УДК 539.3

Кобієв В.Г., канд. техн. наук

МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ОБОЛОНОК ПРИ ІМПУЛЬСНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ З ВИСОКИМ РІВНЕМ ЕНЕРГІЇ

Розглядаються динамічні процеси високошвидкісного деформування оболонок обертання з довільним обрисом меридіану [1] під дією імпульсних навантажень з високим рівнем енергії. Відмітною рисою таких імпульсивних навантажень є високий рівень напружень в матеріалі, діючих за короткий проміжок часу (до $3{,}5\ 10^{-3}$ с) та визначающих високу швидкість деформування ($\varepsilon \approx 10^3$ 1/с) [1], [2]. Основні характеристики процесу навантажень подані у таблиці 1.

Таблиця 1

Тиск	Па	$1x10^6$	$100x10^6$
Швидкість напору	м/с	40	200
Час дії	с	$0{,}7x10^{-3}$	$3{,}5x10^{-3}$
Щільність енергії	Дж/м^2	$28x10^3$	$70x10^6$

Процеси імпульсного навантаження та деформування оболонок у такий спосіб характерізуються наявністю фазових переходів від одного стану матеріалу до деякого іншого. Імпульсне навантаження великої інтенсивності приводить до появи та розвитку пластичних деформацій та супроводжується значними змінами геометрії самих оболонок. При моделюванні таких процесів, які відносяться до класу несталих, треба ураховувати ефекти як фізичної, так і геометричної нелінійності.

Постановка задачі та вихідні співвідношення. У роботі розглядаються процеси пружно-пластичного деформування оболонкових конструкції у осесиметричній постановці при умовах жорсткого закріплення країв оболонок.

Опис кінематики руху і деформування оболонок ведеться в просторових, в загальному випадку криволінійних системах координат [3].

© Кобієв В.Г.

Рух оболонки визначається по відношенню до інерціальної системи відліку, за яку приймається циліндрична система координат у тривимірному просторі [1].

Просторова метрика описується фундаментальним метричним тензором

$$\hat{G} = g_{i'j'}\vec{e}^{\,i'}\vec{e}^{\,j'}, \tag{1}$$

де $e^{k'}$ – базисні вектори системи $z_{k'}$, (i, j, k)=1, 2, 3; $g_{i'j'}$ – коваріантні компоненти:

$$\left[g_{i'j'}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & r^2\end{bmatrix},$$

r – радіальна координата точок оболонки.

Для розгляду деформованого стану використовується супроводжуюча (лагранжева) криволінійна система координат, яка нерозривно зв'язана з частками середовища і деформується разом з ним. Перехід координат з глобального базису у місцевий реалізується за відомими формулами перетворення

$$\hat{C} = C_i^{k'}\vec{e}^{\,i}\vec{e}_{k'}, \tag{2}$$

де

$$\left[C_i^{k'}\right]=\begin{bmatrix}z_{,1}^{1'} & z_{,1}^{2'} & 0\\ z_{,2}^{1'} & z_{,2}^{2'} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad z_{,i}^{k'} = \frac{\partial z^{k'}}{\partial x^i}. \tag{3}$$

Метрика простору у цій системі координат характеризується метричним тензором $\hat{g}$ з компонентами:

$$g_{\alpha\beta} = C_\alpha^{\gamma'} \cdot C_\beta^{\gamma'}; \quad g_{33} = z_{2'} \cdot z_{2'}; \quad (\alpha,\beta,\gamma)=1,2. \tag{4}$$

Динамічне навантаження враховується тензором швидкостей деформацій, який зв'язаний з градієнтом швидкості переміщень [4]

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha \dot{u}_\beta + \nabla_\beta \dot{u}_\alpha\right); \quad \dot{\varepsilon}_{33} = \nabla_3 \dot{u}_3; \quad \dot{u}_\gamma = \frac{du_\gamma}{dt}, \tag{5}$$

$$\nabla_i \dot{u}_j = \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x^i} - \dot{u}_k \Gamma_{ij}^k; \quad (i,j,k=1,2,3). \tag{6}$$

