

$$\{Z\}^T = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_k]; \quad (6)$$

$[g]$ – матриця крайових умов (розмірністю $k \times 3$), елементи якої представляють собою суми добутків координат базових вузлів та відповідних (за топологічною схемою) параметрів жорсткості моделі, що має наступну форму:

$$[g] = [g_x \quad g_y \quad g_z], \quad (7)$$

де $\{g_x\}$, $\{g_y\}$ та $\{g_z\}$ – вектор-стовпці крайових умов, що мають вид:

$$\{g_x\}^T = \left[\sum_{i=1}^L x_i \cdot \aleph_{1,i} \quad \sum_{i=1}^M x_i \cdot \aleph_{2,i} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^N x_i \cdot \aleph_{k,i} \right], \quad (8)$$

$$\{g_y\}^T = \left[\sum_{i=1}^L y_i \cdot \aleph_{1,i} \quad \sum_{i=1}^M y_i \cdot \aleph_{2,i} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^N y_i \cdot \aleph_{k,i} \right], \quad (9)$$

$$\{g_z\}^T = \left[\sum_{i=1}^L z_i \cdot \aleph_{1,i} \quad \sum_{i=1}^M z_i \cdot \aleph_{2,i} \quad \dots \quad \sum_{i=1}^N z_i \cdot \aleph_{k,i} \right], \quad (10)$$

$[\mathfrak{Z}]$ – матриця зовнішніх впливів (розмірністю $k \times 3$), що діють на вузли моделі,

яка має таку форму:

$$[\mathfrak{Z}] = [\mathfrak{Z}_x \quad \mathfrak{Z}_y \quad \mathfrak{Z}_z], \quad (11)$$

де $\{\mathfrak{Z}_x\}$, $\{\mathfrak{Z}_y\}$ та $\{\mathfrak{Z}_z\}$ – вектор-стовпці компонентів зовнішніх впливів, що мають вид:

$$\{\mathfrak{Z}_x\}^T = [\mathfrak{Z}_{x_1} \quad \mathfrak{Z}_{x_2} \quad \dots \quad \mathfrak{Z}_{x_k}], \quad (12)$$

$$\{\mathfrak{Z}_y\}^T = [\mathfrak{Z}_{y_1} \quad \mathfrak{Z}_{y_2} \quad \dots \quad \mathfrak{Z}_{y_k}], \quad (13)$$

$$\{\mathfrak{Z}_z\}^T = [\mathfrak{Z}_{z_1} \quad \mathfrak{Z}_{z_2} \quad \dots \quad \mathfrak{Z}_{z_k}]; \quad (14)$$

$[\aleph]$ – матриця параметрів жорсткості стрижневої структури (розмірністю $k \times k$), діагональні елементи якої містять від’ємні суми параметрів жорсткості в’язей інцедентних тим вузлам моделі, для яких складені відповідні рівняння (відповідно до топології), а інші елементи – вміщують або параметри жорсткості в’язей, які з’єднують відповідні індексам вузли із вузлами, що відповідають діагональним елементам у даній строці, або нулі (операцію «або» позначатимемо символом « $\vee$ »); така матриця має наступну форму:

$$[\aleph] = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^P \aleph_{1,i} & \aleph_{1,2} \vee 0 & \dots & \aleph_{1,k} \vee 0 \\ \aleph_{2,1} \vee 0 & -\sum_{i=1}^Q \aleph_{2,i} & \dots & \aleph_{2,k} \vee 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \aleph_{k,1} \vee 0 & \aleph_{k,2} \vee 0 & \dots & -\sum_{i=1}^R \aleph_{k,i} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Розглянемо тепер найпростіше за формою запису [2] параметричне рівняння в’язі $S_a S_b$, що сполучає незафіксовані a -й та b -й вузли стрижневої структури та перебуває у стані статичної рівноваги під дією зовнішніх зусиль $\bar{\mathfrak{Z}}_a$ та $\bar{\mathfrak{Z}}_b$ відповідно. Дане рівняння матиме наступний вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \delta_{a,i}^2 \cdot \aleph_{a,i} + \chi \cdot \delta_{a,b}^2 \cdot \aleph_{a,b} + \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{b,j}^2 \cdot \aleph_{b,j} - (\varphi_a + \varphi_b) + B_{a,b} = 0, \quad (16)$$

$$\text{де:} \quad \aleph_{i,j} = R_{i,j} / \delta_{i,j}. \quad (17)$$

Тут: $\delta_{i,j}$, $R_{i,j}$ та $\aleph_{i,j}$ – довжина в’язі між i -м та j -м вузлами, абсолютна величина зусилля у ній та параметр її жорсткості; $\mathfrak{Z}_{x_i}$, $\mathfrak{Z}_{y_i}$ та $\mathfrak{Z}_{z_i}$ – проекції вектора поля впливу в i -му вузлі; φ_i – функція скалярного потенціалу векторного поля впливу в i -му вузлі; m та n – кількість вузлів суміжних із a -м та b -м вузлами відповідно; $B_{i,j}$ – константа, що є сумарним результатом операцій інтегрування рівнянь типу (1) та заміни діагональних елементів матриці коефіцієнтів системи параметричних рівнянь типу (16) на відмінні від $2 \cdot \delta_{i,j}^2$ елементи типу $\chi \cdot \delta_{i,j}^2$ [2]; χ – деяке невід’ємне число.

Система параметричних рівнянь типу (16), складена для усіх h вузлів моделі у матричній формі матиме вигляд:

$$[\delta^2] \cdot \{\aleph\} - \{\phi\} + \{B\} = 0. \quad (18)$$

Тут: $\{\aleph\}$ – вектор-стовпець параметрів жорсткості сітчастої структури, що має наступний вигляд:

$$\{\aleph\}^T = [\aleph_{a,b_1} \quad \aleph_{a,b_2} \quad \dots \quad \aleph_{a,b_h}]; \quad (19)$$

$\{\phi\}$ – вектор-стовпець вузлових показників скалярного потенціалу, що має такий вигляд:

$$\{\phi\}^T = [\phi_{a_1} + \phi_{b_1} \quad \phi_{a_2} + \phi_{b_2} \quad \dots \quad \phi_{a_h} + \phi_{b_h}]; \quad (20)$$

$\{B\}$ – вектор-стовпець операційних констант, який має наступний вид:

$$\{B\}^T = [B_{a,b_1} \quad B_{a,b_2} \quad \dots \quad B_{a,b_h}]; \quad (21)$$

$[\delta^2]$ – матриця геометричних параметрів стрижневої структури (розмірністю $h \times h$), діагональні елементи якої містять добутки констант χ та квадратів довжин в'язей, для яких складене рівняння, що відповідає конкретній строці матриці, а інші елементи – вміщують або квадрати довжин в'язей, що відповідають за індексами даним ячейкам цієї матриці, або нулі; така матриця має наступну форму:

$$[\delta^2] = \begin{bmatrix} \chi \cdot \delta_{a,b_{1,1}}^2 & \delta_{a,b_{1,2}}^2 \vee 0 & \dots & \delta_{a,b_{1,h}}^2 \vee 0 \\ \delta_{a,b_{2,1}}^2 \vee 0 & \chi \cdot \delta_{a,b_{2,2}}^2 & \dots & \delta_{a,b_{2,h}}^2 \vee 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{a,b_{h,1}}^2 \vee 0 & \delta_{a,b_{h,2}}^2 \vee 0 & \dots & \chi \cdot \delta_{a,b_{h,h}}^2 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Виходячи з умови, що поточні значення координат вузлів моделі визначаються на основі показників жорсткості стрижнів, які були розраховані на попередньому кроці числення, перепишемо рівняння (2) із використанням індексації за послідовністю дій. Якщо поточній операції призначити індекс p то попередній відповідатиме індекс $p-1$. Отримаємо:

$$[\aleph^{p-1}] \cdot [s^p] + [g^{p-1}] + [\Im^p] = 0. \quad (23)$$

Запишемо тепер систему параметричних рівнянь (18) на попередньому етапі числення:

$$[(\delta^{p-1})^2] \cdot \{\aleph^{p-1}\} - \{\phi^{p-1}\} + \{B^{p-1}\} = 0. \quad (24)$$

У відповідності до 6-го пункту сформульованого на початку алгоритму, константи інтегрування $B_{i,j}$ на поточному етапі розрахунку залишаються аналогічними до їх величин на попередньому етапі. Відтак, можемо записати наступну тотожність:

$$\{B^p\} = \{B^{p-1}\} = \{\phi^{p-1}\} - [(\delta^{p-1})^2] \cdot \{\aleph^{p-1}\}. \quad (25)$$

Зважаючи на те, що процес оптимізації на поточному кроці числення передбачає заміну вектора потенціалу $\{\phi^p\}$ на деяку встановлену поточну його величину $\{\phi'^p\}$, перепишемо рівняння (18) із урахуванням даної заміни та з підстановкою вектора констант $\{B^p\}$:

$$\left[(\delta^p)^2\right] \cdot \{\aleph^p\} - (\{\varphi^p\} - \{\varphi^p\} + \{\varphi'^p\}) + \{\varphi^{p-1}\} - \left[(\delta^{p-1})^2\right] \cdot \{\aleph^{p-1}\} = 0. \quad (26)$$