Основним припущенням, що приймається для опису деформацій, є положення, що за достатньо малий проміжок часу поточні деформації, які виникають у тілі, змінюються на нескінченно малу величину, а повні деформації дорівнюють сумі отриманих таким чином деформацій

$$\Delta\varepsilon_{ij} \to d\varepsilon_{ij} \text{ при } \Delta t \to dt;\ \varepsilon_{ij} = \overset{*}{\varepsilon}_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij}. \tag{7}$$

Нескінченно малі прирости таких деформацій по суті представляють собою компоненти тензора нескінченно малих деформацій, що відповідають переміщенню елемента за малий проміжок часу

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} \cdot \Delta t. \tag{8}$$

Враховуючи, що вказані прирости деформацій розраховуються для даного (миттєвого) стану тіла, а поточна система координат є "вмороженою" в елементарний об'єм тіла, прийняте допущення дозволяє застосовувати поняття тензора нескінченно малих деформацій для опису великих деформацій. Останнє отримується шляхом накопичення нескінченно малих приростів деформацій [4]. Це положення визначає геометричну основу прийнятої моделі деформування.

Співвідношення (5), які записуються через швидкості переміщень в інерціальній системі, мають вигляд:

$$\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(C^{\gamma'}_{\beta}\dot{u}_{\gamma',\alpha} + C^{\gamma'}_{\alpha}\dot{u}_{\gamma',\beta}\right),\ \ \dot{\varepsilon}_{33} = -\dot{u}_{2'}C^{3'}_{3}\cdot C^{3'}_{3}\Gamma^{2}_{3'3'} = \dot{u}_{2'}z^{2'}\ . \tag{9}$$

У випадку пружного ізотропного середовища компоненти тензора напружень визначаємо за законом Гука [3]

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{10}$$

де C^{ijkl} - компоненти тензора пружностей, що дорівнюють

$$C^{ijkl} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}\left(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}\right) + \frac{\nu}{1-2\nu}g^{ij}g^{kl}\right], \tag{11}$$

де E – модуль пружності, ν - коефіцієнт Пуассона.

Компоненти σ^{ij} представляються у вигляді суми двох складових

$$\sigma^{ij} = \sigma g^{ij} + S^{ij}, \tag{12}$$

де перший доданок є кульовою частиною тензора напружень, а другий – девіатор напружень.

При цьому гідростатичний тиск σ у точці середовища, що розглядається, визначається формулою

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma^{kj} g_{kj} . \qquad (13)$$

Властивості девіатора напружень S^{ij} характеризуються рівнянням поверхні, що проходить через початок координат, утвореної головними напруженнями σ_i, та рівнонахилену до осей

$$S_i^i = S^{ij} g_{ij} = 0 . \qquad (14)$$

В пластичній області поведінка матеріалу підкоряється асоційованому закону течії з ізотропним зміцненням [5]. За вихідні положення прийняте:

1) Тіло оболонки ізотропне.
2) Повні прирости складових тензора деформацій $d\varepsilon_{ij}$ дорівнюють сумі пружних $d\varepsilon_{ij}^{(e)}$ та пластичних $d\varepsilon_{ij}^{(p)}$ деформацій:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{(e)} + d\varepsilon_{ij}^{(p)} . \qquad (15)$$

3) Пластична зміна об’єму відсутня

$$d\varepsilon_i^{i(p)} = 0 , \qquad (16)$$

тобто відносна зміна об’єму і середнє напруження зв’язані поміж собою залежністю, як і при пружній деформації:

$$d\theta = d\sigma / \mathrm{K} , \qquad (17)$$

де $\mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{E}}{[3-(1-2\nu)]}$ - об’ємний модуль пружності.

4) Зона пружних деформацій обмежена поверхнею навантаження у дев’ятивимірному просторі навантажень, рівняння якої в загальному випадку має вигляд:

$$f\left(\breve{S}^{ij}, \varepsilon_{ij}^{(p)}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \chi\right) = 0 , \qquad (18)$$

де $\breve{S}^{ij}$ - компоненти девіатора активних напружень; χ - параметр зміцнення.

5) Прирости пластичних деформацій повністю визначаються компонентами активних напружень

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = d\lambda \cdot \breve{S}^{ij} , \qquad (19)$$

де $d\lambda$ – скалярний множник, який залежить від історії навантаження та швидкості деформування у даній точці середовища оболонки:

$$\breve{S}^{ij} = S^{ij} - a^{ij}, \tag{20}$$

де a^{ij} – компоненти тензора мікронапружень.

Наведені рівняння дозволяють описувати процеси пружно-пластичного деформування твердих тіл з траекторіями навантаження малої та середньої кривизни.

Математичні моделі пружно-пластичного середовища. Щодо вибору закону стану слід зауважити, що для матеріалу з ізотропним та трансляційним зміцненням рівняння поверхні (18), що асоціюється з енергетичною умовою течії Мізеса [5] , приймає вигляд

$$f = S^{ij} S_{ij} - \frac{2}{3}\sigma_{(s)}\sigma_{(s)}, \tag{21}$$

де $\sigma_{(s)}$ - гранична інтенсивність напружень.

У деяких дослідженнях [6], [7], існують передумови щодо функціональних залежностей при урахуванні впливу швидкості деформацій, які мають наступний вигляд

$$\sigma_{(s)} = \sigma_{(s)}\left(\chi, \dot{\varepsilon}_{ij}\right); \quad \chi = \sqrt{\frac{2}{3}}\int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\varepsilon}^{ij(p)} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)}}\, dt\,. \tag{22}$$

Якщо прийняти за вихідне це положення, то можна встановити співвідношення між приростами компонентів тензорів напружень та деформацій з урахуванням залежностей (22).

При пластичному деформуванні зображуюча точка у просторі тензора напружень повинна залишатися на поверхні навантаження. Враховуючи залежність рівняння поверхні навантаженння від величин, що входять у (22), цю умову можна записати у формі рівності

$$df = \frac{\partial f}{\partial S^{ij}} dS^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} d\chi = 0\,. \tag{23}$$

Для рівняння поверхні навантаження (21) умова (23) приймає вигляд:

$$S_{ij} dS^{ij} = \frac{2}{3}\sigma_{(s)}\left(\frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \chi} d\chi\right). \tag{24}$$

Використовуючи закон Гука у приростах

$$dS^{ij} = C^{ijkl} d\varepsilon_{kl}^{(e)}, \tag{25}$$

виключимо dS^{ij} з (24). Для цього, виходячі із співвідношень (15), виразимо прирости компонентів тензора пружних деформацій через прирости повних та пластичних деформацій та підставимо у (25). Тоді

$$dS^{ij} = C^{ijkl} d\varepsilon_{kl} - C^{ijkl} d\varepsilon_{kl}^{(p)}. \tag{26}$$

Підставляючи (26) у (24), отримуємо такий вираз

$$S_{ij} C^{ijkl} d\varepsilon_{kl} - S_{ij} C^{ijkl} d\varepsilon_{kl}^{(p)} = \frac{2}{3}\sigma_{(s)}\left(\frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} d\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \chi} d\chi\right). \tag{27}$$

З урахуванням (19) вираз для параметра χ приймає вигляд:

$$d\chi = \frac{2}{3}\sigma_{(s)} d\lambda. \tag{28}$$

Перетворимо рівність (27) з урахуванням (19) та (28), тоді отримуємо:

$$S_{ij} C^{ijkl} d\varepsilon_{kl} - S_{ij} S_{kl} C^{ijkl} d\lambda = \frac{2}{3}\sigma_{(s)}\left(\frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{2}{3}\sigma_{(s)} \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \chi} d\lambda\right). \tag{29}$$