А враховуючи те, що розрахункові вектори потенціалу та довжини стрижнів на поточному та попередньому кроках числення не змінюються (тобто: $\{\varphi^p\} = \{\varphi^{p-1}\}$ і $[(\delta^p)^2] = [(\delta^{p-1})^2]$, так як розрахунок координат вузлів, потенціалів та корекція параметрів жорсткості стрижнів здійснюються в межах одного циклу оптимізації, хоч і на різних етапах числення), перепишемо останнє рівняння наступним чином:

$$\left[(\delta^p)^2\right] \cdot \{\aleph^p\} - \{\varphi'^p\} + \{\varphi^p\} - \left[(\delta^p)^2\right] \cdot \{\aleph^{p-1}\} = 0. \quad (27)$$

З останньої рівності можна виразити поточну величину корегованого вектор-стовпця параметрів жорсткості в'язей сітчастої структури $\{\aleph^p\}$:

$$\{\aleph^p\} = \left[(\delta^p)^2\right]^{-1} \cdot (\{\varphi'^p\} - \{\varphi^p\} + \left[(\delta^p)^2\right] \cdot \{\aleph^{p-1}\}). \quad (28)$$

Вираз (28) дає можливість визначити системно кореговані величини параметрів жорсткості в'язей сітчастої структури шляхом поетапних наближень. Одержані величини у відповідності до 7-го пункту алгоритму оптимізації підставляються до системи (23). При цьому необхідно розуміти, що в більшості випадків розв'язання даної системи вимагатиме проміжного ітераційного числення, оскільки елементи матриці зовнішніх впливів $[\aleph]$ носять в основному нелінійний характер. Все це призводить до того, що процес поетапного надання сітчастій структурі очікуваної форми вимагає циклічного ітераційного числення, де кожен цикл представляє собою послідовне розв'язання системи (23) з подальшим уточненням вектора $\{\aleph\}$ на основі тотожності (28). У матричній формі кожен цикл уточнення має такий вид:

$$\begin{cases} [s^p] = [\aleph^{p-1}]^{-1} \cdot (-[g^{p-1}] - [\aleph^p]), \\ \{\aleph^p\} = \left[(\delta^p)^2\right]^{-1} \cdot (\{\varphi'^p\} - \{\varphi^p\} + \left[(\delta^p)^2\right] \cdot \{\aleph^{p-1}\}). \end{cases} \quad (29)$$

Фактично дана система повністю ілюструє пункти 1 – 7 алгоритму управління вузовими та в'язевими параметрами сітчастої структури довільної топологічної конфігурації.

Що ж стосується абсолютних чи відносних (%) розрахункових похибок моделювання, то оцінка їх величини на кожному кроці числення має здійснюватися шляхом порівняння максимального зі значень цих похибок із наперед встановленими сталими h або ε відповідно:

$$\vartheta_u = \max(|u^p - u^{p-1}|) \leq h, \quad (30)$$

$$\sigma_u = \max(|u^p - u^{p-1}| / |u^{p-1}|) \cdot 100\% \leq \varepsilon. \quad (31)$$

де u – узагальнене позначення параметрів, що оцінюються.

Якщо параметрів, які необхідно оцінити два і більше, то допустимим є аналіз середньоквадратичних і середньоарифметичних похибок серед максимальних абсолютних чи відносних.

Висновки. Запропонований підхід до управління параметрами сітчастих

структур може бути успішно застосований не лише при формоутворенні покриттів та оболонок об'єктів архітектури, але й при аналізі ізоповерхонь багатьох польових структур, що є проявами різних фізичних явищ та процесів, а також при оптимізації параметрів багатокомпонентних інженерних систем, взаємодія елементів яких може бути зображена у формі орієнтованого чи неорієнтованого графів.

Література

1. *Рабинович И. М.* Курс строительной механики стержневых систем. Часть 2. Статически неопределимые системы. Издание 2-е. перераб. / *И. М. Рабинович.* – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 548 с., ил.

2. *Скочко В. І.* Рівняння параметрів стану та положення в'язей сітчастих структур / *В. І. Скочко, Л. О. Скочко* // Основи і фундаменти. – К. : КНУБА, 2013. – Вип. 34. – с 47-57.

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРАМИ СВЯЗЕЙ СЕТЧАТЫХ СТРУКТУР НА ОСНОВЕ КОРРЕКТИРОВКИ ВЕЛИЧИН СКАЛЯРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

В. А . Плоский, В. И. Скочко

В работе раскрыто математический алгоритм системного управления параметрами связей между узлами сетчатых структур, основывающийся на поэтапном комплексном приведении показателей скалярного потенциала полевых воздействий, действующих на данную структуру, к установленным величинам.

ALGORITHM OF MESHWORK'S COMMUNICATIONS CONTROLLING BASED ON ADJUSTMENT OF THE SCALAR POTENTIAL OF EXTERNAL INFLUENCES

V. Ploskiy, V. Skochko

This article describes the mathematical algorithm of system control of communications parameters between network structure's nodes. The algorithm is based on the stepwise harmonization of values of the scalar potential fields, which are acting on this structure, to set values.