Звідси одержуємо співвідношення для скалярного множника:

$$d\lambda = \frac{1}{\gamma}\left(S_{ij} C^{ijkl} d\varepsilon_{kl} + R^{ij} d\varepsilon_{ij}\right), \tag{30}$$

де

$$\gamma = S_{ij} S_{kl} C^{ijkl} + \left(\frac{2}{3}\sigma_{(s)}\right)^2 \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \chi}; \quad R^{ij} = -\frac{2}{3}\sigma_{(s)} \frac{\partial \sigma_{(s)}}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} \quad . \tag{31}$$

Зв'язок між приростами девіатора напружень тензора повних напружень та приростом тензора повних деформацій можна встановити із (26), передчасно замінив $d\varepsilon_{ij}^{(p)}$ його значенням через (19) та використовуючи формулу (30). У результаті знаходимо:

$$dS^{ij} = \left(C^{ijkl} - \frac{1}{\gamma} r^{ij} r^{kl}\right) d\varepsilon_{kl} - \frac{1}{\gamma} r^{ij} R^{kl} d\varepsilon_{kl}, \tag{32}$$

де $r^{ij} = C^{ijkl} S_{kl}$, $r^{kl} = C^{klmn} S_{mn}$.

Рівняння (32) повністю визначає зв'язок між приростами компонентів тензора деформацій та приростами компонентів тензора напружень в пружно-пластичному середовищі з урахуванням історії навантаження і залежності процесу деформування від швидкості деформацій.

Перший доданок у (32) можна трактувати як приріст напружень, що був визваний приростом повних деформацій, а другий – як приріст напружень, що був визваний зміною швидкості деформацій, тобто

$$dS^{ij} = dS^{ij}_{(\varepsilon)} + dS^{ij}_{(\dot{\varepsilon})}, \tag{33}$$

де $dS^{ij}_{(\varepsilon)} = C^{ijkl}_{(e)} \cdot d\varepsilon_{kl}$, або $dS^{ij}_{(\dot{\varepsilon})} = \frac{1}{\gamma} r^{ij} R^{kl} d\dot{\varepsilon}_{kl}$.

У теорії динамічного навантаження оболонок фізичні моделі течії, на жаль, поки що мало застосовуються.

Щодо аналізу кривих текучості [7] σ-ε застосовують лише , як правило, емпірічні методи, які не враховують механізм зміцнення – знеміцнення матеріалу. Тут σ - миттєва границя текучості або опір деформації; ε - справжня (логарифмічна) деформація.

При динамічному навантаженні металевих оболонкових конструкцій, що розглядаються у даній роботі, вигляд кривих зміцнення при, так би мовити, в умовах "теплої" деформації [2], коли метал руйнується раніше, ніж на кривих σ-ε досягається область стійкої течії, звично описуються рівняння виду:

$$\sigma_s = \sigma_e + k\varepsilon^n, \tag{34}$$

де σ_e - границя пружності; k та n - константи даного матеріалу, що залежні від умов деформацій. Тобто приймається ізотропне зміцнення із степеневим законом.

Для процесів динамічного навантаження, що розглядаються у даній роботі, довірчий інтервал цих коефіцієнтів лежить у межах [6]:

$$37{,}4 \le k \le 43{,}3; \quad 0{,}118 \le n \le 0{,}177.$$

Опис напружено-деформованого стану окремої оболонки, яка вільно деформується або взаємодіє з жорсткими перегородами [8], здійснюється на основі інтегрального варіаційного принципу Гамільтона [9], що забезпечує критерій істинного руху, віднесеного до скінченного інтервалу часу. Використання цього принципу приводить до наступного варіаційного рівняння руху

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(W-K)\cdot dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta\mathrm{A}\cdot dt\,, \tag{35}$$

де δ - знак варіації; W - робота деформації; K - робота інерційних сил; A - робота зовнішніх сил.

Умовами можливості інтегрування рівняння (35) є умови нерозривності в лагранжевому поданні $\rho dV=\rho_0 dV_0$.

За параметр процесу деформування, що варіюється, приймають переміщення окремих точок середовища оболонки. В результаті цього складники виразу (35) отримують вигляд

$$\begin{aligned}\delta W &= \frac{1}{2}\int_V \hat{\sigma}\cdot\cdot\delta\hat{\varepsilon}\,dV\;;\\ \delta\mathrm{K} &= \int_V \rho\cdot\ddot{z}\,\delta\overline{u}\,dV\;;\\ \delta\mathrm{A} &= \int_V\left(\overline{F}\delta\overline{u}\right)dV+\int_S\left(\overline{P}\delta\overline{u}\right)dS\,.\end{aligned} \tag{36}$$

Початкові та граничні умови: $z\,(0)=z_0$, $\sigma\,(0)=\sigma_0$, $\varepsilon\,(0)=\varepsilon_0$, $z\,(0)=z_0$, $\rho\,(0)=\rho_0$, $u\,(0)=0$, где $z\,(z^1, z^2, z^3)$ – координати точок оболонки; u – вектор переміщень; $z=dz/dt$; $z=d^2z/d^2t$; ρ – густина середовища в тілі оболонки; σ, ε – тензор напружень і деформацій.

За розрахункову математичну модель процесів, що розглядаються, приймається дискретна модель процесу динамічного деформування пружно-пластичних тіл. Під цим розуміється процедура дискретизації розв'язуючих рівнянь (36) за просторовими змінними і наступне інтегрування цих рівнянь по скінченних інтервалах часу. Просторова дискретизация здійснюється шляхом використання варіаційно-різницевого методу і модифікованого методу скінченних елементів – моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) [9]. Інтегрування дискретних рівнянь руху, які отримані за допомогою цих методів, здійснюється за допомогою явної різницевої схеми наскрізної лічби, сталість якої забезпечується вибором кроку в часі за умовою Куранта [10]

$$\Delta t<k\left[l_{\min}/v\right],$$

де l_{min} –мінімальний лінійний розмір елемента, v – швидкість звуку у середовищі.

Інтеграл по часу для кожного елемента подається у вигляді суми інтегралів по M інтервалах часу Δt_n, що приводить до такого виразу

$$\delta\Gamma = \sum_{n=1}^{M}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}(W-K)dt - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\delta A dt\right] = 0\,. \tag{37}$$

Із припущення, що проміжки Δt_n для тіла, що розглядається є достатньо малими, інтеграли, які входять у вираз (37), замінюються їх значенням в центрах цих проміжків:

$$\delta T = \sum_{n=1}^{M} \delta T_n \Delta t_n \ , \tag{38}$$

де $\delta\Gamma_n = \delta(W_n - \mathrm{K}_n) - \delta\mathrm{A}_n = 0$.

Водночас дискретизація за об'ємом середовища оболонки за допомогою моментної схеми скінченних елементів (число скінченних елементів дорівнює κ) для δW_n приводить до виразу

$$\delta W_n = \sum_{N=1}^{k} \delta W_n^N \ , \tag{39}$$

$$\delta W_n^N = \int_{V_n} \left(\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}\delta\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \tilde{\sigma}_{33}\delta\tilde{\varepsilon}_{33}\right) dV_n^N \ , \tag{40}$$

при

$$\delta\tilde{\varepsilon}_{ij} = \delta\left(\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)} + \tilde{\dot{\varepsilon}}_{ij}^{(n+1)} \cdot \Delta t\right) = \Delta t \cdot \delta\tilde{\dot{\varepsilon}}_{ij}^{(n+1)}, \tag{41}$$

$$\delta W_n^N = \Delta t \int_{V_n} \left(\tilde{\sigma}^{\alpha\beta}\delta\tilde{\dot{\varepsilon}}_{\alpha\beta} + \tilde{\sigma}^{33}\delta\tilde{\dot{\varepsilon}}_{33}\right)_{(n)} dV_{(n)}^N, \tag{42}$$

де знак $\tilde{}$ над відповідною величиною означає її фізичні компоненти.

При будові дискретної моделі досліджуваної області прийнято скінченний елемент з полілінійним розподіленням розв'язуючих функцій в його межах:

$$\dot{u}_{\alpha'} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} \dot{u}_{\alpha'}^{(S_1 S_2)} \prod_{\delta=1}^{2}\left(S_{(\delta)}x^{(\delta)} + \frac{1}{2}\right),$$

де $S_{(\delta)}$ – відносні координати вершин скінченного елемента; $x^{(\delta)}$ – місцеві координати його вершин.

Дискретизація співвідношень (36) по об'єму середовища оболонки, зокрема за допомогою МССЕ, варіаційно-різницевого методу та звичайної схеми МСЕ, з наступною підстановкою в рівняння і подальшим

його інтегруванням приводить до системи звичайних диференціальних рівнянь руху:

$$[M]\{\ddot{u}\}^{(n)} + \{R\}^{(n)} - \{Q\}^{(n)} = 0\,, \tag{43}$$

де $[M]$-матриця мас; $\{\ddot{u}\}^{(n)}$; $\{R\}^{(n)}$; $\{Q\}^{(n)}$-матриці-стовпці векторів вузлових прискорень, внутрішніх та зовнішніх сил відповідно.

Із розв'язання системи (43), який отримується за допомогою чисельних методів прямого інтегрування по явній кінцево-різницевій схемі [10] з урахуванням граничних умов по відомих $\{R\}^{(n)}$ та $\{Q\}^{(n)}$, знаходять значення прискорень $\{\ddot{u}\}^{(n)}$ на кожному інтервалі часу Δt_n, після чого використовуються рекурентні співвідношення:

$$\begin{aligned} \dot{u}^{\alpha'(n+1)} &= \dot{u}^{\alpha'(n)} + \ddot{u}^{\alpha'(n)} \cdot \Delta t_{(n)}; \\ z^{\alpha'(n+1)} &= z^{\alpha'(n)} + \dot{u}^{\alpha'(n)} \cdot \Delta t_{(n)}. \end{aligned} \tag{44}$$

Рекурентні співвідношення (44) дозволяють визначити значення швидкостей переміщень і координати вузлів дискретної моделі в кожний момент часу Δt_{n+1} процесу деформування.

Алгоритм визначення напружено-деформованого стану оболонки на поточному часовому шарі полягає у тому, що на будь-якому поточному проміжку часу $[\Delta t_n,\ \Delta t_{n+1}]$ при визначенні параметрів напружено-деформованого стану оболонки виконується наступне.

Для кожного скінченного елемента дискретної моделі у базовій системі координат послідовно обчислюються:

1) Метричні характеристики J-го скінченного елемента в конфігурації, що відповідає моменту часу t_n, та матриця мас;

2) Вузлові компоненти вектора зовнішніх зусиль $Q_{(n+1)}$, котрі залежать від параметра інтенсивності навантаження $q_{(n+1)}$ та метрики $M_{(n)}$;

3) Вузлові компоненти вектора внутрішніх зусиль $R_{(n+1)}$, що відповідають накопиченим напруженням;

4) Компоненти вектора вузлових прискорень $u_{(n)}$.

Визначення повних напружень та пластичних деформацій виконується на кроці обчислення вузлових реакцій $R_{(n+1)}$. Тут для кожного скінченного елемента на відрізку часу , що належить до часового інтервалу $[\Delta t_n\ ,\ \Delta t_{n+1}]$, обчислюються:

1) Тензор швидкості деформацій – $\hat{\dot{\varepsilon}}^{(n)} = f\left(\overline{\dot{u}}^{(n)}, \hat{g}^{(n)}\right)$.

2) Приріст тензора напружень – $\Delta \overset{\wedge}{\sigma}^{(n+1)} = \left(\overset{\wedge}{\underset{4}{C}} \cdot\cdot \overset{\wedge}{\dot{\varepsilon}} \right) \cdot \Delta t$.

3) Накопичені повні напруження – $\overset{\wedge}{\overset{*}{\sigma}}^{(n+1)} = \overset{\wedge}{\sigma}^{(n)} + \Delta \overset{\wedge}{\sigma}^{(n+1)}$

4) Кульова частина тензора повних напружень – $\overset{\wedge}{\sigma_V}^{(n+1)} = \frac{1}{3} \sigma^{(n+1)} \hat{g}^{(n)}$.

5) Девіатор тензора напружень – $\overset{\wedge}{\overset{*}{S}}^{(n+1)} = \overset{\wedge}{\overset{*}{\sigma}}^{(n+1)} - \overset{\wedge}{\sigma_V}^{(n+1)}$.

6) У разі роботи матеріалу скінченного елемента у пластичній стадії проводиться коректировка девіатора напружень у відповідності до прийнятого закону стану.

Потім на основі різниці між величинами $S^{(n)}$ і $S^{(n+1)}$ девіатора тензора напружень визначаються прирости пластичних деформацій та накопичені до моменту часу Δt_n пластичні деформації

$$\overset{\wedge}{\Delta \varepsilon}^{(p)}_{(n+1)} \Rightarrow \overset{\wedge}{\overset{*}{S'}}^{(n+1)} - \hat{S}^{(n+1)} \; ; \quad \overset{\wedge}{\varepsilon}^{(p)}_{(n+1)} = \overset{\wedge}{\varepsilon}^{(p)}_{(n)} + \overset{\wedge}{\Delta \varepsilon}^{(p)}_{(n+1)} .$$

Повні напруження знаходять як суму кульової частини тензора повних напружень і девіатора тензора напружень

$$\overset{\wedge}{\sigma}^{(n+1)} = \overset{\wedge}{\sigma_V}^{(n+1)} + \hat{S}^{(n+1)} .$$

Повні вузлові прискорення знаходять шляхом визначення суми внесків до прискорень $u^{(n+1)}$ від скінченних елементів, що примикають до J-го вузла. Після цього здійснюється цикл по всіх вузлах сіткової області, у результаті якого обчислюються та аналізуються компоненти вектора швидкості переміщень u та нової кординати Z. У випадках, коли процес руху обмежений будь-якою жорсткою перегородою, одержані координати та компоненти швидкості переміщень коректуються з урахуванням граничних умов, що задаються. Після визначення вказаних вище характеристик здійснюється перерахунок геометричних параметрів дискретної моделі та перехід до нової метрики, чим досягається урахування геометричної нелінійності задачі.

Представлена методика моделювання нестаціонарних процесів пружно-пластичного геометрично нелінійного деформування оболонок при імпульсних навантаженнях з високим рівнем енергії реалізована у вигляді комплексу структурованих обчислювальних блоків, написаних на алгоритмічній мові Фортран.

Для ілюстрації методики подається приклад формоутворення фланцу із трубчастої деталі у вигляді циліндричної оболонки при дії зовнішнього навантаження з тиском 80 МПа на часовому інтервалі 100 мкс. Вихідні дані та розрахункова схема наведені на рис. 1, сіткова область оболонки за методом МССЕ представлена на рис. 2, процес формоутворення поданий на рис. 3. Розподіл головних напружень у тілі оболонки на проміжній стадії її деформування показаний на рис. 4.

Рис. 1. Вихідні дані та розрахункова схема

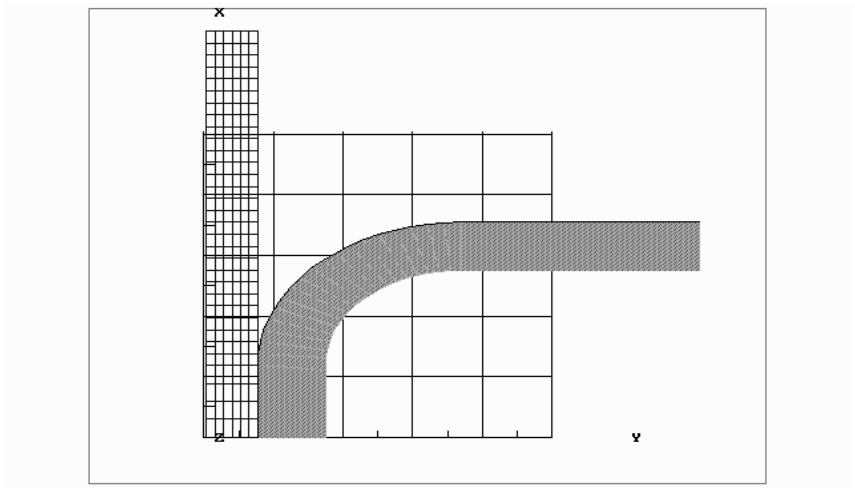

Рис. 2. Сіткова область оболонки за методом МССЕ

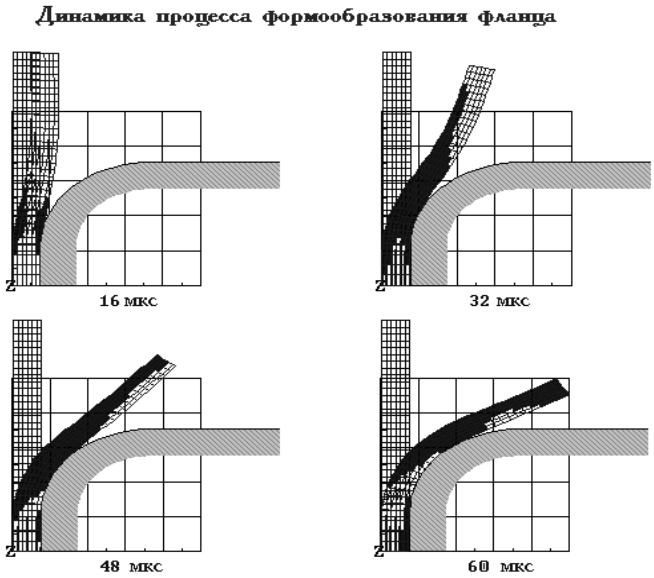

Рис. 3. Динаміка процесу пружно-пластичного деформування

Рис. 4. Розподіл головних напружень в тілі оболонки

1. *Кобієв В.Г., Костира Н.О.* Нестаціонарне пружно-пластичне деформування оболонок при імпульсних впливах з високою щільністю енергії. Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, вип. 69, 2001. - С. 86-95.
2. Упруго-пластическое деформирование и разрушение материалов при импульсном нагружении /Степанов Г.В.; отв. ред. Лебедев А.А.; АН УССР. Ин-т проблем прочности. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с.
3. *Блох В.И.* Теория упругости. - Харьков, ХГУ, 1964 г.
4. *Работнов Ю.Н.* Маханика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 772 с.
5. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. 2-е изд. перераб. и допол. –М.: Наука, 1969. – 420 с.
6. Скоростное деформирование элементов конструкций./ Воробьев Ю.С., Колодяжный А.В. и др. Ин-т пробл. машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1989. - С. 51-63, 90-92, 98-103, 130-143, 165-172.
7. *Филиппов А.П.* Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. – Киев: Наук. думка, 1978 г. – 183 с.
8. *Кислоокий В.Н., Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в контактных задачах динамики упругопластичных тел. – В кн.: Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будивельник, 1983, вып. 42. – С. 11-17.
9. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. –М.: Мир, 1965. – 408 с.
10. *Бате К., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.

Надійшла до редколегії 18.11.2005 р.